

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

ELEKTROTECHNICKÁ FAKULTA

Ing. Peter FARKAŠ, CSc.

KÓDOVANIE A MODULÁCIE

1993

| | |
|--|-------|
| KNIŽNICA Elektrotechnickej fakulty STU V BRATISLAVE | |
| Prir. č. <i>S-35439</i> | Sign. |
| DT | |
| DT | |

Kniznica FEI STU Bratislava
284ES21222



© Ing. Peter Ferkaš, CSc.

Lektori: Ing. Radoslav Pořízek, CSc.
RNDr. Peter Krajčí, CSc.

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Edičnom stredisku STU,
Bratislava, nám. Slobody 17.

Za odbornú náplň tohto vydania zodpovedá doc. Ing. Pavol Podhradský, CSc.,
vedúci Katedry telekomunikácií EF STU.

Schválilo vedenie Elektrotechnickej fakulty STU, rozhodnutie č. 23.8/91
zo dňa 17.9.1991, pre študijný odbor: Informatika, zameranie : Telekomuni-
kácie.

ISBN 80-227-0513-6

0
1
1.
1.
1.
2
2.
2.
2.
2.
3
3.
3.
3.
3.
3.
3.
3.
3.
3.
4
4.
4.
4.
4
4
4
4
4
4
4
4
4
4

O B S A H

| | | |
|---------|---|----|
| 1 | Úvod | 8 |
| 1.1 | Princíp činnosti číslicového systému | 8 |
| 1.2 | Klasifikácia kódov pre zdroj a kanál | 10 |
| 1.3 | Klasifikácia číslicových modulácií | 12 |
| 2 | Základné pojmy z teórie informácií | 13 |
| 2.1 | Diskrétny zdroj | 14 |
| 2.2 | Spojité zdroj | 15 |
| 2.3 | Kapacita kanála | 16 |
| 2.3.1 | Kapacita Gaussovho kanála | 16 |
| 3 | Kódovanie zdroja | 18 |
| 3.1 | Kompresné kódovanie | 18 |
| 3.1.1 | Skalárne kvantovanie | 21 |
| 3.1.2 | Vektorové kvantovanie | 22 |
| 3.1.3 | Mriežkové kódy pre kompresiu | 23 |
| 3.1.4 | Parametrické metódy kompresie | 24 |
| 3.2 | Kompakčné kódy | 24 |
| 3.2.1 | Huffmanov kód | 25 |
| 3.2.2 | Univerzálne kódy pre kompakciu | 28 |
| 4 | Modulácia | 30 |
| 4.1 | Prenos v základnom pásme | 30 |
| 4.1.1 | Binárne signály pre základné pásmo | 31 |
| 4.1.2 | Detekcia binárnych symbolov pri Gaussovom šume | 36 |
| 4.1.3 | Pravdepodobnosť chyby v binárnom prípade | 39 |
| 4.1.4 | Spriahnutý filter | 40 |
| 4.1.5 | Náhrada spriahnutého filtra korelátorom | 43 |
| 4.1.6 | Aplikácia spriahnutého filtra | 43 |
| 4.1.7 | M-árne signály pre základné pásmo | 44 |
| 4.1.8 | Medzisymbolová interferencia | 46 |
| 4.1.9 | PR signalizácie | 49 |
| 4.2 | Prenos v preloženom pásme alebo číslicová modulácia | 52 |
| 4.2.1 | Úvod do číslicovej modulácie | 52 |
| 4.2.1.1 | Účel modulácie | 52 |
| 4.2.1.2 | Zovšeobecnená Fourierova transformácia | 52 |
| 4.2.1.3 | Šum ako vektor | 5 |

| | | | |
|-------------|---|-----|-----|
| 4.2.1.4 | Disperzia bieleho šumu | 57 | 4.2 |
| - 4.2.2. | Základné typy číslicovej modulácie pre preložené pásmo | | 4.2 |
| 4.2.2.1 | Klasifikácia podľa spôsobu demodulácie | 58 | 4.2 |
| 4.2.2.2 | PSK | 60 | 4.2 |
| 4.2.2.3 | FSK | 61 | s P |
| 4.2.2.4 | ASK | 61 | 4.2 |
| 4.2.2.5 | APK | 62 | s P |
| - 4.2.3 | Detekcia signálov za prítomnosti gaussovského šumu | | 4.2 |
| 4.2.3.1 | Rozhodovacie oblasti | 63 | 4.2 |
| 4.2.3.2 | Príjem pomocou korelačného prijímača | 65 | |
| 4.2.3.3 | Binárna rozhodovacia úroveň | 69 | |
| 4.2.3.4 | Koherentná detekcia | | 5 |
| 4.2.3.4.1 | Koherentná detekcia PSK | 70 | 5.1 |
| 4.2.3.4.2 | Koherentná detekcia signálov MPSK | 72 | 5.1 |
| 4.2.3.4.3 | Koherentná detekcia FSK | 77 | 5.1 |
| 4.2.3.5 | Nekoherentná detekcia | | 5. |
| 4.2.3.5.1 | Detekcia diferenciálnej PSK | 79 | 5. |
| 4.2.3.5.2 | Nekoherentná detekcia FSK | 83 | 5. |
| 4.2.3.5.2.1 | Minimálne intervaly medzi frekvenciami pri nekoherentnej ortogonálnej FSK modulácii | 88 | 5. |
| - 4.2.4 | Odolnosť proti chybám pre binárne systémy modulácie | 89 | 5. |
| 4.2.4.1 | Pravdepodobnosť chyby symbolu pre koherentne detekovanú BPSK | 89 | 5. |
| 4.2.4.2 | Základný parameter SNR pre číslicový komunikačný systém | 94 | 5. |
| 4.2.4.3 | Pravdepodobnosť chyby na bit pre koherentne detekovanú DPSK | 96 | 5. |
| 4.2.4.4 | Pravdepodobnosť chyby na bit pre koherentne detekovanú moduláciu FSK | 97 | 5 |
| 4.2.4.5 | Pravdepodobnosť chyby na bit pre nekoherentne detekovanú moduláciu FSK | 98 | 5 |
| 4.2.4.6 | Pravdepodobnosť chyby na bit pri DPSK | 102 | 5 |
| 4.2.4.7 | Porovnanie P_B pre rôzne typy modulácie | 105 | 5 |
| - 4.2.5. | M-stavové modulácie a ich odolnosť proti chybám | | 5 |
| 4.2.5.1 | Ideálna pravdepodobnosť bitovej chyby | 106 | 5 |
| 4.2.5.2 | M-stavová modulácia | 107 | 5 |
| 4.2.5.3 | Vektorové znázornenie modulácie MPSK | 109 | 5 |
| 4.2.5.4 | BPSK a QPSK majú rovnakú pravdepodobnosť chyby | 111 | 5 |
| 4.2.5.5 | Vektorové znázornenie MFSK modulácie | 113 | 5 |

| | | | |
|---------|-----------|--|-----|
| 57 | 4.2.5.3 | Pravdepodobnosť chyby symbolu pre M-stavové modulácie | |
| pásmo | 4.2.5.6.1 | Pravdepodobnosť chyby symbolu pre MPSK | 117 |
| 58 | 4.2.5.6.2 | Pravdepodobnosť symbolu pre MFSK | 118 |
| 60 | 4.2.5.7 | Pravdepodobnosť chyby na bit v porovnaní | |
| 61 | | s pravdepodobnosťou chyby symbolu | 121 |
| 61 | 4.2.5.8 | Pravdepodobnosť chyby na bit v porovnaní | |
| 62 | | s pravdepodobnosťou chyby symbolu pre viacstavovú fázovú moduláciu | 123 |
| o sumu | | | 123 |
| 63 | 4.2.6 | Vplyv medzisymbolovej interferencie | 124 |
| 65 | 4.2.7 | Záver k moduláciám | 124 |
| 69 | 5 | Kódovanie pre kanál | 125 |
| 70 | 5.1 | Kódovanie signálov | 125 |
| 72 | 5.1.1 | Antipodálne a ortogonálne signály | 125 |
| 77 | 5.1.2 | Kódovanie a M-stavová modulácia | 127 |
| | 5.1.3 | Kódovanie signálov pri korelačnej detekcii | 127 |
| 79 | 5.1.4 | Ortogonálne kódy | 131 |
| 83 | 5.1.5 | Biortogonálne kódy | 134 |
| pri | 5.1.6 | Transortogonálne kódy - simplexné kódy | 137 |
| 88 | 5.2 | Kódy pre prenos | |
| ie | 5.2.1 | Samoopravné kódy | 138 |
| 89 | 5.2.1.1.1 | Blokové kódy | 138 |
| skovanú | 5.2.1.1.2 | Príklady jednoduchých (n, k) kódov | 139 |
| 89 | 5.2.1.1.3 | Zisk kódovania | 139 |
| system | 5.2.1.1.4 | Lineárne blokové kódy | 140 |
| 94 | 5.2.1.1.5 | Dekódovanie lineárnych blokových kódov | 145 |
| skovanú | 5.2.1.1.6 | Cyklické lineárne blokové kódy | 147 |
| 96 | 5.2.1.1.7 | Hammingove kódy | 151 |
| skovanú | 5.2.1.1.8 | Binárne BCH kódy | 152 |
| 97 | 5.2.1.1.9 | Reedove - Solomonove kódy | 154 |
| kovanú | 5.2.1.2 | Stromové kódy | 160 |
| 98 | 5.2.1.2.1 | Konvolučné kódy | 161 |
| 102 | 5.2.1.2.2 | Ilustrácia rôznych spôsobov opisu konvolučných kódov | 171 |
| 105 | | | 171 |
| 106 | 5.2.1.2.3 | Dekódovanie konvolučných kódov | |
| 107 | 5.2.1.2.4 | ML dekodovanie | 173 |
| 109 | 5.2.1.2.5 | Gaussov kanál | 177 |
| 111 | 5.2.1.2.6 | Viterbiho algoritmus | 178 |
| 113 | 5.2.1.2.7 | Sekvenčné dekodovanie | 179 |
| | 5.2.1.2.8 | Dekódovanie metódou porovnávania | 180 |

| | | | |
|-----------|---|-----|------------|
| 5.2.2 | Translačné kódy | 182 | |
| 5.2.2.1 | Empiricky zostrojené translačné kódy | 182 | 6.1 |
| 5.2.2.1.1 | Najznámejšie translačné kódy používané v telekomunikáciách | 182 | N-r 6.1 |
| 5.2.2.1.2 | Záver k empirickým translačným kódom | 189 | 6.1 |
| 5.2.2.2 | Základy teórie translačných kódov | 189 | 6.1 |
| 5.2.2.2.1 | Diskrétny bezsumový kanál | 190 | 6.1 |
| 5.2.2.2.2 | Stavové diagramy a mriežky | 191 | 6.1 |
| 5.2.2.2.3 | Kapacita diskretného bezsumového kanála s obmedzením | 197 | 6.1 Lit |
| 5.2.2.2.4 | Blokové translačné kódy | 199 | |
| 5.2.2.2.5 | Prefixné translačné kódy | 205 | |
| 6 | Kodulácia | | |
| 6.1 | Parametre dôležité pri výbere kódu a modulácie | 206 | |
| 6.2 | Rovina pravdepodobnosti chyby | 207 | |
| 6.3 | Nyquistova minimálna šírka pásma | 209 | |
| 6.4 | Shannonova - Hartleyova veta o kapacite | 209 | |
| 6.4.1 | Shannonova hranica | 212 | |
| 6.5 | Rovina efektívnosti využitia pásma | 215 | |
| 6.5.1 | Účinnosť využitia pásma pri moduláciách MPSK a MFSK | 217 | |
| 6.5.2 | Analógie medzi rovinami pravdepodobnosti chyby a rovinou efektívnosti využitia pásma | 218 | |
| 6.6 | Systémy s obmedzeným výkonom | 219 | |
| 6.7 | Systémy s obmedzeným pásmom | 220 | |
| 6.8 | Výber modulácie a kódovania | 220 | |
| 6.9 | Modulácia s efektívnym využitím frekvenčného pásma | 222 | |
| 6.9.1 | QPSK a OQPSK | 223 | |
| 6.9.2 | Modulácia s minimálnym posunom (MSK) | 227 | |
| 6.9.2.1 | Odolnosť proti chybám modulácií OQPSK a MSK | 232 | |
| 6.9.3 | Kvadrátúrna amplitúdová modulácia | 232 | |
| 6.9.3.1 | Pravdepodobnosť chyby P_B pri QAM modulácii | 234 | |
| 6.9.3.2 | Voľba kompromisu medzi účinnosťou využitia pásma a výkonu | 235 | |
| 6.10 | Modulácia a kódovanie pre kanály s obmedzeným frekvenčným pásmom | 237 | |
| 6.10.1 | Komerčné modemy pre telefónny kanál | 238 | |
| 6.10.2 | Hranice konštelácií signálov | 239 | |
| 6.10.3 | Viacrozmerné konštelácie signálov | 241 | |
| 6.10.4 | Mriežky s väčšou hustotou | 244 | |

| | | | |
|--------|----------|--|-----|
| 182 | | | |
| 182 | 6.10.5 | Kombinácia metódy hustých mriežok ako zobrazenia do N-rozmerného priestoru | 245 |
| 182 | 6.10.6 | Mriežkovo kódovaná modulácia | 246 |
| 189 | 6.10.6.1 | Princíp mriežkovo kódovanej modulácie | 247 |
| 189 | 6.10.6.2 | O chybách v mriežkových kódoch | 248 |
| 190 | 6.10.7 | Príklad mriežkovo kódovanej modulácie | 250 |
| 191 | 6.10.7.1 | Zisk kódovania pri mriežkovo kódovanej modulácii | 252 |
| zením | 6.11 | Záver | 255 |
| 197 | | Literatúra | 257 |
| 199 | | | |
| 205 | | | |
| 206 | | | |
| 207 | | | |
| 209 | | | |
| 209 | | | |
| 212 | | | |
| 215 | | | |
| 217 | | | |
| inou | | | |
| 218 | | | |
| 219 | | | |
| 220 | | | |
| 220 | | | |
| 222 | | | |
| 223 | | | |
| 227 | | | |
| 232 | | | |
| 232 | | | |
| 234 | | | |
| a a | | | |
| 235 | | | |
| enčným | | | |
| 237 | | | |
| 238 | | | |
| 239 | | | |
| 241 | | | |
| 244 | | | |



1 Úvod

Prenos správ medzi organizmami alebo bunkami je základnou činnosťou charakteristickou pre všetky formy života. V procese evolúcie, ktorá sama osebe by nebola možná bez prenosu informácie, boli vytvorené rôzne biologické systémy schopné prenášať správy cez prostredia, ktoré sa vyznačujú rôznorodým rušením - šumom. Napriek tomu tieto systémy umožňujú prenášať zrozumiteľné správy, a to aj bez toho, aby neprimeraným spôsobom zatažovali vysielajúcu a prijímajúcu stranu.

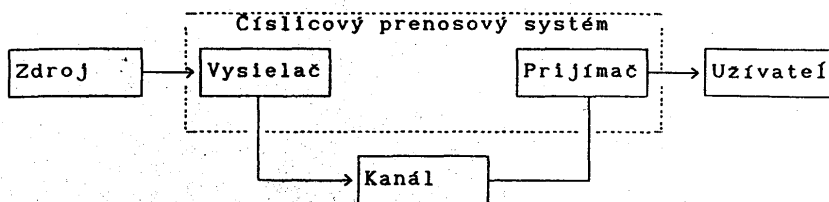
Ľudmi vytvorené komunikačné systémy tiež umožňujú prenos informácie cez objekty a médiá, v ktorých je vždy prítomné určité rušenie. Tieto objekty zvykneme nazývať komunikačnými kanálmi, alebo jednoducho kanálmi. Veľmi dôležitý je kanál, v ktorom je správa reprezentovaná elektromagnetickou vlnou vysielanou od vysielateľa k prijímaču. Na vstupe prijímača sa elektromagnetická vlna objaví skreslená šumom, a preto musí byť proti nemu chránená.

Spočiatku sa táto ochrana v telekomunikačných systémoch robila jednoducho zvýšením vysielacieho výkonu. Neskôr boli vyvinuté omnoho premyslenejšie metódy. Moderný návrh systému je umením pospájať množstvo poznatkov z teórie komunikácie, ktorá je vetvou teórie informácií tak, aby forma elektromagnetických vln, ktoré zvykneme (nie celkom presne) označovať ako signály vyhovovala rôznorodým požiadavkám praxe.

Tieto skriptá sú venované najdôležitejším myšlienkam, ktoré sú v tejto oblasti dnes k dispozícii. Budeme sa zaoberať číslicovými metódami prenosu a spracovania informácie, keďže tieto v súčasnosti prekonali analógové.

1.1 Princíp činnosti číslicového systému

Číslicový systém môžeme ilustrovať pomocou obr.1.1. Jeho úlohou je preniesť správu vychádzajúcu zo zdroja cez kanál užívateľovi označovanému tiež ako príjemca. Pozostáva zo zariadenia nazývaného vysielateľ, ktoré upravuje správu zo zdroja pre kanál, a zo zariadenia nazývaného prijímač, ktorého úlohou je upraviť správu z výstupu kanála pre príjemcu. Operácie, ktoré vykonáva vysielateľ, sa označujú ako kódovanie a modulácia.



Obr. 1.1. Číslicový prenosový systém

Operácie, ktoré sú úlohou prijímača, sa nazývajú dekódovanie a demodulácia.

Na základnej fyzikálnej úrovni je bežný telekomunikačný kanál analógový kanál (spojitý v čase aj hodnote). Číslicové údaje preto musia byť transformované na analógové signály, aby mohli byť prenesené cez kanál.

Údaje zo zdroja môžu byť číslicové alebo analógové. Ak údaje majú analógovú formu, číslicový systém ju pretvorí na číslicovú formu, údaje spracuje v číslicovej forme a znovu ich premení na analógové pre prenos kanálom. Signál je v prijímači znovu premenený vzorkovaním a kvantovaním do číslicovej podoby - aj vtedy, ak ho nakoniec príjemca vyžaduje v analógovej podobe. Toto neprestávajúce preformúvanie sa môže zdať neefektívne, ale vďaka tomu, čo všetko je možné s údajmi urobiť, keď sa nachádzajú v číslicovej podobe, je oprávnené. Jednou z hlavných výhod tiež je, že signál prenášaný cez kanál môže byť úplne odlišný od signálu, ktorý generuje zdroj.

Analógové modulácie na rozdiel od číslicových spôsobujú relatívne "povrchné" zmeny v signáloch v súvislosti s ich prenosom cez kanál. Číslicové signály sú oveľa dokonalejšie prispôbivé k charakteristikám kanálov a sú odolnejšie proti rušeniu v kanáloch. Číslicové systémy si často vyžadujú omnoho väčšiu zložitost obvodových realizácií jednotlivých komponentov avšak vďaka nízkej cene integrovaných obvodov to nepredstavuje významnejšiu prekážku. Úloha prenosu môže byť rozdelená na dve čiastkové úlohy:

1. dodať príjemcovi určité množstvo informácie za časovú jednotku (v bitoch za sekundu),
2. vyjadriť správu pomocou tohto množstva bitov za sekundu.

V súvislosti s tým treba spomenúť veľmi dôležitý, aj keď

kladnou
procesu
prenosu
schopné
norodým
renášať
meraným

prenos
rítomné
nazývať
šležitý
etikou
ijímača
o musí

stémoch
r boli
ému je
ktorá
ických
ignály

enkam,
oberať
mácie,

Jeho
kanál
a zo
zdroja
ilohou
ácie,
ácia.

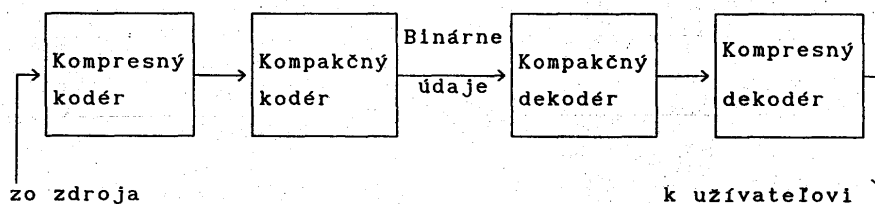
prekvapujúci, tzv. separačný princíp teórie informácií, ktorý hovorí, že úloha preniesť signál vystupujúci zo zdroja cez kanál môže byť rozdelená bez straty optimálnosti na úlohu vyjadrenia signálu zo zdroja v binárnej podobe a na úlohu preniesť túto binárnu postupnosť cez kanál.

Tento princíp je základom rozvoja moderného trendu oddelene sa zaoberať problematikou kódovania zdroja a kódovania pre kanál.

1.2 Klasifikácia kódov pre zdroj a kanál

Dá sa povedať, že v tomto skripte sa budeme zaoberať najmä štruktúrou telekomunikačných signálov a kódov, vhodných pre číslicový prenos správ. Jednoducho povedané, kód je postupnosť symbolov z konečnej abecedy, ktorá spĺňa určité požiadavky.

Podľa funkcie rozoznávame: kompakčné kódy, kompresné kódy, kryptografické kódy, kódy pre prenos a translačné kódy.



Obr. 1.2. Model kompresie a kompaktie

Kompakčný kód reprezentuje údaje zo zdroja úsporne, ale tak, že ich možno v podstate bezchybne obnoviť.

Kompresný kód vyjadruje údaje zo zdroja ešte úspornejším spôsobom ako kompakčný kód, ale za cenu, že údaje zo zdroja nemôžu byť obnovené úplne bez chyby. Kompresný kód vnáša úmyselne určitú chybu (napr. kvantizačný sum), aby došlo ku kompresii údajov.

Aj keď uvedené dva kódy môžu byť skombinované, zvyčajne uvažujeme o kompresii a kompaktii ako o dvoch za sebou nasledujúcich oddelených funkciách, obr. 1.2.

Kryptografický kód zasifruje postupnosť bitov tak, že pre neautorizovaný prijímač nemajú zmysel.

ktorý
a cez
úlohu
úlohu

trendu
ovania

najmä
h pre
ipnosť

v.
kódy,



, ale
nejším
droja
vnáša
lo ku

čajne
sebou
e pre

Poznámka: Kryptografickými kódmi sa v tomto skripte pre nedostatok miesta nebudeme zaoberať. Záujemcom možno odporúčať lit. [1,2,3,4].

Kódy pre kanál sa dajú rozdeliť na kódy pre prenos a translačné kódy. Kódy pre prenos umožňujú prenášať údaje spoľahlivo (odolne proti chybám) cez kanál zatažený šumom. Využívajú pritom rôzne techniky kontroly, napr. samoopravné kódovanie. Vďaka prenosovým kódom je možné, že kanál so šumom pracuje navonok ako deterministický a spoľahlivý kanál. Šumový kanál okrem toho môže klásiť určité obmedzenia na doňho vstupujúce postupnosti symbolov. Týmto obmedzeniam musí vyhovieť translačný kód. Pritom na vstup kodéra translačného kódu môžu prichádzať ľubovoľné postupnosti symbolov z použitej abecedy.

Uvedené rozdelenie kódov je potrebné na to, aby o každej z ich funkcií mohla byť vyvinutá adekvátna teória. Každá funkcia sama osebe môže vyžadovať využitie veľmi komplikovaných metód, pričom návrh príslušného bloku systému môže byť tiež veľmi zložitý. Je teda lepšie zaoberať sa súčasne len jednou funkciou.

Do kodéra ľubovoľného z uvedených kódov vstupuje postupnosť tzv. informačných symbolov, z ktorých sú zložené tzv. informačné slová (niekedy jedno slovo). Z kodéra vystupuje postupnosť tzv. kódových symbolov, z ktorých sú zložené kódové slová (niekedy jedno slovo). Vstupujúci tok údajov je zvyčajne taký dlhý, že z hľadiska kodéra a dekodéra sa javí ako nekonečný. V praktických systémoch vstupujúci tok údajov musí byť rozdelený na časti, ktoré sú dostatočne malé na to, aby s nimi mohol kodér narábať - aby ich mohol spracovať. Dlhé kódové slová musia byť konštruované z malých častí podľa určitého postupu. Z tohto hľadiska rozdeľujeme kódy na blokové alebo stromové. Operácia, ktorú vykonáva kodér, resp. dekodér je zobrazenie postupností symbolov z jednej abecedy do postupností symbolov inej (niekedy tej istej) abecedy.

Kodér blokového kódu rozdeľuje vstupnú postupnosť na bloky pevnej dĺžky k a každý z nich kóduje na kódové slovo pevnej dĺžky n . Kodér blokového kódu z premenlivej na pevnú dĺžku bloku rozdeľuje vstupujúcu postupnosť na bloky premenlivej dĺžky a každý z nich kóduje na kódové slovo pevnej dĺžky n .

Kodér kódu z pevnej na premenlivú dĺžku bloku delí vstupujúcu postupnosť na bloky pevnej dĺžky k a kóduje každý blok na kódové slovo premenlivej dĺžky. Vo všetkých troch uvedených prípadoch kódové slová usporiadané za sebou potom tvoria výstupnú postupnosť, tzv. kódovú postupnosť alebo kódový tok.

Existujú tiež kódy, ktorých kódové slová nemôžu byť rozdelené na jednotlivé časti bez vzájomného súvisu. Takéto kódy je trochu ťažšie opísať. Nazývajú sa stromové kódy. Kodér stromového kódu rozdeľuje vstupujúcu postupnosť na tzv. zábery dĺžky k , ktoré kóduje do tzv. záberov kódového slova dĺžky n , pričom spôsob priradenia závisí od m posledných záberov, ktoré vstúpili do kodéra. Opäť, podľa toho, či vstupné alebo výstupné zábery sú premenlivej dĺžky, môžeme rozlíšiť stromové kódy z premenlivej na pevnú a z pevnej na premenlivú dĺžku záberu resp. s konštantnou rýchlosťou $R = \frac{k}{n}$. Zábery kódového slova zoradené za sebou tvoria kódovú postupnosť.

Stromový kód nazývame mriežkovým, ak má jeho kodér konečnú pamäť m záberov a je časovo invariantný. Stromový kód nazývame konvolučným, ak je operácia kódovania časovo invariantná a lineárna.

1.3 Klasifikácia číslicových modulácií

Pri prenose číslicovej informácie cez komunikačný kanál je potrebný na vstupe kanála číslcový modulátor. Číslcový modulátor je zariadenie, ktoré vykonáva zobrazenie číslicovej informácie na analógové signály, ktoré sú prispôbené charakteristikám kanála. Pri zobrazení berie bloky najčastejšie po $k = \log_2 M$ binárnych symbolov postupnosti vstupujúcej do modulátora a na ich základe modulátor vyberá jeden z M deterministických signálov konečnej energie z množiny: $\{s_i(t); i = 1, 2, \dots, M\}$, pričom najčastejšie $M = 2^k$. V prípade, že zobrazenie vstupnej číslicovej postupnosti na signál v ľubovoľnom časovom intervale závisí od toho, aký signál bol vysielaný v jednom, alebo viacerých predchádzajúcich časových intervaloch hovoríme, že modulátor má pamäť. V opačnom prípade hovoríme, že modulátor je bez pamäte.

Poznámka: Podobne by sme mohli označiť aj blokové kódovanie ako kódovanie bez pamäte a stromové kódovanie ako kódovanie

upujúcu
 blok na
 edených
 tvoria
 tok.
 zu byť
 Takéto
 . Kodér
 zábery
 (zky n,
 , ktoré
 ýstupné
 é kódy
 záberu
 , slova
 conečnú
 azývame
 ntná a

s pamäťou.

Ďalším kritériom pre klasifikáciu modulácií a modulátorov je vlastnosť linearity, resp. nonlinearity. Linearita vyzaduje, aby platil princíp superpozície pri zobrazovaní číslicových postupností vstupujúcich do modulátora na vystupujúce signály. Uvedme niekoľko príkladov spomedzi prakticky najčastejšie používaných modulácií:

- ASK, PAM, QAM, PSK (lineárne modulácie bez pamäti),
- DPSK, ODPK (lineárne modulácie s pamäťou),
- CPFSK, CPM, MSK (nelinéárne s pamäťou).

Podľa veľkosti M môžeme tiež klasifikovať číslicové modulácie na binárne $M = 2$ a viacstavové $M > 2$.

Aj keď veľké množstvo číslicovej informácie je prenášané pomocou tzv. nosných frekvencií (v preloženom pásme), existujú tiež telekomunikačné kanály a systémy, v ktorých sú signály prenášané v základnom pásme. Napriek tomu, že tieto signály sú zväčša jednoduchšie ako signály v preloženom pásme, je v súčasnosti k dispozícii pomerne rozvinutá teória, ktorá pomáha pri ich návrhu. Preto sa nimi budeme v tomto skripte tiež zaoberať.

② Základné pojmy z teórie informácií

Americký matematik a inžinier Claude Elwood Shannon zaviedol roku 1948 pojem informácie ako štatisticky definovanej miery [5]. Je považovaný za zakladateľa teórie informácií, i keď už pred ním sa problematikou merania množstva informácie zaoberali Wiener, Hartley.

Komponenty prenosového systému, ako sú zdroj, kanál atď, sa v teórii informácií opisujú pravdepodobnostnými modelmi, ktoré sú abstrahované od technickej realizácie. Pre telekomunikačného inžiniera sú najvýznamnejšie tie poznatky teórie informácií, ktoré udávajú dosiahnuteľné hranice parametrov prenosových a pamäťových systémov. Tieto nemožno v reálnom svete prekročiť ani za cenu ľubovoľných nákladov. V tomto zmysle je teória informácií nadradená teória, ktorá umožňuje porovnávať rôzne systémy kódovania a modulácií bez ohľadu na ich technické princípy len podľa kritéria, ako sa svojimi vlastnosťami približujú k teoreticky optimálnym.

nál je
 licový
 icovej
 sobené
 tejsie
 ej do
 z M
 $s_i(t)$;
 de, že
 signál
 il bol
 sových
 rípade
 ie ako
 vovanie

V tejto kapitole sa len veľmi stručne zmienime o základných pojmoch tak, aby sme objasnili najvýznamnejšie hranice, ktoré majú bezprostredný význam pre telekomunikácie.

V prípade hlbšieho záujmu možné odporúčať lit. [6,7,8,9].

2.1 Diskrétny zdroj

Diskrétny zdroj produkuje postupnosť diskretných symbolov, to znamená signál diskretný v čase i hodnote. Konečná množina možných J symbolov zo zdroja sa nazýva abeceda zdroja. Napr. pri binárnych signáloch $J = 2$, pri desiatkových $J = 10$ atď. Predpokladajme, že medzi jednotlivými symbolmi existuje statistická závislosť, ktorá sa vždy týka najviac L za sebou nasledujúcich symbolov. Ďalej nech je známa pravdepodobnosť P_i i -tej z množiny J^L možných rôznych postupností dĺžky L . Množstvo informácie obsiahnuté v udalosti, že zdroj vygeneruje i -tú postupnosť, označíme I_i . Platí:

$$I_i = \log_2 \frac{1}{P_i} = -\log_2 P_i \quad \text{bit} \quad (2.1)$$

Pseudojednotka bit označuje, že sa použil log so základom 2.

Entropia H zdroja udáva stredné množstvo informácie pripadajúce na jeden symbol z postupnosti a je dané vzťahom

$$H = -\frac{1}{L} \sum_{i=1}^{J^L} P_i \log_2 P_i \quad \text{bit/symbol} \quad (2.2)$$

Entropia je jedna zo základných charakteristík zdroja z hľadiska teórie informácií. Vo všeobecnosti platí, že $H \geq 0$. Entropia dosahuje maximum $H_0 = \log_2 M$ v prípade, že sú symboly postupnosti nezávislé ($L = 1$) a vyskytujú sa s rovnakou pravdepodobnosťou $P_i = \frac{1}{J}$. Ak vynásobíme entropiu zdroja H rýchlosťou R_z v symboloch/s, ktorou zdroj generuje symboly, dostaneme informačný tok zdroja

$$H^* = R_z H \quad \text{bit/s} \quad (2.3)$$

Význam zavedenia miery informácie a entropie objasňuje

Sha:
zdr:
tak:
sym:
Pri

pan
s p
L =

H =

= -

Obr
Pri
ent
rov
r
zdi

pr:
te.

2.

v/
sp
ne

nlenime
nejsie
lkácie.
,8,9].

Shannonova veta o entropii. Hovorí, že postupnosť k symbolov zo zdroja možno bezchybne zakódovať pomocou binárnych symbolov tak, že stredný počet binárnych symbolov pripadajúcich na 1 symbol zo zdroja je väčší alebo rovný ako entropia zdroja H . Priblíženie k tejto hodnote sa zlepšuje s rastúcim k .

nbolov,
mnozina

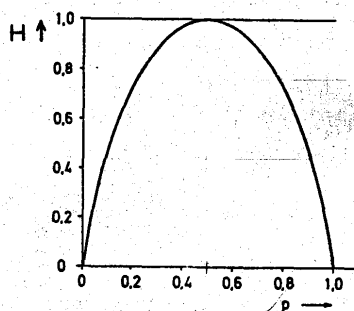
Najjednoduchším príkladom zdroja je binárny zdroj bez pamäti, ktorý produkuje statisticky nezávislé symboly. Symbol 1 s pravdepodobnosťou P a symbol 0 s pravdepodobnosťou $1 - P$. Pre $L = 1$ a $J = 2$ entropia zdroja závisí len od P :

Napr.
0 atď.
kistuje
sebou
ost P_i
zky L
eneruje

$$H = \sum_{i=1}^2 P_i \log(P_i) =$$

$$= -P \log P - (1 - P) \log(1 - P) \quad \text{bit/symbol} \quad (2.4)$$

(2.1)



n 2.
ormácie
nom

Obr.2.1. Entropia binárneho zdroja v závislosti od P

(2.2)

Priebeh entropie v závislosti od P je na obr.2.1. Maximum entropie v tomto prípade $H_0 = 1$ bit/symbol sa dosiahne pri rovnakej pravdepodobnosti symbolov 0 a 1, $P = 0,5$. Odchýlka $r^* = H_0 - H$ sa nazýva absolutná nadbytočnosť (redundancia) zdroja. Udáva zisk v bitoch na symbol, ktorý môžeme prinajlepšom dosiahnuť pri bezchybnom kódovaní odstránením tejto redundancie.

zdroja
 $H \geq 0$.
symboly
ovnakou
roja H
ymboly,

2.2. Spojity zdroj

(2.3)
jasňuje

Väčšina signálov zo zdroja je v telekomunikáciách spojitá v čase aj hodnote. Ak by sme chceli vyjadriť číslami hodnotu spojitého signálu úplne presne, potrebovali by sme na to nekonečný počet bitov. To znamená, že entropia spojitého zdroja

v čase aj hodnote je nekonečná. Reálnymi kanálmi však môžeme prenášať iba konečné množstvo bitov za jednotku času. Vďaka obmedzenej citlivosti ľudských zmyslov a konečnej presnosti spracovania údajov je však vždy určitá malá nepresnosť vo vyjadrení spojitých signálov v praxi prípustná. Sum kvantovania vždy možno urobiť menším, ako je to prípustné z hľadiska užívateľa. O analógovo - číslicovom prevode a sume kvantovania budeme podrobnejšie hovoriť v časti o kompresii.

2.3 Kapacita kanála

Význam pojmu entropia pre telekomunikácie sa prejavuje aj pri diskusií problematiky prenosu informácií cez kanály so sumom. V teórii informácií kanál opisujeme pomocou štatistickej miery, ktorú nazývame kapacitou kanála a označujeme C. Jej význam je zrejmý z nasledujúcej Shannonovej vety o kapacite kanála.

Ak sú signály zo zdroja o entropii H a rýchlosti R_z prenášané cez kanál s kapacitou C , potom existuje vhodné kódovanie také, že pre

$$R_z H \leq C \quad (2.5)$$

je pravdepodobnosť chyby ľubovoľne malá.

Opačne tiež platí, že bezchybný prenos nie je možný ak nie je splnená nerovnosť (2.5). Kapacita kanála v bit/s teda udáva teoreticky maximálnu možnú prenosovú rýchlosť, pri ktorej je ešte možný bezchybný prenos. Dosiagnúť však stav, kedy prenosová rýchlosť je rovná kapacite je v praxi nemožné, pretože pri jej približovaní k tejto hodnote prudko narastajú náklady.

2.3.1 Kapacita Gaussovho kanála

Prakticky v každom telekomunikačnom systéme sú signály v samotnom prenosovom médiu spojité. Dôležitým príkladom spojitého kanála je tzv. Gaussov kanál (niekedy nazývaný kanál s AWGN - aditiv white Gaussian noise) s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. Jeho prenosová funkcia je ideálna pravouhlá.
2. Aditívny biely sum s dvojstrannou výkonovou hustotou spektra

N_c2
3.Vys
Ak
zna
pre

H(f)

W
pre
v c
pre

H(f)

Adi
výk
G(f)
Na

N =

N₀
W/Hvše
fyz
pás
svc

môžeme
Vďaka
esnosti
ost vo
tovania
ladiska
tovania

$\frac{N_0}{2}$ je pripočítavaný k signálu na vstupe kanála.

3. Stredný výkon signálu na výstupe z kanála má hodnotu S.

Vysvetlenie k jednotlivým bodom:

Ak ide o kanál v tzv. základnom pásme (baseband chanel), to znamená, že jeho pásmo obsahuje aj frekvenciu $f = 0$, potom pre prenosovú funkciu kanála $H(f)$ platí

$$H(f) = \begin{cases} 1; & |f| \leq W \\ 0; & |f| \geq W \end{cases} \quad (2.6)$$

vuje aj
ály so
stickej
C. Jej
apacite

W označuje šírku prenosového pásma. Ak ide o kanál v tzv. preloženom pásme (passband chanel) - jeho pásmo je sústredené v okolí nejakej frekvencie f_n rôznej od nuly, potom pre jeho prenosovú funkciu $H(f)$ platí

$$H(f) = \begin{cases} 1; & |f \pm f_n| \leq \frac{W}{2} \\ 0; & |f + f_n|, |f - f_n| > \frac{W}{2} \end{cases} \quad (2.7)$$

enášané
e také,
(2.5)

ak nie
a udáva
prej je
, kedy
emožné,
rastajú

Aditívny biely Gaussov šum (AWGN) sa vyznačuje dvojstrannou výkonovou hustotou spektra

$$G(f) = \frac{N_0}{2} \quad (2.8)$$

Na výstupe kanála sa prejaví ako šumový výkon

$$N = 2W \frac{N_0}{2} = WN_0 \quad (2.9)$$

signály
íkladom
ý kanál
ujúcimi
spektra

N_0 sa nazýva jednostranná výkonová hustota spektra. Jej rozmer W/Hz je rovnaký ako rozmer energie.

Výkonová hustota spektra bieleho šumu je konštantná pre všetky frekvencie. Aj keď tento model vedie k matematickým a fyzikálnym nezmyslom, ak by sme uvažovali nekonečné frekvenčné pásmo prenosu W , pre praktické prípady konečného pásma je ďaka svojej jednoduchosti veľmi užitočný.



Kapacita Gaussovho kanála má podľa teórie informácií hodnotu

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad \text{bit/s} \quad (2.10)$$

kde S je výkon signálu a N výkon šumu. Výraz (2.10) má zásadný význam pre telekomunikačné systémy, pretože Gaussov kanál je dobrou aproximáciou mnohých reálnych kanálov. Kapacitu uvedeného kanála možno ovplyvniť parametrami W , S a N podľa vzťahu (2.10). Pritom zrejme ak zväčšíme napr. W , môžeme zmenšiť $\frac{S}{N}$ tak, že hodnota kapacity sa nezmení. Vzniká otázka, či možno dosiahnuť pomer $\frac{S}{N} = 0$ ak $W \rightarrow \infty$. Odpoveď na túto otázku je záporná

$$C_{\infty} = \lim_{W \rightarrow \infty} W \log_2 \left(1 + \frac{S}{WN_0} \right) = \frac{\log_2 e}{2} \cdot \frac{S}{N_0} = 0,72 \frac{S}{N_0} \quad (2.11)$$

S narastaním W rastie aj výkon šumu $W \cdot N_0$.

3) Kódovanie zdroja

3.1 Kompresné kódovanie

Kompresia údajov je operácia, pri ktorej sa zanedbáva najmenej dôležitá časť informácie v signáli. Informácia sa vyjadruje vo forme číslicových údajov s rýchlosťou, ktorá je dostatočne malá na prenos systémom. Kód, ktorý je skonštruovaný s cieľom znižovať entropiu tým, že produkuje kódové slová, ktoré predstavujú aproximáciu výstupných signálov zo zdroja, sa nazýva kompresný kód. V takomto kóde je implicitne skryté skreslenie.

Analógovo - číslicový prevod je z hľadiska číslicových telekomunikačných systémov veľmi dôležitým príkladom kompresného kódovania. Ak by sme chceli zachovať úplnú presnosť vyjadrenia signálu zo spojitého zdroja v číslicovej podobe, vyžadovalo by si to nekonečnú prenosovú rýchlosť v kanále. Reálne kanály umožňujú prenášať len konečnou rýchlosťou menšou, ako je kapacita kanála, a preto možno ceľ ne prenášať len aproximáciu signálu zo zdroja.

