## KAPITOLA 2

## OPIS DISKRÉTNYCH SYSTÉMOV VO FREKVENČNEJ OBLASTI

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali opis diskrétnych systémov pomocou diferenčnej rovnice, pomocou konvolúcie vstupného signálu s impulzovou charakteristikou, čo bolo určené predovšetkým pre modelovanie v časovej oblasti. Opis týchto systémov vo frekvenčnej oblasti je z hľadiska systémových vlastností ďaleko dôležitejší, pretože umožňuje iný pohľad na ne. V teórii analógových systémov dôležitými nástrojmi sú integrálne transformácie , napr. Laplaceova a Fourierova. Týmto transformáciam v diskrétnej oblasti zodpovedá transformácia $Z$ a diskrétna Fourierova transformácia (DFT). Ich význam oceníme pri analýze diskrétnych signálov, ale aj systémov, pretože umožňujú zjednodušenie výpočtov systémových charakteristík.

### 2.1 Transformácia $Z$

#### 2.1.1 Definícia transformácie $Z$

Majme postupnosť $\mathbf{x}(n)$, ktorá môže predstavovať diskrétny signál. Transformácia $Z$ tohoto signálu je definovaná

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \tag{2.1}$$

kde $z$ je komplexná premenná.

V prípade kauzálneho signálu $\mathbf{x}(n)$, t.j. ak $x(n) = 0$ pre všetky $n \langle 0$ môžeme rov.(2.1) prepísať do tvaru

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \tag{2.2}$$

Táto definícia predpokladá signál neobmedzenej dĺžky. Rov.(2.2) je vlastne súčtom radu, preto je samozrejmé, že transformácia $Z$ existuje iba ak existuje oblasť konvergencie tohoto radu.

Transformáciu signálu konečnej dĺžky $N$ môžeme vyjadriť rovnicou

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, z^{-n} \tag{2.3}$$

Formálne môžeme definíciu transformácie $Z$ opísanú v uvedených rovniciach napísať

$X(z) = Z\{x(n)\}$.

Analyzujme oblasť konvergencie výrazu (2.1). Pre jednoduchosť vyjadrime komplexnú premennú $z$ v polárnych súradniciach

$$z = R.e^{j\varphi} \tag{2.4}$$

kde $R = |z|$

$\varphi = \arg\{z\}$

Potom vzťah (2.1) môžeme prepísať do tvaru:

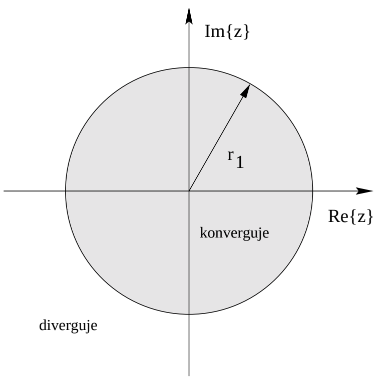
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, R^{-n}\, e^{-jn\varphi} \tag{2.5}$$

Zistime oblasť konvergencie tejto postupnosti, teda oblasť, kde pre všetky $z$ platí $|X(z)| < \infty$ . Vyjadrime $|X(z)|$

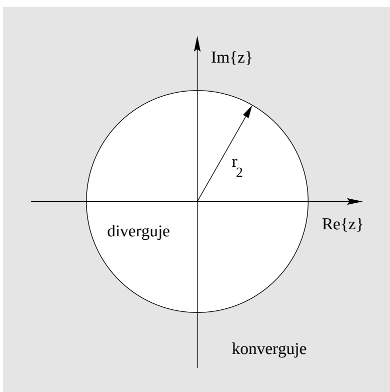
$$|X(z)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\, R^{-n}\, e^{-jn\varphi}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\, R^{-n}\right| \tag{2.6}$$

Tento súčet môžeme rozpísať do dvoch súm

$$|X(z)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left|x(n) \cdot R^{-n}\right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x(n)}{R^{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|x(-n) \cdot R^{n}\right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x(n)}{R^{n}}\right| \tag{2.7}$$




a) oblasť konvergencie $\sum_{n=1}^{\infty} |x(-n).R^{n}|$




b) oblasť konvergencie $\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(n)}{R^{n}}\right|$

Obr.2.1 *Oblasť konvergencie* $|X(z)|$

Ak $X(z)$ má konvergovať na oblasti, ktorá je vymedzená nerovnosťou
$1 \le n < \infty$
musia existovať také hodnoty $R$, pre ktoré vzťah (2.7) má konečnú hodnotu.

