1.3. Opis činnosti LDKI systému

1.3.1 Diferenčná rovnica

Lineárna diskrétna sústava N-tého rádu na ktorej vstup privedieme vstupný signál $x(n)$ a na jej výstupe máme výstupný signál $y(n)$, je opísaná lineárnou diferenčnou rovnicou N-tého rádu s pravou stranou a konštantnými koeficientami a_k, b_k v tvare:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k) \qquad (1.13)$$

Táto rovnica nielenže opisuje diskrétny systém, ale zároveň je vyjadrením činnosti tejto sústavy. Pre jednotlivé $n = 0, 1, 2, \ldots$ hľadáme riešenie podľa toho, ktorý taktovací interval máme na mysli a tým získame výstupný signál. Rov.(1.13) opisuje všeobecnú lineárnu diskrétnu sústavu rekurzívneho typu. Aktuálne vzorky výstupného signálu sú lineárnou kombináciou váhovaných vzoriek vstupného, aj výstupného signálu. Špeciálny prípad je diferenčná rovnica v tvare:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) \qquad (1.14)$$

ktorá opisuje činnosť diskrétnej sústavy nerekurzívneho typu, tzv. transverzálnej sústavy. Ako vidíme, v tomto prípade výstupný signál závisí iba od N vzoriek vstupného signálu, nie je závislý od predchádzajúcich vzoriek výstupného signálu.

Príklad

1.1 Diferenčná rovnica opisuje činnosť sústavy v každom takte. Ukážeme si to na diskrétnej sústave druhého rádu, ktorá má reálne koeficienty a_0, a_1, a_2, b_1, b_2. Diferenčná rovnica má tvar:

$$y(n) = a_0 \cdot x(n) + a_1 \cdot x(n-1) + a_2 \cdot x(n-2) - b_1 \cdot y(n-1) - b_2 \cdot y(n-2)$$

(1.15)

Ak na vstup privedieme signál $x(n)$, vypočítame odpoveď sústavy $y(n)$. Pre zjednodušenie práce zapíšeme rov.(1.15) do maticového tvaru

$$y(n) = [a_0, a_1, a_2] \cdot \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ x(n-2) \end{bmatrix} - [b_1, b_2] \cdot \begin{bmatrix} y(n-1) \\ y(n-2) \end{bmatrix} \qquad (1.16)$$

V tomto zápise pre rôzne hodnoty $n = 0, 1, 2, \ldots$ budú sa meniť iba prvky v stĺpcových maticiach a budú sa posúvať zhora nadol. Výstupný signál má tvar:

$$
\begin{aligned}
y(0) &= a_0 \cdot x(0) \\
y(1) &= a_0 \cdot x(1) + a_1 \cdot x(0) - b_1 \cdot y(0) \\
y(2) &= a_0 \cdot x(2) + a_1 \cdot x(1) + a_2 \cdot x(0) - b_1 \cdot y(1) - b_2 \cdot y(0) \\
y(3) &= \vdots
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Vypočítame odpoveď tejto sústavy na jednotkový (Kroneckerov) impulz rov.(1.2). Táto odpoveď je známa ako systémová charakteristika - impulzová charakteristika $h(n)$ systému. Samozrejme, že naše úvahy platia pre systém kauzálny. Vychádzame z predpokladu nulových začiatočných podmienok

$$x(-1) = x(-2) = y(-1) = y(-2) = 0$$

Odpoveď je:

$$
\begin{aligned}
y(0) &= h(0) = a_0 \\
y(1) &= h(1) = b_1 a_0 - a_1 \\
y(2) &= h(2) = a_2 - b_1 \cdot (a_1 - b_1 a_0) - b_2 a_0 \\
y(3) &= h(3) = -b_1 \cdot h(2) - b_2 \cdot h(1) = \\
&= -b_1\left(a_2 - b_1 a_1 + b_1^2 a_0 - b_2 a_0\right) - b_2(a_1 - b_1 a_0)
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Z príkladu vidíme, že vstupný signál prestáva mať vplyv na výstupný signál v takte $n = 3$. Na vstup sa nedostáva vstupný signál a odpoveď od tohoto taktu predstavuje vlastné kmity sústavy.

Tak dostávame impulzovú charakteristiku, ktorá má neobmedzenú dĺžku. Takéto sústavy nazývame sústavami s neobmedzenou, alebo tiež nekonečnou impulzovou charakteristikou, známe tiež ako IIR sústavy (Infinite Impulse Response). Ak sa pozrieme na diferenčnú rovnicu, vidíme, že vlastné kmity sústavy súvisia priamo s hodnotami koeficientov b_k. Sústavy, ktorých diferenčná rovnica obsahuje aj koeficienty b_k, sú sústavy rekurzívne. V prípade, že tieto koeficienty sú nulové, impulzová charakteristika je konečná a jej dĺžka je určená počtom koeficientov a_k. t.j. pri sústave N-tého rádu bude mať dĺžku $N+1$. Sústavy opísané diferenčnou rovnicou bez spätnej väzby nazývajú sa transverzálnymi sústavami, alebo tiež sústavami s konečnou impulzovou charakteristikou, resp.FIR (Finite Impulse Response).