Formácií

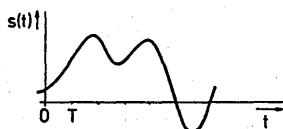
(2.10)

zásadný
anál je
(apacitu
N podľa
môžeme
otázka,
na túto

Číslicovým signálom rozumieme konečnú alebo spočítateľnú nekonečnú postupnosť čísiel, ktoré možno opísať pomocou konečného počtu rádo. Je známe, že signály môžeme zatriediť do jednej z nasledujúcich skupín: analogové signály (spojité v čase aj hodnote), signály diskkrétne v čase (nespojité v čase), signály diskkrétne v hodnote (nespojité v hodnote), číslcové (digitálne) signály (nespojité v čase aj hodnote).

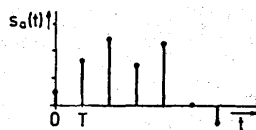
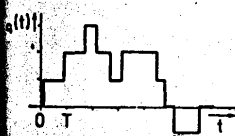
Prevod signálu spojitého v čase na signál diskkrétne v čase nazývame vzorkovaním. Prevod signálu spojitého v hodnote na signál diskkrétne v hodnote nazývame kvantovaním. Prevod číslicového signálu na iný číslicový signál nazývame kódovanie. Operácia vzorkovania a kvantovania predstavuje kompresiu. Schematicky je analogovo - číslicový prevod znázornený na obr. 3.1.

(2.11)



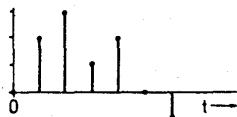
kvantovanie

vzorkovanie

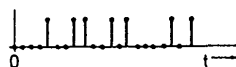


vzorkovanie

kvantovanie



kódovanie



nedbáva
ícia sa
torá je
ruovaný
slová,
oja, sa
skryté

icových
íkladom
resnosť
podobe,
kanále.
mensou,
at len

Obr 3.1. Analogovo číslicový prevod

Reálne vzorkovanie (s mechanickým, alebo elektronickým obvodom) je znázornené na obr. 3.2.

Vzorkovaný signál $s_v(t)$ sa dá vyjadriť vzťahom

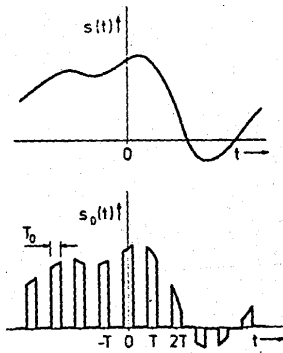
$$s_v(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_v}{T_0}\right) \quad (3.1)$$

kde T_0 je čas zopnutia vzorkovacieho obvodu a T_v je perióda vzorkovania. Pri ideálnom vzorkovaní $T_0 \rightarrow 0$ a platí

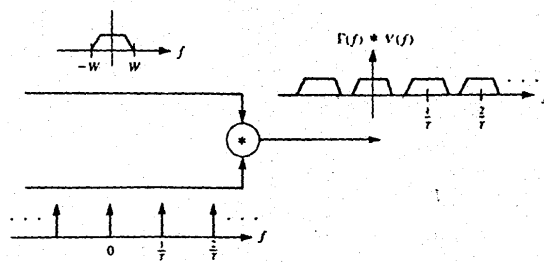
$$s_v(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_v) \quad (3.2)$$

Fourierovou transformáciou vzťahu (3.2) dostaneme

$$S_v(f) = \frac{1}{T_v} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T_v}\right) \quad (3.3)$$



Obr. 3.2. Reálne vzorkovanie



Obr. 3.3. Vzorkovanie signálu vo frekvenčnej oblasti

Prí
fre

T_v
vte
a S

3.1

zah
bini
open
vekt
Kvar
skre
kódc
preč
ilu:

Ob
pl

P

Príklad spektra vzorkovaného signálu je na obr. 3.3.

- (3.1) Ak signál v základnom pásme so spektrom obmedzeným zhora frekvenciou f_h vzorkujeme s periódou T_v , pre ktorú platí

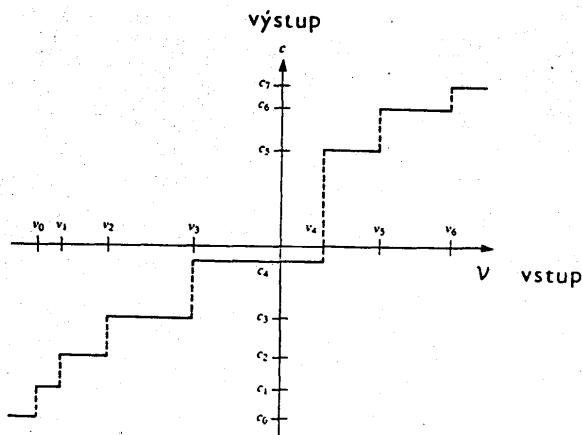
Je periód

$$T_v \leq \frac{1}{2f_h} \quad (3.4)$$

- (3.2) vtedy sa periodicky opakujúce zložky spektra $S_v(f)$ neprekývajú a $S(f)$ sa dá získať z $S_v(f)$ vhodným filtrom obr. 3.3.

3.1.1 Skalárne kvantovanie

- (3.3) V literatúre sa niekedy do operácie kvantovania implicitne zahrňa aj operácia kódovania (najčastejšie do postupnosti binárnych čísel). V takomto prípade kvantovaním môžeme rozumieť operáciu vyjadrenia reálnych alebo komplexných čísel alebo vektorov takýchto čísel pomocou konečného počtu bitov. Kvantovanie vnáša preto určité, aj keď kontrolovateľné skreslenie. Skalárne kvantovanie je formou kompresného kódovania, ktoré naraz kóduje jednu vzorku nezávisle od predoslych a nasledujúcich vzoriek. Pomocou obr. 3.4. sa dá ilustrovať skalárne kvantovanie.



Obr. 3.4. Skalárne kvantovanie, schodovitá funkcia používaná pri kvantovaní

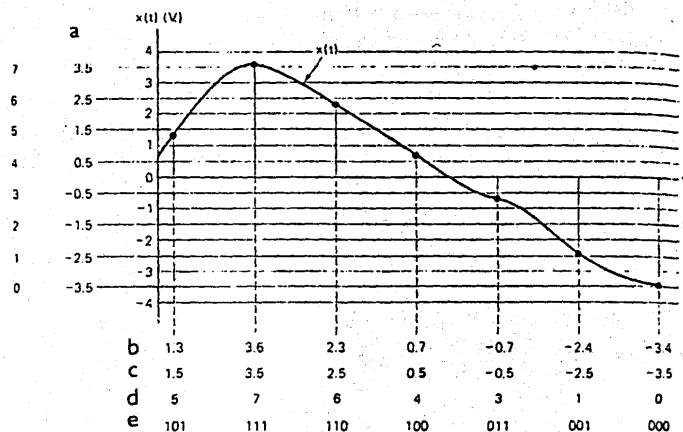
Vzorke v , ktorej hodnotu možno vyjadriť reálnym číslom je priradená kvantovaná hodnota $c(v)$ pomocou "schodovitej" funkcie

znázornenej na obr. 3.4. Pritom $c(v) \in \{c_0, c_1, \dots, c_{L-1}\}$. Ak $L = 2^k$ pre nejaké celé k , potom kvantovanú hodnotu môžeme vyjadriť pomocou k -bitového čísla. Napr. pri spôsobe podľa obr. 3.5. stačia 3 bity, keďže $L = 8$. Pri rovnomernom kvantovaní je medzi kvantovanými hodnotami konštantný interval Δ . Hodnota vnesenej chyby e (sum kvantovania) je v intervale:

$-\frac{\Delta}{2} \leq e \leq \frac{\Delta}{2}$ rovnomerne rozdelená, a preto disperzia tohto náhodného procesu rovná výkonu kvantizačného sumu je vyjadrená vzťahom

$$D = \mathcal{E}[e^2] = \frac{\Delta^2}{12} \quad (3.5)$$

kde \mathcal{E} označuje operátor strednej hodnoty.



Obr. 3.5. Vytvorenie číslicového signálu PCM (pulzne kódovej modulácie) vzorkovaním a skalárnym kvantovaním. Označenie: a) úroveň, b) skutočná hodnota vzorky, c) kvantovaná hodnota vzorky, d) poradové číslo kvantizačnej úrovne (kód), e) postupnosť symbolov PCM

3.1.2 Vektorové kvantovanie

Vektorové kvantovanie možno opísať ako blokové kódovanie, pri ktorom kompresný kód zobrazuje k -rozmerné náhodné vektory \vec{v} , ktorých súradnice sú jednotlivé vzorky na kódové slová $\vec{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{M-1})$, pričom $M = 2^n = 2^{kk_1}$ a k_1 nemusí byť

L-1}. Ak
 i môžeme
 e podľa
 nomernom
 interval
 rvale:
 ia tohto
 yjadrená

celé číslo. Kompresný kód je úplne opísaný množinou svojich kódových slov a pravidlom zobrazenia. Najbežnejším vektorovým kvantovaním je tzv. transformačné kvantovanie. Ide o blokové kvantovanie, pri ktorom sa v prvom kroku vypočíta diskretná Fourierova transformácia

$$V_1 = \sum_{i=0}^{k-1} e^{-j2\pi l i} v_i; \quad l = 0, 1, \dots, k-1 \quad (3.6)$$

a v druhom kroku sa V_1 kvantuje skalárnym spôsobom. Vektorové kvantovanie vedie k lepšej kompresii, najmä pri zdrojoch s pamäťou.

3.1.3 Mriezkové kódy pre kompresiu

Na využitie pamäti zdroja pri kompresii boli vyvinuté špeciálne metódy. Pri silnej závislosti možno urobiť predikciu (predpoveď) aktuálnej vzorky na základe určitého počtu predchádzajúcich a kvantovať iba rozdiel medzi skutočnou hodnotou vzorky a predpovedanou. Túto metódu nazveme prediktívnym kvantovaním. Prediktívny kvantovač je špeciálnym prípadom kvantovača so spätnou väzbou. Kvantovač so spätnou väzbou je každý kvantovač, ktorého činnosť závisí od jeho vnútorného stavu. Vnútorný stav sa mení počas kompresie.

kódovej
 ie:
 hodnota
 ód), e)

Metóda prediktívneho kvantovania je založená na jednoduchšej myšlienke. Lubovoľná známa konštantná hodnota sa môže odčítať zo vzorky pred kvantovaním, ak sa potom na prijímajúcej strane pripočíta ku kvantovanej hodnote. Najčastejšie sú používané nasledujúce druhy predikcie: lineárna predikcia, delta modulácia, stromovo - kódované kvantovanie. Lineárny prediktor kóduje rozdiel medzi aktuálnou vzorkou a vzorkou predpovedanou lineárnym spôsobom na základe predošlých L_k kvantovaných vzoriek. Dôvod, prečo sa využívajú predošlé kvantované vzorky, je, že sú v momente kvantovania k dispozícii aj na strane príjmu. Pre predikovanú vzorku v_1 platí

$$v_1 = -g_1 v_{1-1} - g_2 v_{1-2} - \dots - g_L v_{1-L} \quad (3.7)$$

ovanie,
 vektory
 é slová
 usí byť

kde v_1 je kvantovaná hodnota v čase 1, rozdiel $d_1 = v_1 - v_{1-1}$

je potom kvantovaný skalárnym spôsobom.

Špeciálnym prípadom prediktívneho kvantovania je delta modulácia, pri ktorej $L = 1$. Jej použitie je vhodné, ak je medzi vzorkami silná závislosť, napr. ak pre periódu vzorkovania platí $T \ll \frac{1}{f_h}$.

Mriezkovo kódované kvantovanie je kompresnou procedúrou duálnou k stromovo kódovanej modulácii, ktorou sa budeme zaoberať v časti 6. Preto je vhodné nasledujúci odsek čítať až po preštudovaní stromovo kódovanej modulácie.

Úloha kódéra a dekodéra je tu oproti stromovo kódovanej modulácii vymenená. Pri mriezkovom kóde pre kompresiu kódér pozostáva zo zariadenia, ktoré prehladáva mriežku tak, aby našiel sled, ktorý je najbližšie k danej postupnosti, a dekodér jednoducho číta symboly zo sledu zodpovedajúceho prijatému kódovému slovu. Mriežka je označená kvantovanými hodnotami c_i . Postupnosť zo zdroja (v_0, v_1, v_2, \dots) je kódovaná napr. tak, že pomocou Viterbiho algoritmu sa nachádza postupnosť c_0, c_1, \dots , ktorá je najbližšie v zmysle Euklidovej metriky. Tá potom tvorí kódové slovo.

3.1.4 Parametrické metódy kompresie

V doteraz spomenutých spôsoboch kompresie sa postupnosť vzoriek zo zdroja spracúva priamo. Existuje však aj nepriama metóda, tzv. parametrická, ktorá tkvie v tom, že sa vytvára model zdroja ktorého parametre sa v čase menia tak, aby model tvoril vhodnú aproximáciu vzoriek vystupujúcich zo zdroja. Potom sa namiesto aproximácií pôvodných vzoriek prenášajú hodnoty parametrov modelu. Napr. sa môže vytvárať model individuálneho ľudského hovorového signálu pomocou číslicového alebo akustického filtra. Parametrické metódy súvisia so širokou paletou fyzikálnych problémov a často sú špeciálne konštruované len pre jeden typ zdroja. Preto im nemôžeme v tomto skripte venovať dostatok priestoru.

3.2. Kompakčné kódy

V predchádzajúcej časti sme ukázali, akým spôsobom možno

ana
čas
vyj
roz
nev
Kom
zao
Nes
vla
pre
v P
3.2
pam
a P
ozn
P =
H =
nem
ako
zdr
kan
Maj
kaz
vyj
Pri
spe
est
zac
kód
díz
sym

analógový zdroj zmeniť na číslicový (diskrétny) zdroj. V tejto časti sa budeme zaoberať kompakčnými kódmi určenými na zhustené vyjadrenie informácie z takýchto diskretných zdrojov. Na rozdiel od kompresie predstavuje kompakcia operáciu, ktorá nevnaša do spracúvanej informácie prakticky žiadnu chybu. Kompakcia odstraňuje nadbytočnosť zdroja. Najprv sa budeme zaoberať metódou, ktorá využíva pravdepodobnostný model zdroja. Neskôr si niečo povieme o algoritmoch, ktoré si vytvárajú vlastný model počas kompakcie. Kompakcia sa využíva v rôznych prenosových systémoch, ako sú napr. fax, modemy a tiež v počítačovej technike pri uchovávaní informácie.

3.2.1 Huffmanov kód

Najjednoduchším modelom zdroja je diskrétny zdroj bez pamäti. Nech takýto zdroj generuje J symbolov $\{a_1, a_2, \dots, a_J\}$ a pravdepodobnosť každého symbolu $P(a_j)$ je známa, skrátene ju označíme P_j . Diskrétny zdroj bez pamäti je opísaný vektorom $\bar{P} = (P_1, P_2, \dots, P_J)$. Entropia takéhoto zdroja je daná vzťahom

$$H = - \sum_{j=1}^{j=J} P_j \log_2 P_j \quad (3.8)$$

Z teórie informácií je známe, že žiaden kompakčný kód nemôže v priemere použiť menej bitov na symbol daného zdroja, ako je jeho entropia H . Entropia zdroja zohráva pri kódovaní zdroja podobnú úlohu ako kapacita kanála pri kódovaní pre kanál.

Majme zdroj, ktorý generuje 8 symbolov, pričom pravdepodobnosť každého symbolu je známa. Príklad kódu, ktorý efektívne vyjadruje informáciu z tohto zdroja, je v tab. 3.1.

Priemerná dĺžka kódového slova $n' = \sum P_j n_j = 2 \frac{1}{8}$ je v tomto špeciálnom prípade rovná presne entropii zdroja. Uvedený kód má ešte jednu užitočnú vlastnosť. Žiadne kódové slovo netvorí začiatok iného kódového slova. Takéto kódy sa nazývajú prefixné kódy a umožňujú, napriek tomu, že ich kódové slová majú rôznu dĺžku na prijímajúcej strane, jednoznačne rozdeliť postupnosť symbolov na jednotlivé kódové slová.

Tabuľka 3.1

| Symbol | P_j | Kódové slovo | Dĺžka n_j |
|--------|----------|--------------|-------------|
| 0 | 2^{-5} | 00000 | 5 |
| 1 | 2^{-5} | 00001 | 5 |
| 2 | 2^{-5} | 00010 | 5 |
| 3 | 2^{-5} | 00011 | 5 |
| 4 | 2^{-4} | 0010 | 4 |
| 5 | 2^{-4} | 0011 | 4 |
| 6 | 2^{-2} | 01 | 2 |
| 7 | 2^{-1} | 1 | 1 |

Vzniká otázka, ako nájsť kód s minimálnou priemernou dĺžkou kódových slov pre daný zdroj. Z teórie informácií je známe, že ak takýto kód existuje, potom sa dá nájsť aj prefixný kód, ktorý je rovnako optimálny. Binárny prefixný kód, ktorého priemerná dĺžka je minimálna pre zdroj P má nasledujúce vlastnosti:

1. Ak $P_j > P_i$, potom $n_j \leq n_i$.
 2. Dva najmenej pravdepodobné symboly zo zdroja majú pri kódovaní priradené kódové slová rovnakej dĺžky.
 3. Ak existujú v kóde dve kódové slová rovnakej dĺžky, potom sú zhodné vo všetkých pozíciách, okrem poslednej.
- Dôkaz je jednoduché cvičenie, preto sa pokúste vykonať ho samostatne.

Uvedené 3 vlastnosti v sebe skrývajú aj návod, ako nájsť optimálny prefixný kód. Dve kódové slová rovnakej dĺžky môžeme obe považovať za najmenej pravdepodobné v rámci danej dĺžky, pretože ak by sme ich zamenili, priemerná dĺžka kódu sa nezmení. To znamená, že ak vieme zostrojiť optimálny kód pre všetky symboly, okrem posledných dvoch, tak vieme tento kód jednoducho rozšíriť aj na všetky symboly tak, aby bol naďalej optimálny. Táto úvaha vedie k nasledujúcemu postupu. Zlúčme dva najmenej pravdepodobné symboly do nového umelého symbolu, ktorého pravdepodobnosť bude rovná súčtu pravdepodobností pôvodných symbolov. Dostaneme nový zdroj s $J - 1$ symbolmi. Ak nájdeme optimálny kód pre tento nový zdroj, tak pre pôvodný

zdroj
prida
slová
zdroj
zovše
symbo
predcl
zdroj
optim
treba
postuj
konst
svojh
každor
symbo
pomoc

Obr.
Jedn
vych
bitu
dals
blok
zdro
dvo

zdroj stačí vziať kódové slovo priradené umelému symbolu a pridať na jeho koniec raz 0 a raz 1. Takto vzniknuté dve kódové slová potom môžeme ľubovoľne priradiť symbolom pôvodného zdroja, ktorých zlučením vznikol umelý symbol. Ak postup zovšeobecníme, môžeme zlučovať dva najmenej pravdepodobné symboly aj v každom novom zdroji, ktorý dostaneme v predchádzajúcom kroku. Takto môžeme pokračovať, až nám ostane zdroj s dvoma symbolmi, ktorý vieme jednoducho zakódovať optimálnym spôsobom pomocou dvoch kódových slov 0, 1. Potom sa treba vrátiť optimálnym kódovaním podľa už uvedeného návodu postupne až k pôvodnému zdroju. Na obr. 3.6. je ilustrovaná konštrukcia tohto optimálneho prefixného kódu, ktorý sa podľa svojho autora nazýva Huffmanov kód. Pôvodný zdroj je vľavo. Pri každom kroku, pri ktorom sa zlučujú dva najmenej pravdepodobné symboly, sa zároveň konštruuje stromový graf, ktorý je vhodnou pomôckou. Výsledný strom potom môžeme označiť pomocou núl a

Príemernou
dĺžkou je
prefixný
kód
ktorého
sledujúce

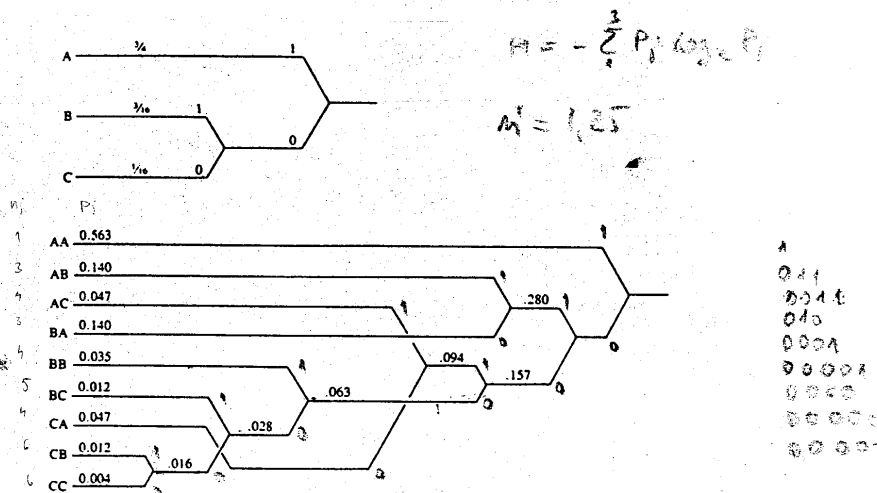
sa majú pri

potom sú

konat ho

ako nájsť
y môžeme
j dĺžky,

kódu sa
kód pre
ento kód
naďalej
účme dva
symbolu,
dobnosti
plmi. Ak
pôvodný



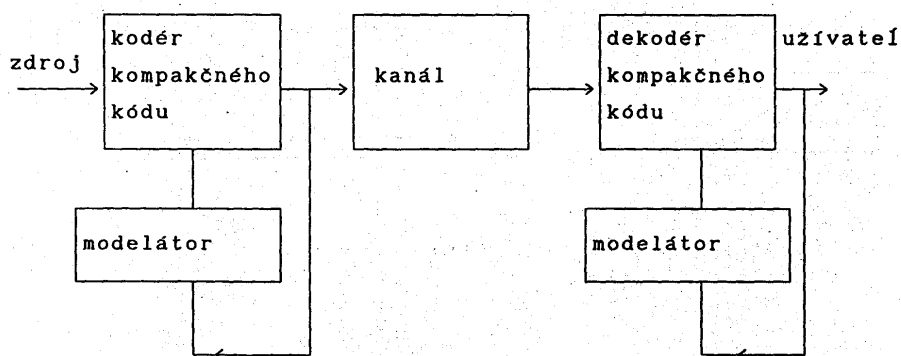
Obr.3.6. Huffmanov kód

Jednotiek tak, že ich priradujeme vždy dvojici vetiev vychádzajúcich z toho istého uzla. Priemerná dĺžka $n' = 1,25$ bitu, čo v porovnaní s entropiou naznačuje, že možno dosiahnuť ďalšie zlepšenie kódovania o 20 %. Možno to realizovať tzv. blokovým kódovaním zdroja. Namiesto jednotlivých symbolov zo zdroja sa kódujú bloky takýchto symbolov. Ak napr., vytvoríme dvojice symbolov z pôvodného zdroja z nášho príkladu, možno

zostrojil Huffmanov kód, ktorého priemerná dĺžka kódových slov $n' = 1,035$ bit/zdrojový symbol.

3.2.2 Univerzálne kódy pre kompakciu

V praxi najčastejšie nepoznáme pravdepodobnostný model zdroja a priori. Existuje však možnosť konstruovať model priamo zo spracúvaných údajov. Príklad blokovej schémy prenosového systému využívajúceho tento postup je na obr. 3.7. V ľubovoľnom mieste spracúvanej postupnosti údajov musia kodér a dekodér používať identický model. Dekodér však má vždy k dispozícii len údaje, ktoré už boli dekódované. Preto aj na vysielačnej strane sa môžu na tvorbu modelu využiť len údaje, ktoré už boli odvysielané. Model na začiatku vysielačnej strany nemusí byť správny, ale počas spracovania údajov sa spravidla postupne zlepšuje.



Obr. 3.7. Princíp univerzálneho kompakčného kódovania s modelátormi

Dobry algoritmus konstrukcie modelu spôsobuje, že táto konvergencia je pomerne rychla. Kompakcia sa potom stava efektivnou.

V mnohých aplikáciách môže byť zdroj dokonca nestacionárny. Preto sa ani nedá hovoriť o jeho entropii. Univerzálny spôsob kompaktie však aj v takýchto prípadoch často dáva uspokojivé výsledky.

vstupn
údaje

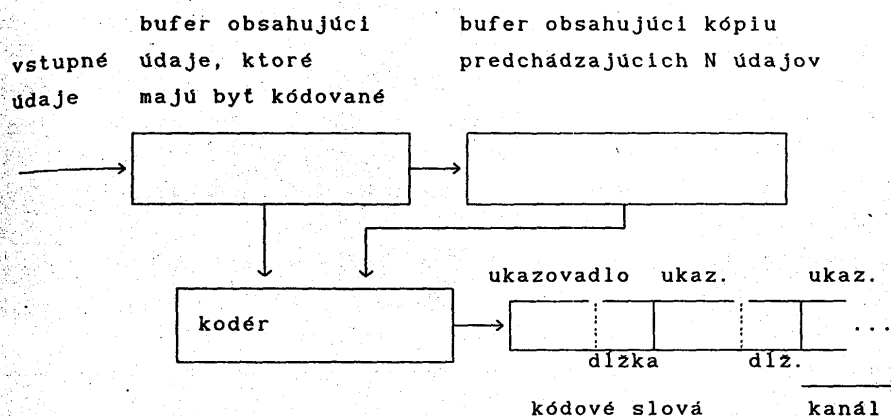
prijat
kódové

Obr. 3.

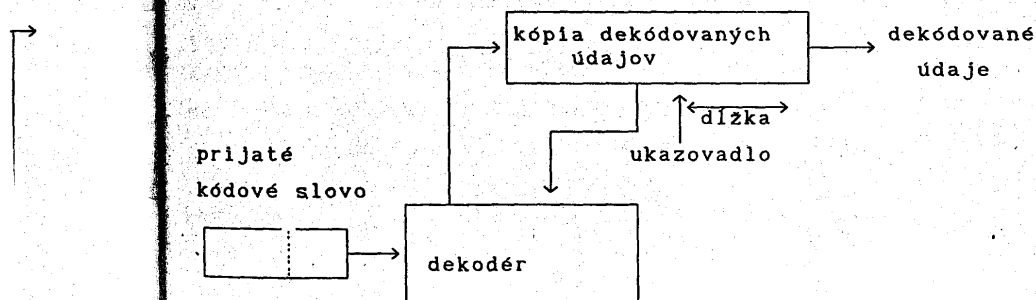
N
pravde
kódu
ilustr
postup
identif
boli
buffer
s čas

ových slov

tný model
 lel priamo
 enosového
 ubovoInom
 a dekodér
 zicii len
 ej strane
 uz boli
 správny,
 zlepšuje.



živateľ



Obr. 3.8. Univerzálny kompakčný kód Ziv - Lempel.

ódovania

ze táto
 m stáva
 dokonca
 atropii.
 ch často

Nie každý univerzálny kompakčný kód si vyžaduje tvorbu pravdepodobnostného modelu. Príkladom takéhoto univerzálneho kódu je jedna z variantov Ziv Lempelovho kódu, ktorý je ilustrovaný na obr. 3.8. Kodér tohto kódu rozdeľuje vstupujúcu postupnosť údajov na menšie časti rôznych dĺžok. Na identifikáciu týchto častí postupností využíva údaje, ktoré už boli zakódované a ktoré sú uložené v buferi dĺžky N . Tento bufer prehladáva a hľadá v ňom časť, ktorá by bola totožná s časťou údajov bezprostredne čakajúcou na zakódovanie (s tzv.

prefixom). Najdlhší prefix, pre ktorý nájde ekvivalent, je potom zakódovaný kódovým slovom, ktoré pozostáva z dvoch častí. Prvá časť tvorí tzv. ukazovadlo (pointer), ktoré udáva, kde v buferi začína reťazec predstavujúci kópiu kódovaného prefixu. Druhá časť kódového slova udáva dĺžku prefixu.

Dekodér je vybavený rovnakým buferom, v ktorom drží kópie predošlých dekodovaných údajov. Na základe prijatého slova je schopný zrekonštruovať posledný prefix tým, že ho vyčíta z príslušného miesta bufera. Odovzdá ho ako dekodovaný ďalej a zároveň jeho pomocou neho inovuje obsah svojho bufera.

Kompakcia údajov vďaka pokroku technológie v súčasnosti preniká do moderných prenosových systémov a prispieva k ich efektívnosti.

4 Modulácia

4.1. Prenos v základnom pásme

Analógový kanál (waveform channel) je kanál, do ktorého môžu vstupovať signály, ktoré sa dajú reprezentovať funkciami spojitémi v čase a v hodnote. V reálnych kanáloch je zväčša signál obmedzený výkonovo a frekvenčne (kanál prenáša len frekvencie v určitom pásme). Obmedzenia, ktoré kladie kanál, je rozumné aplikovať aj na vstupné signály. Prakticky nemá zmysel dávať na vstup signály s frekvenciami, ktoré aj tak nemôžu byť prenesené.

Analógový kanál môže byť premenený na diskrétny kanál, ak použijeme na prenos množinu vzájomne rozlíšiteľných signálov, ktoré nazývame impulzmi. Číslicový modulátor premeňa postupnosť diskrétnych symbolov z predchádzajúceho bloku alebo samotného zdroja na postupnosť impulzov z množiny, ktorú niekedy nazývame modulačnou abecedou. Modulátor vykonáva túto transformáciu preto, aby číslicové údaje boli reprezentované signálmi, ktoré sú akceptovateľné pre prenos kanálom.

→ Požiadavky, ktoré by pritom mal splniť, sú tieto:

- prispôbiť frekvenčné charakteristiky signála ku kanálu,
- minimalizovať vysielač výkon,
- udržať malú pravdepodobnosť chyby P_E v kanáli.

Treba poznamenať, že kvalitu signálu nemožno posúdiť bez

uváži
obn
prec

4.1.

post
kaná
do
nemu
biná
biná

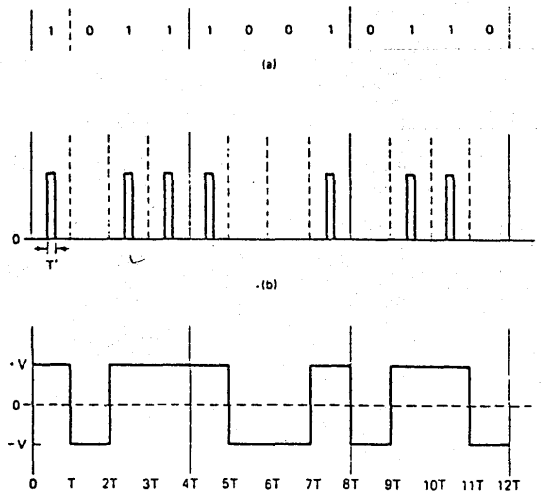
Obr.

Prij
char
V ča
je :
(iná
čo i

alent, je uvážena demodulácie. Rozhodujúcou je schopnosť demodulátora obnoviť postupnosť symbolov vstupujúcich do modulátora po prechode signálu kanálom so sumom. va, kde v prefixu.

4.1.1 Binárne signály pre základné pásmo

Ulohou modulátora je v dvojkovom prípade premeniť postupnosť binárnych čísel na signál $s(t)$ vhodný na prenos kanálom. Je zrejmé, že v systéme aj postupnosť bitov vstupujúca do modulátora je vyjadrená nejakými impulzmi, ktoré však nemusia byť vhodné pre prenos. Napr. na obr. 4.1b je každá binárna jednotka vyjadrená pomocou úzkeho impulzu a každá binárna nula absenciou impulzu.



Obr. 4.1. Vyjadrenie binárnej informácie pomocou impulzov.

Prijímač musí rozhodnúť o tom, či v intervale T , ktorý nazývame charakteristickým intervalom, je, alebo nie je prítomný impulz. V časti 4.1.4 uvidíme, že pravdepodobnosť správneho rozhodnutia je funkciou energie, ktorú impulz donesie na vstup prijímača (ináč povedané plochou pod impulzom). Preto je výhodné impulz čo možno najviac rozšíriť. Ak ho rozšírime na maximum v rámci

charakteristického intervalu dostaneme signál znázornený na obr. 4.1. c. Tento signál môžeme charakterizovať prítomnosťou alebo neprítomnosťou impulzu v každom charakteristickom intervale, alebo pri inom pohľade pomocou prechodov medzi dvoma možnými úrovňami na hraniciach medzi charakteristickými intervalmi v tzv. charakteristických okamihoch.

→ Binárne signály určené pre základné pásmo sa tiež zvyknú označovať ako linkové kódy. Vo všeobecnosti je vhodné, ak linkový kód má nasledujúce základné vlastnosti:

1. podporuje synchronizáciu,
2. má vhodné frekvenčné spektrum,
3. umožňuje ľahkú detekciu a dekódovanie,
4. umožňuje detekciu, resp. korekciu chýb.

Venujme sa teraz niektorým základným charakteristikám linkových kódov. Podľa polarity napätia sa delia linkové kódy na unipolárne (UP) a bipolárne (BP). Unipolárne využívajú iba jednu nenulovú úroveň, napr. + 1V pre 1 a 0V pre 0. Bipolárny signál sa vyznačuje dvoma nenulovými úrovňami, napr. + 1V pre 1 a - 1V pre 0. Iným parametrom, ktorý rozhoduje o zatriedení linkového kódu, je čas, ktorý obsadzuje impulz v rámci charakteristického intervalu. Ak impulz zaberá celý interval, označuje sa ako NRZ (nonreturn to zero). Ak je čas impulzu menší, označuje sa ako RZ (return to zero). Rôzna polarita a prítomnosť alebo neprítomnosť vlastností návratu k nule môžu byť skombinované. Na obr. 4.2. je znázornených 5 základných druhov linkových kódov.

Signál AMI (alternate mark inverzion) sa niekedy označuje aj názvom pseudotrojkový kód. Názov vyjadruje skutočnosť, že dvojkovým symbolom je priradovaný trojkový signál.

Ďalším dôležitým parametrom linkových kódov je sírka pásma potrebná na prenos ich signálov. Potrebnú šírku prenosového pásma možno posúdiť na základe odhadu najvyššej základnej frekvencie príslušného signálu. Je určená najhorším prípadom postupnosti, t.j. takým prípadom, kedy sa najrýchlejšie striedajú úrovne. Na obr. 4.2. sú tieto prípady ilustrované. Signál UPNRZ má najvyššiu základnú frekvenciu vtedy, ak sa v dvojkovej postupnosti symbolov striedajú jednotky a nuly. Trvanie periódy základnej frekvencie zodpovedá času dvoch dvojkových symbolov, a preto je táto frekvencia rovná

Obr. 4.
UPRZ,
polovi
UPRZ J
je v t
Pre s
alebo
rýchlo
linkov
prijím
prijat
množst
BPNRZ,
neobsa
Signál
zodpo
Je pro

nený na
omnosťou
istickom
lzi dvoma
stickými

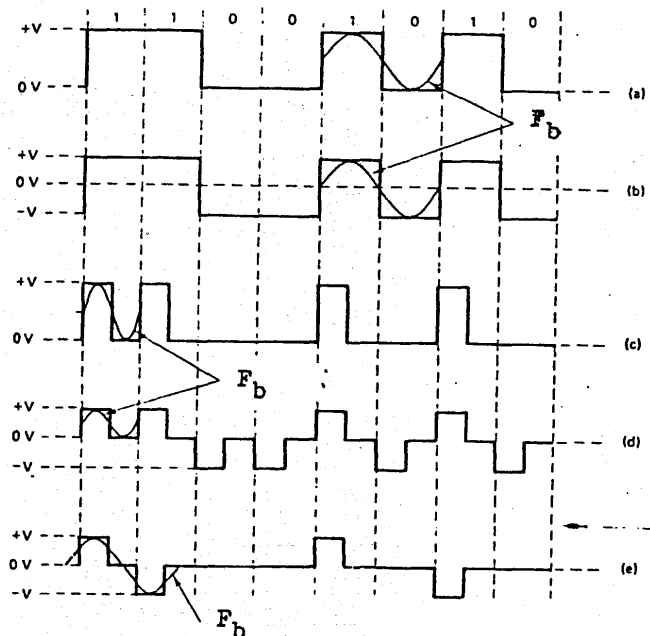
z zvyknú
dné, ak

istikám
vé kódy
vajú iba
ipolárny
1V pre 1
atriedení
v rámci
interval,

impulzu
larita a
ule môžu
ákladných

čuje aj
nosť, že

ka pásma
enosového
základnej
prípado
ýchlejšie
stované.
ak sa
a nuly.
su dvoch
a rovná



Obr.4.2. Základné druhy linkových kódov: a) UPNRZ, b) BPNRZ, c) UPRZ, d) BPRZ, e) BPRZ-AMI

polovičnej rýchlosti prenosu dvojkových symbolov. Pre signál UPRZ je najhorším prípadom sled jednotiek. Základná frekvencia je v tomto prípade rovná rýchlosti prenosu dvojkových symbolov. Pre signál BPRZ je najhorším prípadom postupnosť jednotiek alebo núl. Šírka pásma potrebná na jeho prenos je určená rýchlosťou prenosu dvojkových symbolov.

Analyzujeme ďalej, do akej miery tieto základné druhy linkových kódov podporujú synchronizáciu. Aby bolo možné na prijímajúcej strane obnovovať synchronizáciu na základe prijatého signálu, treba, aby signál obsahoval dostatočné množstvo prechodov medzi jednotlivými úrovňami. Signály UPNRZ a BPNRZ, ak sa v nich prenášajú dlhé sledy jednotiek a núl, neobsahujú takéto prechody, a teda nepodporujú synchronizáciu. Signály BPRZ obsahujú prechody v každom intervale zodpovedajúcom jednému dvojkovému signálu bez ohľadu na to, či je prenášaná jednotka alebo nula. Tieto signály sú preto vhodné

na podporu synchronizácie.

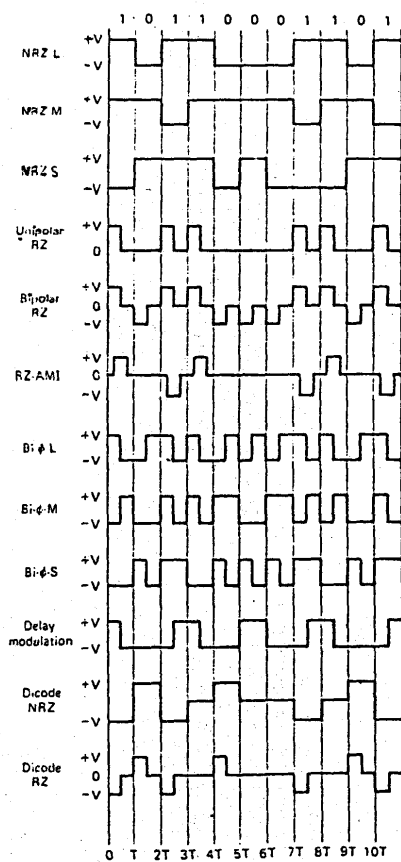
Empirickými prístupmi sa podarilo na základe skúseností zostrojiť veľké množstvo rôznych binárnych linkových kódov obr. 4.3.

Binárne signály môžeme rozdeliť na nasledujúce podskupiny:

NRZ - L (L - level),

NRZ - M (M - mark),

NRZ - S (S - space).



Obr. 4.3. Niektoré linkové kódy

Pri signáli NRZ - L je jednotka reprezentovaná jednou úrovňou a nula druhou úrovňou. Zmena úrovni nastane vždy, ak v kódovanej postupnosti nasleduje jednotka za nulou alebo nula

za
nul
čas
kód
prei
kód
napl
zázi

AMI.
bi -
bi -
bi -
DM (

v op
médi

umie
Je
polo

char
jedn
char
prec

char
nepr
prec

upr
ak
nul:

kód
pri:

za jednotkou.

úseností
h kódov
skupiny:

Pri NRZ - M jednotka je reprezentovaná zmenou úrovne a nula je vyjadrená neprítomnosťou zmeny úrovne. Tento spôsob sa často označuje ako diferenciálne kódovanie. Diferenciálne kódovanie je užitočné najmä v prípadoch, ak môže dôjsť pri prenose k invertovaniu polaritu signálu. Diferenciálne kódovanie totiž umožňuje správne detekovať prijímané údaje aj napriek takejto poruche. NRZ - M sa najčastejšie používa pri zázname na magnetické pamäťové médiá.

NRZ - S je komplementárny spôsob k NRZ - M.

Skupinu RZ možno rozdeliť na podskupinu UPRZ, BPRZ a RZ - AMI. Ďalšou skupinou sú tzv. fázovo kódované signály:
bi - ϕ - L (bi phase level - Manchester kód),
bi - ϕ - M (bi phase mark),
bi - ϕ - S (bi phase space),
DM (delay modulation - Millerov kód).