Prvý súčtový člen rov.(2.7) bude konvergovať pre $R \langle r_1$ a súčasne $1 \le n < \infty$ . ( obr.2.1a)

Druhý súčtový člen vo vzťahu (2.7) bude mať oblasť konvergencie pre všetky $R \rangle r_2$ a pre všetky $0 \le n < \infty$ .( obr.2.1b)

$X(z)$ vyjadrená vzťahom (2.7) bude konvergovať pre všetky $R$, pre ktoré konvergujú súčasne oba členy súčtu, t.j. $X(z)$ bude konvergovať pre oblasť, ktorá je vymedzená polomermi

$$r_2 < R < r_1 \qquad (2.8)$$

Príklad 2.1

### 2.1.2 Definícia inverznej transformácie *Z*

Ak poznáme obraz postupnosti $\mathbf{x}(n)$ v rovine $z$, t.j. $X(z)$, spätnou transformáciou $Z$ môžeme určiť samotnú postupnosť. Pri všeobecnom výpočte spätnej transformácie $Z$ využívame Cauchyho integrálnu vetu.[11] Potom definícia inverznej transformácie $Z$ je:
Nech $X(z)$ je funkcia regulárna v oblasti $|z| > R$. Potom existuje jediná postupnosť $\mathbf{x}(n)$ a to

$$\mathbf{x}(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{n-1}\, \mathrm{d}z \qquad (2.15)$$

kde $C$ je oblasť integrácie a je daná $z = r_1 e^{j\varphi}$ kde $r_1 \rangle R$ a $0 \le \varphi \le 2\pi$ .

Zo vzťahu (2.15) je zrejmé, že vyjadrenie postupnosti zo známeho obrazu v rovine $z$ je pomerne komplikované. Najjednoduchšie je využiť tabuľku (Tab.2.1), ktorá obsahuje vybrané postupnosti a ich transformáciu $Z$, poprípade zložitejšie obrazy rozložiť na čiastkové obrazy, ktoré sa nachádzajú v tabuľkách. Samozrejme, že najjednoduchšie rozloženie je v tvare súčtu, pretože aj výsledná postupnosť je daná súčtom čiastkových postupností. Ak však rozložíme obraz na súčin čiastkových obrazov, výsledná postupnosť vzniká konvolučným súčinom čiastkových postupností.

Tab.2.1 Transformácia Z vybraných postupností

### 2.1.3 Vlastnosti transformácie $Z$

$Z$ hľadiska praktického využívania transformácie $Z$, je dôležité poznať jej základné vlastnosti.

**Linearita**

Ak $Z\{x_1(n)\} = X_1(z)$ a $Z\{x_2(n)\} = X_2(z)$
potom ak
$$\mathbf{x}(n) = a_1\mathbf{x}_1(n) + a_2\mathbf{x}_2(n) \tag{2.16a}$$
platí
$$X(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \tag{2.16b}$$

pre všetky konštanty $a_1, a_2$.

**Posunutie signálu v časovej oblasti o $k$ taktov**

Ak $Z\{\mathbf{x}(n)\} = X(z)$

potom pre signál, ktorý je posunutý o $k$ taktov platí

$$Z\{\mathbf{x}(n-k)\} = z^{-k} \cdot X(z) \tag{2.17}$$

**Podobnosť**

Ak $Z\{\mathbf{x}(n)\} = X(z)$ a oblasť konvergencie je $r_1 < R < r_2$
potom
$$Z\{a^n\mathbf{x}(n)\} = X(\tfrac{z}{a}) \tag{2.18}$$

a oblasť konvergencie je $|a|r_1 \le R \le |a|r_2$, kde a je reálna, alebo komplexná konštanta.

**Derivácia obrazu postupnosti**

Ak $Z\{\mathbf{x}(n)\} = X(z)$
potom
$$Z\{n.\mathbf{x}(n)\} = -z.\frac{dX(z)}{dz} \tag{2.19}$$

**Konvolúcia**

Ak $Z\{\mathbf{x}_1(n)\} = X_1(z)$ a $Z\{\mathbf{x}_2(n)\} = X_2(z)$

potom pre signál $\mathbf{x}(n)$, ktorý dostaneme konvolúciou:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}_1(n) * \mathbf{x}_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_1(k) \cdot \mathbf{x}_2(n-k)$$
platí:
$$Z\{\mathbf{x}(n)\} = X_1(z).X_2(z)\cdot \tag{2.20}$$

## Korelácia

Ak $Z\{\mathbf{x}_1(n)\} = X_1(z)$ a $Z\{\mathbf{x}_2(n)\} = X_2(z)$

potom korelácia signálov $\mathbf{x}_1(n)$ a $\mathbf{x}_2(n)$ je:

$$l_{x_1x_2}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_1(n) \cdot \mathbf{x}_2(n-k) \tag{2.21a}$$

a platí:

$$Z\{l_{x_1x_2}(k)\} = L_{x_1x_2}(z) = X_1(z) \cdot X_2(z^{-1}) \tag{2.21b}$$

## Súčin dvoch postupností

Ak $Z\{\mathbf{x}_1(n)\} = X_1(z)$, $Z\{\mathbf{x}_2(n)\} = X_2(z)$ a
$\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}_1(n).\mathbf{x}_2(n)$

potom

$$Z\{\mathbf{x}(n)\} = X(z) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C \mathbf{x}_1(\nu) \cdot \mathbf{x}_2\left(\frac{z}{\nu}\right) \nu^{-1}\, \mathrm{d}\nu \tag{2.22}$$

kde $C$ je oblasť integrácie, ktorá je totožná s oblasťou, kde konverguje postupnosť $\mathbf{x}_1(n)$ a súčasne aj postupnosť $\mathbf{x}_2(n)$.