Metódy fázového kódovania sa používajú predovšetkým v optokomunikačných systémoch, ďalej pri zázname na magnetické médiá a v niektorých družicových telemetrických systémoch.

Pri bi - ϕ - L jednotka je vyjadrená impulzom šírky 0,5T umiestneným v ^{prvej} polovici charakteristického intervalu. Nula je reprezentovaná impulzom šírky 0,5T umiestneným v druhej polovici charakteristického intervalu.

Pri bi - ϕ - M prechod nastáva na začiatku každého charakteristického intervalu. V prípade, že je prenášaná jednotka nastane ďalší prechod oneskorený o polovicu charakteristického intervalu. Ak je prenášaná nula, ďalší prechod nenastane.

Pri bi - ϕ - S prechod tiež nastane na začiatku každého charakteristického intervalu. Jednička je vyjadrená neprítomnosťou ďalšieho prechodu, nula naopak prítomnosťou prechodu oneskoreného o 0,5T.

Pri DM jednotka je reprezentovaná prechodom medzi úrovňami uprostred intervalu, nula je vyjadrená neprítomnosťou prechodu ak nenasleduje ďalšia nula. V prípade, že nasleduje ďalšia nula, prechod je umiestnený na koniec intervalu.

i jednou
vždy, ak
ebo nula

Teória translačných kódov, o ktorej sa zmienime v časti kódovania pre kanál, umožňuje vo veľkej miere nahradiť empirické prístupy konštrukcie. Požiadavky na linkové kódy je potom možno

formulovať ako určité obmedzenia na diskretný kanál, ktoré treba splniť. Napr. zákaz opakovania rovnakých symbolov v tvare ako n-krát a pod. v súvislosti so zlepšením podmienok synchronizácie. Teória translačných kódov potom umožňuje zostrojiť kódy, resp. linkové signály vyznačujúce sa presne vyžadovanými charakteristikami pre takéto kanály.

4.1.2 Detekcia binárnych symbolov pri Gaussovom šume

Binárne signály $s_1(t)$ a $s_2(t)$, ktoré zodpovedajú binárnym symbolom a sú prenášané v časovom intervale $\langle 0; T \rangle$ môžeme zapísať takto

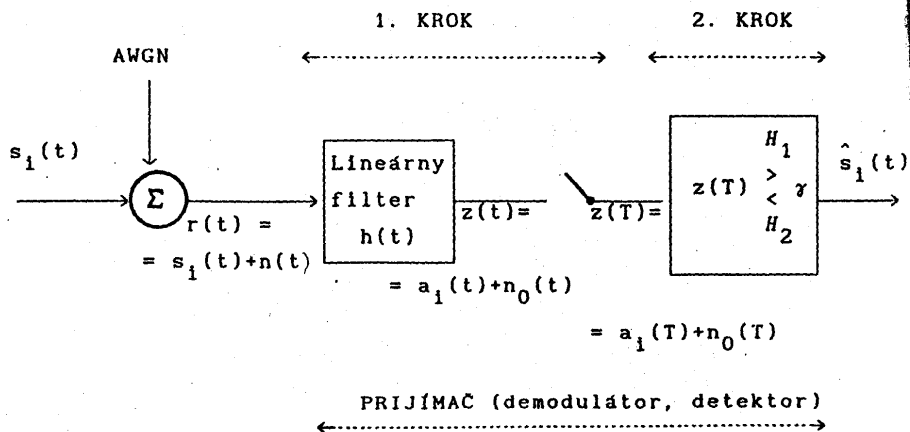
$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t), & 0 \leq t \leq T & \text{pre } 1 \\ s_2(t), & 0 \leq t \leq T & \text{pre } 2 \end{cases} \quad (4.1)$$

Prijatý signál $r(t)$ môžeme vyjadriť vztahom

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad i = 1, 2; \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.2)$$

pričom $n(t)$ predstavuje šum AWGN.

Na obr. 4.4. sú ilustrované dva kroky, ktoré treba vykonať pri detekcii. Prvý krok tkvie v transformácii $r(t)$ na vzorku $z(t = T)$.



Obr.4.4. Dva základné kroky pri detekcii.

anál, ktoré dá sa uskutočniť lineárnym filtrom, za ktorým je zapojený
 mbolov viac vzorkovací obvod. Ak chceme dostať optimálny spôsob príjmu,
 ím podporu vtedy treba použiť buď spriahnutý filter, alebo korelátor.
 m umožňujú. Zdôvodnenie pozri v časti 4.1.4.

sa presne Na začiatku každého intervalu T sú počiatkové podmienky
 filtra alebo korelátora nastavené na nulové hodnoty. Na konci
 intervalu T sa na výstupe bloku 1 na obr. 4.4. objaví vzorka
 e $z(T)$. Predpokladali sme, že sum na vstupe lineárneho filtra je
 AWGN. Lineárna operácia spôsobí, že na výstupe filtra opäť
 binárnym dostaneme Gaussov proces [10]. Za uvedeného predpokladu platí

$$z(T) = a_1(T) + n_0(T) \quad (4.3)$$

kde $a_1(T)$ je zložka spôsobená signálom $s_1(t)$ a $n_0(T)$ je zložka
 spôsobená sumom. Skráteno budeme používať tiež označenie a_1 ,
 (4.1) s_1 , n_0 , z .

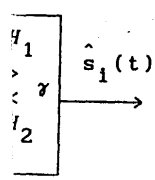
Zložka sumu n_0 je Gaussova náhodná premenná s nulovou strednou
 hodnotou, a preto z je Gaussova náhodná premenná so strednou
 hodnotou a_1 alebo a_2 v závislosti od toho, či bola vyslaná 1
 (4.2) alebo 0. Hustota pravdepodobnosti $p(n_0)$ sa dá vyjadriť vzťahom

ba vykonať
 na vzorku

$$p(n_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n_0}{\sigma_0} \right)^2 \right] \quad (4.4)$$

OK kde σ_0^2 označuje disperziu. Potom pre podmienené hustoty
 pravdepodobnosti platí

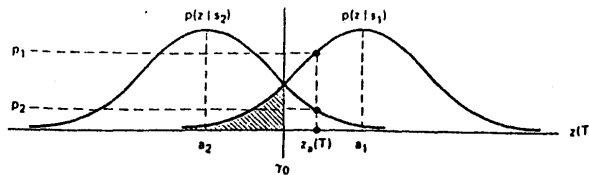
----->



$$p(z/s_1) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_1}{\sigma_0} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

$$p(z/s_2) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_2}{\sigma_0} \right)^2 \right]$$

Podmienené hustoty pravdepodobnosti sú znázornené na obr. 4.5.
 Rozdelenie vpravo $p(z/s_1)$, znázorňuje hustotu pravdepodobnosti
 za predpokladu, že bol vyslaný signál s_1 . Podobne $p(z/s_2)$
 znázorňuje hustotu pravdepodobnosti $z(T)$ za predpokladu, že bol
 vyslaný signál s_2 . Na x-ovej osi sú vynesené všetky možné
 hodnoty $z(T)$.



Obr. 4.5. Podmienené hustoty pravdepodobnosti $p(z/s_1)$, $p(z/s_2)$

V druhom kroku detekcie treba hodnotu $z(T)$ porovnať so zvolenou hraničnou hodnotou γ tak, aby bolo možné odhadnúť, ktorý zo signálov s_1 , s_2 bol vyslaný. Rozhodnutie môžeme symbolicky označiť vzťahom

$$\begin{array}{l} H_1 \\ z(T) > \gamma \\ H_2 \\ z(T) < \gamma \end{array} \quad (4.6)$$

kde H_1 , H_2 sú dve možné hypotézy, H_1 - bol vyslaný s_1 , H_2 - bol vyslaný s_2 .

Vzniká otázka, ako zvoliť rozhodovaciu hranicu γ . Najčastejšie sa postupuje podľa kritéria minimálnej pravdepodobnosti chyby, ktorá vedie k nasledovnému vzťahu

$$\begin{array}{l} H_1 \\ P(s_1)p(z/s_1) > P(s_2)p(z/s_2) \\ H_2 \\ P(s_1)p(z/s_1) < P(s_2)p(z/s_2) \end{array} \quad (4.7)$$

kde $P(s_1)$, $P(s_2)$ sú apriórne pravdepodobnosti vyslania signálov s_1 , s_2 . V prípade, že $P(s_1) = P(s_2)$ a $P(z/s_1)$ ($i = 1, 2$) sú symetrické a platí

$$\begin{array}{l} H_1 \\ z(T) > \frac{a_1 + a_2}{2} = \gamma_0 \\ H_2 \\ z(T) < \frac{a_1 + a_2}{2} = \gamma_0 \end{array} \quad (4.8)$$

kde γ_0 označuje optimálnu hranicu pre rozhodovanie.

4.1.

možne
príj
tejt

P(e/s

Podob

P(e/s

Celko
v kanP_B =P_B =P_B =

V prí

P_B =

a vďa

P_B =

preto

P_B = $\gamma_0 =$

4.1.3 Pravdepodobnosť chyby v binárnom prípade

V binárnom prípade môže chyba nastať dvoma spôsobmi. Prvá možnosť je, že vyslaný signál $s_1(t)$ a vplyvom šumu na strane príjmu dostaneme hodnotu $Z(T)$ menšiu ako γ_0 . Pravdepodobnosť tejto udalosti, ktorá je ilustrovaná srafovaním na obr 4.5. Je

$$P(e/s_1) = P(H_2/s_1) = \int_{-\infty}^{\gamma_0} p(z/s_1) dz \quad (4.9)$$

vnáša so
šahadnúť,
môžeme

Podobne, ak vyšleme s_2 , platí

$$P(e/s_2) = P(H_1/s_2) = \int_{\gamma_0}^{+\infty} p(z/s_2) dz \quad (4.10)$$

(4.6) Celková pravdepodobnosť chyby P_B jedného binárneho symbolu v kanáli je

$$P_B = \sum_{i=1}^2 P(e/s_i) \cdot P(s_i) \quad (4.11)$$

anicu γ .
minimálnej
šahu

$$P_B = P(s_1)P(e/s_1) + P(s_2)P(e/s_2) \quad (4.12)$$

$$P_B = P(s_1)P(H_2/s_1) + P(s_2)P(H_1/s_2) \quad (4.13)$$

V prípade, že $P(s_1) = P(s_2) = \frac{1}{2}$

$$P_B = \frac{1}{2} P(H_2/s_1) + \frac{1}{2} P(H_1/s_2) \quad (4.14)$$

a signálov
1, 1) sú

$$P_B = P(H_1/s_1) = P(H_2/s_1) \quad (4.15)$$

preto

$$P_B = \int_{a_1+a_2}^{\infty} p(z/s_2) dz \quad (4.16)$$

$$\gamma_0 = \frac{a_1+a_2}{2}$$

dosadením (4.5)

$$P_B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_2}{\sigma_0} \right)^2 \right] dz \quad (4.17)$$

substitúciou $u = \frac{z - a_2}{\sigma_0}$ dostávame

$$du = \frac{1}{\sigma_0} dz \quad y_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} \rightarrow z$$

$$P_B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right] du = Q \left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0} \right) \quad (4.18)$$

$u = \frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}$

Existujú tabuľky, v ktorých sa nachádza hodnota $Q(x)$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right] du \quad (4.19)$$

4.1.4 Spriahnutý filter

Spriahnutý filter je lineárny filter zostrojený s cieľom maximalizovať pomer výkonu signálu k výkonu šumu (pomer signál-šum) na svojom výstupe pre konkrétny tvar signálu. Predpokladajme, že na vstupe lineárneho, časovo invariantného filtra je známy signál $s(t)$ a AWGN, $n(t)$. V čase $t = T$ vzorkovací obvod vytvára z výstupného signálu filtra vzorku $z(T)$ zloženú z časti vyvolanej signálom a_1 a z časti n_0 vyvolané šumom. Disperziu, ktorá predstavuje stredný výkon šumu na výstupe filtra, označme σ_0^2 . Potom pomer okamžitého výkonu signálu k šumu v čase $t = T$ je daný vzťahom

$$\left(\frac{S}{N} \right)_T = \frac{a_1^2}{\sigma_0^2} \quad (4.20)$$

Nasím
maxim
zrejň

a(t)

kde S
funkc
optim
výkon
výkon

$\sigma_0^2 =$

Zo vz

$\left(\frac{S}{N} \right)$

Na to
tu po

$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)$

Rovno
ľubov
 $f_2(x)$
môžem

Naším úsilím je nájsť prenosovú funkciu $H_0(f)$ filtra, ktorá by maximalizovala pomer daný vzťahom (4.20). Pre $a(t)$, zrejme, platí

$$(4.17) \quad a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df \quad (4.21)$$

kde $S(f)$ je Fourierová transformácia $s(t)$ a $H(f)$ je prenosová funkcia lineárneho filtra. (Zatiaľ nie je zabezpečené, aby bol optimálny.) Ak sa sum na vstupe vyznačuje dvojstrannou výkonovou hustotou spektra $\frac{N_0}{2}$, potom na výstupe dostávame výkon sumu σ_0^2 , pre ktorý platí [10]

$$(4.18) \quad \sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (4.22)$$

Zo vzťahov (4.20), (4.21) a (4.22) vyplýva

$$(4.19) \quad \left[\frac{S}{N} \right]_T = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad (4.23)$$

Na to, aby sme našli optimálnu prenosovú funkciu $H_0(f)$ musíme tu použiť Schwarzovu nerovnosť

$$(4.24) \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(x)dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx$$

Rovnosť nastane práve vtedy, ak $f_1(x) = kf_2^*(x)$ kde k je ľubovoľná konštanta a $f_2^*(x)$ konjugovaná funkcia k funkcii $f_2(x)$. Ak teraz stotožníme $f_1(x)$ s $H(f)$ a $f_2(x)$ s $S(f)e^{j2\pi fT}$ môžeme písať

$$(4.20)$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (4.25) \quad h(t)$$

dosadením do (4.23) dostávame

$$\left(\frac{S}{N} \right)_T \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (4.26)$$

a

$$\max \left(\frac{S}{N} \right)_T = \frac{2E}{N_0}, \quad (4.27) \quad z(t)$$

kde E je energia signálu $s(t)$ vstupujúceho do filtra, pre ktorý platí

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (4.28) \quad z(t)$$

Maximum $\left(\frac{S}{N} \right)_T$ závisí len od energie signálu a nie od jeho tvaru. Rovnosť vo vzťahu (4.26) nastane práve vtedy, ak použijeme filter s optimálnou prenosovou funkciou $H_0(f)$, pre ktorú platí

$$H_0(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi fT} \quad (4.29) \quad \text{Pre}$$

alebo

$$h(t) = F^{-1}\{kS^*(f)e^{-j2\pi fT}\} \quad (4.30) \quad \text{Oper}$$

Ak $s(t)$ je reálny signál, potom platí

$$(4.25) \quad h(t) = \begin{cases} ks(T - t); & 0 \leq t \leq T \\ 0; & \text{ináč} \end{cases} \quad (4.31)$$

4.1.5 Náhrada spriahnutého filtra korelátorom

(4.26) Základná vlastnosť spriahnutého filtra je, že jeho impulzná odpoveď je zrkadlovým odrazom príslušného signálu, ktorý je oneskorený o čas T. Výstup $z(t)$ filtra sa dá vyjadriť takto

$$(4.27) \quad z(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (4.32)$$

pre ktorý Dosadením (4.31) do (4.32) dostávame

$$(4.28) \quad z(t) = \int_0^t r(\tau)s[T - (t - \tau)]d\tau = \int_0^t r(\tau)s(T - t + \tau)d\tau \quad (4.33)$$

Pre čas $t = T$ platí

od jeho
tedy, ak
 $z_0(f)$, pre

$$z(T) = \int_0^T r(\tau)s(\tau)d\tau \quad (4.34)$$

(4.29) Operácia na pravej strane (4.34) sa nazýva korelácia $r(t)$ s $s(t)$. Vo všeobecnosti za predpokladu, že v prijímači vykonáme koreláciu s každým z množiny použitých signálov $s_i(t)$ ($i = 1, \dots, M$), tak maximálna hodnota $z_i(T)$ indikuje to, že prijatý signál sa najviac podobá signálu $s_i(t)$.

(4.30) Treba poznamenať, že výstup z korelátoru a spriahnutého filtra sú rovnaké len v čase $t = T$.

4.1.6 Aplikácia spriahnutého filtra

Vo vzťahu (4.8) sme určili optimálnu rozhodovaciu úroveň γ_0 . Pre realizáciu optimálneho procesu detekcie je však

potrebné okrem toho ešte nájsť optimálny filter, t. j. taky, ktorý by maximalizoval argument funkcie $Q(x)$ (aby P_B bola minimálna). Treba teda nájsť filter, ktorý by maximalizoval

$$\frac{a_1 - a_2}{\sigma_0} \rightarrow \text{keď } 2 \text{ lito } \begin{matrix} \text{to je konstanta } a \\ \text{neponože mi pri maximalizácii} \end{matrix} \quad (4.35)$$

alebo, čo je to isté

$$\left(\frac{a_1 - a_2}{\sigma_0} \right)^2 \quad \left(\frac{a_1 - a_2}{\sigma_0} \right)^2 \quad (4.36)$$

kde $a_1 - a_2$ je rozdiel zložiek signálu na výstupe filtra v čase $t = T$ a druhá mocnina tohto rozdielu predstavuje okamžitý výkon tzv. rozdielového signálu. Nech je filter teda spriahnutý vzhľadom na tento rozdielový signál $[s_1(t) - s_2(t)]$. Z (4.20) a (4.27) vyplýva pre čas $t = T$

$$\left(\frac{S}{N} \right)_T = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_0^2} = \frac{2E_d}{N_0} \quad (4.37)$$

$(a_1 - a_2)^2 = E_d$

kde E_d je energia rozdielového signálu na výstupe filtra

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \quad (4.38)$$

Využitím (4.18) a (4.37) dostávame

$$P_B = Q \left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}} \right) \quad P_B = Q \left(\sqrt{\frac{E_d}{2\sigma_0^2}} \right) \quad P_B = Q \left(\frac{a_1 - a_2}{\sigma_0} \right) \quad (4.39)$$

4.1.7 M-árne signály pre základné pásmo

Pri binárnom spôsobe modulácie v každom charakteristickom intervale T môže byť prenášaný najviac 1 bit informácie. Pri M-árnych signáloch možno prenášať v tom istom intervale T aj niekoľko bitov. Vo všeobecnosti musíme respektovať pri realizácii signálov obmedzenia na ich šírku pásma a tiež na ich

vykon. ktoré nazývajú pásmom prakticky signál simple charak šírku pásma aby bo

Na obr. nazývajú konstante Mózeme $s_1(t)$ Napr.

tento shift 2 bity

. J. taky,
 P_B bola
 malizoval

(4.35)

vykon. Prakticky vsak casto mozo rozdelit kanaly podľa toho, ktoré z týchto obmedzení je kritickejsie. Podľa toho ich nazývame kanálmi s obmedzeným výkonom a kanálmi s obmedzeným pásom. V prípade, že obmedzenie pásma v kanáli môžeme prakticky zanedbať, môžeme použiť v základnom pásme M-árne signály z množiny ortogonálnych, biortogonálnych alebo simplexných, ktoré sú opísané v časti 5. Pre všetky je charakteristické, že s rastom M podstatne vzrastajú nároky na šírku frekvenčného pásma.

(4.36)

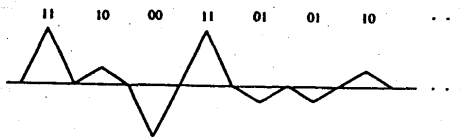
V opačnom prípade, ak v kanáli vôbec nemožno zväčšiť pásma sa najčastejšie používa iba jedna forma impulzu, a na to, aby bolo možné zväčšiť M, treba použiť viac amplitúd impulzu.

tra v čase
 zity výkon
 spriahnutý
 Z (4.20) a



Obr. 4.6. M-stavová konstelácia signálov

(4.37)



tra

Obr. 4.7. Príklad ASK

(4.38)

Na obr. 4.6. sú znázornené impulzy s M amplitúdami, ktoré nazývajú tiež M-stavové modulačné abecedy, alebo M-stavové konstelácie signálov. Každý bod predstavuje jednu amplitúdu. Môžeme ich opísať vzťahom

$$s_i(t) = A_i s(t); \quad 0 \leq t \leq T, \quad (i = 1, \dots, M) \quad (4.40)$$

(4.39)

Napr. na obr. 4.7.

$$A_i = \begin{cases} -3A & \text{pre } 00 \\ -A & \text{01} \\ A & \text{10} \\ +3A & \text{11} \end{cases} \quad (4.41)$$

eristickom
 ácie. Pri
 vale T aj
 ovat pri
 ez na ich

Tento 4-stavový signál, ktorý môžeme označiť ako ASK (amplitude shift keying), prenáša v každom charakteristickom intervale T 2 bity.

Stredná energia na jeden symbol v signáli pri $M = 2^k$ je

$$E_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M s_i^2(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.42)$$

a stredná energia na bit

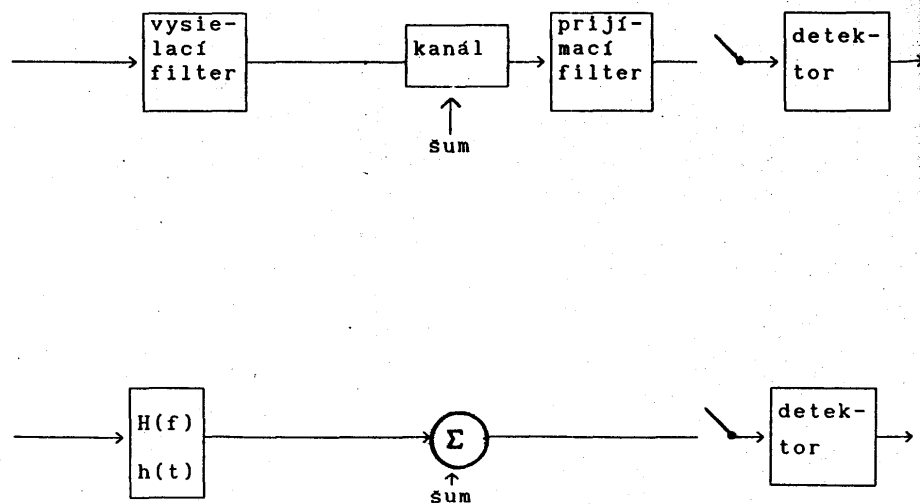
$$E_B = \frac{E_c}{\log_2 M} = \frac{E_c}{k} \quad (4.43)$$

Napr. pre konšteláciu na obr. 4.7.

$$E_c = 5A^2, \quad E_B = \frac{5A^2}{2} \quad (4.44)$$

4.1.8 Medzisymbolová interferencia

Na obr. 4.8. je schematicky znázornený prenos v základnom pásme z hľadiska filtrácie.



Obr. 4.8. Filtrácia v základnom pásme

Vysielací filter s prenosovou funkciou $H_1(f)$ ohraničuje pásmo

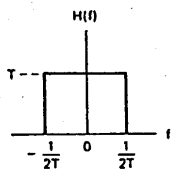
- impulzov tak, aby ich bolo možné preniesť kanálom s ohraničeným frekvenčným pásmom. Kanál spôsobuje okrem toho, že pridáva k signálu šum, pri prenose až skreslenie signálu, ktoré možno opísať pomocou filtra s prenosovou funkciou $H_2(f)$. Úloha filtra na strane prijímača je kompenzovať vplyv vysielačieho filtra a kanála (nazývame ho korektorom). Pre jednoduchosť uvažujme, že je použitý signál NRZ-L a za korektorom je vzorkovací obvod, a
- (4.43) detektor sa rozhoduje, že bola vyslaná 1, ak má vzorka kladnú hodnotu a že bola vyslaná 0, ak má vzorka zápornú hodnotu. Na obr. 4.8. je model systému, v ktorom sú všetky vyššie spomenuté filtre zlúčené do jedného filtra $H(f)$

$$(4.44) \quad H(f) = H_1(f)H_2(f)H_3(f) \quad (4.45)$$

V dôsledku filtrácie dochádza k deformácii jednotlivých impulzov a k ich prekryvaniu. Tento jav sa nazýva medzisymbolová interferencia (ISI) - intersymbol interference.

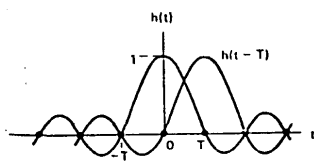
Nyquist v [11] formuloval problém nájsť taký tvar prijatého impulzu, ktorý by nevykazoval na vstupe detektora ISI. Ukázal, že za jednu sekundu možno teoreticky bez ISI prenášať R_s symbolov v pásme, ktoré má minimálne $\frac{R_s}{2}$ Hz. Dá sa to dosiahnuť za predpokladu, že prenosové pásmo tvorí tzv. Nyquistov filter s pravouhlou $H(f)$ podľa obr. 4.9. a).

→ detek-
tor



Obr. 4.9. Nyquistov filter

detek-
tor →



Obr. 4.10. Výstup Nyquistovho filtra pri prenose dvoch impulzov $\delta(t)$ za sebou, pričom druhý je oneskorený o čas T sekúnd.

čuje pásmo

Ak na vstup uvedeného filtra dáme ideálny Diracov impulz, na výstupe dostaneme impulz

$$h(t) = \text{sinc} \frac{t}{T} \quad (4.46)$$

Na obr. 4.10. je znázornená situácia, ak vysleme dva takého impulzy za sebou. Príjme impulzy $h(t)$ a $h(t - T)$ a napriek tomu, že oba sa vyznačujú teoreticky nekonečným trvaním, vďaka tomu, že v okamihoch vzorkovania prechádza susedný signál nulovou hodnotou, možno vo vzorke dostať len zložky závislé na práve detekovanom impulze (zafaržené šumom).

Možno teda povedať, že maximálna rýchlosť prenosu impulzov (symbolov) v kanále bez ISI je rovná 2 symboly/s/Hz (modulačná rýchlosť). Nyquistove teoretické predpoklady nemožno v praxi splniť, preto praktické prenosové pásmo je vždy väčšie ako Nyquistovo.

Príkladom prenosovej funkcie systému, ktorá sa často používa v praxi je

$$H(f) = \begin{cases} 1 & ; \text{pre } |f| < 2W_0 - W \\ \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \frac{|f| + W - 2W_0}{W - W_0} \right) & ; \text{pre } 2W_0 - W < |f| < W, \\ 0 & ; \text{pre } |f| > W \end{cases} \quad (4.47)$$

kde W je skutočná šírka pásma, $W_0 = \frac{1}{2T}$ Nyquistova šírka pásma. ρ' na obr. 4.11. označuje tzv. roll-off factor definovaný vzťahom

$$\rho' = \frac{W - W_0}{W_0} \quad (4.48)$$

V praxi je teda vyžadované pásmo väčšie ako Nyquistovo;

$$W = 0,5(1 + \rho')R_s \quad \text{základ. pásmo} \quad (4.49a)$$

Signály v preloženom pásme, ako napr. ASK, PSK, ktorými sa budeme zaoberať v časti 4.2, zaberajú v beznom prípade dvojnásobné pásmo ako signály v základnom pásme (DSB), preto

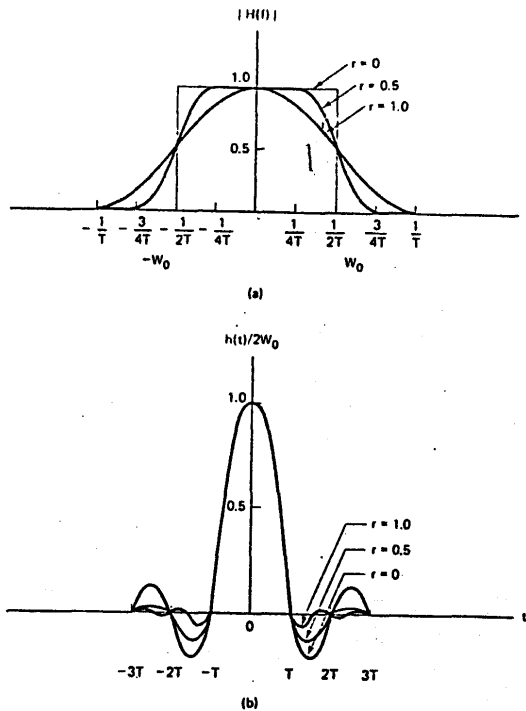
impulz, na

(4.46)

dva takého
a napriek
ním, vďaka
lný signál
závislé na

i impulzov
(modulačná
o v praxi
častejšie ako

sa často



Obr. 4.11. $H(f)$ daná vzťahom (4.47) a príslušná $h(t)$.

pre takéto signály platí

W, (4.47)

$$W_{DSB} = (1 + \rho') R_s$$

preloženie pásmo

(4.49b)

4.1.9 PR signalizácie

rka pásma.
definovan

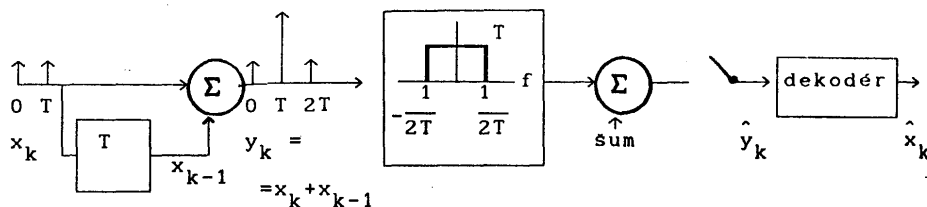
(4.48)

o;

(4.49a)

ktorými sa
n prípade
dB), preto

Roku 1963 A. Lender prišiel s myšlienkou, ktorá ukázala možnosť prenášať $2W$ symbolov za sekundu bez ISI v teoreticky minimálnom pásme W_0 Hz. Technika, ktorú zaviedol, sa označuje ako duobinárna alebo PR signalizácia (partial response) a tiež niekedy ako korelačné kódovanie. Lenderova myšlienka tkvie vo vnesení určitej "umelej" korelovanej ISI na vysielacej strane a modifikácií detekčného procesu tak, že v konečnom dôsledku je eliminovaná ISI. Pre lepšie pochopenie, ako sa vnáša ISI pozri obr. 4.12.



Obr. 4.12. Princíp umelého vnášania ISI

Predpokladajme, že postupnosť binárnych impulzov x_k je vysielaná rýchlosťou R symbolov/s systémom s ideálnym pravouhlým prenosovým pásmom W_0 Hz. Vzniká otázka prečo predpokladáme použitie ideálneho pravouhlého pásma, veď sme si povedali, že v reálnom systéme nie je realizovateľné. Nyquistov filter sa v skutočnosti ani nepokúšame realizovať, ale uvažujeme, že je súčasťou nášho abstraktného modelu, ktorý nám posluží na návrh filtra, ktorý sa dá už lepšie realizovať, resp. dobre aproximovať. Všimnime si, že impulzy najprv prechádzajú jednoduchým číslicovým filtrom. Ku každému impulzu je v ňom pripočítavaný predošlý impulz, a tým sa vnáša korelovaná interferencia. Na výstupe dostávame y_k :

$$y_k = x_k + x_{k-1}$$

\hat{y}_k, \hat{x}_k na obr. 4.12. sú označenia použité pre odhady y_k a x_k , pretože v dôsledku šumu nemôžeme očakávať, že duobinárny detektor bude pracovať úplne bezchybne.

Fourierova transformácia oneskorenia, ktoré vnáša číslicový filter sa dá opísať vzťahom $e^{-j2\pi fT}$. Preto prenosová funkcia $H_1(f)$ číslicovného filtra je daná vzťahom

$$H_1(f) = 1 + e^{-j2\pi fT} \quad (4.50)$$

Prenosová funkcia $H_2(f)$ Nyquistovho ideálneho filtra sa dá opísať vzťahom

$$H_2(f) = \begin{cases} T; & \text{pre } |f| < \frac{1}{2T} \\ 0; & \text{ináč} \end{cases} \quad (4.51)$$

dekodér →

Potom zložená prenosová funkcia, ktorá vznikne kaskádnym radením číslicového filtra a Nyquistovho filtra $H_c(f)$

$$H_c(f) = H_1(f)H_2(f) = (1 + e^{-j2\pi fT})T; \quad \text{pre } |f| < \frac{1}{2T} \quad (4.52)$$

potom

$$|H_c(f)| = \begin{cases} 2T\cos\pi fT; & \text{pre } |f| < \frac{1}{2T} \\ 0; & \text{ináč} \end{cases} \quad (4.53)$$

v x_k je pravouhlým dĺžkou T a periodou $2T$. Predpokladáme, že vedali, že filter sa me, že je na návrh sp. dobre dzajú v ňom

Filter s $H_c(f)$ sa nazýva kosínusový filter. V podstate tiež ide o nekauzálny, a teda nerealizovateľný filter tento môže byť lepšie aproximovaný ako Nyquistov filter. Ak teda postupnosť x_k dáme na vstup kosínusového filtra, dostávame na jeho výstupe to isté, ako keby sme postupnosť x_k dali na vstup kaskádneho zapojenia vyššie spomínaného číslicového filtra a Nyquistovho filtra. Operácia dekódovania musí odstrániť účinok predchádzajúcej filtrácie. Ak napr. $x_k = \mp 1$, potom $y_k \in \{+2, 0, -2\}$ a operácia dekódovania tkvie v odčítaní predošlého x_{k-1} od y_k .

y_k a x_k , duobinárny

pre vnáša prenosová

(4.50)

tra sa dá

4.2 Prenos v preloženom pásme alebo číslicová modulácia

4.2.1 Úvod do číslicovej modulácie

4.2.1.1 Účel modulácie

Číslicová modulácia je proces, pri ktorom sa číslicové symboly transformujú na signály, ktoré sú kompatibilné s charakteristikami kanálov. V prípade prenosu v základnom pásme tieto signály sú postupnosti impulzov. Naproti tomu pri prenose v preloženom pásme signál nesúci užitočnú informáciu moduluje tzv. nosnú vlnu alebo jednoducho nosnú. Prečo treba používať v telekomunikáciách moduláciu? Moduláciu treba, napr. v rádiosystémoch, použiť predovšetkým preto, aby rozmery antén boli prijateľné. Pre účinný prenos 3000 Hz bez modulácie by bol potrebný rozmer antény približne 100 km. Pre prenos 30 GHz príslušný rozmer antény by bol menej ako 2 cm. Modulácia je tiež užitočná v prípadoch, kde treba prenášať viac signálov jedným kanálom, tzv. frekvenčný multiplex. Zaujímavou oblasťou využitia modulácie v telekomunikáciách je tzv. systém s rozloženým spektrom (spread spectrum). V tomto je modulácia využitá na minimalizáciu vplyvu interferencie.

4.2.1.2 Zovšeobecnená Fourierova transformácia

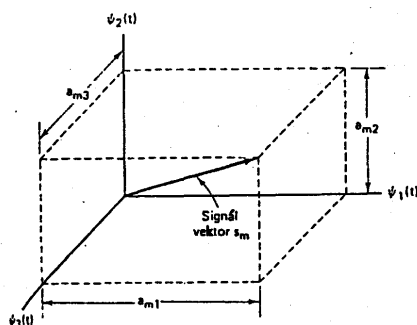
Nech N-rozmerný ortogonálny priestor je charakterizovaný pomocou N lineárne nezávislých funkcií $\{\psi_j(t)\}$, ktoré sa nazývajú bázové funkcie. Lubovoľná funkcia v priestore sa môže získať ako lineárna kombinácia týchto bázových funkcií. Bázové funkcie musia vyhovovať týmto podmienkam

$$\int_0^T \psi_j(t) \psi_k(t) dt = K_j \delta_{jk} \quad ; \quad 0 \leq t \leq T ; \quad j, k = 1, 2, \dots, N$$

(4.54)

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{pre } j = k \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases} \quad (4.55)$$

Vzťah (4.55) je definíciou Kroneckerovej delta funkcie. Ak konštanty K_j sú nenulové, priestor signálov sa nazýva ortogonálny. Ak bázové funkcie sú normalizované tak, že všetky konštanty $K_j = 1$, priestor sa nazýva ortonormálnym. Požiadavka ortogonalítty možno formulovať takto: Každá funkcia $\psi_j(t)$ z množiny bázových funkcií musí byť nezávislá od ostatných funkcií z množiny. Žiadna z $\psi_j(t)$ nesmie pri detekčnom procese interferovať so žiadnou inou $\psi_k(t)$. Z hľadiska geometrie sú všetky funkcie $\psi_j(t)$, $\psi_k(t)$, $j \neq k$ navzájom kolmé.



Obr. 4.13. príklad priestoru signálov pri $N = 3$

Príklad priestoru pre $N = 3$ je na obr. 4.13., pričom navzájom kolmé osi sú označené ako $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$.

Ak $\psi_j(t)$ zodpovedá napätiu alebo prúdu na 1Ω záťaži normalizovaná energia rozptýlená v záťaži za T sekúnd prostredníctvom $\psi_j(t)$ je

$$E_j = \int_0^T \psi_j^2(t) dt = K_j \quad (4.56)$$

(4.54)

Jeden z dôvodov, prečo sa sústreďujeme na ortogonálny priestor signálov, je, že Euklidova miera vzdialenosti, ktorá je

základom pre detekčný proces sa v takomto priestore ľahko vyjadruje. Avšak aj keď vlny prislúchajúce signálu netvoria takýto ortogonálny súbor, môžu byť transformované pomocou lineárnych kombinácií ortogonálnych signálov. Dá sa ukázať, že ľubovoľný z konečnej množiny signálov $\{s_i(t)\}$, $i = 1, \dots, M$ (pričom každý prvok je fyzikálne realizovateľný a trvá čas T), možno vyjadriť lineárnou kombináciou N ortogonálnych signálov $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t)$, pričom $N \leq M$

$$\begin{aligned} s_1(t) &= a_{11}\psi_1(t) + a_{12}\psi_2(t) + \dots + a_{1N}\psi_N(t) \\ s_2(t) &= a_{21}\psi_1(t) + a_{22}\psi_2(t) + \dots + a_{2N}\psi_N(t) \\ &\vdots \\ s_M(t) &= a_{M1}\psi_1(t) + a_{M2}\psi_2(t) + \dots + a_{MN}\psi_N(t) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Tieto výrazy možno vyjadriť v kompaktnejšej forme

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}\psi_j(t), \quad i = 1, \dots, M; \quad \text{pričom } N \leq M \quad (4.58)$$

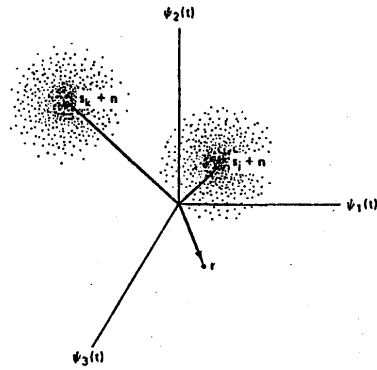
$$a_{ij} = \frac{1}{K_j} \int_0^T s_i(t)\psi_j(t)dt, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, M \\ j = 1, \dots, N \\ 0 \leq t \leq T \end{array} \quad (4.59)$$

Koeficient a_{ij} je hodnota zložky $\psi_j(t)$ v signále $s_i(t)$. Tvar $\{\psi_j(t)\}$ nie je špecifikovaný, volí sa z hľadiska pohodlia a závisí od tvaru signálu. Na množinu signálov sa možno pozerat ako na množinu vektorov: $\bar{s}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$. Ak napr. $N = 3$ pre vektor $\bar{s}_m(t)$ platí: $s_m(t) = a_{m1}\psi_1(t) + a_{m2}\psi_2(t) + a_{m3}\psi_3(t)$ a $\bar{s}_m(t)$ sa dá znázorniť ako bod v trojrozmernom Euklidovom priestore so súradnicami (a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}) . Orientácie vektorov dávajú obraz o vzájomných vzťahoch medzi signálmi z hľadiska fázy alebo frekvencie a amplitúda vektora je mierou energie signálu za čas zodpovedajúci jednému symbolu. Vo všeobecnosti, ak už je zvolený súbor N ortogonálnych funkcií, potom každý vysielaný signál je úplne determinovaný svojimi koeficientmi

ore ľahko
i netvorí
é pomocou
ukázať, že
1, ..., M
vá čas T),
h signálov

$$\bar{s}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN}); \quad i = 1, \dots, M$$

(4.57)



Obr. 4.14. Signál a sum v trojrozmernom priestore

Typický problém, pre ktorý je výhodné využiť vektorovú predstavu signálov, je znázornený na obr. 4.14. Vektory \bar{s}_j a \bar{s}_k reprezentujú prototypy alebo referenčné signály patriace do množiny M signálov. Prijímač pozná a priori (vopred) polohy všetkých M prototypov v signálnom priestore. Počas prenosu je signál ovplyvnený sumom, takže prijatý vektor je porušenou verziou vyslaného (t.j. $\bar{s}_j + \bar{n}$, resp. $\bar{s}_k + \bar{n}$), kde \bar{n} reprezentuje vektor sumu. Za predpokladu, že je sum aditívny a

(4.59)

$s_i(t)$. Tvar
pohodlia a
žno pozerat
 a_{iN}). Ak
 $\psi_1(t) +$
t ako bod
 $(a_{m1}, a_{m2},$
sh vzťahoch
amplitúda
úci jednému
súbor N
l je úplne

má Gaussovo rozdelenie, tvoria možné prijaté vektory "zväzky" okolo \bar{s}_j , resp. \bar{s}_k , pričom zväzok je hustejší v strede "blízko" prototypu a redší vo väčšej vzdialenosti od neho. Obr. 4.14. \bar{r} označuje nejaký vektor, ktorý sa môže objaviť na prijímajúcej strane. Úlohou prijímača je rozhodnúť, či je \bar{r} bližšie k prototypu \bar{s}_i alebo \bar{s}_j , alebo k inému z M prototypov. V podstate ide o meranie vzdialenosti.

Normalizovaná energia $s_i(t)$ za čas T sa dá vyjadriť vzťahom

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt = \int_0^T [\sum_j a_{ij} \psi_j(t)]^2 dt = \int_0^T \sum_j a_{ij} \psi_j(t) \sum_k a_{ik} \psi_k(t) dt =$$

$$= \sum_j \sum_k a_{ij} a_{ik} \int_0^T \psi_j(t) \psi_k(t) dt = \sum_j \sum_k a_{ij} a_{ik} K_j \delta_{jk} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 K_j ;$$

$$i = 1, \dots, M. \quad (4.60)$$

Posledný vzťah je špeciálnym prípadom Parsevalovej vety. V prípade, že sú použité ortonormálne funkcie (t.j. $K_j = 1$) normalizovaná energia za čas T je daná vzťahom

$$E_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 \quad (4.61)$$

Ak je táto energia rovnaká pre každé $s_i(t)$ môžeme napísať

$$E = \sum_{j=1}^N a_{ij}^2, \text{ pre každé } i \quad (4.62)$$

Výrazy (4.54), (4.58), (4.59), sú označované ako zovšeobecnená Fourierova transformácia. V prípade obvyčajnej FT množina $\{\psi_i(t)\}$ je zložená zo sínusoviek a kosínusoviek. Pri zovšeobecnenej FT $\psi_i(t)$ nie sú nijako zvlášť obmedzené. Musia vyhovovať podmienkam ortogonalít.

4.2.1.3 Šum ako vektor

AWGN možno tiež vyjadriť ako lineárnu kombináciu ortogonálnych signálov. Z hľadiska detekčných problémov možno rozdeliť šum na dve zložky

$$\underline{n(t)} = \underline{n(t)} + \underline{\tilde{n}(t)} \quad (4.63)$$

pričom

$$\underline{\hat{n}(t)} = \sum_{j=1}^N n_j \psi_j(t) \quad (4.64)$$

je šum vo vnútri priestoru signálov, alebo inak povedané projekcia zložiek šumu na súradnice $\psi_1(t), \dots, \psi_N(t)$ a

$$\hat{n}(t) = n(t) - \hat{n}(t) \quad (4.65)$$

je definovaný ako sum mimo signálového priestoru. Inými slovami: $\tilde{n}(t)$ je sum odstránený (odfiltrovaný) pri prijíme a detekcii. $\hat{n}(t)$ je sum, ktorý bude interferovať v procese detekcie. Potom

$$n(t) = \sum_{j=1}^N n_j \psi_j(t) + \tilde{n}(t) \quad (4.66)$$

Prícom

$$K_j = \frac{1}{K_j} \int_0^T n(t) \psi_j(t) dt, \text{ pre každé } j \quad (4.67)$$

isat

$$\int_0^T \tilde{n}(t) \psi_j(t) dt \quad (4.68)$$

pre jednoduchost pretože z hľadiska detekcie zložku $\tilde{n}(t)$ treba uvažovať, označuje sa aj interferujúci sum často ako $\tilde{n}(t)$. A $n(t)$ môžeme tiež podobne, ako to bolo pri signále, považovať ako vektor

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N); \text{ kde } \mathbf{n} \text{ je náhodný vektor.} \quad (4.69)$$

ené. Musia

2.1.4 Disperzia bieleho sumu

Biely sum je idealizovaný proces s dvojstrannou výkonovou spektrálnou hustotou, rovnou konstante $\frac{N_0}{2}$ pre všetky frekvencie od $-\infty$ po ∞ . Preto disperzia (stredný výkon sumu, pretože sum má strednú hodnotu rovnú nule) je

$$\sigma_n^2 = \text{var}[n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{N_0}{2} \right) dt = \infty \quad (4.70)$$

keď disperzia pre AWGN je nekonečná, disperzia pre filtrovaný AWGN je konečná. Ak napríklad AWGN je korelovaná s jednou z funkcií ortogonálnej množiny na výstupe korelátora, je disperzia

$$\sigma^2 = \text{var}[(n_j)] = \mathcal{E}\left\{\int_0^T [n(t)\psi_j(t)dt]^2\right\} = \frac{N_0}{2} \quad (4.71)$$

4.2.2. Základné typy číslicovej modulácie pre preložené pásmo

4.2.2.1 Klasifikácia podľa spôsobu demodulácie

Pri modulácii pre prenos v preloženom pásme (ďalej len modulácii), či už analógovej alebo číslicovej, sa zjednodušene dá povedať, že signál sa transformuje na harmonický "sínusový" signál. Sínusovka má tri parametre, ktoré ju umožňujú odlíšiť od ostatných sínusoviek: amplitúdu, frekvenciu a fázu. Moduláciu potom možno charakterizovať ako proces, pri ktorom je menená amplitúda, frekvencia, fáza alebo ich kombinácia pri nosnej v závislosti od informácie, ktorú chceme prenieť. Nosnú môžeme vo všeobecnosti vyjadriť vzťahom

$$s(t) = A(t)\cos[\theta(t)]$$

príčom A(t) opisuje zmenu amplitúdy v čase a $\theta(t)$ popisuje zmenu uhla v čase. Je zvykom písať

$$\theta(t) = \omega_0 t + \varphi(t), \text{ potom } s(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

príčom ω_0 je kmitočet nosnej a $\varphi(t)$ je fáza.

Tabuľka. 4.1.

Základné typy číslicových modulácií a demodulácií pre preložené pásmo

| Modulácie pre preložené pásmo | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| Koherentné | Nekoherentné |
| Fázové kľúčovanie (PSK) | Diferenčné fázové kľúčovanie (DPSK) |
| Frekvenčné kľúčovanie (FSK) | FSK |
| Amplitúdové kľúčovanie (ASK) | ASK |
| Spojité fázové modulácie (CPM) | CPM |
| Hybridné modulácie | Hybridné modulácie |

Základné typy modulácie (demodulácie) sú uvedené v tab. 4.1. Pri diskusii číslicovej modulácie sa často používajú

pojmy
celko
detek
priji
koher
znalo
koher
možné
sú pr
aj vo
prich
integ
proto
tieto
čísl
fázou
druhy
hodno
fázy
nekohe
jedno
DPSK,
Je ra
priji
fázu
z pr
aktuá
Na ot
čísl
Vlavo
signá
vseob
symbo
z prij
Je spe

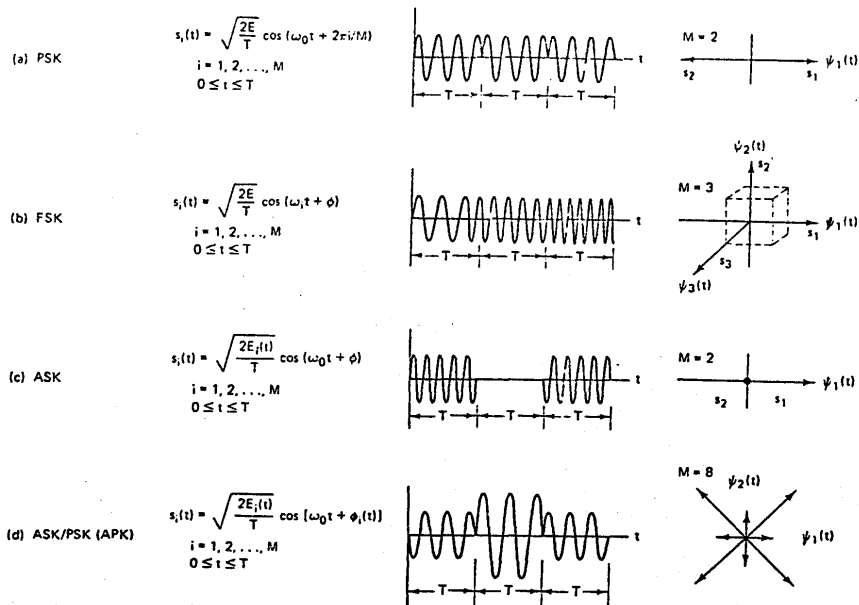
pojmy demodulácia a detekcia ako synonymá, aj keď to nie je celkom korektné, pretože demodulácia odstraňuje nosnú a detekcia je proces rozhodovania o prijatých symboloch. Ak prijímač využíva pri detekcii znalosť fázy, proces sa nazýva koherentná detekcia. V prípade, že prijímač nevyužíva túto znalosť, proces sa nazýva nekoherentná detekcia. Pri ideálnej koherentnej detekcii má prijímač k dispozícii prototyp každého možného signálu, ktorý je vysielaný. Tieto prototypové signály sú presné kópie prenášaných signálov po každej stránke, teda aj vo fáze nosnej. Prijímač sa potom nazýva fázovo viazaný na prichádzajúci signál. Počas detekcie prijímač násobí a integruje (koreluje) prichádzajúci signál s každou z kopii prototypov.

V tab. 4.1 patria medzi koherentné modulácie (demodulácie) tieto: fázové kľúčovanie PSK, frekvenčné kľúčovanie FSK, číslicová amplitúdová modulácia ASK, modulácia so spojitou fázou CPM a hybridné kombinácie. Existujú ďalšie špeciálne druhy, ktoré uvedieme v časti 6.

Pri nekoherentnej demodulácii nie je známa absolútna hodnota fázy prichádzajúceho prijímaného signálu. Odhad hodnoty fázy sa preto nevyžaduje. Z toho je zrejmé, že výhodou nekoherentného systému oproti koherentnému je jeho jednoduchosť, avšak na úkor zväčšenia pravdepodobnosti chyby.

V tab. 4.1 sú medzi nekoherentnými typmi modulácie uvedené DPSK, FSK, ASK, CPM a ich hybridy. Medzi nekoherentné spôsoby je radená aj diferenciálna fázová modulácia DPSK, pretože prijímač takejto modulácie nepotrebuje pre detekciu referenčnú fázu nosnej. Táto pseudo PSK berie informáciu o fáze z predchádzajúcich symbolov ako referenčnú pre detekciu aktuálnych symbolov.

Na obr. 4.15. sú znázornené príklady najbežnejších spôsobov číslicovej modulácie PSK, FSK, ASK a hybrid ASK/PSK (APK). Vľavo sú udané analytické výrazy, v strede typické priebehy signálov v čase a vpravo vektorové znázornenie. Vo všeobecnejšom M-árnom prípade modulátor na základe k-bitových symbolov vyprodukuje v určitom časovom intervale jeden z prípustných $M = 2^k$ typov signálov. Binárna modulácia ($k = 1$) je špeciálny typ M-árnej modulácie.



Obr. 4.15. Základné typy číslicovej modulácie

4.2.2.2 PSK

PSK bola vyvinutá na počiatkoch programov pre kozmický výskum vesmíru. V súčasnosti sa rozsiahle využíva ako vo vojenských, tak v komerčných komunikačných systémoch. Všeobecný analytický výraz opisujúci PSK má tvar

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_0 t + \phi_i(t)]; \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.72)$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

pričom $\phi_i(t)$ nadobúda M diskretných hodnôt typicky daných výrazom

$$\phi_i(t) = \frac{2\pi i}{M}; \quad i = 1, \dots, M \quad (4.73)$$

Pre binárnu PSK (BPSK) obr.4.15.a) $M = 2$, E udáva energiu symbolu, T čas jeho trvania ($0 \leq t \leq T$). Pri BPSK modulujúci údajový (dátový) signál posúva fázu signálu $s_i(t)$ do jedného zo

stavov 0 alebo π (180°). Na obr.4.15. a) je vidieť signál BPSK s jeho náhlymi (skokovými) zmenami fázy v okamihoch medzi symbolmi (v charakteristických okamihoch). V prípade, že by modulujúci tok dát obsahoval striedavo nuly a jednotky, takéto náhle zmeny by sa nachádzali v každom charakteristickom okamihu. Signál môže byť reprezentovaný ako vektor, pričom dĺžka vektora zodpovedá amplitúde signálu a smer vektora pre všeobecný M-árny prípad zodpovedá fáze signálu vzhľadom na ostatné $M - 1$ signály z danej množiny. Pre BPSK vektorový diagram znázorňuje dva vektory ležiace oproti sebe (posunuté o 180°). Množiny signálov, ktoré možno znázorniť pomocou takýchto vektorov, sa nazývajú antipodálne.

4.2.2.3 FSK

Všeobecný výraz pre moduláciu FSK má tvar

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \varphi) \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.74)$$

$$i = 1, \dots, M;$$

príčom ω_i nadobúda M diskrétnych hodnôt a φ ľubovoľnú konštantnú hodnotu. Obr.4.15. b znázorňuje typické skokové zmeny v charakteristických okamihoch. V tomto príklade bola hodnota M zvolená 3. V praxi je zvyčajne M rovné mocnine 2 (2, 4, 8, 16, ...). Množina signálov je charakterizovaná kartézskymi súradnicami tak, že každá zo vzájomne kolmých osí reprezentuje sínusovku s rozdielnou frekvenciou. Ako sa už spomenulo množina signálov s takýmito navzájom kolmými vektormi sa nazýva množina ortogonálnych signálov. Nevyhnutné medzery (intervaly) vo frekvenčnom pásme medzi jednotlivými frekvenciami sú obsiahnuté v časti 4.2.3.5.2.1.

4.2.2.4 ASK

Vo všeobecnosti možno ASK opísať pomocou analytického vzťahu

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.75)$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

prícom člen $\sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}}$ zodpovedajúci amplitúde môže nadobúdať M diskrétnych hodnôt a člen zodpovedajúci fáze φ nadobúda ľubovoľnú konštantnú hodnotu. Na obr. 4.15. c) bolo zvolené $M = 2$, čo zodpovedá dvom typom signálov. Vektorové vyjadrenie využíva tie isté fázovo-amplitúdové polárne súradnice ako PSK. Vektor na obrázku korešponduje so stavom, kedy je amplitúda maximálna a bod v počiatku znázorňuje stav, kedy je amplitúda nulová. Binárna modulácia ASK tiež nazývaná (on-off keying) predstavuje jednu z prvých foriem číslicovej modulácie. Používala sa v rádiotelegrafii na začiatku 20. storočia. Jednoduchá ASK v súčasnosti už nepatrí v telekomunikačných systémoch medzi rozšírené druhy modulácie, a preto sa ňou nebudeme podrobnejšie zaoberať.

4.2.2.5 APK

Kombinácia ASK a PSK sa označuje ako APK. Príklad APK je znázornený na obr. 4.15.d) a tento typ modulácie možno opísať analytickým vzťahom

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos[\omega_0 t + \varphi_i(t)] \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.76)$$

$$i = 1, 2, \dots, M;$$

v ktorom indexi i vyjadrujú skutočnosť, že ako amplitúda tak fáza nadobúda diskkrétne hodnoty. Obr. 4.5 d znázorňuje niektoré typické postupné zmeny fázy a amplitúdy v charakteristických okamihoch. Pre tento príklad bolo zvolené $M = 8$ čo zodpovedá ôsmim formám signálov (8-árna modulácia, resp. 8-stavová modulácia). Obrázok tiež znázorňuje 8 hypotetických vektorov vo fázovo-amplitúdovej rovine. Štyri z týchto vektorov sa vyznačujú jednou hodnotou amplitúdy a štyri ďalšie inou hodnotou amplitúdy. Každý z vektorov je posunutý o 45° . V prípade, že je množina M symbolov v dvojrozmernom priestore signálov usporiadaná v navzájom pravouhlej polohe, modulácia sa

nazýva kvadrátúrna amplitúdová modulácia QAM.

(4.75) Vektorový diagram každej z modulácií zobrazených na obr. 4.15. (okrem FSK) je charakterizovaný tým, že polárne súradnice zodpovedajú amplitúde a fáze. FSK je znázornená v súradnicových súradniciach, pričom každá súradnica reprezentuje určitú frekvenciu (kmitočet) $\cos(\omega_i t)$ z M-árnej množiny ortogonálnych signálov. Koefficient udávajúci amplitúdu signálu v rovniciach (4.75) a (4.76) má zhodný tvar $\sqrt{\frac{2E}{T}}$ pre všetky formy modulácie. Tento výraz bol odvodený takto:

$$s(t) = A \cos(\omega t) \quad (4.77)$$

príčom A je špičková hodnota amplitúdy. Nakoľko špičková hodnota je rovná $\sqrt{2}$ -krát efektívna A_{ef} môžeme písať

$$s(t) = \sqrt{2} A_{ef} \cos(\omega t) = \sqrt{(2A_{ef}^2)} \cos(\omega t) \quad (4.78)$$

predpokladu, že signál je napätovou alebo prúdovou vlnou, reprezentuje stredný výkon P (normalizovaný na 1Ω). Preto môžeme písať

$$s(t) = \sqrt{2P} \cos(\omega t) \quad (4.79)$$

Nahradením $P = \frac{E}{T}$; rozmerovo $[W] = \left[\frac{J}{s}\right]$; dostávame

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega t) \quad (4.80)$$

Na označenie amplitúd teda môžeme používať buď A, alebo $\sqrt{\frac{2E}{T}}$. Pretože energia zohráva rozhodujúcu úlohu pri určovaní chybovosti procesu detekcie, často sa uprednostňuje druhé označenie.

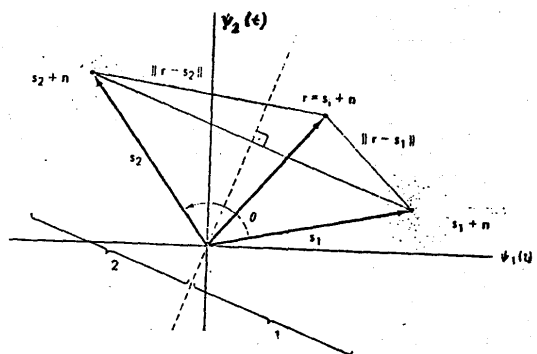
4.2.3 Detekcia signálov za prítomnosti gaussovského šumu

4.2.3.1 Rozhodovacie oblasti

Predpokladajme, že v dvojrozmernom priestore signálov

dochádza k ovplyvňovaniu dvoch prototypov binárnych vektorov \bar{s}_1 a \bar{s}_2 sumom. Výsledkom sú vektory $(\bar{s}_1 + \bar{n}_1)$ a $(\bar{s}_2 + \bar{n}_2)$. Vektor sumu \bar{n} je náhodný vektor s nulovou strednou hodnotou. Preto vektory \bar{r} zodpovedajúce prijatým signálom majú strednú hodnotu rovnú \bar{s}_1 resp. \bar{s}_2 . Úlohou detektora je po prijatí \bar{r} rozhodnúť, ktorý z vektorov \bar{s}_1 , \bar{s}_2 bol vyslaný. Najčastejšie sa rozhoduje na základe stratégie, ktorá minimalizuje pravdepodobnosť chyby symbolu (z modulačnej abecedy) P_E , aj keď sú možné aj iné metódy.

Pre prípad, že $M = 2$ a \bar{s}_1 , \bar{s}_2 sú vysielané s rovnakou pravdepodobnosťou a sum je AWGN, pravidlo minimálnej chyby vedie k voľbe signálov tak, že vzdialenosť $d(\bar{r}, \bar{s}_1) = |\bar{r} - \bar{s}_1|$ je minimálna. Uvedené pravidlo sa používa aj pri voľbe rozhodovacích oblastí. Rozhodovacie oblasti znázornené na obr. 4.16. boli zostrojené takto: Najprv bola narysovaná úsečka spájajúca koncové body vektorov \bar{s}_1 a \bar{s}_2 . Ďalej bola zostrojená priamka, ktorá predstavuje hranicu medzi dvoma rozhodovacími oblasťami tak, aby bola kolmá na predtým zostrojenú úsečku a delila ju na dve rovnako dlhé časti.



Obr. 4.16. Rozhodovacie oblasti v dvojrozmernom priestore.

Hraničná priamka prechádza počiatkom práve vtedy, ak vektory \bar{s}_1 a \bar{s}_2 majú rovnaké veľkosti. Pravidlo rozhodovania v reči rozhodovacích oblastí potom je:

Ak sa prijatý vektor \bar{r} nachádza v oblasti 1, zvoľ signál zodpovedajúci \bar{s}_1 , v prípade, že sa \bar{r} nachádza v oblasti 2, rozhodni sa pre \bar{s}_2 .

4.2.3.2 Príjem pomocou korelačného prijímača

ktorov \bar{s}_1
) Vektor
 u. Preto
 i hodnotu
 ozhodnúť,
 rozhoduje
 ost chyby
 aj iné

V časti 4.1.2 sme sa zaoberali detekciou binárnych signálov prenášaných v základnom pásme za prítomnosti Gaussovského šumu. Pretože detekcia signálu v preloženom pásme obsahuje tie isté postupy, zosumarizujeme teraz klúčové poznatky z uvedenej časti. Sústreďme sa na realizáciu pomocou korelačtorov. Budeme sa tiež venovať všeobecnejšej M-árnej detekcii.

Predpokladajme, že jedinou príčinou rusenia je AWGN. Prijatý signál $r(t)$ je súčtom vyslaného signálu a náhodného šumu

$$r(t) = s_i(t) + n(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.81)$$

$$i = 1, 2, \dots, M.$$

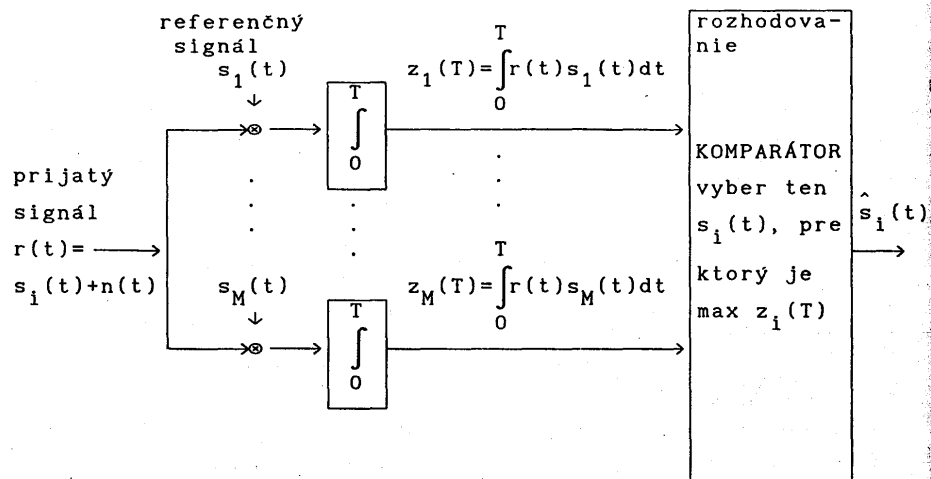
Detekcia takéhoto signálu tkvie v dvoch základných krokoch. Pri prvom kroku je signál $r(t)$ redukovaný na jednoduchú náhodnú veličinu $z(T)$ alebo súbor náhodných veličín $z_i(T)$ ($i = 1, 2, \dots, M$), ktoré sa objavia na výstupe korelačtorov (prípadne korelačtorov) v čase $t = T$, pričom T je čas trvania symbolu. Pri druhom kroku sa vykoná rozhodnutie o symbole na základe porovnania $z(T)$ s rozhodovacou úrovňou (hranicou), alebo na základe maximálneho $z_i(T)$. Krok 1. si možno predstaviť ako transformovanie signálu na jeden bod v priestore, v ktorom sa rozhoduje. Krok 2. je potom určenie, v ktorej rozhodovacej oblasti sa nachádza tento bod. Aby bol detektor optimálny (v zmysle minimalizácie pravdepodobnosti chyby), je nutné optimalizovať transformáciu signálu na náhodnú veličinu použitím spriahnutého filtra alebo korelačtorov v kroku 1. a tiež optimalizovať rozhodovacie kritérium v kroku 2. V predchádzajúcej časti 4.1 sme ukázali, že spriahnutý filter obsahuje maximálny pomer signál-šum na výstupe v čase $t = T$.

e.
 ktory \bar{s}_1
 v reči

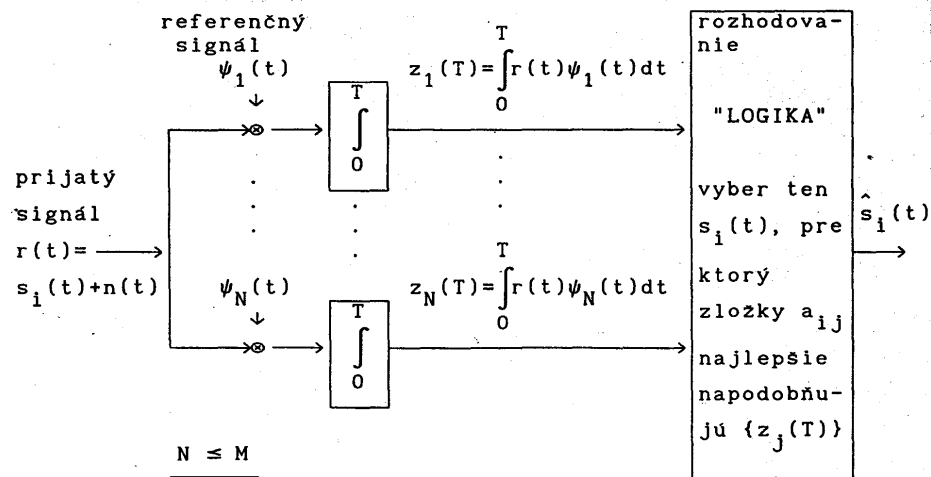
Opísali sme korelačtor ako jednu realizáciu spriahnutého filtra. Môžeme zaviesť korelačný prijímač pozostávajúci z M korelačtorov ako je to znázornené na obr.4.17. a, ktorý transformuje prijatý signál $r(t)$ do postupnosti M čísiel-výstupov korelačtorov $z_i(T)$ ($i = 1, 2, \dots, M$). Každý výstup korelačtorov je charakterizovaný vzťahom

I signál
 lasti 2.

$$z_i(t) = \int_0^T r(t)s_i(t)dt; \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (4.82)$$



a)



b)

Obr. 4.17. (a) Korelačný prijímač s referenčnými signálmi $\{s_i(t)\}$. (b) Korelačný prijímač s referenčnými signálmi $\{\psi_j(t)\}$

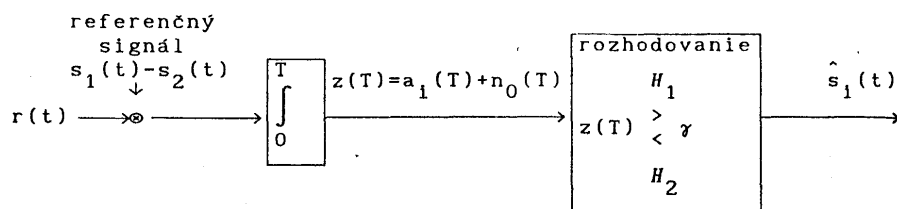
(4.82) Korelátor vyhodnocujú koreláciu prichádzajúceho prijatého signálu $r(t)$ s každým prototypom $s_i(t)$ známym prijímaču a priori. Rozumné pravidlo je vybrať ten signál, ktorý má najväčšiu hodnotu korelácie (najviac sa podobá) signálu $r(t)$. Tak povedané:

treba vybrať $s_i(t)$, ktorého index zodpovedá $\max z_i(T)$. (4.83)

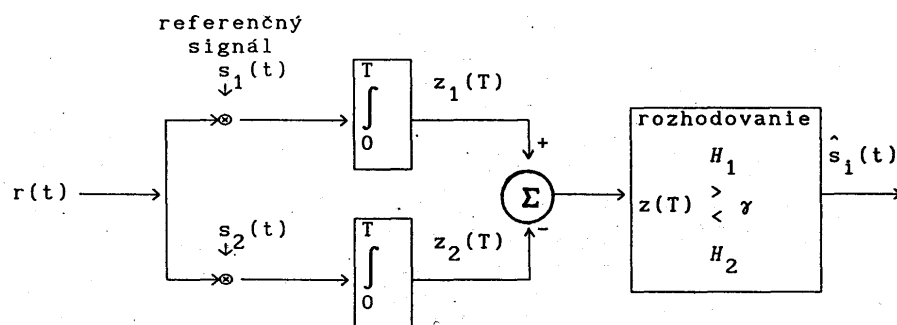
Na základe rovnice (4.58) ľubovoľný súbor signálov $\{s_i(t)\}$; ($i = 1, 2, \dots, M$) môže byť vyjadrený pomocou básových funkcií $\{\psi_j(t)\}$; ($j = 1, 2, \dots, N$), pričom $N \leq M$. Potom sada M korelátorov zobrazených na obr.4.17.a môže byť nahradená sadou N korelátorov zobrazených na obr.4.17.b. V týchto potom referenčné signály tvoria samotné básové funkcie $\psi_j(t)$. Rozhodovací stupeň takéhoto prijímača pozostáva z logických rozhodov pre voľbu signálu $s_i(t)$. Voľba je uskutočnená na základe najlepšieho spriahnutia koeficientov a_{ij} (rovnica 4.58) do súborom výstupov $\{z_j(T)\}$. Ak množina prototypov je ortogonálna, potom je realizácia podľa obr.4.17.a) je identická (aspoň na mierku) s realizáciou podľa obr.4.17.b). Avšak ak množina $\{s_i(t)\}$ nie je množina ortogonálnych signálov, prijímač podľa obr.4.17.b) využívajúci N namiesto M korelátorov môže byť lepším riešením.

Teraz budeme analyzovať detekciu za predpokladu, že systém je realizovaný s tým, že sú k dispozícii referenčné signály $\psi_j(t)$. V prípade binárnej detekcie korelačný prijímač môže byť zostavený z jedného spriahnutého filtra alebo integrátora, ako je to znázornené na obr.4.18.a) s referenčným signálom $\psi_j(t)$ a známym rozdielom medzi binárnymi prototypmi signálov $s_1(t) - s_2(t)$.

signálmi
signálmi



a)



b)

Obr. 4.18. Binárny korelačný prijímač. (a) s 1, (b) s 2 korelátormi

Výstup korelátoru $z(T)$ postupuje priamo do rozhodovacieho stupňa. Pri binárnej detekcii môže byť korelačný prijímač zostavený aj tak, ako je to znázornené na obr.4.18.b) - z dvoch spriahnutých filtrov alebo integrátorov. Každý z nich je spriahnutý s jedným z referenčných signálov $s_1(t)$, alebo $s_2(t)$. Rozhodovací stupeň potom môže pracovať na základe rovnice (4.83), alebo výstup korelátoru $z_1(T)$, $i = 1, 2$ môže byť upravený na rozdiel $z(T) = z_1(T) - z_2(T)$, ako je to zobrazené na obr.4.18.b). Potom $z(T)$ postupuje do rozhodovacieho stupňa podobne ako v prípade použitia jedného korelátoru. Za predpokladu absencie sumu signál $s_1(t)$ vyvolá výstup $z(T) = a_1(T)$, (zložka, ktorá zodpovedá len signálu). Šum na vstupe

$n(t)$ je gaussovský náhodný proces. Pretože korelátor je lineárny, výstupný sum je tiež gaussovský proces [10]. Preto výberka vzatá z výstupu korelátora v čase $t = T$ je daná vzťahom

$$\hat{s}_i(t) = a_i(T) + n_0(T); \quad i = 1, 2$$

keďže $n_0(T)$ je zložka zodpovedajúca sumu. Zjednodušene môžeme $n_0(T)$ vyjadriť ako $a_i + n_0$. Zložka n_0 je gaussovská náhodná veličina so strednou hodnotou rovnou nule a preto $z(T)$ je gaussovská náhodná veličina so strednou hodnotou buď a_1 , alebo a_2 v závislosti od toho, či bola vyslaná binárna jednotka alebo nula.

3.3 Binárna rozhodovacia úroveň

Na obr.4.5. sú zobrazené dve rozdelenia podmienenej pravdepodobnosti $p(z/s_1)$ a $p(z/s_2)$ so strednými hodnotami

ie $\hat{s}_i(t)$ sp. a_2

$$p(z/s_1) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_1}{\sigma_0} \right)^2 \right] \quad (4.84)$$

$$p(z/s_2) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_2}{\sigma_0} \right)^2 \right] \quad (4.85)$$

(b) s

keďže σ_0^2 je disperzia sumu. Na obr.4.5. vpravo je znázornená rozdelenia podmienenej pravdepodobnosti na výstupe detektora za predpokladu, že bolo vyslané $s_1(t)$. Podobne ľavé rozdelenie zodpovedá prípadu, že bolo vyslané $s_2(t)$. Os $z(T)$ udáva interval možných hodnôt na výstupe korelačného prijímača podľa obr.4.18.

Vo väčšine častí 2.9.1 bolo nájdené, že optimálna binárna rozhodovacia úroveň (hranica medzi rozhodovacími oblasťami) je daná vzťahom

zobrazené
eho stupňa
átora. Za
tup $z(T) =$
na vstupe

$$z(T) \begin{matrix} H_1 \\ > \\ < \\ H_2 \end{matrix} \frac{a_1 + a_2}{2} = \gamma_0 \quad (4.86)$$

pričom a_1 je zložka zodpovedajúca signálu ak bolo vyslané $s_1(t)$ a a_2 je zložka prislúchajúca $s_2(t)$. Rozhodovacia úroveň daná vzťahom $\gamma = \frac{a_1 + a_2}{2}$ je optimálna vzhľadom na to, že minimalizuje pravdepodobnosť nesprávneho rozhodnutia za predpokladu, že pravdepodobnosti vyslania oboch signálov sú rovnaké a rozdelenia $p(z/s_1)$, $p(z/s_2)$ sú symetrické. Rozhodovacie pravidlo dané vzťahom (4.86) hovorí, že hypotéza H_1 má byť vybratá (čo je ekvivalentné rozhodnutiu, že $s_1(t)$ bolo vyslané), ak $z(T) > \gamma_0$ a hypotéza H_2 má byť vybratá (čo je ekvivalentné rozhodnutiu, že $s_2(t)$ bolo vyslané) ak $z(T) < \gamma_0$. Ak $z(T) = \gamma_0$, rozhodnutie môže byť ľubovoľné.

Pre antipodálne protilahlé signály s rovnakou energiou, pre ktoré $s_1(t) = -s_2(t)$ a $a_1 = -a_2$, je optimálne rozhodovacie pravidlo dané vzťahom

$$z(T) \begin{matrix} H_1 \\ > \\ < \\ H_2 \end{matrix} \gamma_0 = 0 \quad (4.87)$$

rozhodni sa pre $s_1(t)$, ak $z_1(T) > z_2(T)$ rozhodni sa pre $s_2(t)$ ináč. V nasledujúcej časti ilustrujeme použitie korelátorov a spriahnutých filtrov pri koherentnej detekcii modulácií PSK a FSK. V ďalších častiach sa budeme zaoberať detekciou nekoherentných modulácií a určením pravdepodobností chýb pri rôznych typoch modulácií.

4.2.3.4 Koherentná detekcia

4.2.3

koher
Takýť
pravd
(BPSK $s_1(t)$ $s_2(t)$

pričo

AWGN.

0. P:

symbo

len.

pries

funkc

 $\psi_1(t)$

Vysla

 $s_1(t)$ $s_1(t)$ $s_2(t)$

na

hodno

signa

4.2.3.4.1 Koherentná detekcia PSK

(4.86) Detektor znázornený na obr.4.17. sa môže použiť pre koherentnú detekciu ľubovoľného číslicového typu modulácie. Takýto korelačný detektor sa často nazýva detektor maximálnej pravdepodobnosti. Rozoberme nasledujúci príklad binárnej PSK (BPSK). Nech

ané $s_1(t)$
oveň daná

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \varphi); \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.88)$$

to, že
utia za
gnálov sú
ymetrické.

hypotéza
že $s_1(t)$
atá (čo je
(T) < τ_0 .

energiou,
zhodovacie

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) = -\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \varphi); \quad (4.89)$$

$$0 \leq t \leq T$$

(4.87) pričom φ nadobúda ľubovoľnú konštantnú hodnotu a nech $n(t)$ je AWGN. To znamená, že bez straty všeobecnosti môžeme zvoliť $\varphi = 0$. Parameter E udáva energiu na symbol a T je čas trvania symbolu. Pre tento prípad antipodálnych signálov je potrebná len jedna bazová funkcia. Za predpokladu ortonormálneho priestoru signálov vo vzťahoch (4.54) a (4.56) $K_j = 1$ a bazovú funkciu $\psi_1(t)$ môžeme vyjadriť vzťahom

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_0 t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.90)$$

Vyslané signály $s_i(t)$ pomocou $\psi_1(t)$ sú potom dané vzťahmi

$$s_i(t) = a_{i1} \psi_1(t) \quad (4.91a)$$

ni sa pre
použitie

$$s_1(t) = a_{11} \psi_1(t) = \sqrt{E} \psi_1(t) \quad (4.91b)$$

j detekcii
e zaoberat

$$s_2(t) = a_{21} \psi_1(t) = -\sqrt{E} \psi_1(t) \quad (4.91c)$$

epodobnosti

Predpokladajme, že bol vyslaný signál $s_1(t)$. Potom stredné hodnoty na výstupe integrátorov na obr.4.17.b) s referenčnými signálmi $\psi_1(t)$ a $-\psi_1(t)$ sú určené vzťahmi

$$\mathcal{E}\{z_1/s_1\} = \mathcal{E}\left\{\int_0^T [\sqrt{E} \psi_1^2(t) + n(t)\psi_1(t)] dt\right\} \quad (4.92a)$$

$$\mathcal{E}\{z_2/s_1\} = \mathcal{E}\left\{\int_0^T [-\sqrt{E} \psi_1^2(t) - n(t)\psi_1(t)] dt\right\} \quad (4.92b)$$

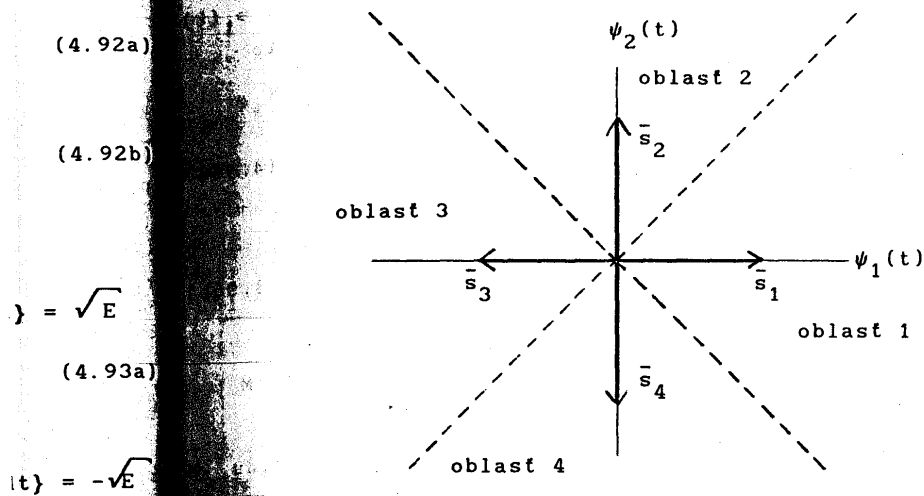
$$\mathcal{E}\{z_1/s_1\} = \mathcal{E}\left\{\int_0^T \left[\frac{2}{T} \sqrt{E} \cos^2(\omega_0 t) + n(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_0 t)\right] dt\right\} = \sqrt{E} \quad (4.93a)$$

$$\mathcal{E}\{z_2/s_1\} = \mathcal{E}\left\{\int_0^T \left[-\frac{2}{T} \sqrt{E} \cos^2(\omega_0 t) - n(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_0 t)\right] dt\right\} = -\sqrt{E} \quad (4.93b)$$

kde $\mathcal{E}\{\}$ označuje strednú hodnotu. V rovnice treba uvážiť, že $\mathcal{E}\{n(t)\} = 0$. Rozhodovací stupeň musí rozhodnúť, ktorý signál bol vyslaný na základe polohy prijatého signálu v priestore signálov. Pre tento príklad voľba $\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_0 t)$ normalizuje $\mathcal{E}\{z_i(T)\}$ na hodnoty $\pm\sqrt{E}$. Referenčné signály $\{s_i(t)\}$ sú zhodné s referenčnými signálmi $\{\psi_j(t)\}$ až na mierku. Rozhodovací stupeň vyberá signál s najväčšou hodnotou $z_i(T)$. Preto sa v našom príklade rozhoduje pre signál $s_1(t)$. Pravdepodobnosť chyby P_B uvedeného systému s koherentne detekovanou moduláciou BPSK bude rozoberaná v časti 4.2.4.1.

4.2.3.4.2 Koherentná detekcia signálov MPSK

Na obr.4.19. je znázornený priestor signálov pre MPSK v prípade štvorstavovej PSK označovanej tiež QPSK (quadriphase shift keying $M = 4$). Binárne čísla prichádzajúce do kodéra sú združované do dvojíc. Tieto dvojice sú instrukciou pre



(4.93b) Obr. 4.19. Priestor signálov a rozhodovacie úrovne pre QPSK.
 - - - rozhodovacie hranice

uvážiť, že modulátor o tom, ktorý zo štyroch možných signálov má priestore reprodukovať. Pre typickú koherentnú M-árnu PSK (MPSK) $s_i(t)$ môže byť vyjadrené takto

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi i}{M}\right) \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.94)$$

$i = 1, \dots, M$

príčom E je energia obsiahnutá v $s_i(t)$ za čas trvania symbolu T a ω_0 označuje kmitočet nosnej. V prípade, že sa predpokladá ortonormálny priestor signálov vo vzťahoch (4.54) a (4.56) môžeme vhodne zvoliť množinu súradníc takto

pre MPSK

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_0 t) \quad (4.95a)$$

radriphase
 kodéra sú

$$\psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_0 t) \quad (4.95b)$$

príčom amplitúda $\sqrt{\frac{2}{T}}$ bola zvolená tak, aby normalizovala

strednú hodnotu výstupu detektora (ako v časti 4.5.1). $s_1(t)$ potom možno vyjadriť pomocou ortonormálnych súradníc takto

$$s_i(t) = a_{i1}\psi_1(t) + a_{i2}\psi_2(t) = \quad (4.96a)$$

$$= \sqrt{E} \cos\left(\frac{2\pi i}{M}\right) \psi_1(t) + \sqrt{E} \sin\left(\frac{2\pi i}{M}\right) \psi_2(t); \quad (4.96b)$$

$$0 \leq t \leq T \\ i = 1, 2, \dots, M$$

Poznamenajme, že rovnica (4.96b) opisuje množinu M (neortogonálnych) signálov len pomocou dvoch ortogonálnych zložiek nosnej. Prípado $M = 4$ (QPSK) je unikátny spomedzi MPSK v tom zmysle, že množina signálov QPSK je reprezentovaná kombináciou antipodálnych a ortogonálnych členov. Priestor signálov je rozdelený do štyroch oblastí. Postup konštrukcie je podobný ako v časti 4.4.1, obr. 4.16. pre $M = 2$. Rozhodovacie pravidlo pre detektor hovorí (obr. 4.19.):

$s_1(t)$ bolo vyslané, ak prijatý signál padne do oblasti 1, $s_2(t)$ bolo vyslané, ak prijatý signál padne do oblasti 2 atď.

Inými slovami sa dá rozhodovacie pravidlo sformulovať takto:

Rozhodnúť sa pre i -ty signál, ak $z_i(T)$ udáva najväčšiu hodnotu z výstupov korelátorov (podľa obr. 4.17.).

Forma korelátora zobrazeného na obr. 4.17.a) obsahuje vždy M korelátorov použitých pre demoduláciu MPSK signálov. Každá z M -vetiev využíva príslušný referenčný signál. V praxi je MPSK demodulátor realizovaný podľa obr. 4.17.b), pričom je potrebných $N = 2$ integrátorov bez ohľadu na počet prvkov množiny M signálov. Poznámka: Množinu signálov niekedy tiež označujeme ako modulačnú abecedu.

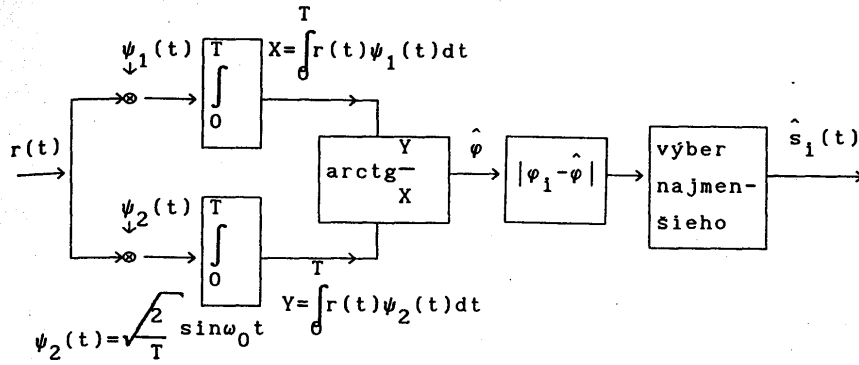
Úspora je možná vďaka tomu, že ľubovoľný integrovateľný signál môže byť vyjadrený ako lineárna kombinácia ortogonálnych signálov. Na obr. 4.20. je znázornený takýto demodulátor.

5.1). $s_1(t)$
takto

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t$$

(4.96a)

(4.96b)



T
..., M

množinu M
togonalných
medzi MPSK v
prezentovane

1. Priestor
štruktúre je
rozhodovacie

sti 1.
lasti 2

sformulovať

čšiu hodnotu

bsahuje vždy
nálov. Každá
raxi je MPSK
pričom je funkcie)

očet prvkov
niekedy tiež

teľný signál
rtogonalných
látor.

Obr. 4.20. Demodulátor pre MPSK

Prijatý signál $r(t)$ môže byť vyjadrený s ohľadom na vzťahy (4.95) a (4.96) takto

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} [\cos(\varphi_i) \cos(\omega_0 t) + \sin(\varphi_i) \sin(\omega_0 t)] + n(t)$$

$$0 \leq t \leq T \quad (4.97)$$

$$i = 1, 2, \dots, M;$$

pričom $\varphi_i = \frac{2\pi i}{M}$ a $n(t)$ je gaussovský šumový proces. V tomto prípade sa využívajú len dva referenčné signály (bázové funkcie)

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_0 t); \quad \text{pre hornú vetvu a} \quad (4.98a)$$

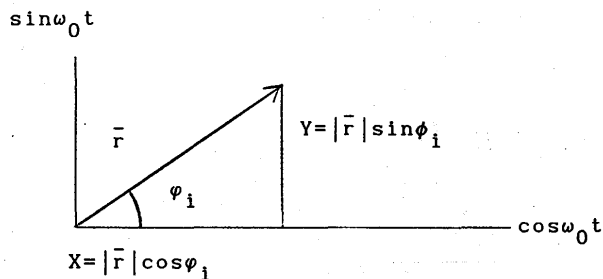
$$\psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_0 t); \quad \text{pre dolný korelátor.} \quad (4.99b)$$

Horný korelátor vypočíta

$$X = \int_0^T r(t)\psi_1(t)dt \quad (4.100)$$

a spodný korelátor

$$Y = \int_0^T r(t)\psi_2(t)dt \quad (4.101)$$



Obr. 4.21. Vektorové znázornenie prijatého signálu

Na obr.4.21. je znázornené, ako sa môže uskutočniť určenie uhla $\hat{\varphi}$ (fázy) prijatého signálu výpočtom $\arctg(\frac{Y}{X})$. Pritom X si možno predstaviť ako zložku zhodnú vo fáze s prijatým signálom a Y ako kvadratickú zložku a $\hat{\varphi}$ je odhad φ_i . Inými slovami horný korelátor na obr.4.20. dáva na výstupe X - amplitúdu súfáznej projekcie vektora \vec{r} a spodný korelátor vytvorí výstup Y - amplitúdu kvadratickej projekcie vektora \vec{r} . Výstupy korelátorov X a Y postupujú do bloku označeného $\arctg(\frac{Y}{X})$. Výsledná hodnota uhla $\hat{\varphi}$ sa potom porovnáva s každou uchovávanou prototypovou fázou φ_i . Demodulátor vyberie tú φ_i , ktorá je najbližšie k uhlu $\hat{\varphi}$. Inými slovami demodulátor vypočíta $|\varphi_i - \hat{\varphi}|$ pre každý prototyp φ_i a vyberie tú φ_i , ktorá dáva minimálnu hodnotu na výstupe bloku $|\varphi_i - \hat{\varphi}|$.

4.2.3.4.3 Koherentná detekcia FSK

(4.100) Modulácia FSK je charakterizovaná tým, že informácia je obsiahnutá vo frekvencii nosného signálu. Typický súbor signálov FSK možno opísať takto

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \varphi); \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.102)$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

(4.101) pričom E je energia $s_i(t)$ za čas T a $(\omega_{i+1} - \omega_i)$ je v typickom prípade celočíselný násobok $\frac{\pi}{T}$. Fáza φ nadobúda ľubovoľnú konštantnú hodnotu a môže byť považovaná za nulovú. Za predpokladu, že bázové funkcie $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t)$ tvoria ortonormálny súbor, je najužitočnejší tvar $\{\psi_j(t)\}$ nasledujúci

$$\psi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_j t); \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.103)$$

prítom podobne ako v predošlom prípade $\sqrt{\frac{2}{T}}$ je normalizovaná stredná hodnota výstupu detektora. Z rovnice 4.5 môžeme písať

$$a_{ij} = \int_0^T \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_j t) dt \quad (4.104)$$

čenie uhla
X si možno
gnálom a Y
vami horný
lu súfáznej
výstup Y -
korelátorov
iná hodnota
rototypovou
zsie k uhlu
pre každý
hodnotu na

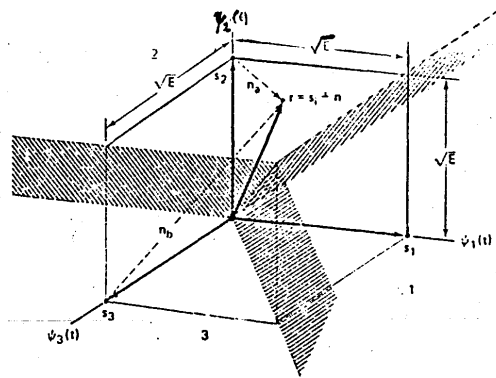
$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{E} & \text{pre } i = j \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases} \quad (4.105)$$

Inými slovami: i -tý prototypový vektor signálu je umiestnený na i -tej súradnicovej osi a jeho koncový bod je posunutý vzhľadom na počiatok o \sqrt{E} . Vo všeobecnom M -árnom prípade je potom pri

takomto postupe vzdialenosť medzi ľubovoľnými prototypovými signálnymi vektormi \bar{s}_i a \bar{s}_j konštantná

$$d(\bar{s}_i, \bar{s}_j) = \|\bar{s}_i - \bar{s}_j\| = \sqrt{2E} \quad \text{pre } i \neq j \quad (4.106)$$

Na obr. 4.22. sú znázornené prototypové vektory signálov a rozhodovacie oblasti pre trojstavovú ($M = 3$) koherentnú detekciu FSK.



Obr. 4.22. Priestor signálov pre trojstavovú FSK

Tak ako v prípade PSK, priestor signálov je rozdelený do M rozhodovacích oblastí, z ktorých každá obsahuje jeden prototypový vektor signálu. V tomto prípade sú hranice medzi rozhodovacími oblasťami tvorené rovinami, pretože priestor je trojrozmerný. Optimálne je rozhodnúť podľa pravidla, že vyslaný signál patrí do triedy, ktorej index korešponduje s oblasťou, v ktorej sa nachádza prijatý signál. Na obr. 4.22. je prijatý vektor \bar{r} znázornený v oblasti 2. Detektor ho teda musí klasifikovať podľa uvedeného rozhodovacieho pravidla ako signál \bar{s}_2 . Pretože šum je gaussovský náhodný vektor pravdepodobnosť, že \bar{r} bol prijatý v dôsledku vyslania iného signálu ako \bar{s}_2 je nenulová. Ak napríklad vysielateľ vysle \bar{s}_2 , potom \bar{r} je súčtom

typovými signálu a sumu

$$\bar{r} = \bar{s}_2 + \bar{n}_a \quad (4.109)$$

(4.106) a rozhodnutie v prospech \bar{s}_2 bolo urobené správne. Avšak ak bol vyslaný signál \bar{s}_1 , potom

$$\bar{r} = \bar{s}_3 + \bar{n}_b \quad (4.110)$$

a rozhodnutie v prospech \bar{s}_2 je chybné. Pravdepodobnosť chyby pri FSK je uvedená v časti 4.2.4.

4.2.3.5 Nekoherentná detekcia

4.2.3.5.1 Detekcia diferenciálnej PSK

Názov diferenciálna PSK (DPSK) niekedy vyžaduje objasnenie, pretože označuje dva rozdielne aspekty modulácie/demodulácie - kódovacej procedúry a detekčnej procedúry. Pojem diferenciálne kódovanie označuje procedúru, pri ktorej jednotka alebo nula v kódovanej postupnosti je zakódovaná pomocou zhodnosti alebo rozdielnosti aktuálneho a predchádzajúceho symbolu.

Pojem diferenciálne koherentná detekcia diferenciálne zakódovanej PSK (bežný význam označenia BPSK) - označuje nekoherentnú detekciu, lebo táto nevyžaduje referenčnú fázu nosnej. Niekedy je však aj diferenciálne zakódovaná PSK detekovaná koherentne. Tento prípad uvedieme v časti 4.2.4.3.

Pri nekoherentnej detekcii nie je využívaná (potrebná) znalosť fázy prijímaného signálu. Preto ak vysielaný signál je opísaný vzťahom

ze vyslaný

s oblasťou,

je prijatý

teda musí

ako signál

epodobnosť,

ako \bar{s}_2 je

je súčtom

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_0 t + \theta_i(t)]; \quad \begin{matrix} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, \dots, M; \end{matrix} \quad (4.111)$$

Prijímaný signál môže byť charakterizovaný vzťahom

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_0 t + \theta_i(t) + \alpha] + n(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.112)$$

$$i = 1, \dots, M$$

pričom α je náhodná veličina s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti na intervale $\langle 0; 2\pi \rangle$ a $n(t)$ je AWGN proces. Pri koherentnej detekcii sa používajú spriahnuté filtre alebo ich ekvivalenty, pri nekoherentnej detekcii ich však nemožno použiť. Výstup spriahnutého filtra by bol funkciou neznámeho uhla α . Napriek tomu, ak predpokladáme, že α sa mení pomaly v rámci času dvoch periód ($2T$), diferencia medzi dvoma nasledujúcimi signálmi $\theta_j(T_1)$ a $\theta_k(T_2)$ nezávisí od α , t.j.

$$[\theta_k(T_2) + \alpha] - [\theta_j(T_1) + \alpha] = \theta_k(T_2) - \theta_j(T_1) = \varphi_1(T_2). \quad (4.113)$$

Základom diferenciálnej koherentnej detekcie diferenciálne zakódovanej PSK (DPSK) je nasledujúca úvaha. Fáza nosnej predchádzajúceho intervalu sa môže využiť ako referencia fázy pre demoduláciu. Jej využitie vyžaduje, aby správa bola diferenciálne zakódovaná vo vysielači. Potom vlastná informácia je nesená rozdielmi vo fáze medzi dvoma nasledujúcimi intervalmi. Vyslanie i -tej správy ($i = 1, \dots, M$) zodpovedá (posuvu) zväčšeniu fázy aktuálneho signálu oproti predošlému o $\varphi_1 = \frac{2\pi i}{M}$ radiánov. Detektor vo všeobecnosti určuje súradnice prichádzajúceho signálu jeho korelovaním s lokálne generovanými signálmi, napr.

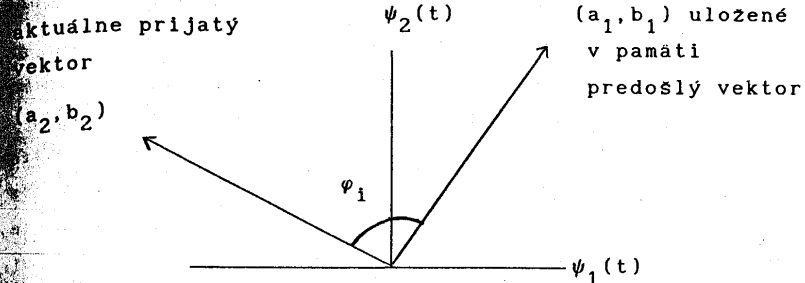
$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_0 t); \quad (4.113)$$

$$\psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_0 t); \quad (4.114)$$

Detektor potom meria uhol medzi práve prijatým vektorom

signálu a predošlým prijatým vektorom signálu, ako je to znázornené na obr.4.23.

4.112)



elením
s. Pri
bo ich
emožno
náneho
pomaly
dvoma

Obr.4.23. Priestor signálov pre DPSK.

Porovnanie PSK ↔ DPSK

j.

(4.113)

nciálne
nosnej
ia fázy
a bola
ormácia
lujúcimi
odpovedá
oslému o
uradnice
rovanými

Vo všeobecnosti DPSK je menej efektívna ako PSK, pretože chyby pri DPSK majú tendenciu rozširovať sa (do nasledujúcich časových intervalov) vďaka korelácii medzi signálmi. Rozdiel medzi detekciou PSK a DPSK je teda najmä v tom, že pri PSK sa prijímaný signál porovnáva s presnou referenciou, avšak pri DPSK sa vzájomne porovnávajú dva zašumené signály. Mohli by sme povedať, že s DPSK je spojené dvakrát toľko šumu ako s PSK. Preto náš intuitívny prvý odhad by mohol znieť, že DPSK je o 3 dB horsia ako PSK. Za toto zhoršenie však môžeme získať zníženie náročnosti a zložitosti systému. Chybovosť detekcie DPSK je uvedená v časti 4.2.4.6.

Príklad binárnej diferenciálnej PSK

(4.113)

Podstatou diferenciálnej koherentnej detekcie pri DPSK je, že hodnota údajov sa určuje z rozdielov vo fáze medzi nasledujúcimi symbolmi. Na obr.4.24.a) je znázornené, ako je diferenciálne zakódovaná binárna postupnosť údajov $m(k)$, kde k je index vzorky v čase. Diferenciálne zakódovaná správa (tretí riadok v obrázku) začína prvým symbolom $c(k=0)$ zakódovanej správy zvoleným ľubovoľne (v našom príklade $c(k=0) = 1$). Postupnosť $c(k)$ môže byť vo všeobecnosti zakódovaná dvoma spôsobmi

(4.114)

vektorom

$$c(k) = c(k-1) \otimes m(k)$$

1011001

(4.115)

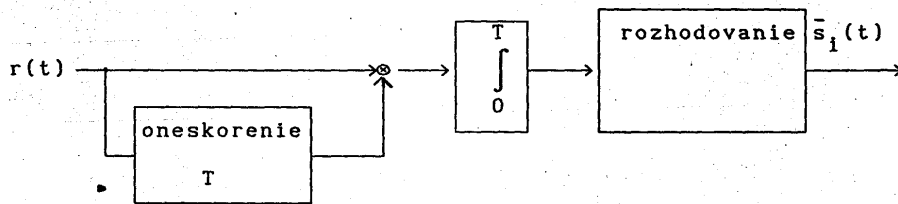
$$c(k) = \overline{c(k-1)} \oplus m(k) \quad (4.116)$$

kde \oplus označuje súčet modulo 2 a čiara na pravej strane vztahu (4.116) označuje negáciu.

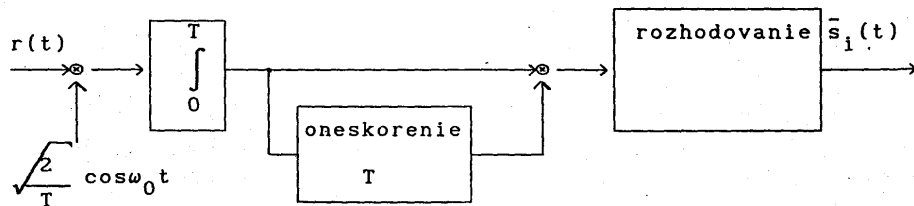
podľa 4.116:

| index k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------------------|-------|-------|-------|---|---|-------|-------|-------|---|-------|-------|
| informačné bity $m(k)$ | | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| dif. zakódované $c(k)$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| fázové skoky $\theta(k)$ | π | π | π | 0 | 0 | π | π | π | 0 | π | π |

a)



b)



c)

Obr. 4.24. DPSK a) diferenciálne kódovanie, b) diferenciálne koherentná detekcia, c) optimálna diferenciálne koherentná detekcia

(4.116)
vztahu

Na obr. 4.24.a) bola diferenciálne zakódovaná správa podľa vztahu (4.116). Inakšie povedané, aktuálny symbol $c(k)$ je rovný 1, ak symbol správy $m(k)$ a predchádzajúci zakódovaný symbol $c(k - 1)$ sú rovnaké, ináč $c(k)$ je rovné 0. Štvrtý riadok je vyjadrením zakódovanej postupnosti pomocou postupnosti fázových posunov.

Na obr. 4.24.b) je znázornená bloková schéma detekcie binárnej DPSK. Základom je integrátor, podobne ako pri koherentnej PSK, dochádza ku korelácii prijatého signálu s referenčným. Rozdiel je však v tom, že referenčný signál je jednoducho oneskorenou verziou prijatého signálu. Inými slovami počas doby trvania každého symbolu porovnávame prijatý symbol s predchádzajúcim a sledujeme, či dochádza ku korelácii alebo antikorelácii (posun fázy o 180°).

Predpokladajme, že prijatý signál nesúci postupnosť fázových skokov (posunov) $\theta(k)$ vstupuje do detektora na obr. 4.24.b) bez prítomnosti šumu. Fáza $\theta(k = 1)$ je porovnávaná s $\theta(k = 0)$; majú rovnakú hodnotu π , preto je prvý detekovaný symbol $\hat{m}(k = 1) = 1$. Potom je $\theta(k = 2)$ porovnávané s $\theta(k = 1)$ opäť majú rovnakú hodnotu, a preto $\hat{m}(k = 2) = 1$. Ďalej je $\theta(k = 3)$ porovnávané s $\theta(k = 2)$ sú rozdielne a preto $\hat{m}(k = 3) = 0$, atď.

Treba poznamenať, že detektor podľa obr. 4.24.b) je suboptimálny [13]. Optimálny diferenciálny detektor pre DPSK vyžaduje referenciu aspoň vo frekvencii nosnej (vo fáze nie je potrebná). Optimálny detektor je znázornený na obr. 4.24.c) [14], jeho účinnosť je uvedená v časti 4.2.4.6.

4.2.3.5.2 Nekoherentná detekcia FSK

1011001

diferenciálne
nekoherentná

Detektor pre nekoherentnú detekciu signálu FSK opísaného vztahom (4.27) môže byť realizovaný pomocou korelátorov podobne ako na obr. 4.17. Obvody ale musia byť navrhnuté pre detekciu energie (bez určovania fázy). Z uvedeného dôvodu nekoherentný detektor musí obsahovať v typickom prípade dvojnásobný počet vetiev ako koherentný. Na obr. 4.25. sú znázornené vetvy nazývané I-kanály (vo fáze - in phase) a Q-kanály (v kvadratúre - "kolmé" - quadrature channels) pre detekciu BFSK. Horné dve vetvy (kanály) sú určené na detekciu signálu

s kmitočtom ω_1 a referenčné signály sú

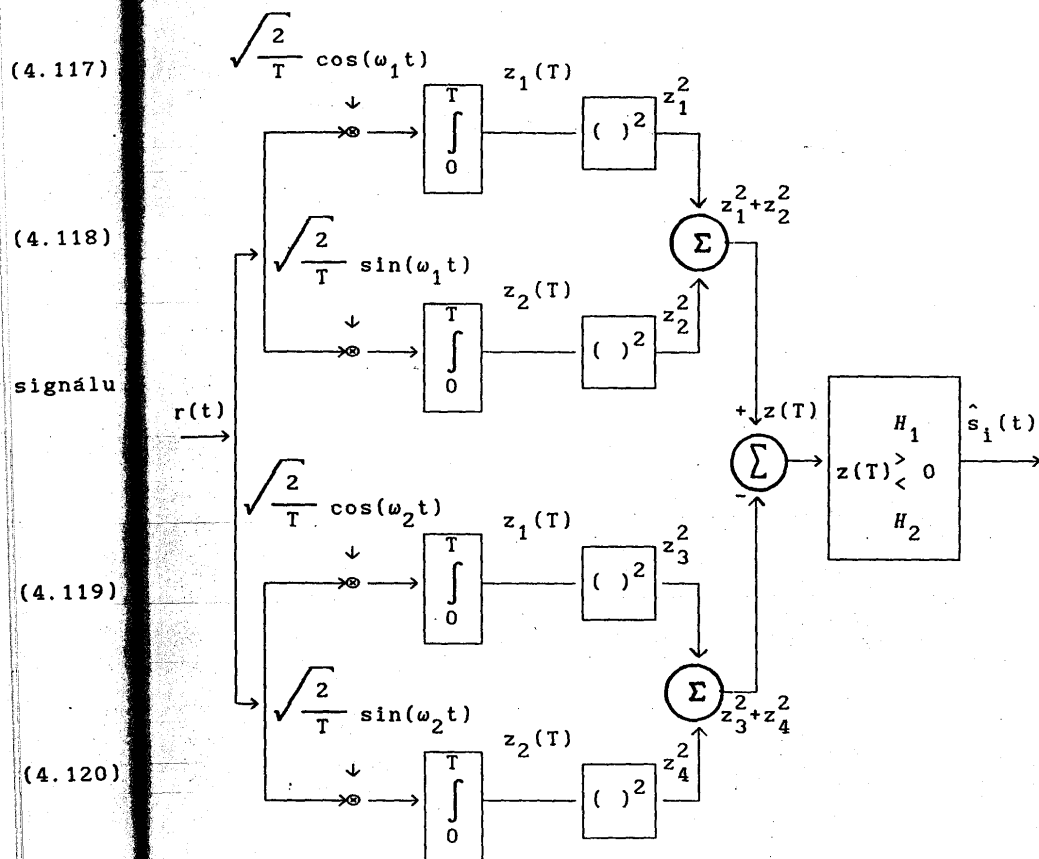
$$\text{pre I-kanál; } \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_1 t) \quad (4.117)$$

$$\text{pre Q-kanál; } \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_1 t) \quad (4.118)$$

Podobne dolné dve vetvy sú určené pre detekciu signálov s kmitočtom ω_2 a referenčné signály sú

$$\text{pre I-kanál } \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_2 t) \quad (4.119)$$

$$\text{pre Q-kanál } \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_2 t) \quad (4.120)$$



Obr. 4.25. Príklad realizácie prijímača pri nekoherentnej FSK

Predstavme si, že prijatý signál $r(t)$ má náhodou presne tvar $\cos(\omega_1 t) + n(t)$. To znamená, že jeho fáza je presne nulová a preto zložka zodpovedajúca signálu je presne zviazaná s referenčným signálom hornej vetvy aj čo do fázy aj čo do frekvencie. V takomto prípade integrátor v hornej vetve obr. 4.25., by mal dať maximálnu hodnotu na výstupe. Integrátor v druhej vetve zhora by mal dať na výstupe hodnotu blízku

k nule (integrovany sum s nulovou strednou hodnotou) pretoze

jeho referenčný signál $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_1 t)$; je ortogonálny k signálovej zložke $r(t)$. V tretej a štvrtej vetve by mala byť na výstupe tiež hodnota blízka k nule pretoze referenčný signál s kmitočtom ω_2 je tiež ortogonálny k zložke užitočného signálu v $r(t)$.

Teraz si predstavme iný prípad, predpokladajme, že náhodou prijatý signál $r(t)$ je práve $\sin(\omega_1 t) + n(t)$. V tomto prípade druhá vetva na obr. 4.25. by mala dať maximálnu hodnotu na výstupe a ostatné by mali dať hodnoty blízke k nule.

V praxi je najpravdepodobnejším prípadom, že ak je vyslaný signál $\cos(\omega_1 t)$, potom $r(t)$ má tvar $\cos(\omega_1 t + \varphi) + n(t)$

Znamená to, že prijatý signál bude čiastočne korelovať s referenčným signálom $\cos(\omega_1 t)$ a čiastočne s referenčným signálom $\sin(\omega_1 t)$.

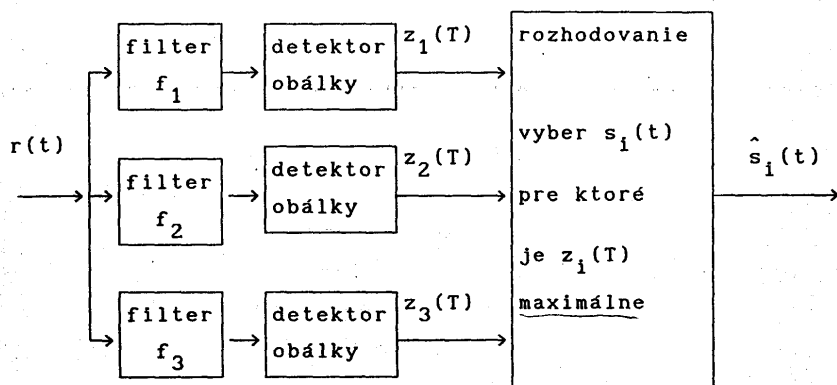
Na základe týchto úvah by malo byť zrejmé, prečo je nekoherentný kvadraturný prijímač zložený z dvojnásobného počtu vetiev ako koherentný prijímač. Nevie nič o fáze prijatého signálu. Prijímač v podstate rozkladá signál na I-zložku a Q-zložku (posunutú o 90°). Na obr. 4.25. bloky nasledujúce za integrátormi vykonávajú umocňovanie na druhú, aby sa zabránilo objaveniu záporných hodnôt. Potom pre každý typ signálu z množiny (v binárnom prípade dvoch signálov) sa sčítava energia z I a Q kanálov. Posledný stupeň formuje $z(t)$ a vyberá signál s kmitočtom ω_1 alebo signál s kmitočtom ω_2 v závislosti od toho, ktorý detektor energie dáva maximálnu hodnotu na svojom výstupe.

Inou možnosťou realizácie nekoherentného detektora FSK je použitie filtrov-konkrétne pásmových priepustí, ktorých stred

pásma prepúšťania je pri frekvenciách $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ a pásmo prepúšťania je $W_f = \frac{1}{T}$, za ktorými sú umiestnené detektory obálky, ako je to znázornené na obr. 4.26.

Detektor obálky pozostáva z vyrovnávača a dolnopriepustného filtra. Detektory sú spriahnuté s obálkami signálov, a nie so samotnými signálmi. Fáza nosnej nehrá v takomto prípade rolu, a preto sa ani nepoužíva.

V prípade binárnej FSK rozhodovanie o tom, či bola vyslaná 0 alebo 1 závisí od toho, ktorý z dvoch detektorov obálky dáva najväčšiu hodnotu amplitúdy v momente merania. Podobne pre viacstavovú FSK (MFSK) rozhodnutie, ktorý z M signálov bol vyslaný závisí od toho, ktorý z M detektorov obálky dáva maximálnu hodnotu na výstupe.



filtre prepúšťajú

$$\text{pásma } W_f = \frac{1}{T} \text{ pri } f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$$

Obr. 4.26. Nekoherentná detekcia FSK s detekciou obálky

FSK je
stred
pásma
tektory
ustného
nie so
rolu, a

Detektor obálky na obr. 4.26. vyzerá jednoduchšie ako prijímač na obr. 4.25. Použitie filtrov však spôsobuje, že detektor obálky sa vyznačuje väčšou váhou a cenou ako kvadraturný prijímač. Kvadraturný prijímač môže byť realizovaný číslicovo, a preto sa aj často uprednostňuje. Detektor na obr. 4.26. môže byť realizovaný číslicovo využitím Fourierovej transformácie na obídanie nevyhnutnosti realizácie analógových filtrov, avšak takýto návrh vedie k väčšej zložitosti ako priama číslicová realizácia.

4.2.3.5.2.1 Minimálne intervaly medzi frekvenciami pri nekoherentnej ortogonálnej FSK modulácii

FSK modulácia je najčastejšie implementovaná ako ortogonálna, pričom ľubovoľná sinusoida z množiny signálov nesmie interferovať so žiadnou inou z danej množiny signálov. Aby to bolo možné dosiahnuť, každá dvojica susedných frekvencií musí byť oddelená frekvenčným intervalom, ktorý je násobkom $\frac{1}{T}$. Signál s frekvenciou f_1 , ktorý je aktívny počas časového intervalu T prislúchajúceho jednému symbolu a potom je "vypnutý", môže byť opísaný analytickým výrazom

$$s_1(t) = (\cos 2\pi f_1 t) \operatorname{rect} \left(\frac{t}{T} \right) \quad (4.121)$$

pričom

$$\operatorname{rect} \left(\frac{t}{T} \right) = \begin{cases} 1 & \text{pre } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{pre } |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (4.122)$$

Fourierova transformácia $s_1(t)$ má tvar

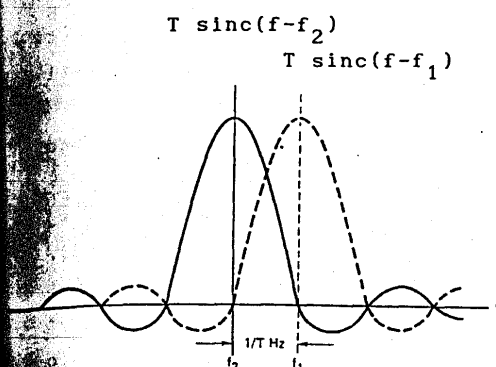
$$F\{s_1(t)\} = T \operatorname{sinc}(f - f_1) \quad (4.123)$$

pričom funkcia sinc je definovaná vzťahom

$$\operatorname{sinc} y = \frac{\sin \pi y}{\pi y} \quad (4.124)$$

pri

ako
gnálov
gnálov.
kvencií
ásobkom
asového
tom je



Obr. 4.27. Minimálny rozdiel frekvencií pri nekoherentnej FSK

- (4.121) Spektrá dvoch za sebou nasledujúcich signálov sú znázornené na obr. 4.27. Aby tieto dva signály vzájomne neinterferovali musí vrchol spektra signálu s frekvenciou f_1 padnúť do niektorého z okamihov, kedy spektrum druhého signálu prechádza nulovou hodnotou, a to isté musí tiež platiť aj opačne. Rozdiel frekvencií medzi stredom hlavného oblúka a prvým bodom, v ktorom spektrum pretína nulovú hodnotu predstavuje minimálny interval potrebný pre vzájomné oddelenie
- (4.122) jednotlivých signálov. Tento interval má $\frac{1}{T}$ [Hz].

4.2.4 Odolnosť proti chybám pre binárne systémy modulácie

4.2.4.1 Pravdepodobnosť chyby symbolu pre koherentne detekovanú BPSK

- (4.123) Dôležitým kritériom porovnávania rôznych číslicových modulácií je pravdepodobnosť chyby symbolu P_E . Pre detektor využívajúci korelátory alebo spriahnuté filtre môže sa výpočet P_E ilustrovať geometricky (obr. 4.16.). Výpočet zodpovedá nájdeniu pravdepodobnosti, že daný vyslaný vektor signálu, napr. \vec{s}_1 pod vplyvom vektora šumu \vec{n} , bude zmenený na prijatý vektor \vec{r} , ktorý padne mimo oblasť 1. Pravdepodobnosť, že
- (4.124) detektor urobí nesprávne rozhodnutie, sa nazýva pravdepodobnosť

chyby symbolu P_E . Často sa tiež používa kritérium P_B pravdepodobnosť chyby na bit, aj keď ide o detekciu pre počet symbolov $M > 2$. Vzťah medzi P_B a P_E si rozoberieme v časti 4.2.5.8.

Pre jednoduchosť sa v tejto časti obmedzíme na koherentnú detekciu modulácie BPSK. Pre tento prípad $P_B = P_E$. Predpokladajme, že signály sú rovnako pravdepodobné. Ďalej predpokladajme, že ak je vyslaný signál $s_1(t)$ ($i = 1, 2$), prijatý signál bude rovný $s_1(t) + n(t)$, pričom $n(t)$ je proces AWGN. Antipodálne signály $s_1(t)$ a $s_2(t)$ môžu byť charakterizované v jednorozmernom priestore, ako to bolo opísané v časti 4.2.1, pričom

$$s_1(t) = \sqrt{E} \psi_1(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.125)$$

$$s_2(t) = -\sqrt{E} \psi_1(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.126)$$

Rozhodovací stupeň detektora vyberie ten signál $s_i(t)$, ktorý zodpovedá najväčšej hodnote na výstupe príslušného korelátora $z_i(T)$, alebo v tomto prípade, kedy sa antipodálne signály vyznačujú rovnakou energiou, detektor využíva pravidlo (4.39a) rozhodne pre

$$s_1(t) \text{ ak } z(T) > \gamma_0 = 0$$

$$s_2(t) \text{ ináč.} \quad (4.127)$$

Je možné, že nastanú dva typy chýb, ako je to znázornené na obr.4.5. Prvý typ chyby nastane ak signál $s_1(t)$ je vyslaný, ale šum má taký charakter, že detektor nameria zápornú hodnotu $z(T)$ a zvolí hypotézu H_2 (hypotézu, že bol vyslaný signál $s_2(t)$). Druhý typ chyby nastane, ak signál $s_2(t)$ je vyslaný, ale detektor nameria kladnú hodnotu $z(T)$ a zvolí hypotézu H_1 (hypotézu, že bol vyslaný signál $s_1(t)$).

Výpočet pravdepodobnosti chyby P_B vychádza zo vzťahov odvodených v časti 4.1. Začneme so vzťahom

$$P_B = P(H_2/s_1)P(s_1) + P(H_1/s_2)P(s_2) \quad (4.128)$$

Ak platí, že apriórne pravdepodobnosti sú rovnaké, t. j. $P(s_1) = P(s_2) = 0.5$, môžeme písať

$$P_B = \frac{1}{2} P(H_2/s_1) + \frac{1}{2} P(H_1/s_2). \quad (4.129)$$

(vďaka symetrii platí rozdelenie $p(z/s_1)$ a $p(z/s_2)$ podľa (4.5))

$$P_B = P(H_2/s_1) = P(H_1/s_2) \quad (4.130)$$

Preto pravdepodobnosť P_B je rovná ploche pod častou jednej z kriviek, $p(z/s_1)$ alebo $p(z/s_2)$ - tej, ktorá zodpovedá "nesprávnej" strane rozhodovacieho prahu (hranice). Preto môžeme vypočítať P_B integrovaním $p(z/s_1)$ v hraniciach od $-\infty$ po γ_0 , alebo integrovaním $p(z/s_2)$ v hraniciach od γ_0 po ∞ .

$$P_B = \int_{\gamma_0}^{\infty} p(z/s_2) dz; \quad \gamma_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (4.131)$$

pričom pravdepodobnosti $p(z/s_i)$ ($i = 1, 2$) sú gaussovské funkcie so strednými hodnotami a_i . Dá sa ukázať, že 4.80 vedie k vzťahu

$$P_B = \int_{a_1 - a_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right) \quad (4.132)$$

pričom σ_0 predstavuje šum na výstupe korelátoru. Funkcia $Q(x)$ sa nazýva komplementárna chybová funkcia (co-error function) a je definovaná vzťahom

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du \quad (4.133)$$

Pre antipodálne signály s rovnakou energiou, ako napr. BPSK podľa vzťahu (4.75), sú výstupné zložky zodpovedajúce uzitočnému signálu $a_1 = \sqrt{E_B}$, ak bolo vyslané $s_1(t)$, a $a_2 = -\sqrt{E_B}$, ak bolo vyslané $s_2(t)$. E_B označuje energiu signálu na jeden binárny symbol. Na výstupe korelátoru pri AWGN

môžeme σ_0^2 nahradit s $\frac{N_0}{2}$ tak, že dostávame

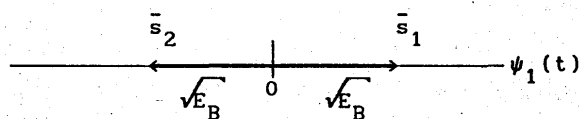
$$P_B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du = \quad (4.134)$$

$$\frac{\sqrt{2E_B}}{N_0} \quad \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\sigma_0} = \frac{\sqrt{2E_B + 1E_B}}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}}} = \frac{\sqrt{3E_B}}{\sqrt{N_0}}$$

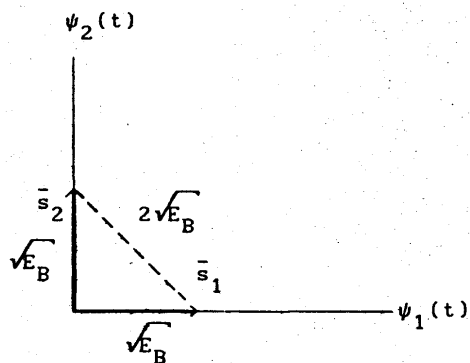
$$P_B = Q\left(\frac{\sqrt{2E_B}}{N_0}\right)$$

pa BPSK

(4.135)



a)



b)

Obr. 4.28. Binárne vektory. (a) Antipodálne. (b) Ortogonálne

Tento výsledok by sme dostali aj na základe uvaženia, že rozdiel v energii E_d medzi antipodálnymi vektormi signálov \bar{s}_1 a \bar{s}_2 s amplitúdami $\pm \sqrt{E_B}$, ako je to znázornené na obr. 4.28. a),

Može byť vypočítaný ako kvadrát vzdialenosti medzi koncovými bodmi príslušných antipodálnych vektorov, čo vyjadrené pomocou signálov dáva vzťah

$$(4.134) \quad \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt = \quad (4.136)$$

$$(4.135) \quad \int_0^T s_1^2(t) dt + \int_0^T s_2^2(t) dt - 2 \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt \quad (4.137)$$

predpokladu signálov s rovnakou energiou dostávame

$$\int_0^T s_1^2(t) dt = \int_0^T s_2^2(t) dt \quad (4.138)$$

$$2E_B - 2E_B \kappa_k = 2E_B (1 - \kappa_k) \quad (4.139)$$

$$\kappa_k = \frac{1}{E_B} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt \quad (4.140)$$

Koeficient korelácie κ_k a E_B je stredná energia binárnych signálov $s_1(t)$ a $s_2(t)$. Koeficient korelácie κ_k je mierou podobnosti medzi signálmi $s_1(t)$ a $s_2(t)$ a platí

$$-1 \leq \kappa_k \leq 1 \quad (4.141)$$

(t) Naše vektory signálov koeficient korelácie môžeme napísať

$$\kappa_k = \cos \theta \quad (4.142)$$

análne pričom θ je uhol medzi \bar{s}_1 a \bar{s}_2 (obr. 4.16.).

pravdepodobnosť chyby môžeme vypočítať na základe rozdielu energií signálov

ízenia, z

gnálov \bar{s}_1

br. 4.28. a)

$$P_B = Q \left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}} \right) \quad (4.143)$$

Dosadením (4.88) do (4.92) dostávame

$$P_B = Q \left\{ \sqrt{\frac{E_B(1 - \kappa_k)}{N_0}} \right\} \quad (4.144) \quad E_d = 2E_B(1 - \kappa_k)$$

Pre $\kappa_k = 1$ ($\theta = 0$) sú signály rovnaké. Pre $\kappa_k = -1$ ($\theta = \pi$) sú signály antipodálne. Pretože binárne PSK signály sú antipodálne môžeme zvoliť $\kappa = -1$ a rovnica (4.144) je potom identická s (4.135).

Poznamenajme, že P_B pre koherentne detekované antipodálne signály v preloženom pásme, ako je to zrejmé z (4.135), je taká istá ako P_B pri detekcii antipodálnych signálov v základnom pásme so spriahnutým filtrom.

4.2.4.2 Základný parameter SNR pre číslicový komunikačný systém

Parameter $\frac{E_B}{N_0}$ vo vzťahu (4.135) môže byť daný do vzťahu s pomerom stredného výkonu signálu k strednému výkonu šumu $\frac{S}{N}$, ktorý označíme ako SNR. Zavedením pásma signálu W môžeme napísať

$$\frac{E_B}{N_0} = \frac{ST}{N_0} = \frac{S}{R_p N_0} = \frac{SW}{R_p N_0 W} = \frac{S}{N} \left(\frac{W}{R_p} \right) \quad (4.145)$$

$E_b = S \cdot T = \frac{S}{R_p}$
 $N = N_0 \cdot W$

kde: S je stredný modulačný výkon signálu, T je čas trvania jedného symbolu, $R_p = \frac{1}{T}$ rýchlosť [bit/sekunda] a $N = N_0 W$.

Analýza vykonaná pre určenie P_B pomocou vzťahov (4.135) a (4.144) sa dá použiť aj pre nájdenie P_B iných typov modulácie.

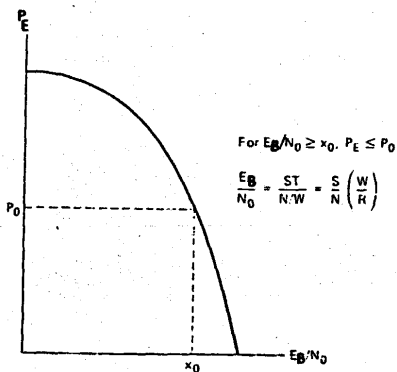
Na obr. 4.29. je znázornený typický tvar závislosti P_E od $\frac{E_B}{N_0}$

pre rôzne systémy modulácie. Tvar kriviek pripomína vodopád, preto sa tiež označujú ako vodopádové. Pre $\frac{E_B}{N_0} \geq x_0$, $P_E \leq P_0$.

(4.143) Bezrozmerný pomer $\frac{E_B}{N_0}$ sa standardne používa pri hodnotení kvality rôznych systémov. Optimálna detekcia signálov predpokladá použitie korelátorov alebo spriahnutých filtrov a v takomto prípade je pásmo signálov totožné s pásmom šumu.

(4.144) Často sa môžeme stretnúť s modelom systému, v ktorom to neplatí.

-1 ($\theta = \pi$)
 signály sú
 je potom
 antipodálne
 5), je také
 základnom



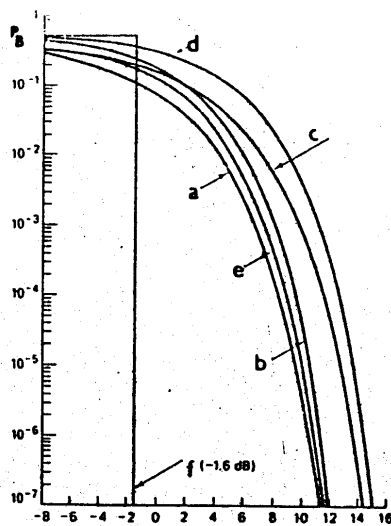
Komunikačný
 do vzťah
 sumu $\frac{S}{N}$
 W môžeme

Obr. 4.29. Ilustrácia všeobecnej závislosti P_E od $\frac{E_B}{N_0}$

(4.145) V praxi sa zavádza pomocný koeficient pre určenie vyžadovaného $\frac{E_B}{N_0}$, ktorý je určený pre takéto suboptimálne

čas trvania
 a $N = N_0 W$
 v (4.135) a
 modulácie.
 P_E od $\frac{E_B}{N_0}$

prípady detekcie. Podľa vyžadovanej hodnoty $\frac{E_B}{N_0}$ sa dá porovnávať kvalita rozličných systémov. Čím je tento pomer menší, tým účinnejší je systém modulácie a detekcie pre danú pravdepodobnosť chyby. Na obr.4.30. sú pre porovnanie znázornené rôzne typy binárnej modulácie/demodulácie. P_B pre koherentne detekovanú PSK je znázornené ako krivka celkom vľavo (zodpovedá vzťah (4.135)).



Obr. 4.30. P_B pre rôzne binárne modulácie: a) koherentná PSK, b) nekoherentná dpsk, c) koherentná FSK, d) nekoherentná FSK e) koel. del. DPSK f) Shannonova hranica

4.2.4.3 Pravdepodobnosť chyby na bit pre koherentne detekovanú DPSK

P_B pre koherentne detekovanú DPSK moduláciu je podľa [15] daná vzťahom

$$P_B = 2Q \left[\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}} \right] \left[1 - Q \left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}} \right) \right] \quad (4.146)$$

Krivka, ktorá zodpovedá tomuto vzťahu je znázornená na

4.30. Malé zníženie kvality oproti koherentne detekovanej modulácii PSK je spôsobené tým, že každá nesprávna detekcia spôsobí dve chyby pri rozhodovaní.

4.4 Pravdepodobnosť chyby na bit pre koherentne detekovanú moduláciu FSK

Rovnice (4.134) a (4.135) opisujú pravdepodobnosť chyby na bit pre koherentné antipodálne signály. Všeobecnejší rozbor pre koherentnú detekciu binárnych (nie nutne antipodálnych) signálov vedie k vzťahu [16]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (4.147)$$

$$\sqrt{\left[(1 - \kappa_k) \frac{E_B}{N_0} \right]}$$

$$\kappa_k = \cos\varphi$$

Pre ortogonálne signály také ako BFSK $\varphi = \frac{\pi}{2}$, pretože signály \bar{s}_1 a \bar{s}_2 sú navzájom kolmé, platí $\kappa_k = 0$, ako sa dá odvodiť aj pomocou vzťahu (4.140) a rovnicu (4.147) potom môžeme

koher
na, E
vzťahy

koherentná PSK
antipodálna FSK
detekovaná

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right) = P_b \quad (4.148)$$

BFSK

podľa [15]

$Q(x)$ je definované vzťahom (4.133).

Výsledok sme mohli dostať aj pomocou rozdielu v energiách signálov. Vektory signálov \bar{s}_1 a \bar{s}_2 s amplitúdami $\sqrt{E_B}$ sú zobrazené na obr. 4.28.b). E_d - rozdiel energií sa dá počítať ako kvadrát vzdialenosti medzi koncovými bodmi ortogonálnych vektorov. Dosadením $E_d = 2E_B$ do (4.143) dostaneme rovnaký výsledok ako dáva vzťah (4.148), ktorému prislúchajúca rovnica je tiež zobrazená na obr.4.30. Ak porovnáme (4.148)

zobrazená n

s (4.135) vidíme, že pre BFSK je treba o 3dB väčšiu hodnotu

$\frac{E_B}{N_0}$, aby sme dosiahli tú istú kvalitu ako pre BPSK moduláciu.

Nemalo by prekvapovať, že BFSK je horšia čo do odolnosti proti

chybám ako BPSK modulácia, pretože pre pevnú hodnotu $\frac{E_B}{N_0}$ sú

ortogonálne vektory k sebe navzájom bližšie ako antipodálne vektory.

P_B pre koherentne detekované ortogonálne preložené signály, ako to vyplýva z (4.147), je taká istá ako P_B pre detekciu unipolárnych signálov v základnom pásme pomocou spriahnutých filtrov. Podrobne sa nezaobráame moduláciou OOK

(on of keying). Poznamenajme len, že P_B dané vzťahom (4.148) je identické tiež pre OOK (s príjmom pomocou spriahnutých filtrov).

4.2.4.5 Pravdepodobnosť chyby na bit pre nekoherentne detekovanú moduláciu FSK

Skúmame teraz súbor rovnako pravdepodobných binárnych signálov FSK definovaných vzťahom (4.74)

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \varphi); \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2 \quad (4.149)$$

Člen φ vo výraze je neznámy a predpokladáme, že má konštantnú hodnotu. Detektor obsahuje dve vetvy (dva kanály $M = 2$)

zostavené z pásmových priepustí a detektorov obálky, ako je to

znázornené na obr.4.26. Do detektora vstupuje prijatý signál $r(t) = s_i(t) + n(t)$, pričom $n(t)$ je AWGN proces s dvojstrannou

výkonovou hustotou spektra $\frac{N_0}{2}$.

Predpokladáme, že $s_1(t)$ a $s_2(t)$ sú oddelené vo frekvenčnej oblasti dostatočným intervalom tak, že ich prekryvanie je

u hodnotu zanedbateľné. Začneme výpočet pravdepodobnosti P_B rovnako ako v prípade koherentnej detekcie PSK modulácie s rovnicou

$$P_B = \frac{1}{2}P(H_2/s_1) + \frac{1}{2}P(H_1/s_2) = \quad (4.150)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p(z/s_1) dz + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p(z/s_2) dz$$

V binárnom prípade $z(T)$ je definovaná ako $z_1(T) - z_2(T)$. Predpokladajme, že pásmo prepúšťania filtra W_f je $\frac{1}{T}$ tak, že obálka FSK signálu na jeho výstupe je približne zachovaná. V prípade, že v prijatom signále nebol šum, hodnota

$z(T) = \sqrt{\frac{2E}{T}}$ ak bol vyslaný signál $s_1(t)$, a $z(T) = -\sqrt{\frac{2E}{T}}$, ak bol vyslaný signál $s_2(t)$. Z dôvodov symetrie je optimálny prah (rozhodovacia hranica) $\gamma_0 = 0$. Ďalej platí

$$p(z/s_1) = p(-z/s_2) \quad (4.151)$$

a preto

$$P_B = \int_0^{\infty} p(z/s_2) dz \quad (4.152)$$

(4.149) alebo

$$P_B = P\{(z_1 > z_2)/s_2\} \quad (4.153)$$

príčom z_1 a z_2 označujú výstupy $z_1(T)$ a $z_2(T)$ z detektorov obálky zobrazených na obr.4.26. V prípade, že bol vyslaný signál $s_2(t) = \cos\omega_2 t$, $r(t) = s_2(t) + n(t)$ a výstup $z_1(T)$ je Gaussovou náhodnou premennou šumu (neobsahuje zložku signálu). Gaussovské rozdelenie po prechode nelineárnym detektorom obálky sa zmení na výstupe na Rayleighovo rozdelenie [16] tak, že

frekvenčné kryvanie je

$$p(z_1/s_2) = \begin{cases} \frac{z_1}{\sigma_0^2} \exp\left[-\frac{z_1^2}{2\sigma_0^2}\right]; & z_1 \geq 0 \\ 0; & z_1 < 0 \end{cases} \quad (4.154)$$

pričom σ_0^2 je sum na výstupe filtra. Na druhej strane $z_2(T)$ má na výstupe detektora obálky Ricianovo rozdelenie, pretože vstup do spodného detektora obálky je sínusovka plus sum [16]. Prí hustotu pravdepodobnosti $p(z_2/s_2)$ platí

$$p(z_2/s_2) = \begin{cases} \frac{z_2}{\sigma_0^2} \exp\left[-\frac{(z_2^2 + A^2)}{2\sigma_0^2}\right] I_0\left(\frac{z_2 A}{\sigma_0^2}\right); & z_2 \geq 0 \\ 0; & z_2 < 0 \end{cases} \quad (4.155)$$

pričom $A = \sqrt{\frac{2E}{T}}$ a podobne ako vyššie predstavuje σ_0^2 sum na výstupe filtra. $I_0(x)$ je modifikovaná Besselova funkcia nultého rádu prvého druhu [17] a je definovaná vzťahom

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \theta) d\theta \quad (4.156)$$

Ak je vysielaný signál $s_2(t)$ prijímač urobí chybu vždy, keď vzorka obálky $z_1(T)$ z horného kanála detektora (vyvolanú iba sumom) prekročí hodnotu vzorky obálky $z_2(T)$ z dolného kanála detektora (vyvolanú signálom plus sumom). Preto pravdepodobnosť tejto chyby môže byť určená integrovaním $p(z_1/s_2)$ podľa z_1 v hraniciach od z_2 po ∞ a vytvorením strednej hodnoty výsledku cez všetky hodnoty z_2 . To znamená

$$(4.154) \quad P_B = P\{(z_1 > z_2)/s_2\} = \int_0^\infty p(z_2/s_2) \left[\int_{z_2}^\infty p(z_1/s_2) dz_1 \right] dz_2 =$$

(4.157)

$z_2(T)$ má
ze vstup
16]. Pre

$$= \int_0^\infty \frac{z_2}{\sigma_0^2} \exp\left[-\frac{(z_2^2 + A^2)}{2\sigma_0^2}\right] I_0\left(\frac{z_2 A}{\sigma_0^2}\right) \left[\int_{z_2}^\infty \frac{z_1}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{z_1^2}{\sigma_0^2}\right) dz_1 \right] dz_2,$$

(4.155) pričom $A = \frac{\sqrt{2E}}{T}$ a vnútorný integrál udáva podmienenú pravdepodobnosť chyby pre pevnú hodnotu z_2 za predpokladu, že bol vyslaný signál $s_2(t)$ a vonkajší integrál vytvára strednú hodnotu tejto podmienenej pravdepodobnosti cez všetky možné hodnoty z_2 . Tento integrál môže byť vyjadrený podľa [18] takto

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{A^2}{4\sigma_0^2}\right] \quad (4.158)$$

$\frac{2}{0}$ sum n
nultého

Sum na výstupe σ_0^2 takto

$$\sigma_0^2 = 2 \left(\frac{N_0}{2} \right) W_f = N_0 W_f \quad (4.159)$$

pričom W_f je šírka pásma prepúšťania filtra. Preto vzťah (4.158) nadobudne tvar

$$(4.156) \quad P_B = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{A^2}{4N_0 W_f}\right] \quad (4.160)$$

Zo vzťahu (4.160) vyplýva, že odolnosť proti chybám závisí od frekvenčného pásma pásmovej priepuste a hodnota P_B klesá, ak W_f rastie. Výsledok je však platný iba vtedy, ak je ISI zanedbateľná. Minimálna veľkosť W_f (t.j. keď nedochádza k ISI)

vybu vždy
letektora
y $z_2(T)$
sumom).
grovaním
strednej

sa dá určiť zo vzťahu (4.49b) pre roll-off-factor $\rho' = 0$. Preto

$$W_f = R \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right] = \frac{1}{T} \text{ a vzťah (4.160) môžeme prepísať takto}$$

$$W_{\text{opt}} = (1 - \rho) \frac{1}{T}$$

$$ISI = 0$$

roll-off factor

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2 T}{4N_0}\right) = \quad (4.161)$$

$$\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_B}{2N_0}\right) \quad (4.162)$$

pričom $E_B = \frac{1}{2} A^2 T$ udáva energiu na bit. Ak porovnávame odolnosť proti chybám nekoherentnej FSK modulácie s koherentnou FSK (obr. 4.30.) vidíme, že pre tú istú hodnotu P_B nekoherentná FSK vyžaduje približne o 1dB viac $\frac{E_B}{N_0}$ ako koherentná FSK (pre $P_B = 10^{-4}$). Nekoherentný prijímač sa však dá ľahšie realizovať, pretože preň netreba generovať koherentný referenčný signál. Preto používajú takmer všetky prijímače v praxi FSK s nekoherentnou detekciou.

V nasledujúcej časti sa ukáže, že pri porovnaní nekoherentnej FSK s koherentnou DPSK dostaneme ten istý rozdiel 3 dB ako pri porovnaní koherentnej FSK a koherentnej PSK.

Ako sa už spomenulo, detaily o OOK nepreberáme, avšak poznamenajme, že vzťah (4.161) udáva tiež P_B nekoherentne detekovanej OOK modulácie.

4.2.4.6 Pravdepodobnosť chyby na bit pri DPSK

Definujme súbor signálov BPSK nasledujúcimi vzťahmi

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \varphi); \quad 0 \leq t \leq T$$

(4.163)

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \varphi \pm \pi); \quad 0 \leq t \leq T$$

Pre DPSK je charakteristické, že nemá v príslušnom priestore signálov pevné rozhodovacie oblasti. Namiesto toho je rozhodovanie založené na rozdieloch vo fáze medzi susednými (za sebou nasledujúcimi) prijatými signálmi. Každý symbol (bit) je

teda prenášaný párom binárnych signálov

(4.161) $s_1(t) = (x_1, x_2), \text{ alebo } (x_2, x_1); \quad 0 \leq t \leq 2T$ (4.164)

(4.162) $s_2(t) = (x_1, x_2), \text{ alebo } (x_2, x_1); \quad 0 \leq t \leq 2T$

príčom (x_i, x_j) ($i, j = 1, 2$) označuje, že za $x_i(t)$ nasleduje $x_j(t)$ definované vzťahom (4.112). Prvých T sekúnd každého signálového prvku je vlastne posledných T sekúnd predošlého signálového prvku. Poznamenajme, že $s_1(t)$ a $s_2(t)$ samé osebe môžu mať dve formy a že $x_1(t)$ a $x_2(t)$ sú antipodálne signály. Preto korelácia medzi $s_1(t)$ a $s_2(t)$ pre ľubovoľnú kombináciu môže byť vyjadrená takto

porovnávame
koherentnou
nekoherentnú
a FSK (pre
realizovať
ný signál.
praxi FSK

$$z(2T) = \int_0^T [x_1(t)]^2 dt - \int_0^T [x_2(t)]^2 dt = 0. \quad (4.165)$$

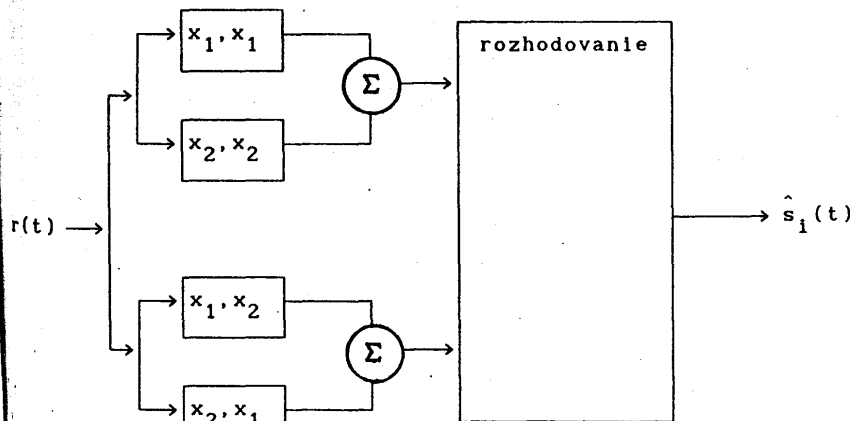
porovnaní
stý rozdiel
PSK.
ráme, avšak
nekoherentne

Preto páry signálov DPSK môžu byť vyjadrené ako ortogonálne signály s dĺžkou trvania $2T$ sekúnd. Detekcia sa môže uskutočniť ako nekoherentná detekcia obálky so štyrmi vetvami (kanálmi) spriahnutými s každou z možných obálok, ako je to znázornené na obr. 4.31. a).

tahmi

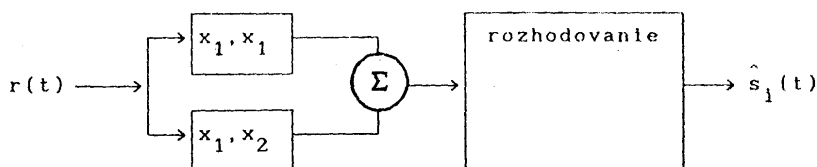
(4.163)

nom priestore
to toho je
susednými (za
mbol (bit) je



filtre prispôsobené k obálkam

a)



b)

Obr. 4.31. Detekcia DPSK. (a) Štvorkanálová diferenciálna koherentná DPSK. (b) Dvojkanálová ekvivalentná realizácia

Pretože dva detektory reprezentujúce jeden symbol sú vzájomnou negáciou jeden druhého, bude vzorka obálky z každého z nich rovnaká. Preto môžeme detektor realizovať ako jeden kanál pre $s_1(t)$ spriahnutý buď s (x_1, x_1) , alebo (x_2, x_2) a jeden kanál pre $s_2(t)$ spriahnutý buď s (x_1, x_2) , alebo (x_2, x_1) , ako je to znázornené na obr. 4.31.b). Detektor DPSK modulácie sa tým zredukuje na štandardný dvoj-kanálový nekoherentný detektor. V skutočnosti môže byť filter spriahnutý s rozdielom signálov tak, že nakoniec je potrebný len jeden kanál. Pre ortogonálne signály takýto detektor je charakterizovaný P_B danou vzťahom (4.111). Pretože DPSK signály majú interval zodpovedajúci jednému bitu dĺžky $2T$, signály $s_i(t)$ definované vzťahom (4.113) majú dvojnásobnú energiu ako signály definované len v intervale dĺžky T . Preto platí

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_B}{N_0}\right) \rightarrow \text{pre optimálny detektor} \quad (4.166)$$

Priebeh príslušnej krivky opísanej vzťahom (4.166) je znázornený na obr.4.30. Charakterizuje diferenciálnu koherentnú detekciu diferenciálne zakódovanej PSK alebo jednoducho DPSK. Tento vzťah platí pre optimálny detektor DPSK zobrazený na obr.4.24.c). Pre detektor zobrazený na obr.4.24.b) je pravdepodobnosť chyby odlišná [19]. Ak porovnáme pravdepodobnosť chyby danú vzťahom (4.166) s pravdepodobnosťou chyby pre koherentnú PSK (obr.4.30.) vidíme, že pre tú istú P_B

potrebuje DPSK približne o 1 dB väčšiu hodnotu $\frac{E_B}{N_0}$ ako BPSK (pre $P_B \leq 10^{-4}$). DPSK systém je ľahšie realizovateľný ako PSK systém pretože DPSK nepotrebuje fázovú synchronizáciu. Preto je DPSK aj napriek menšej efektívnosti často uprednostňovaná pred PSK, ak sa rozhoduje medzi týmito dvoma typmi modulácie.

4.2.4.7 Porovnanie P_B pre rôzne typy modulácie

Vzťahy pre určenie P_B najlepších známych binárnych modulácií, ktoré sme diskutovali v predchádzajúcich častiach, sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke.

sú vzájomnou
iého z nich
n kanál pre
Jeden kanál
, ako je to
ácie sa tým
ý detektor.
lom signálov
ortogonálne
anou vzťahom
odpovedajúci
ahom (4.113)
n v intrvale

| Typ modulácie | P_B |
|-------------------|---|
| koherentná PSK | $Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right)$ |
| nekoherentná DPSK | $\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_B}{N_0}\right)$ |
| koherentná FSK | $Q\left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}}\right)$ |
| nekoherentná FSK | $\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{E_B}{N_0}\right)$ |

(4.166)

(4.166) je
nu koherentnú
roducho DPSK.
zobrazený na
.4.24.b) je
porovnáme
depodobnosťou
re tú istú P_B

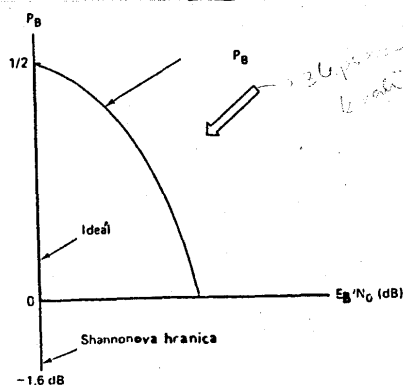
Príslušné priebehy sú znázornené na obr. 4.30. Pre $P_B = 10^{-4}$ je zrejme, že rozdiel medzi najlepším typom modulácie (koherentnej PSK) a najhorším (nekoherentnej ~~PSK~~ FSK) je približne 4 dB. V niektorých prípadoch je tento rozdiel prijateľný a môže sa tým zjednodušiť realizácia pri prechode od koherentnej PSK

k nekoherentnej FSK. Pri návrhu systémov sú však aj ďalšie kritériá, ktoré treba brať do úvahy. Napr. niekedy je nekoherentný systém výhodnejší v kanáli s náhodnými únikmi, pretože v takýchto podmienkach je ťažko získať koherentný referenčný signál. Signály, ktoré sú odolné proti poruchám sú výhodnejšie vo vojenských a kozmických aplikáciách.

4.2.5. M-stavové modulácie a ich odolnosť proti chybám

4.2.5.1 Ideálna pravdepodobnosť bitovej chyby

Typický priebeh "vodopádu", ktorým sa vyznačujú krivky P_B v závislosti od $\frac{E_b}{N_0}$, je znázornený na obr. 4.29. Porovnajme s obr. 4.22. Ide o P_B , charakterizujúce rôzne modulácie za prítomnosti AWGN sumu. Ako by vyzerala ideálna krivka P_B v závislosti od $\frac{E_b}{N_0}$? Na obr. 4.32. je ideálna krivka označená ako Shannonova hranica. Reprezentuje hranicu pre $\frac{E_b}{N_0}$, pod ktorou nemožno uskutočniť spoľahlivý prenos. Môžeme ju opísať takto: Pre všetky hodnoty nad touto hranicou je $P_B = 0$. Ak sa dostaneme nad hranicu, P_B sa zhorší na najhoršiu možnú hodnotu a tam je hodnota $\frac{1}{2}$.



Obr. 4.32. Ideálna závislosť P_B od $\frac{E_b}{N_0}$

Poznam
signal
s P_B
vyhodn
P
jasné,
ziadúc

4.2.5.

Z

modulá
instru

Obr.
modul

J ďalšie
kedy je
únikmi,
oharentny
uchám su

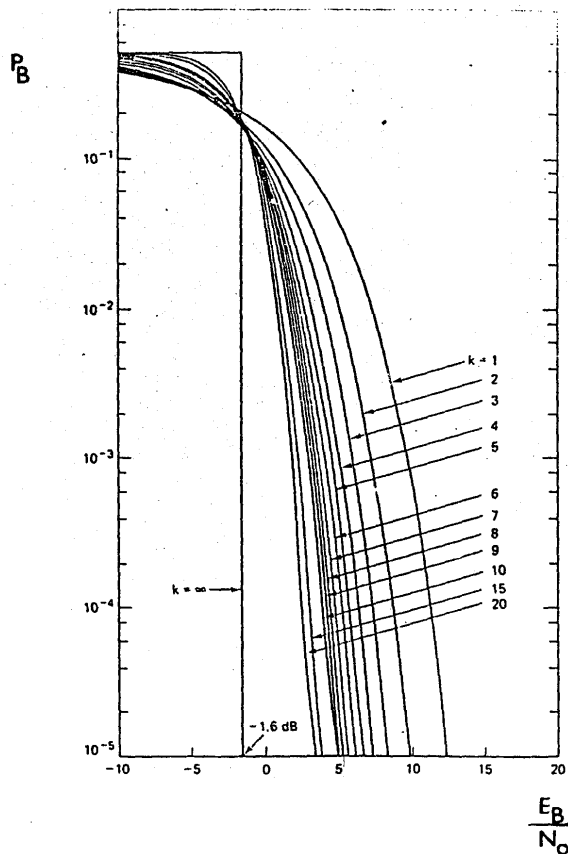
Poznamenajme, že $P_B = 1$ nie je najhorším prípadom pre binárnu signalizáciu, lebo táto je v podstate zhodná čo do účinku s $P_B = 0$, pretože postupnosť bitov stačí invertovať pri vyhodnocovaní a dostaneme správnu hodnotu symbolov.

Pri porovnaní typickej krivky P_B a ideálnej, by malo byť jasné, že šípka na obr. 4.32. naznačuje smer, v ktorom je žiadúce posúvať krivku P_B s cieľom zlepšenia kvality.

4.2.5.2 M-stavová modulácia ●

Zaoberajme sa teraz M-stavovými moduláciami. Procesor - modulátor pri nich zoberie naraz k bitov a považuje ich za instrukciu, ktorý z $M = 2^k$ signálov treba vygenerovať. Binárna

porovnajme
ilácie za
krivka P_B
označená
 E_b
 N_0 , pod
ju opísať
0. Ak sa
ú hodnotu

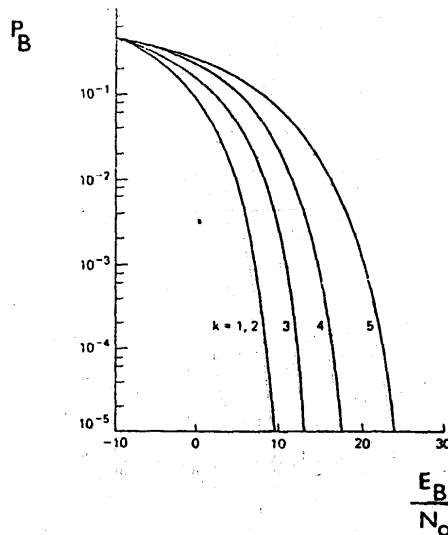


Obr. 4.33. P_B pre koherentne detekované M-árne ortogonálne modulácie

modulácia je špeciálny prípad, ak $k = 1$. Zlepší sa odolnosť viacstavovej modulácie oproti dvojstavovej (binárnej)? Buďte opatrní pri odpovedi!

Na obr. 4.33. sú znázornené priebehy $P_B(M)$ v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$ pre koherentne detekované ortogonálne M-stavové modulácie pri AWGN sume. Na obr. 4.34. je podobne $P_B(M)$ v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$ pre koherentne detekované viacfázové M-stavové modulácie pri AWGN sume.

Ktorým smerom sa posúvajú krivky ak k alebo M rastie? V súvislosti s obr. 4.32. sme naznačili, ktorým smerom by sa mali posúvať pre zlepšovanie, resp. zhoršovanie kvality odolnosti proti chybám.



Obr. 4.34. P_B pre koherentne detekované viacfázové modulácie.

Na obr. 4.33. s tým, ak k rastie, krivky sa posúvajú v smere zlepšovania odolnosti proti chybám. Na obr. 4.34. s tým, ak k rastie, sa krivky posúvajú v smere zhoršovania odolnosti proti chybám. Tieto pozorovania nám napovedajú, že viacstavová

(M-sta
použit
pre v
Prečo
zhorš
V sku

otázky
kritér
šírka
4.33.

Charak
vidite
pásmo.
modulá
frekv
(kriv
prená
bit/s.
potreb
on,
návrh
požad
zlepš
šírky
modul
pásmo
detail

4.2.5

4, 8,

vekte
na ol
část
rovne
vyvo

st
te

B
o
ri
B
o
ri

?
sa
ity

(M-stavová) modulácia zlepšuje odolnosť proti chybám pri použití ortogonálnych signálov a zhoršuje odolnosť proti chybám pre viacfázovú (M-stavovú) signalizáciu. Môže to byť pravda? Prečo by potom vôbec niekto používal viacfázovú PSK, ak táto zhoršuje odolnosť proti chybám oproti binárnej PSK? V skutočnosti sa viacstavová PSK bežne používa. Záludnosť otázky je v tom, že P_B v závislosti od $\frac{E_b}{N_0}$ nie je jediným kritériom kvality. Treba vziať do úvahy aj mnohé iné, ako je šírka pásma, výkon, priepustnosť, zložitosť, avšak na obr. 4.33. a 4.34. je explicitne zrejماً len charakteristika P_B . Charakteristika, ktorá nie je na obr. 4.33. a 4.34. explicitne viditeľná je požiadavka príslušného systému na frekvenčné pásmo. Pre krivky charakterizujúce M-stavovú ortogonálnu moduláciu vidíme, že s nárastom k rastie tiež požadované frekvenčné pásmo (obr. 4.33.). Pre M-stavovú fázovú moduláciu (krivky na obr. 4.34.) je zrejماً, že ak rastie k , možno prenášať cez to isté frekvenčné pásmo väčšou rýchlosťou v bit/s. Inými slovami pre pevnú prenosovú rýchlosť klesá potrebná šírka frekvenčného pásma. Preto oba obrázky svedčia o tom, že M-stavová modulácia je nástrojom ku kompromisnému návrhu - dáva možnosť výberu viacerých variánt podľa požadovaného systému. V prípade ortogonálnej modulácie zlepšenie odolnosti proti chybám sa môže dosiahnuť na úkor šírky frekvenčného pásma. V prípade viacstavovej fázovej modulácie môže byť zväčšená efektívnosť využitia frekvenčného pásma na úkor odolnosti proti chybám. Tieto vzťahy sú detailnejšie uvedené v nasledujúcej časti.

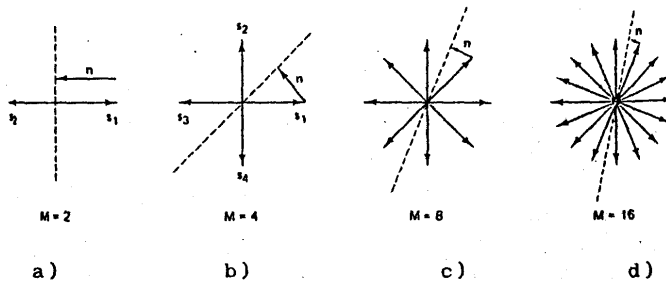
4.2.5.3 Vektorové znázornenie modulácie MPSK ©

Na obr. 4.35. je znázornený súbor MPSK signálov pre $M = 2, 4, 8, \dots$ a 16. Na obr. 4.35.a) sú ($k = 1, M = 2$) antipodálne vektory \bar{s}_1 a \bar{s}_2 posunuté o 180° . Rozhodovacia hranica (označená na obr. 4.27. čiarkovane) rozdeľuje priestor signálov na dve časti. Na obrázku je tiež znázornený vektor sumy \bar{n} s amplitúdou rovnou \bar{s}_1 , ktorý má smer a veľkosť minimálne takú, že dokáže vyvolať chybu pri detekcii.

re
k
sti
vá

Na obr. 4.35.b) je znázornený súbor vektorov pre stvorstavovú moduláciu ($k = 2, M = 4$). Hranice rozhodovania rozdeľujú priestor signálov na 4 oblasti. Na obrázku je znázornená len jedna z nich a tiež sumový vektor n (z koncového bodu vektora signálov kolmo na najbližšiu rozhodovaciu hranicu) taký, ktorý je minimálne potrebný na to, aby nastala chyba pri detekcii.

$$\frac{E_b}{N_0} \text{ väčší}$$



Obr. 4.35. MPSK.

Z obr. 4.35 je zrejmé, že s rastom M sa usilujeme umiestniť viac vektorov signálov na rovinu zodpovedajúcu v sledovanom príklade priestoru signálov. Dôležité je to, že čím sú vektory navzájom bližšie, tým menšia energia sumu je potrebná na vyvolanie chyby.

Obr. 4.35. dáva určitý obraz o tom, prečo krivky na obr. 4.34. sa posúvajú doprava s tým, ako k rastie. Obrázok hovorí tiež o tom, medzi čím treba pri MPSK voliť kompromis. Čím viac vektorov signálov umiestnime do priestoru signálov, tým väčšie množstvo informácie môžeme prenášať bez rozšírenia vyžadovaného frekvenčného spektra (vektory sú v tej istej rovine). Inými slovami zvyšujeme využitie frekvenčného pásma za cenu zhoršenia odolnosti proti chybám.

Zoberme si teraz príklad, ktorý je znázornený na obr. 4.35.d). Vzniká otázka, ako by sme mohli vykúpiť späť zhoršenie odolnosti proti chybám. Ináč povedané, ako by sme to mohli zariadiť, aby vzdialenosti medzi susediacimi vektormi signálov na obr. 4.35.d) vzrástli na také, aké sú uvedené na obr. 4.35.a). Môžeme zväčšiť veľkosť vektorov natoľko, aby sme dosiahli to, že na vyvolanie chyby bude potrebný aspoň taký veľký vektor n , ako v prípade znázornenom na obr. 3.35.a).

Preto pri viacfázovej modulácii so vzrastom M môžeme bud

zlepší
proti
chybám
sa ne:
 $\frac{E_b}{N_0}$

4.2.5.

binár
 $\frac{E_b}{N_0}$
=
pričo

Signé
char:
 $k =$
char:
s BF
párn
post
z o:
ako
 Q p
vek
hod

pre
ania
Je
vého
lcu)
pri

zlepšit využitie frekvenčného pásma na úkor odolnosti proti chybám, alebo ak súčasne zväčšíme aj $\frac{E_B}{N_0}$ a odolnosť proti chybám sa nezhorší, potom toto zlepšenie prebehne na úkor zväčšenia $\frac{E_B}{N_0}$.

4.2.5.4 BPSK a QPSK majú rovnakú pravdepodobnosť chyby P_B

Vo vzťahu (4.94) sme opísali závislosť medzi $\frac{E_B}{N_0}$ a $\frac{S}{N_0}$ pre binárny prenos takto

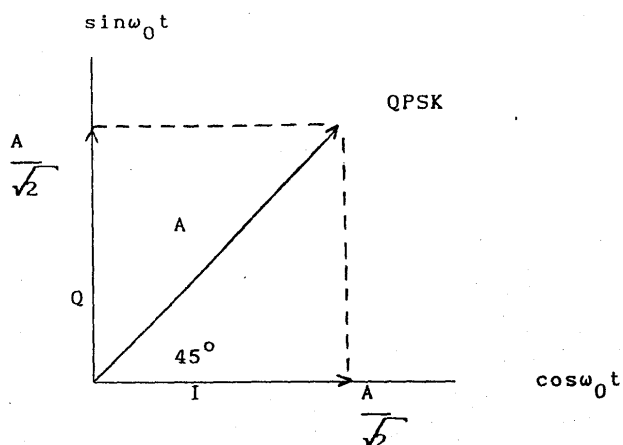
$$\frac{E_B}{N_0} = \frac{S}{N_0} \cdot \frac{1}{R}, \quad (4.167)$$

pričom S je stredný výkon signálu a R je prenosová rýchlosť.

leme
u v
čím
je
na
izok
lis.
ov,
nia
tej
za

Signál BPSK s hodnotou $\frac{E_B}{N_0}$ určenou zo vzťahu (4.167) bude charakterizovaný hodnotou P_B , ktorá sa dá odčítať z krivky $k = 1$ znázornenej na obr. 3.32. QPSK modulácia môže byť charakterizovaná pomocou predstavy dvoch ortogonálnych kanálov s BPSK. Postupnosť bitov QPSK môžeme rozdeliť na postupnosť párnych a nepárnych bitov (označíme si ich ako I a Q postupnosti). Každá z nových postupností moduluje jednu z ortogonálnych zložiek nosnej, a to s polovičnou rýchlosťou ako pôvodná postupnosť. I postupnosť moduluje zložku $\cos \omega_0 t$ a Q postupnosť zložku $\sin \omega_0 t$. Ak má amplitúda originálneho QPSK vektora hodnotu A , potom amplitúda I a Q zložkových vektorov má hodnotu $\frac{A}{\sqrt{2}}$ ako je to znázornené na obr. 4.36.

na
pät
to
rmi
na
sme
aký
buď



Obr. 4.36. Zložky QPSK

Preto každý zo zložkových signálov BPSK má polovičný stredný výkon ako pôvodný signál QPSK. Ak teda originálna QPSK má modulačnú rýchlosť R a stredný výkon S , potom zložkové signály majú polovičnú rýchlosť $\frac{R}{2}$ a stredný výkon $\frac{S}{2}$. Preto $\frac{E_B}{N_0}$ charakterizuje oba kanály BPSK, v prípade, že aj QPSK sa vyznačuje práve hodnotou $\frac{E_B}{N_0}$. Pretože (4.167) môžeme napísať aj takto

$$\frac{E_B}{N_0} = \frac{\frac{S}{2}}{\frac{N_0}{2}} \left(\frac{W}{R_P} \right) = \frac{S}{N_0} \left(\frac{1}{R_P} \right) \quad \text{BPSK} \quad \text{QPSK} \quad (4.168)$$

Preto každý zo signálov BPSK a taktiež z nich zložený signál QPSK je charakterizovaný tou istou hodnotou $\frac{E_B}{N_0}$, a teda aj tou istou hodnotou P_B . Prírodná ortogonalita - posuv fázy 90° medzi bezprostredne za sebou nasledujúcimi symbolmi v postupnosti QPSK vyvoláva to, že P_B je rovnaká pre BPSK a QPSK moduláciu. Treba poznamenať, že pravdepodobnosti chyby symbolu P_E nie sú rovnaké pre QPSK a BPSK. Vzťah medzi P_B a P_E je uvedený v časti 4.2.5.8.

5.5.
4.2.3.3

Obr
moduláci
mat pod
z krivie
moduláci
názorne
obr. 4.
ortogona
znázorne
dve čas
ktorý r
chybnej
Na
modulac
rozhodo
Vektory

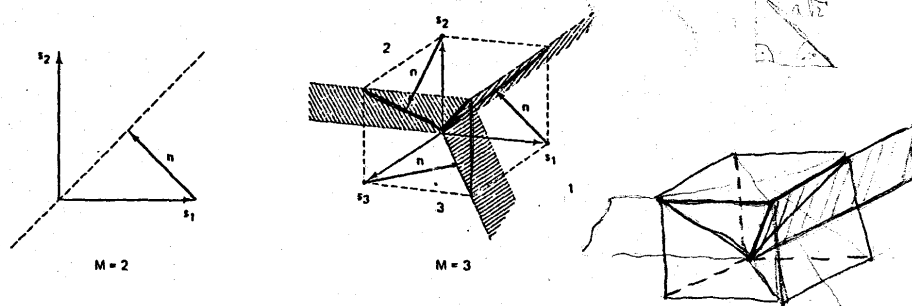
Obr. 4.3

kazdému
Každý
spôsob
obr. 4
sme uk
zodpov
priest
medzi
ostáva
MPSK,

5.5.
4.2. ~~4.2.1~~ Vektorové znázornenie MFSK modulácie

Obr. 4.35. ilustruje, prečo sa odolnosť proti chybám pri modulácii MPSK zhoršuje s rastom k , resp. M . Bolo by užitočné mať podobný obrázok aj pre MFSK moduláciu, čo je zrejme z kriviek obr.4.33. Avšak preto, že priestor signálu pre MFSK moduláciu je charakterizovaný navzájom kolmými osami, dajú sa názorne zobrazit len prípady, kedy $M = 2$ a $M = 3$. Na obr. 4.37. a) sú znázornené binárne vektory s_1 a s_2 , ktoré sú ortogonálne - posunuté o 90° . Hranica rozhodovania je znázornená čiarkovane tak, že rozdeľuje priestor signálov na dve časti. Na tomto obrázku je znázornený tiež vektor sumy \bar{n} , ktorý reprezentuje minimálny vektor sumu potrebný na vyvolanie chybnéj detekcie.

Na obr. 4.37. b) je priestor signálov pri trojstavovej modulácii, v ktorom sú osi navzájom kolmé. Na tomto obrázku rozhodovacie roviny rozdeľujú priestor signálov na 3 oblasti. Vektory sumy \bar{n} sú tu tiež znázornené tak, že sú pridané ku



Obr. 4.37. MFSK

každému vektoru zodpovedajúcemu pôvodným signálom s_1, s_2, s_3 . Každý z nich reprezentuje minimálny vektor sumu, ktorý môže spôsobiť chybu pri detekcii. Pritom minimálne vektory sumu na obr. 4.37. a) a 4.37. b) majú tú istú dĺžku. V časti 4.5.4 sme ukázali, že vzdialenosti medzi ľubovoľnými dvoma vektormi zodpovedajúcimi pôvodným signálom v M -árnom ortogonálnom priestore sú konštantné. V dôsledku toho minimálne vzdialenosti medzi vektormi signálov a ľubovoľnými rozhodovacími hranicami ostávajú pevné, aj keď M rastie. Je to rozdiel oproti prípadu MPSK, kedy pridávanie nových signálov spôsobuje to, že sú

citlivejšie aj na menšie vektory sumu. V prípade ^{MFSK} MPSK pridanie nových signálov nespôsobí zníženie odolnosti proti chybám, teda možnosť vyvolať chybnú detekciu vektorom sumu \bar{n} s menšou dĺžkou. Túto skutočnosť by bolo užitočné ilustrovať nakreslením viac ako 3-rozmerných ortogonálnych priestorov, avšak to pochopiteľne, nie je možné. Môžeme sa, ziať, oprieť len o intuíciu, ktorá nám hovorí, že zväčšením počtu signálov M - pridaním ďalších osí, ktoré budú navzájom kolmé, nespôsobíme ich vzájomné priblíženie. Preto prenášaný signál nebude citlivejší na kratšie vektory sumu. Skutočne to potvrdzujú aj charakteristiky znázornené na obr. 4.33. (s rastom k sa zlepšuje odolnosť proti chybám).

Porozumieť, prečo dochádza k zlepšeniu na obr. 4.33. sa dá na základe porovnania priebehov pravdepodobnosti chyby P_E v závislosti od nenormalizovaného pomeru signál - šum (SNR) a P_E v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$. Na obr. 4.38. je znázornený súbor kriviek P_E v závislosti od SNR pre koherentnú moduláciu FSK. Vidíme na ňom, že P_E sa zhoršuje s rastom M . Nepovedali sme však pred chvíľou, že ortogonálne signály nie sú menej odolné proti vektorom sumu tej istej dĺžky, aj keď ich množina rastie? Toto tvrdenie je správne - pre daný pomer SNR treba vždy rovnakú dĺžku vektora sumu na to, aby príslušný vektor prešiel pod jeho vplyvom do nesprávnej rozhodovacej oblasti. Avšak s tým, ako M rastie, vzrastá aj počet susediacich rozhodovacích oblastí. Preto počet "ciest" (smerov), ktorými sa dá urobiť chyba, vzrastá. Na obr. 4.38. je zobrazené zhoršenie P_E v závislosti od SNR s tým, ako M vzrastá. Pre M existuje $M - 1$ ciest, ako urobiť chybu. Analýza P_E pri pevnej SNR v súvislosti so zväčšovaním M nie je pre číslicový prenos najužitejšia. Pevná hodnota SNR značí konštantné množstvo energie pripadajúce na jeden symbol. Preto s tým, ako M vzrastá treba pevnú hodnotu energie rozdeliť na viac bitov, alebo ináč povedané, na jeden bit pripadá menšie množstvo energie. Najbezpečnejší spôsob porovnávania rozličných systémov modulácie je založený na SNR normovanej na 1 bit, t.j., na pomere $\frac{E_B}{N_0}$. Zlepšenie odolnosti proti chybám s rastom M môžeme pozorovať len v tom prípade, ak je v grafe vynesená závislosť od $\frac{E_B}{N_0}$. Preto ak vynásame

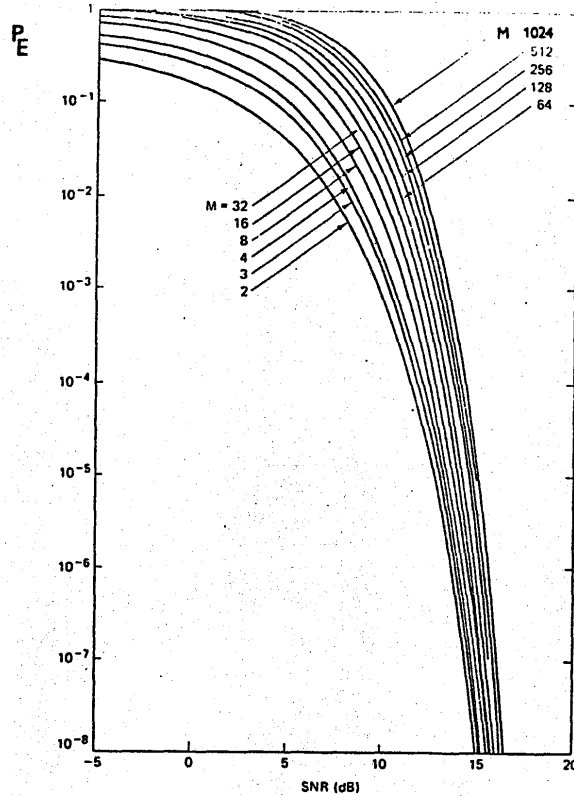
Obr. 4.3:
závislosť
hodnotu
ze obr.
4.25.,
obr. 4.

pridanie
bám, teda
s menšou
kreslením
avšak to
et len o
álov M -
spôsobieme
l nebude
rdzujú aj
om k sa

33. sa dá
chyby P_E
i (SNR) a
ný súbor
íciu FSK
edali sme
ej odolne
a rastie
eba vždy
- prešiel
i. Avšak

odovacích
á urobiť
senie P_E
je M - 1
ivislosti
čnejšia.

padajúce
i hodnotu
na jeden
spôsob
ý na SNR
dolnosti
pade, ak
vynásame

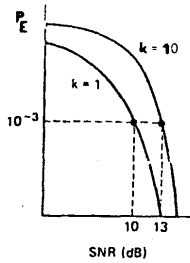


obr. 4.38. P_E v závislosti od SNR pre koherentnú FSK

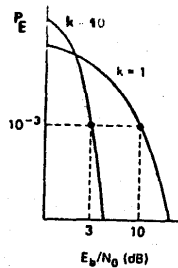
závislosť P_E od SNR, treba na to, aby sme udržali konštantnú hodnotu P_E znižovať $\frac{E_B}{N_0}$ spolu s tým, ako M rastie. To znamená,

ke obr. 4.38. prejde do nového obrázku podobného ako obr. 4.25., ak na horizontálnej osi nahradíme SNR za $\frac{E_B}{N_0}$. Na

obr. 4.39 a 4.40 je znázornený výsledok tejto zmeny.



Obr. 4.39.



Obr. 4.40.

Z neho je zrejmé, že krivky, ktoré znázorňovali P_E v závislosti od vzrastajúceho M na obr. 4.38. sa zmenia na krivky znázorňujúce P_E v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$. Vzťah, ktorý súvisí s touto

transformáciou, je vzťah

$$\frac{E_B}{N_0} = \frac{S}{N} \cdot \frac{W}{R} \quad (4.169)$$

Príčom W je frekvenčné pásmo, v ktorom sa uskutočňuje detekcia.

Keďže

$$R = \frac{\log_2 M}{T} = \frac{k}{T} \quad (4.170)$$

kde T je čas trvania symbolu, môžeme písať

$$\frac{E_B}{N_0} = \frac{S}{N} \left(\frac{WT}{\log_2 M} \right) = \frac{S}{N} \cdot \frac{WT}{k} \quad (4.171)$$

Pre FSK je typickou hodnotou pre W hodnota $\frac{1}{T}$. Ináč povedané $WT \approx 1$, a preto

$$\frac{E_B}{N_0} \approx \frac{S}{N} \cdot \frac{1}{k} \quad (4.172)$$

Na obr. 4.39. je znázornené zobrazenie P_E od SNR na obr. 4.40. P_E od $\frac{E_B}{N_0}$ pre koherentne detekované M -árnu moduláciu. Na obr.

4.39. SNR = zodpovedajúce hodnoty dochádzajú pracovné hodnoty Avšak p (4.172) dochádzajú obr. nestret

4.2.5.6

4.2.5.6

Prí určenie predpokladov signálu

$P_E(M) \approx$

kde P_E (označujú

modul

znázorn

Pr

detekci

Pravdep

Podľa [

4.39. Je na krivke $k = 1$ označený bod zodpovedajúci $P_E = 10^{-3}$ a $SNR = 10$ dB. Na krivke $k = 10$ je označený bod, ktorému zodpovedá tá istá hodnota P_E , avšak pri $SNR = 13$ dB (približné hodnoty z obr. 4.38.). Na tomto mieste jasne vidieť, že dochádza k zhoršovaniu P_E s rastom k . Rozoberme teraz tie isté pracovné body na obr. 4.40., kde horizontálna os označuje hodnoty $\frac{E_B}{N_0}$. Pre $k = 1$ je situácia rovnaká ako na obr. 4.39.

Avšak pre prípad $k = 10$ dostaneme potrebnú hodnotu $\frac{E_B}{N_0}$ z rovnice (4.172) takto: $13 \text{ dB } SNR = 20 \frac{E_B}{N_0} = 20 \cdot \frac{1}{10} = 2$ (3 dB), a preto dochádza k zlepšeniu odolnosti proti chybám s nárastom k . S obr. 4.38. a 4.39. a 4.40. sa bežne v literatúre nestretávame.

losti
krivky
touto

4.2.5.6 Pravdepodobnosť chyby symbolu pre M stavové modulácie

4.2.5.6.1 Pravdepodobnosť chyby symbolu pre MPSK

1.169)
skcia.

Pre koherentne detekovanú M stavovú PSK môže byť $P_E(M)$ určené pri veľkých hodnotách odstupu signál - šum podľa [17] za predpokladu rovnakej pravdepodobnosti vysielania jednotlivých signálov takto

4.170)

$$P_E(M) \approx 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_S}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M} \right) \quad ? \quad (4.173)$$

4.171)

kde $P_E(M)$ označuje pravdepodobnosť chyby symbolu, $E_S = E_B \log_2 M$ označuje energiu symbolu a $M = 2^k$ je počet signálov v modulačnej abecede. Krivky $P_E(M)$ v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$ sú znázornené pre koherentne detekovanú MPSK na obr. 4.41.

ovedané,

4.172)

Pravdepodobnosť chyby symbolu pre diferenciálnu koherentnú detekciu M stavovej DPSK (pre veľké hodnoty $\frac{E_B}{N_0}$ a rovnakú pravdepodobnosť vysielania každého signálu) môžeme vyjadriť podľa [17] pomocou vzťahu

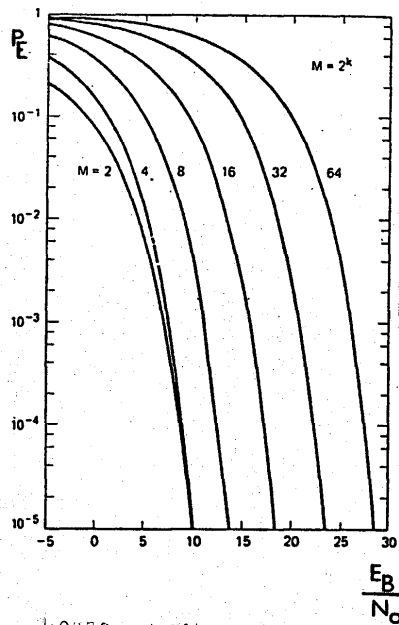
4.40.
a obr.

nekoherentná t.j. diferenčná DPSK



$$P_E(M) \approx 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_S}{N_0}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2M}} \right) \quad (4.174)$$

kde E_S
v závis



Obr. 4.41. P_E pre koherentne detekovanú viacfázovú moduláciu

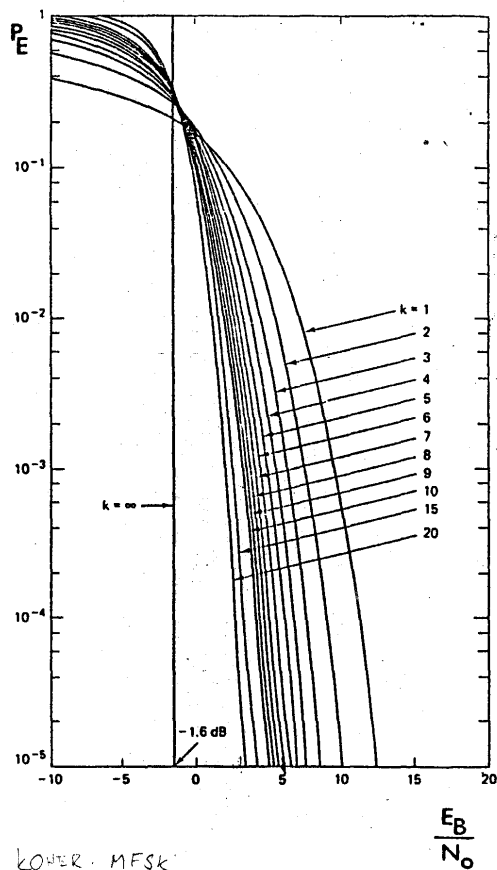
④ 4.2.5.6.2 Pravdepodobnosť symbolu pre MFSK ④

$P_E(M)$ pre M stavovú ortogonálnu koherentne detekovanú moduláciu za predpokladu rovnakej pravdepodobnosti vysielania každého symbolu sa dá zhora ohraničiť podľa [15] takto

$$P_E(M) \leq (M - 1)Q \left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}} \right) \quad (4.175)$$

Obr. 4.4
modulácia

(4.174) kde $E_S = E_B \log_2 M$ je energia symbolu. Príslušné krivky v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$ sú znázornené na obr. 4.42.



KOHER. MFSK

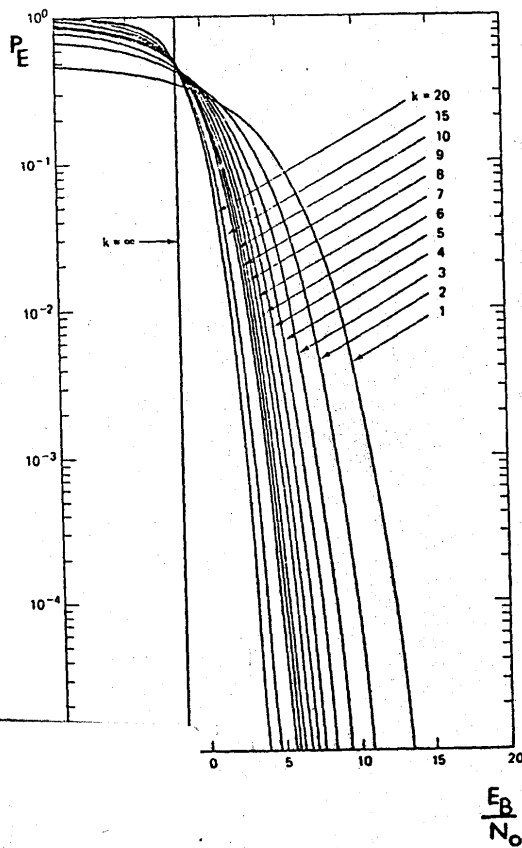
láciu

tekovanú
sielania

(4.175) Obr. 4.42 P_E od $\frac{E_B}{N_0}$ pre koherentnedetekovanú M-árnu ortogonálnu moduláciu MFSK

Pravdepodobnosť chyby symbolu pre nekoherentne detekovanú M stavovú ortogonálnu moduláciu za predpokladu rovnakej pravdepodobnosti vysielania jednotlivých symbolov môžeme podľa [20] vyjadriť vztahom

$$P_E(M) = \frac{1}{M} \exp\left(-\frac{E_S}{N_0}\right) \sum_{j=2}^M (-1)^j \binom{M}{j} \exp\left(\frac{E_S}{jN_0}\right) \quad (4.176)$$



no
každ
ogonálnu
P_E(M) ≈ (M

pre nekoherentne detekovanú M-árnu

vanú
akej
odľa

Pre binárny prípad sa vzťah (4.176) zredukuje na vzťah

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_B}{2N_0}\right) \quad (4.177)$$

176)

ktorý je totožný so vzťahom (4.162). Krivky $P_E(M)$ v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$ pre nekoherentnú M stavovú ortogonálnu moduláciu sú znázornené na obr. 4.43.

Ak porovnáme $P_E(M)$ pre nekoherentný a koherentný prípad tejto modulácie je z obr. 4.42 vidieť, že pre $k > 7$ je rozdiel medzi nimi zanedbateľný. Horné ohraničenie pre $P_E(M)$ ako koherentnej, tak nekoherentnej modulácie je dané vzťahom z [20]

$$P_E(M) < \frac{M-1}{2} \exp\left(-\frac{E_S}{2N_0}\right) \quad (4.178)$$

kde E_S je energia symbolu.

● 4.2.5.7 Pravdepodobnosť chyby na bit v porovnaní s pravdepodobnosťou chyby symbolu $\left[\frac{P_B}{M} \right] \leftrightarrow P_E$

V práci [20] je ukázané, že vzťah medzi P_B a P_E pre M stavovú moduláciu je takýto

$$\frac{P_B}{P_E} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} = \frac{M}{M-1} \quad (4.179)$$

Ak urobíme limitu tohto vzťahu pre $k \rightarrow \infty$ dostaneme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_B}{P_E} = \frac{1}{2} \quad (4.180)$$

írnu

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Obr. 4.44. Ilustrácia vzťahu P_B a P_E

Nasledujúci jednoduchý príklad pomôže intuitívne pochopiť vzťah (4.127). Na obr. 4.44. je osmičkový súbor symbolov. Tieto symboly zodpovedajú správam, ktorých pravdepodobnosť je rovnaká, treba prenášať pomocou ortogonálnych signálov, napr. FSK. Pri ortogonálnej modulácii chybu pri detekcii spôsobí zmena symbolu na ľubovoľný z množiny ostatných $M - 1$ symbolov, pričom pravdepodobnosť každej zmeny je rovnaká. Pre príklad na obr. 4.44. predpokladajme, že bola vyslaná kombinácia 011. Chyba môže nastať v ľubovoľnom z $2^k - 1 = 7$ symbolov s rovnakou pravdepodobnosťou. Poznamenajme, že ak nastane chyba, neznamená to, že všetky bity v rámci symbolu sú chybné. Ak prijímač napr. rozhodne, že bol vyslaný symbol 111 a v skutočnosti bol vyslaný 011, dva z troch bitov ostávajú správne a len jeden bude chybný. Je teda zrejmé, že $P_B \leq P_E$.

Analyzujeme teraz ľubovoľnú pozíciu v symbole (stĺpec na obr. 4.44.). Pre každú pozíciu zistíme, že v príslušnom stĺpci sa nachádza 50 % jednotiek a 50 % núl. Vezmime orámovaný stĺpec na obr. 4.44.; koľko možností je, aby sa pokazila 1 na tejto pozícii? Odpoveď $2^{k-1} = 4$ (Sú to možnosti, v ktorých sa na tejto pozícii môže objaviť 0.) Tieto pozorovania vedú k analogickému výsledku aj pre ostatné stĺpce. Výsledný vzťah pre ortogonálne modulácie - dostaneme, ak vytvoríme pomer počtu možností koľkými môže byť bit pokazený (2^{k-1}) k počtu možností,

koľkými

obr. 4

 $\frac{P_B}{P_E} = -$ P_E

4.2.5.

s pra

modulá

P

rozdie

ľubovo

pravde

všetky

znázor

modulá

symbol

poradí

symbol

aj pri

011

100

Obr. 4

P

kódy,

signál

Najzná

obr.

koľkými môže byť pokazený symbol, t.j. $2^k - 1$. Pre náš príklad obr. 4.44.

$$\frac{P_B}{P_E} = \frac{4}{7} \quad (4.181)$$

4.2.5.8 Pravdepodobnosť chyby na bit v porovnaní s pravdepodobnosťou chyby symbolu pre viacstavovú fázovú moduláciu

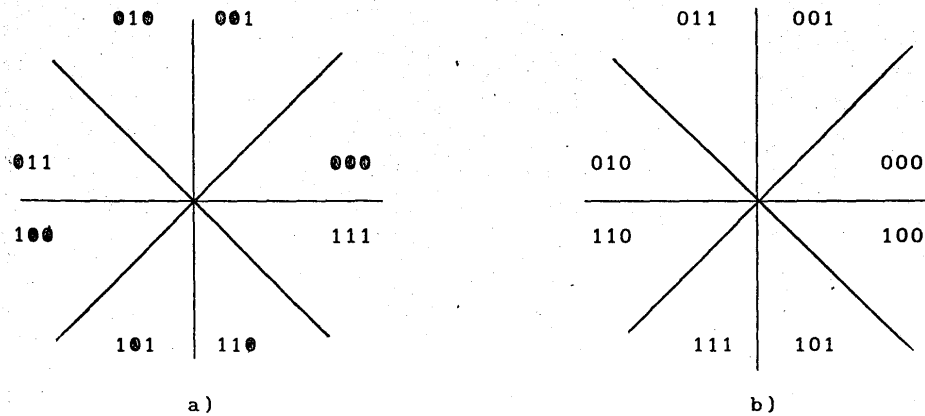
MPSK

$$P_B \leftrightarrow P_E$$

Pre MPSK $P_B \leq P_E$ podobne, ako v prípade MFSK. Dôležitý rozdiel je v tom, že pre ortogonálne modulácie výber ľubovoľného z $M - 1$ chybných symbolov je pri detekcii rovnako pravdepodobný a pri MPSK to tak nie je. V prípade MPSK nemajú všetky vektory vzájomne rovnakú vzdialenosť. Na obr. 4.45.a) je znázornených 8 rozhodovacích oblastí v priestore 8-stavovej modulácie PSK a tieto sú označené príslušnými osmičkovými symbolmi. Ak je očíslovanie oblastí urobené v prirodzenom poradí, ako je to znázornené na obr. 4.45.a), niektoré chyby symbolov budú spôsobovať chyby v dvoch alebo viacerých bitoch aj pri veľkom pomere signál - šum.

vzťah
Tieto
st je
napr.
pôsobí
bolov,
lad na
011.
vlnkou
zamená
napr.
y slany
ybný.

ec na
stípci
stípec
tejto
sa na
vedú
vzťah
počtu
lostí.



Obr. 4.45.

Pre neortogonálne systémy modulácií ako MPSK možno použiť kódy, ktoré zabezpečia, že pri zmene symbolu vyjadreného signálom na susedný signál dôjde len k chybe jedného z k bitov. Najznámejším kódom, ktorý má túto vlastnosť je Grayov kód. Na obr. 4.45.b) je znázornené priradenie bitov na symboly pri

použití Grayovho kódu pre 8-stavovú PSK. Můžeme vidieť, že susedné symboly sa skutočne líšia navzájom len v 1 bite. Preto pravdepodobnosť, že nastane viacnásobná chyba v bitoch symbolu je podstatne nižšia, ako v prípade kódovania podľa obr. 4.45. Dá sa ukázať [15], že pri použití Grayovho kódu platí

$$P_B \approx \frac{P_E}{\log_2 M} = \frac{P_E}{k}; \quad \text{pre } P_E \ll 1 \quad (4.182)$$

Vieme, že BPSK a QPSK majú rovnakú P_B . Vzťahom (4.182) sme však ukázali, že budú mať rovnakú pravdepodobnosť chyby symbolu. Pre moduláciu BPSK $P_E = P_B$, ale pre QPSK $P_E \approx 2P_B$. Presnejší vzťah pre výpočet P_B pre 8-stavovú PSK spolu s hornou a dolnou hranicou pre P_B pre M stavovú PSK pri veľkých hodnotách M sú uvedené v [21].

4.2.6 Vplyv medzysymbolovej interferencie

V predchádzajúcich častiach sme diskutovali detekciu signálu za prítomnosti AWGN a za predpokladu, že nedochádza k medzysymbolovej interferencii (ISI). Analýza preto bola jednoduchšia. V praxi je však ISI druhým zdrojom rušenia, ktorého treba tiež často uvažovať. ISI môže byť spôsobená použitím filtra - pásmovej priepuste na výstupe vysieláča, vstupe prijímača alebo samotným kanálom. Jej výsledkom je ďalšie zväčšenie pravdepodobnosti chyby, ako pri koherentnom, tak pri nekoherentnom spôsobe príjmu. Analýzy, ktoré zahŕňajú aj vplyv ISI aj AWGN sú však oveľa zložitejšie ako tie, ktoré sme vykonali. V prípade záujmu možno podrobne nájsť v [22 - 27].

4.2.7 Záver k moduláciám

Roztriedili sme niektoré základné číslicové modulácie. Sledovali sme geometrické znázornenie vektorov signálu a sumu, vlastnosti ortogonalít a antipodality. Umožnilo nám to analyzovať problémy detekcie pomocou tzv. ortogonálnych priestorov signálov. Zaoberali sme sa tiež odolnosťou niektorých typov modulácií proti chybám a je kvantitatívnym ohodnotením.

5 Kódovanie pre kanál

Kódovanie pre kanál môže byť rozdelené na dve oblasti problémov

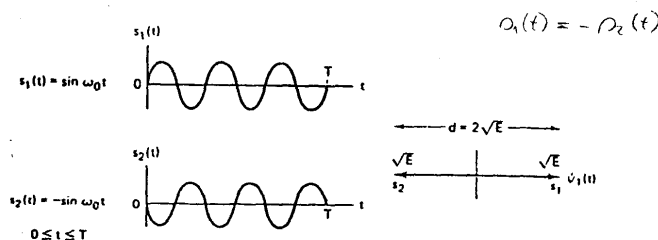
1) Kódovanie signálov, (signal design, waveform coding) sa zaoberá transformáciou signálov na iné signály, také, ktoré majú lepšiu odolnosť proti chybám napr. tým, že ich vlastnosti sú lepšie prispôbené ku kanálom, alebo tým, že je minimalizovaná ich vzájomná podobnosť.

2) Kódovanie postupností symbolov (structured sequences); táto oblasť sa zaoberá transformáciou postupností symbolov na iné postupnosti, pričom posledné majú vhodnejšiu štruktúru za cenu určitej nadbytočnosti. Nadbytočnosť sa môže využiť buď na odhalenie, prípadne opravu chýb, príslušné kódy nazývame kódmí pre prenos resp. samoopravnými kódmí, alebo môže zabezpečiť splnenie obmedzenia na postupnosti symbolov dané kanálom - translačné kódy. Obmedzenia vznikajú v súvislosti s požiadavkami na synchronizáciu, frekvenčné spektrum a iné vlastnosti signálov.

5.1 Kódovanie signálov

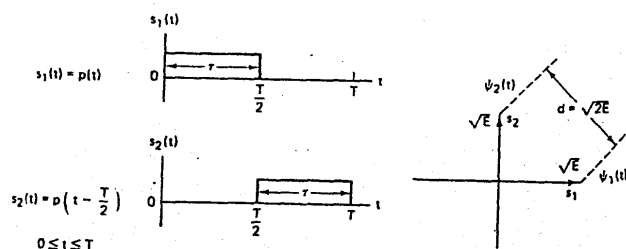
5.1.1 Antipodálne a ortogonálne signály

Antipodálnymi signálmi sme sa už zaoberali. Uvedme ich základné charakteristiky. Na obr. 5.1. je znázornený príklad súbor antipodálnych signálov s analytickým vyjadrením $s_1(t) = -s_2(t) = \sin \omega_0 t$, $0 \leq t \leq T$. Je na ňom tiež znázornená príslušná vlnová a vektorová reprezentácia.



Obr. 5.1. Príklad antipodálnych signálov

Ako názorne opísať antipodálne signály? Môžeme napr. povedať, že takéto signály majú vzájomné zrkadlové zobrazenie, alebo že jeden je záporný k druhému, alebo že sa líšia o 180° . Na obr. 5.2. je príklad ortogonálneho súboru signálov.



Obr. 5.2. Súbor ortogonálnych signálov

Vieme, že $\sin(x)$ a $\cos(x)$ sú ortogonálne funkcie. Podobne aj $\sin(mx)$ a $\sin(nx)$, ak $m \neq n$, kde m, n sú celé čísla. Na obr. 5.2 je znázornený iný príklad ortogonálnych signálov (impulzov). Dáva ešte jasnejší obraz o ortogonalite. Impulzy sú opísané vzťahmi.

$$s_1(t) = p(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.1)$$

$$s_2(t) = p\left(t - \frac{T}{2}\right); \quad 0 \leq t \leq T$$

príčom $p(t)$ je impulz s trvaním $\tau = \frac{T}{2}$ a T je charakteristický interval.

Vo všeobecnosti je súbor signálov $s_i(t)$ kde $i = 1, 2, \dots, M$ s rovnakou energiou ortogonálny práve vtedy, ak

$$\kappa_{k_{ij}} = \frac{1}{E} \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j \\ 0 & \text{ináč} \end{cases} \quad (5.2)$$

kde $\kappa_{k_{ij}}$ nazývame koeficientom korelácie a E označuje energiu signálu, ktorá je určená vzťahom

E =

Sig
pre
vzá
roz
rov
ort
kol
na
s c
sig

5.1

vyb
mod
Pre
odo
úkcvác
zho

por

odo

pát

5.

mn
vy
Na
or

$$E = \int_0^T s_i^2(t) dt \quad (5.3)$$

Signály znázornené na obr. 5.2. nemôžu vzájomne interferovať, pretože sa líšia v čase. Vektorové znázornenie ukazuje vzťah vzájomnej kolmosti ortogonálnych signálov. Skalárny súčin dvoch rozdielnych vektorov z množiny ortogonálnych vektorov musí byť rovný nule. V dvoj- alebo trojrozmernom priestore možno vektory ortogonálnych signálov znázorniť geometricky ako vzájomne kolmé. Inak tiež môžeme povedať, že projekcia jedného vektora na druhý je nulová, alebo že žiaden signál nemôže interferovať s ostatnými, pretože s nimi nezdiela ten istý rozmer priestoru signálov.

5.1.2 Kódovanie a M-stavová modulácia

Pri M-stavovej modulácii modulátor na základe k-bitov vyberá jeden z M signálov (najčastejšie $M = 2^k$). M-stavová modulácia sa tiež dá zaradiť do procedúr kódovania signálov. Pre ortogonálne signály (MFSK), sa s tým ako rastie k zlepšuje odolnosť proti chybám, alebo znižuje vyžadovaná hodnota $\frac{E_B}{N_0}$ na úkor frekvenčného pásma.

V neortogonálnom prípade (napr. pri MPSK) možno voľbou väčšieho k zlepšiť využitie frekvenčného pásma na úkor zhoršenia odolnosti proti chybám alebo zväčšenia nevyhnutného pomeru $\frac{E_B}{N_0}$. Rozumná voľba signálu môže byť kompromisom medzi odolnosťou proti chybám, $\frac{E_B}{N_0}$ a účinnosťou využitia frekvenčného pásma. Podrobnejšie sa tým budeme zaoberať v časti 6.

5.1.3 Kódovanie signálov pri korelačnej detekcii

Kódovanie signálov transformuje množinu signálov na inú množinu "lepších" signálov. Tieto signály sa potom môžu vyznačovať väčšou odolnosťou proti chybám ako pôvodné. Najpopulárnejšími kódmi na kódovanie signálov sú tzv. ortogonálne a biortogonálne kódy. Hlavným úsilím pri procedúre

kódovania je urobiť tieto signály čo najmenej navzájom podobnými. Ulohou teda je zmenšiť čo možno najviac koeficient korelácie $\kappa_{k_{ij}}$ (5.2) medzi všetkými párami signálov.

Najmenšia hodnota $\kappa_{k_{ij}} = -1$, vtedy dva skúmané signály označujeme ako antikorelované. Túto hodnotu však možno dosiahnuť len v prípade, ak $M = 2$ a signály sú antipodálne. Vo všeobecnom prípade možno dosiahnuť, aby všetky koeficienty korelácie $\kappa_{k_{ij}}$ boli nulové [28]. Súbor signálov sa vtedy označuje ako ortogonálny. Antipodálne súbory signálov sú optimálne v tom zmysle, že každý signál z množiny antipodálnych je maximálne vzdialený od ostatných z tejto množiny. Napr. na obr. 5.2. vzdialenosť $d = 2\sqrt{E}$, pričom E reprezentuje energiu signálu za čas T , danú vzťahom (5.3).

V porovnaní s tým ortogonálne súbory môžu byť označené ako "druhé najlepšie" z hľadiska distančných vlastností (pre danú energetickú úroveň signálov). Na obr. 5.2. je vzdialenosť medzi ortogonálnymi signálmi $d = \sqrt{2E}$.

Koeficient korelácie je tiež mierou vzdialenosti medzi vektormi signálov. Čím je menší, tým väčšia je vzdialenosť medzi príslušnými dvoma vektormi.

Na obr. 5.1. sú znázornené antipodálne signály, ktoré sú navzájom maximálne vzdialené $\kappa_{k_{ij}} = -1$ a na obr. 5.2. sú ortogonálne signály, pre ktoré $\kappa_{k_{ij}} = 0$, pričom vidíme, že tieto majú vektory navzájom bližšie k sebe. Je zrejmé, že vzdialenosť medzi dvoma identickými signálmi ($\kappa_{k_{ij}} = 1$) bude nulová.

Na obr. 5.3. je znázornená transformácia dvojíc bitov na "zlepšený" ortogonálny súbor kódových slov. Pôvodná aj transformovaná množina slov je zložená z binárnych číslic. Na obr. 5.3. sú tiež znázornené príslušné bipolárne signály, ktoré predstavujú kódové slová.

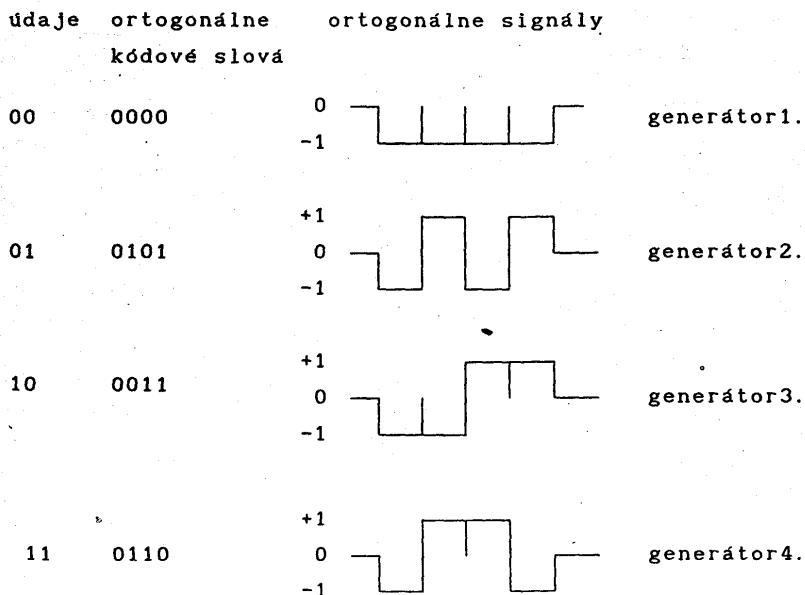
Vzťah (5.2) je formulovaný pre signály. Ak je však signál reprezentáciou binárnych číslic, dá sa ukázať, že vzťah (5.2) sa môže zjednodušiť na tvar

$$\kappa_{k_{ij}} = \frac{\text{počet rovnakých číslíc} - \text{počet rozdielnych číslíc}}{\text{počet všetkých číslíc}}$$

(5.4)

$$\kappa_{k_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{pre } i=j \\ 0 & \text{ináč} \end{cases} ; i, j = 1, 2, \dots, M$$

kde M je počet kódových slov v kóde. Použitím vzťahu (5.4) sa dá pomerne rýchlo overiť, že množina kódových slov, ktorá tvorí kód na obr. 5.3. je ortogonálna. Prenos signálov pomocou



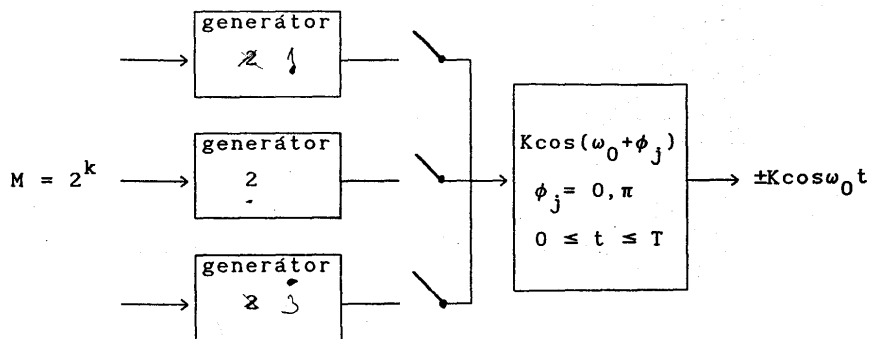
Obr. 5.3. Transformácia dvojíc bitov na ortogonálne slová.

takýchto ortogonálnych súborov je odolnejší proti chybám, pretože príslušné signály sú pri danej hodnote ~~SNR~~ ^{SNR} viac vzdialené.

Analyzujeme teraz súbor obsahujúci $M = 2^k$ správ, ktoré treba prenášať pomocou PSK modulácie cez kanál zaťažený AWGN šumom. Vysielač zobrazený na obr. 5.4. pozostáva z M

generátorov signálov, takého typu ako na obr. 5.3. Pri vysielaní správy sa vyberá k nej prislúchajúci signál z množiny M signálov. Vyberá sa teda jeden z M generátorov, ktorý fázovo moduluje nosnú tak, že fáza nosnej počas charakteristického intervalu jedného bitu T_b , $0 \leq t \leq T_b$ zodpovedá amplitúde ($j = -1$ alebo $j = 1$) príslušného bipolárneho signálu ($\varphi = 0$ alebo π).

Vysielač



Obr. 5.4 Vysielač pre signály z obr. 5.3

r₁(

Obr

Na

sig

kor

nad

= kT_b

vše

Ner

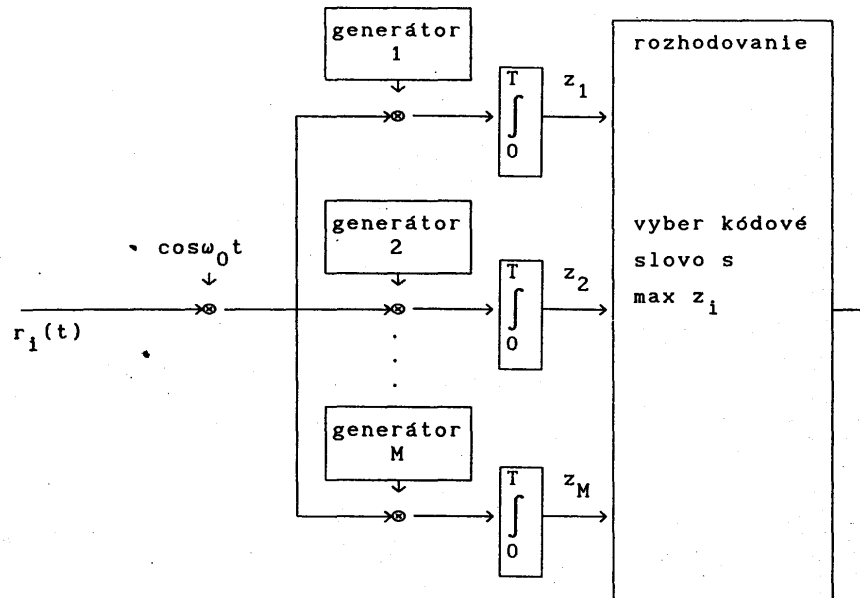
● 5.1

ort

0

1

Pri
iny
ovo
ého
J =
ebo



Obr. 5.5. Prijímač pre signály z obr. 5.3

- Na strane prijímača obr. 5.5. je rušený signál demodulovaný na signál v základnom pásme a potom postupuje na vstupy M korelátorov, alebo spriahnutých filtrov. Korelácia sa vykonáva nad slovami, ktoré trvajú čas $0 \leq t \leq T$, pričom $T = T_b \log_2 M = kT_b$. Pri použití ortogonálneho kódu a bez prítomnosti šumu sú všetky výstupné hodnoty korelátorov okrem jedného nulové. Nenulová výstupná hodnota identifikuje vyslaný signál.

5.1.4 Ortogonálne kódy

Jednabitové slová môžu byť transformované na dvojitové ortogonálne kódové slová opísané maticou A_1 takto:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pre tento a nasledujúce príklady použite vzťah 5.4 na preverenie ortogonalít kódu. Dvojbítové slová môžeme vyjadriť ortogonálnym kódom na základe nasledovnej konstrukcie matice A_2

ortogonálny kód:

$$A_2 = \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 00 & 00 \\ 0 & 1 & 01 & 01 \\ 1 & 0 & 00 & 11 \\ 1 & 1 & 01 & 10 \end{array} = \begin{bmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & A_1 \end{bmatrix}$$

Vpravo dole v matici A_2 sa nachádza podmatrica, ktorá je komplementárna k matici A_1 . Pokračujme podľa rovnakých pravidiel

$$A_3 = \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 00 & 00 & 00 \\ 0 & 0 & 1 & 00 & 01 & 00 \\ 0 & 1 & 0 & 01 & 00 & 00 \\ 0 & 1 & 1 & 01 & 01 & 00 \\ 1 & 0 & 0 & 00 & 00 & 11 \\ 1 & 0 & 1 & 01 & 00 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 00 & 01 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 01 & 00 & 10 \end{array} = \begin{bmatrix} A_2 & A_2 \\ A_2 & A_2 \end{bmatrix}$$

Vo všeobecnosti sa takto dá zostrojiť matica (kód) A_k s rozmermi $2^k \times 2^k$ z matice A_{k-1} s rozmermi $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ a príslušná matica sa nazýva Hadamardova matica.

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-1} \\ A_{k-1} & A_{k-1} \end{bmatrix}$$

Lubovoľný pár kódových slov z množín $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ sa vyznačuje tým, že má rovnaký počet zhodných symbolov ako rozdielných [15]. Preto v súvislosti so vzťahom (5.4) $\kappa_{k_{ij}} = 0$

(pre Použití zlepš modul pravd pravd nasle

$P_E(k)$

Ak ho sa bl aprox vzťah

$\frac{P_B}{P_E}$

zo (5

$P_B(k)$

Na ot Prípa ident obr. odoln zväčš šírky kódov Napr. matic

(pre $i \neq j$) a každý takto skonštruovaný kód je ortogonálny. Použitie ortogonálnych kódov spolu s korelačnou detekciou zlepšuje odolnosť proti chybám podobne, ako použitie M-stavovej modulácie s ortogonálnymi signálmi (napr. MFSK). Pre rovnako pravdepodobné ortogonálne signály s rovnakou energiou, možno pravdepodobnosť chyby symbolu ohraničiť zhora v súlade s nasledovným vzťahom z [15]

$$P_E(k) \leq (2^k - 1)Q \left(\sqrt{\frac{kE_B}{N_0}} \right) \quad (5.5)$$

Ak hodnota $\frac{E_B}{N_0}$ rastie pri pevnom k nerovnosť vo vzťahu (5.5) sa blíži k rovnosti. Pre $P_E(k) \leq 10^{-3}$ je vzťah (5.5) dobrou aproximáciou pravdepodobnosti chyby. Medzi $P_B(k)$ a $P_E(k)$ platí vzťah

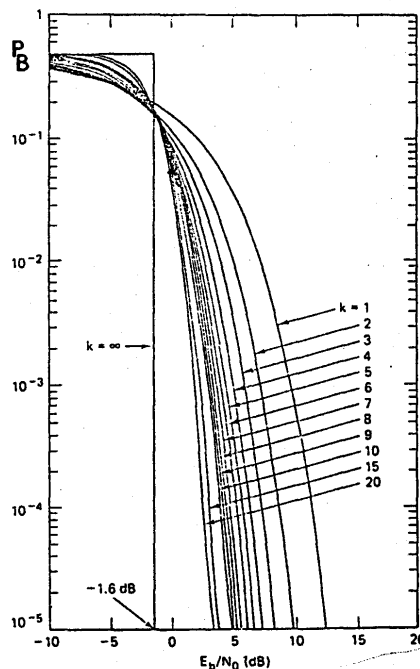
$$\frac{P_B(k)}{P_E(k)} = \frac{2^{(k-1)}}{2^k - 1} \quad (5.6)$$

zo (5.5) a (5.6) vyplýva

$$P_B(k) \leq (2^{k-1})Q \left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}} \right) \quad (5.7)$$

Na obr. 5.6. je znázornená hodnota $P_B(k)$ pre rôzne hodnoty k . Prípade bez kódovania je určený hodnotou $k = 1$. Krivky sú identické s krivkami pre ortogonálnu moduláciu (napr. FSK), obr. 4.33. Vzniká otázka čím musíme zaplatiť za zlepšenie odolnosti proti chybám, ktoré je evidentné z obr. 5.6. pri zväčšovaní k . Zrejme, musíme spotrebovať frekvenčné pásmo väčšej šírky. Ortogonálne kódy možno charakterizovať tým, že každé kódové slovo obsahuje $(2^k - k)$ nadbytočných binárnych symbolov. Napr. kódové slová dĺžky 8 zostrojené pomocou ortogonálnej matice A_3 nesú 3 bity zodpovedajúce správe (informačné bity).

Preto frekvenčné pásmo potrebné po kódovaní je $\frac{8}{3}$ (vo všeobecnosti $\frac{2^k}{k}$)-krát väčšie ako pôvodné frekvenčné pásmo. Pre ortogonálne kódy vyžadované frekvenčné pásmo rastie exponenciálne v závislosti od k. V porovnaní so štruktúrovanými postupnosťami, ktoré sú druhým typom kódovania signálov pre kanály, uvedený spôsob kódovania nevedie k efektívnemu využitiu frekvenčného pásma.



Obr. 5.6. Koherentná detekcia ortogonálnych signálov.

5.1.5 Biortogonálne kódy

Biortogonálny súbor M signálov alebo kódových slov môžeme dostať z ortogonálneho súboru $\frac{M}{2}$ signálov, ich doplnením a

"negác

$B_k =$

Napr.

- 0 0 0
- 0 0 1
- 0 1 0
- 0 1 1
- 1 0 0
- 1 0 1
- 1 1 0
- 1 1 1

Biortogonálne kódy z dvoch ortogonálnych rovníc charakterizované

k_{kij}

rovne polov a A₃ biortogonálne preto prot

Je $\frac{8}{3}$ (vo

nčné pásmo.

ísma rastie

uktúrovanými

ignálov pre

mu využitiu

"negáciou" každého signálu

$$B_k = \begin{bmatrix} A_{k-1} \\ -A_{k-1} \end{bmatrix}$$

Napr. pre trojbitové kódové správy

| | | |
|---|----|------|
| 0 | 00 | 0000 |
| 1 | 01 | 0101 |
| | 10 | 0011 |
| | 11 | 0110 |

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Biortogonálna množina kódových slov je v skutočnosti zložená z dvoch ortogonálnych kódov. Pozostáva z kombinácie ortogonálnych a antipodálnych signálov. S ohľadom na κ_{kij} rovnice (5.2) a (5.4) môžu byť biortogonálne kódy charakterizované ako

$$\kappa_{kij} = \begin{cases} 1 & \text{pre } i = j \\ -1 & \text{pre } i \neq j, |i - j| = M/2 \\ 0 & \text{pre } i \neq j, |i - j| \neq M/2 \end{cases} \quad (5.8)$$

Výhodou biortogonálneho kódu pred ortogonálnym je, že pre rovnakú množinu údajov majú biortogonálne kódové slová polovičnú dĺžku v porovnaní s ortogonálnymi (porovnaj matice B_3 a A_3). Preto aj nároky na šírku frekvenčného pásma majú biortogonálne kódy polovičné ako ortogonálne. Nemalo by nás preto prekvapiť, že biortogonálne kódy sú aj trochu odolnejšie proti chybám ako ortogonálne.

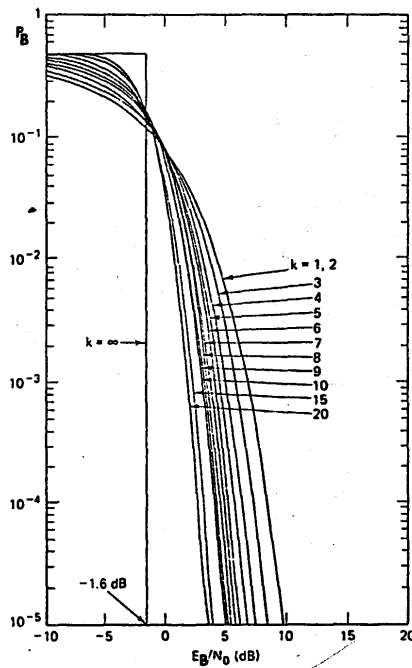
zeme

m a

$$P_E(k) \approx (2^k - 2)Q \left[\sqrt{\frac{kE_B}{N_0}} \right] + Q \left[\sqrt{\frac{kE_B}{N_0}} \right] \quad (5.9)$$

Presnosť (5.9) sa opäť zlepšuje s rastom k . $P_B(k)$ je zložitou funkciou $P_E(k)$, ale dá sa aproximovať vzťahom [15]

$$P_B(k) \approx \frac{P_E(k)}{2}$$



Obr. 5.7. Koherentná detekcia biortogonálne kódovaných signálov

Aproximácia je pomerne dobrá pre $k > 3$, potom platí

$P_E(k)$

Na ob
kódy.
lepší
potre

5.1.6

kódov
alebo

k_i

Simp
s
prav

simp

najm

veľk
majú

Bior
spom

a n

Tiet
k d

prít

samo

naj

kód

5.9)

$$P_E(k) \approx \frac{1}{2} \left\{ (2^k - 2)Q \left[\sqrt{\frac{kE_B}{N_0}} \right] + Q \left[\sqrt{\frac{kE_B}{N_0}} \right] \right\} \quad (5.10)$$

itou

Na obr. 5.7. je znázornená závislosť P_B od $\frac{E_B}{N_0}$ pre biortogonálne kódy. Z obr. 5.7. je zrejmé, že biortogonálne kódy dávajú lepšiu odolnosť proti chybám ako ortogonálne (obr. 5.6.) a potrebujú polovičné frekvenčné pásmo ako ortogonálne kódy.

5.1.6 Transortogonálne kódy - simplexné kódy

Kód, ktorý dostaneme tak, že zmažeme prvý symbol v každom kódovom slove ortogonálneho kódu sa nazýva transortogonálny alebo simplexný kód. Pre takýto kód platí

$$\kappa_{k_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{pre } i = j \\ \frac{1}{M-1} & \text{pre } i \neq j \end{cases} \quad (5.11)$$

Simplexný kód predstavuje ekvivalent ortogonálneho kódu s minimálnou energetickou náročnosťou pri danej pravdepodobnosti chyby.

Pri porovnaní ortogonálnych, biortogonálnych a simplexných kódov sa dá zistiť, že simplexný kód potrebuje najmenší pomer $\frac{E_B}{N_0}$ pre danú prenosovú rýchlosť. Pravda pri veľkých hodnotách k sa rozdiely stierajú a všetky tri spôsoby majú zhruba rovnakú kvalitu odolnosti proti chybám. Biortogonálne kódy potrebujú polovičné pásmo ako ostatné spomínané metódy. Vo všetkých troch prípadoch rastie zložitosť a náročnosť systému na šírku pásma exponenciálne s rastom k . Tieto spôsoby sú preto atraktívne len v prípadoch, ak je k dispozícii dostatočná šírka pásma. Ak pásmom nemožno plyvať, príťažlivejšie sú metódy štruktúrových postupností, využívajúce samoopravné kódy. Ak je frekvenčné pásmo veľmi vzácné, najlepšie výsledky možno dosiahnuť kombináciou modulačných a kódovacích postupov.

nych

5.2 Kódy pre prenos

5.2.1 Samoopravné kódy

Modulátor a demodulátor umožňujú premeniť analógový kanál na diskretný. V dôsledku sumy aj diskretný kanál sa vyznačuje sumom, resp. chybami. Kódy pre prenos sú kódy, ktoré umožňujú premeniť diskretný kanál so sumom na diskretný kanál, ktorý sa prakticky javí ako bezsumový deterministický kanál.

V prípade, že výstupom z diskretného kanála sú len odhady symbolov, ktoré do kanála vstupujú nazývame ho kanálom s tvrdým rozhodovaním. Kódy pre takýto kanál sa nazývajú samoopravné kódy alebo kódy kontrolujúce chyby.

Vo všeobecnom prípade demodulátor môže odovzdávať zo svojho výstupu aj určité kvalitatívne hodnotenie odhadov, ktoré vykonal pri regenerácii diskretných symbolov. V takomto prípade hovoríme o kanáli s mäkkým rozhodovaním. Pri takýchto kanáloch sa nedá hovoriť o chybách a prísne vzaté ani o samoopravných kódoch, preto vo všeobecnosti hovoríme o kódoch pre prenos.

V časti 5.1 sme sa zaoberali spôsobom kódovania pre kanál, pri ktorom bolo vyžitých M signálov pre prenos k -bitových symbolov, pričom $M = 2^k$. Videli sme, že pravdepodobnosť chyby P_B bolo možné znížiť zväčšením hodnoty M za cenu rozšírenia frekvenčného pásma. Najväčšou nevýhodou tejto metódy je, že pásmo nie je efektívne využité. Šírka pásma rastie exponenciálne s rastom k . V tejto časti sa sústreďujeme na kódovanie, ktoré nevyžaduje vlastnosť antipodálnosti ani ortogonálnosti. Využívajú sa kódy, ktoré umožňujú znížiť P_B podobne, ako metódy uvedené v časti 3.8, avšak s podstatne menšími nárokmi na rozšírenie prenosového pásma. Samoopravné kódy delíme na blokové a stromové, pričom z blokových sa najčastejšie používajú lineárne a zo stromových konvolučné kódy.

5.2.1.1.1 Blokové kódy

V prípade blokového kódovania, ako sa už spomenulo v úvode, sa postupnosť symbolov vstupujúca do kodéra delí na bloky po k bitov a tieto sa kódujú na kódové slová po n bitov.

V p
ako
kon
sym

r'
a r
R_k

5.2

s
kaz
nie
(n,
sch

t =

kód
vše
zna
nep
kód
poč

5.2

v
s
Kr
je
do

v prípade samoopravných kódov $n > k$. Takéto kódy sa označujú aj ako (n, k) kódy. $n - k$ symbolov, ktoré pridáva kodér, nazývame kontrolnými symbolmi. Každé slovo obsahuje k informačných symbolov. Nadbytočnosť kódu je definovaná vzťahom

$$r' = \frac{n - k}{k} \quad r' \rightarrow \text{nadbytočnosť kódu} \quad (5.11)$$

a rýchlosť kódu vzťahom

$$R_k = \frac{k}{n} \quad (5.12)$$

5.2.1.1.2 Príklady jednoduchých (n, k) kódov

Medzi najjednoduchšie kódy patria kódy s opakovaním a kódy s kontrolou parity. Kód s opakovaním je triviálny. Kodér každému symbolu priraduje kódové slovo, ktoré pozostáva z niekoľkonásobného opakovania pôvodného symbolu. Je to vlastne $(n, 1)$ kód, pričom najčastejšie n je nepárne. Takýto kód je schopný opraviť t chýb v kódovom slove, pričom

$$t \leq \frac{n - 1}{2} \quad (5.13)$$

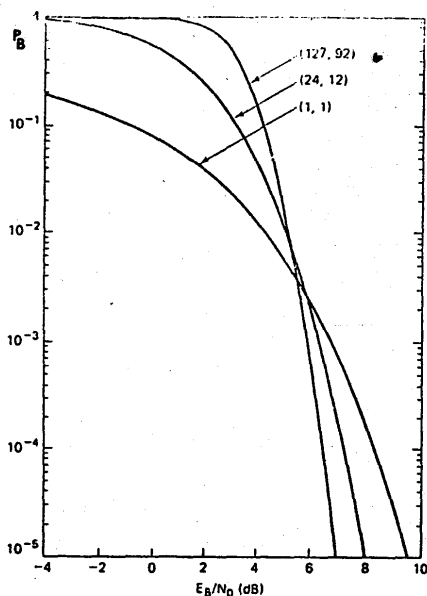
Kód s jednoduchou kontrolou parity je najčastejšie binárny kód, ktorého kódové slová sa vyznačujú vlastnosťou, že sú všetky rovnakej parity (párnej alebo nepárnej). Párna parita znamená, že suma všetkých bitov jedného slova modulo 2 je nula, nepárna znamená, že táto suma je rovná 1. Ide sa teda o $(n, n-1)$ kód, pričom takýto kód je schopný odhaliť všetky chyby, ktorých počet t v kódovom slove je nepárny.

5.2.1.1.3 Zisk kódovania

Na obr. 5.8. je znázornená pravdepodobnosť chyby P_B v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$ pre koherentnú moduláciu PSK kombinovanú s binárnymi (n, k) kódmi pri prenose cez Gaussov kanál. Krivka označená (1, 1) ilustruje nekódovaný prípad. Z obr. 5.8. je zrejmé, že zlepšenie (teda zmenšenie P_B) vďaka kódu možno dosiahnuť len od určitej hodnoty $\frac{E_B}{N_0}$. Pre príklady na obr. 5.8.

je to asi hodnota 5,5 dB. Pod touto hodnotou sú kontrolné bity zbytočnou príťažou. Zmensujú totiž energiu pripadajúcu na 1 bit. Ak chceme zachovať prenosovú rýchlosť, musíme prenášať viac binárnych symbolov za ten istý čas, ak sme pridali kontrolné symboly.

Zisk kódovania je definovaný ako zmenšenie vyžadovanej hodnoty $\frac{E_B}{N_0}$ v dB pri použití kódu v porovnaní s pôvodnou hodnotou $\frac{E_B}{N_0}$ v dB bez kódovania, pričom P_B je v oboch prípadoch rovnaká.



Obr. 5.8. Koherentná PSK a (n, k) kódy

5.2.1.1.4 Lineárne blokové kódy

V časti 6.1 sme uviedli príklady jednoduchých blokových lineárnych (n, k) kódov. V tejto časti zavedieme všeobecnejšie poznatky o lineárnych blokových kódov. Najprv si však povieme niekoľko slov o algebraickom objekte.

kt
sa
Kon
ope
sčí
1.
prv
2.
prv
3.
adi
prá
4.
kom

len
prv
v
kaž
pol
1,
nás
pol
def
tab
+
0
1

vše
ko
do
de
po
sa
po
pu
Po

ity
1
sa
ali

ktorým je konečné pole, nazývané tiež Galoisovo pole. Označuje sa $GF(q)$, čo súčasne vyjadruje, že pozostáva z q prvkov. Konečné pole je množina q prvkov, na ktorej sú definované dve operácie s nasledujúcimi vlastnosťami (označme ich napr. sčítanie a násobenie):

nej
nou
och

- ① Výsledkom sčítania alebo násobenia prvkov z poľa je tretí prvok z poľa.
- ② Pole vždy obsahuje aditívny a multiplikatívny neutrálny prvok.
- ③ Pre každý prvok z poľa existuje práve jeden inverzný aditívny prvok a pre každý prvok z poľa okrem nulového existuje práve jeden inverzný multiplikatívny prvok.
- ④ Platia pravidlá asociatívnosti, distributívnosti a komutatívnosti.

Konečné pole neexistuje pre ľubovoľný počet prvkov q , ale len pre taký počet prvkov, že q je prvočíslo alebo mocnina prvočísla ~~čísla~~. V prvom prípade sa nazýva prostým polom, v druhom polom rozšírenia zodpovedajúceho prostého poľa. Pre každé q , ktoré vyhovuje týmto podmienkam existuje práve jedno pole. Ak q je prvočíslo, elementmi konečného poľa sú čísla $0, 1, \dots, q - 1$ a operácia súčtu je súčet modulo q . Operácia násobenia v tomto poli je násobenie modulo q . Najjednoduchším polom je pole $GF(2)$, ktoré má dva prvky $0, 1$ a sú v ňom definované operácie sčítania a násobenia nasledujúcimi tabuľkami

$$\begin{array}{c|cc}
 & \text{0} & \text{1} \\
 \hline
 \text{+} & \text{0} & \text{1} \\
 \text{0} & \text{0} & \text{1} \\
 \text{1} & \text{1} & \text{0}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|cc}
 & \text{0} & \text{1} \\
 \hline
 \text{.} & \text{0} & \text{1} \\
 \text{0} & \text{0} & \text{0} \\
 \text{1} & \text{0} & \text{1}
 \end{array}
 \tag{5.14}$$

ych
sie
te,

Ak q je mocnina prvočísla ($q = p^m$), potom prvkami poľa sú všetky polynómy stupňa menšieho alebo rovného $m - 1$, ktorých koefficienty sú z poľa $GF(p)$. Pravidlá sčítania a násobenia dostaneme z obyčajného sčítania a násobenia polynómov definovaných nad konečnými polami a ich následného skrátania pomocou polynómu $p(x)$, ktorý má stupeň m . $p(x)$ má vlastnosť, že sa nedá rozložiť na polynómy nižšieho stupňa s koefficientmi z poľa $GF(p)$ a nazýva sa ireducibilný polynóm. Takéto polynómy sú publikované v tabuľkách, napr. v [12].

Poznámka: Skrátenie modulo $p(x)$ znamená vykonať delenie pomocou

$p(x)$ a ako výsledok vziať zvyšok po tomto delení. Vzťah $a(x) = b(x)$ modulo $p(x)$ sa nazýva kongruencia. Označuje, že $a(x)$ je kongruentné s $b(x)$ modulo $p(x)$, alebo že $a(x) - b(x)$ je deliteľné $p(x)$, alebo že po delení $a(x)$ a $b(x)$ pomocou $p(x)$ dostaneme rovnaké zvyšky.

V konečných poliach, podobne ako sme zvyknutí v bežnej aritmetike, existujú logaritmy. Každé konečné pole obsahuje aspoň jeden prvok, ktorý sa nazýva primitívny prvok s vlastnosťou, že ľubovoľný iný nenulový prvok poľa je niektorou jeho mocninou. Spomínaná mocnina udáva hodnotu logaritmu príslušného prvku poľa. Operáciu násobenia preto možno v konečnom poli uskutočniť aj prostredníctvom logaritmu príslušných prvkov. Namiesto prvku vezmeme pri násobení jeho logaritmus a sčítame ho modulo $q - 1$ s logaritmom druhého súčiniteľa. Výsledok môžeme ponechať podľa potreby vyjadrený v logaritmickej tvare, alebo ho môžeme previesť do iného tvaru. Vo všeobecnosti je operácia násobenia a delenia nenulových prvkov $\alpha^i, \alpha^j \in GF(q)$ definovaná vzťahmi

$$\alpha^i \alpha^j = \alpha^{(i+j) \bmod (q-1)}$$

$$\alpha^i / \alpha^j = \alpha^i \alpha^{(q-1-j)} = \alpha^{(i-j+q-1) \bmod (q-1)}$$

Operácia sčítania sa najjednoduchšie dá vykonať sčítaním prvkov poľa vyjadrených v binárnom tvare. (Súčet mod 2 jednotlivých súradníc vektorov zodpovedajúcich sčítancom bez prenosu.)

Príkladom konečného poľa je $GF(2^3)$

$p(x)$
Moci
prir
a nu

0
 α^0
 α^1
 α^2
 α^3
 α^4
 α^5
 α^6

Blok
post
na b
blok
vekt
vytv
podm
môže
sprá
 $c_j =$

spôs
prvk
 $V_{n,q}$
množ
k-ro

vzdi
scho
Je p

, ze
 x) je
 p(x)
 ežnej
 ahuje
 prvok
 a je
 inotu
 preto
 ritmu
 jeho
 ihého
 irený
 aru.
 ových

$$p(x) = x^3 + x + 1$$

| Mocnina primitívneho prvku a nula | Polynóm nad GF(2) | Vektor nad GF(2) |
|---|----------------------|---------------------|
| 0 | 0 | 0 0 0 0 |
| α^0 | 1 | 0 0 1 |
| α^1 | x | 0 1 0 |
| α^2 | x^2 | 1 0 0 |
| α^3 | $x + 1$ | 0 1 1 |
| α^4 | $x^2 + x$ | 1 1 0 |
| α^5 | $x^2 + x + 1$ | 1 1 1 |
| α^6 | $x^2 + 1$ | 1 0 1 |

vkov
 vých

Blokové kódovanie možno opísať nasledujúcim spôsobom. Rozložme postupnosť symbolov vstupujúcich do kódéra ... , a_i , a_{i-1} , ... na bloky, z ktorých každý má práve k symbolov. Množinu týchto blokov nazveme množinou správ alebo množinou informačných vektorov \bar{a} . Označme množinu všetkých vektorov dĺžky n vytvorených zo symbolov z poľa GF(q) ako $V_{n,q}$. V nej vyberme podmnožinu C takú, že obsahuje aspoň q^k rôznych vektorov. Potom môžeme množinu správ zobrazit na množinu C tak, že každej správe priradíme niektorú postupnosť

$$c_j = (c_{j,0}, c_{j,1}, \dots, c_{j,n-1}) \in C.$$

Množinu C nazývame blokovým kódom a pravidlo zobrazenia spôsobom kódovania. Obmedzíme sa na prípad, keď symboly sú prvkami konečného poľa GF(q). V takomto prípade môžeme množinu $V_{n,q}$ skúmať tiež ako lineárny priestor nad poľom GF(q). Určitú množinu vektorov považujeme teda za lineárny kód, ak tvorí k-rozmerný podpriestor $C_{k,q}$ lineárneho priestoru $V_{n,q}$.

Účelnými pomôckami pri analýze kódov sú Hammingova vzdialenosť, Hammingova váha, ktorými môžeme opísať korekčné schopnosti kódov. Hammingova vzdialenosť dvoch vektorov v a v' je počet ich odlišných súradníc a označuje sa $d(v, v')$.

Kód, pomocou ktorého chceme opraviť všetky t a menej násobné chyby musí obsahovať len také kódové vektory (slová), že zladen z ľubovoľnej dvojice vektorov neprejde pod účinkom týchto chýb do toho istého tretieho vektora z $V_{n,q}$. Inými slovami to znamená, že pre korekciu t chýb je nevyhnutnou podmienkou minimálna vzdialenosť kódových vektorov (kódová vzdialenosť)

$$d_m \geq 2t + 1 \quad (5.15)$$

Hammingova váha vektora \vec{v} určuje počet jeho nenulových súradníc. Označme ju $w(\vec{v})$. V lineárnom priestore zrejme platí $d(\vec{v}, \vec{v}') = w(\vec{v} - \vec{v}')$

Platí, že, ak \vec{v}_1, \vec{v}_2 sú kódovými slovami lineárneho kódu, musí byť aj ich rozdiel $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ tiež kódovým vektorom, pretože množina všetkých kódových vektorov je vektorový priestor. To teda znamená, že vzdialenosť medzi dvoma kódovými vektormi sa rovná váhe nejakého tretieho kódového vektora. Túto veľmi užitočnú vlastnosť môžeme sformulovať takto

Minimálna vzdialenosť d_m lineárneho kódu sa rovná minimálnej váhe jeho nenulových kódových vektorov.

Je známe, že ľubovoľný k -rozmerný podpriestor n -rozmerného lineárneho priestoru môže byť zadany pomocou systému $n - k$ lineárne nezávislých homogénnych rovníc zväzujúcich súradnice vektorov nejakej bázy. Nech súradnicami vektorov z $V_{n,q}$ v báze

100 ... 0

010 ... 0

...

000 ... 1

sú c_0, c_1, \dots, c_{n-1} , potom systém rovníc určujúcich kód C má nasledujúcu formu

$$\begin{aligned} h_{1,0}c_0 + h_{1,1}c_1 + \dots + h_{1,n-1}c_{n-1} &= 0 \\ h_{2,0}c_0 + h_{2,1}c_1 + \dots + h_{2,n-1}c_{n-1} &= 0 \\ \dots & \\ h_{r,0}c_0 + h_{r,1}c_1 + \dots + h_{r,n-1}c_{n-1} &= 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

pric

\vec{c}_H^T

kde

1,

mat

(5.

lin

kaž

vyj

Vek

1,

sú

tvo

Zo

ort

nul

urč

mož

nás

kor

zaj

po

zá

H

pc

ri

ge

GH

5.

\vec{v}

nenej
ová),
inkom
Inými
utnou
ódová

pričom $r = n - k$.

Sústavu rovníc (5.16) možno zapísať aj v maticovej forme

$$\bar{c}H^T = 0,$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

(5.17)

5.15)

ových
atí

kódu,

etože

To

ni sa

veľmi

álnej

rného

- k

dnice

báze

C má

kde $\bar{c} = c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$, $H = [h_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$ a H^T je matica, ktorú dostaneme transpozíciou matice H . Matica H zostavená z koeficientov sústavy rovníc (5.16) sa nazýva kontrolná matica kódu. To znamená, že každému lineárnemu kódu zodpovedá nejaká kontrolná matica a naopak každej kontrolnej matici zodpovedá lineárny kód, ktorého slová vyjadruje sústava rovníc (5.16).

Vektory zostavené z koeficientov $h_{i,0}, h_{i,1}, \dots, h_{i,n-1}$, $i = 1, 2, \dots, r$ sú lineárne nezávislé, pretože aj rovnice v (5.16) sú lineárne nezávislé. Z toho vyplýva, že uvedené vektory tvoria bázu r-rozmerného lineárneho podpriestoru $V_{r,q}$ v $V_{n,q}$. Zo sústavy rovníc (5.16) vyplýva, že každý vektor z $V_{r,q}$ je ortogonálny každému vektoru z kódu C . Preto sa $V_{r,q}$ nazýva nulovým priestorom kódu. Lubovoľná báza v nulovom priestore určuje niektorú kontrolnú maticu kódu a prechod k novej báze možno vykonať maticou F s nenulovým determinantom tak, že násobíme maticu H zľava maticou F. Všetky matice FH sú kontrolnými maticami toho istého kódu C. Maticu H môžeme zapísať pomocou dvoch podmatic $H = [H_1, H_2]$ tak, aby pravá podmatica H_2 bola stvorcová jednotková matica r x r. Takýto zápis budeme nazývať pravou kanonickou maticou H a písať $H = [BI_{n-k}]$. Podmatica B sa zvykne označovať ako informačná podmatica. Matici H zodpovedá matica $G = [I_k B^T]$, ktorej riadkové vektory tvoria bázu priestoru kódu. G sa nazýva generujúca matica. Matice H a G sú zviazané rovnicou

$$GH^T = 0.$$

5.16)

5.2.1.1.5 Dekódovanie lineárnych blokových kódov

Predpokladajme, že je prijatý vektor

$$\bar{v} = \bar{c} + \bar{e},$$

kde \bar{e} je tzv. chybový vektor. Z (5.17) je zřejmé, že

$$\bar{v}H^T = (\bar{c} + \bar{e})H^T = \bar{c}H^T + \bar{e}H^T = \bar{e}H^T = \bar{s} \quad (5.18)$$

Vektor \bar{s} nazývame syndrómom.

Problém dekódovania lineárneho blokového kódu je v úlohe nájsť kódový vektor, ktorý má najmenšiu Hammingovu vzdialenosť od prijatého vektora. Pre kódy s obmedzeným počtom slov možno túto úlohu riešiť pomocou tabuliek. V tabuľke napr. môžu byť v prvom riadku všetky kódové slová a pod každým kódovým slovom môžu byť všetky vektory, ktoré zodpovedajú možným prijatým vektorom (s chybami), ktoré chceme opraviť na dané kódové slovo. Samozrejme, je rozumné umiestniť do tohto stĺpca tie vektory, ktoré sa vyznačujú čo možno najmenšou vzdialenosťou od príslušného kódového slova.

| | | | |
|---------------------|---------------------------------|-----|-------------------------------------|
| \bar{c}_1 | \bar{c}_2 | ... | \bar{c}_{2^k} |
| \bar{e}_2 | $\bar{c}_2 + \bar{e}_2$ | ... | $\bar{c}_{2^k} + \bar{e}_2$ |
| \bar{e}_3 | $\bar{c}_2 + \bar{e}_3$ | ... | $\bar{c}_{2^k} + \bar{e}_3$ |
| ... | ... | ... | ... |
| $\bar{e}_{2^{n-k}}$ | $\bar{c}_2 + \bar{e}_{2^{n-k}}$ | ... | $\bar{c}_{2^k} + \bar{e}_{2^{n-k}}$ |

Rozsah tabuľky možno zmenšiť využitím syndrómov. Keďže syndróm závisí len od chybového vektora (5.18), možno tabuľku zostrojiť tak, že obsahuje len všetky možné syndrómy a im prislúchajúce chybové vektory. Procedúra dekódovania je potom napr. takáto

1. Výpočet syndrómu.
2. Nájdenie \bar{e} na základe \bar{s} (pomocou tabuľky).
3. Oprava \bar{v} na \bar{c}' ,

v GF(2) platí pri úspešnom dekódovaní, že ak $\bar{v} = \bar{c} + \bar{e}$, potom

$$\bar{c}' = \bar{v} + \bar{e} = \bar{c} \quad (5.19)$$

kód

P_M

Rov
chy

vzt

P_B

sa
chy
Ak

P_{BC}

kde
spe

E_c
N_c

nev
je
výs

5.1

kó
pr
mo

Pravdepodobnosť chybného dekódovania je pri blokovom (n, k) kóde, ktorý sa používa na opravu t chýb, daná vzťahom

$$P_M \approx \sum_{j=t+1}^n \binom{n}{j} P^j (1-P)^{n-j} \quad (5.19)$$

ilohe

nost

ožno

byť

ovom

atým

idové

tie

ou od

Rovnosť nastane, ak možno opraviť všetky kombinácie s t a menej chybami v kódovom slove a žiadne iné.

Pravdepodobnosť chyby na bit možno aproximovať pomocou vzťahu

$$P_B = \frac{1}{n} \sum_{j=t+1}^n j \binom{n}{j} P^j (1-P)^{n-j} \quad (5.20)$$

V prípade, že poznáme spôsob modulácie a vieme, že prenos sa uskutočňuje cez Gaussov kanál, môžeme pravdepodobnosť P chyby v BSC, ktorým sa dá nahradiť Gaussov kanál vypočítať. Ak napr. je použitá koherentná BPSK, platí

$$P_{BC} = Q \left(\sqrt{\frac{2E_c}{N_0}} \right) \quad (5.21)$$

kde $\frac{E_c}{N_0}$ je pomer energie kódovaného symbolu k výkonovej spektrálnej hustote šumu a platí

$$\frac{E_c}{N_0} = \frac{k}{n} \frac{E_B}{N_0} \quad (5.22)$$

ndróm

rojif

ajúce

napr.

Iná stratégia dekódovania môže byť taká, že dekodér nevykonáva opravu chýb, ale iba ich detekciu. V takomto prípade je najjednoduchšie vypočítať syndróm, a ak syndróm je nenulový výsledkom dekódovania je odhalenie chyby.

5.2.1.1.6 Cyklické lineárne blokové kódy

+ ē,

V tejto časti sa budeme zaoberať tzv. polynomiálnymi kódmí. (n, k) kód možno vyjadriť aj formou polynómov, pričom prvky c_0, c_1, \dots, c_{n-1} tvoria koeficienty pri jednotlivých mocninách

5.19)

$$c(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}. \quad (5.23)$$

Polynomiálny kód je potom množina všetkých polynómov stupňa menšieho alebo rovného $n - 1$, ktoré sú deliteľné bezo zvyšku určitým polynómom $g(x)$. $g(x)$ sa nazýva generujúci polynóm. Aby sme mohli narábať s týmito polynómami, ako sme zvyknutí v bežnej aritmetike, treba zaviesť sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie ich koeficientov. Toto možno ľahko dosiahnuť, ak budeme žiadať, aby ich koeficienty boli prvkami nejakého konečného poľa.

Polynomiálny (n, k) kód možno zapísať ako množinu polynómov $c(x)$, pre ktoré platí

$c(x) = a(x)g(x)$, pričom $a(x)$ je polynóm zodpovedajúci kódovanej informácii (informačný polynóm) a $g(x)$ je generujúci polynóm, ktorého stupeň je rovný $n - k$.

Niektoré polynomiálne kódy sú cyklické. Vlastnosť cyklickosti znamená, že ak kódové slovo

$c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ je z kódu C , potom aj všetky jeho cyklické posuny

$c = (c_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-2}), c = (c_{n-2}, c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-3}), \dots$ sú kódové slová toho istého kódu.

Cyklické kódy sú podmnožinou lineárnych blokových kódov. Najnázornejšie môžeme vysvetliť vlastnosti generujúcich polynómov, ktoré sú potrebné, aby bol kód cyklický na dvojkových cyklických kódoch. Preto sa teraz obmedzíme na dvojkový prípad. Potom môžeme vlastnosť cyklickosti zapísať aj iným spôsobom. (Ak $c(x) \in C$, potom aj $x^j c(x) \bmod (x^n - 1) \in C$, pre každé celé j . Kódové slovo $c(x)$ môže byť reprezentované takto

$$c(x) = a(x)g(x) \bmod (x^n - 1) \quad (5.24)$$

pričom $g(x)$ je generujúci polynóm kódu. Aby bol kód kódy dĺžky n cyklický, musí platiť, že $g(x)$ delí $x^n - 1$, t. j.

$$x^n - 1 = g(x)h(x) \quad (5.25)$$

Uká
Bud
bud
mus

[x]^j

Vo
pot

[x]^j

čo

Zhr

1.

2.

g(x)

3.

pol
opí
slo
kor
gen

spó

1.

pre

(5.23) Ukážeme, že ak platí (5.24), potom je kód skutočne cyklický. Bude to platiť, ak $x^j c(x) \bmod (x^n - 1) = x^j a(x)g(x) \bmod (x^n - 1)$ bude tiež kódové slovo, to ale znamená, že $x^j c(x) \bmod (x^n - 1)$ musí byť deliteľné $g(x)$ - ináč povedané musí platiť

$$(x^j a(x)g(x) \bmod (x^n - 1)) \bmod g(x) = 0. \quad (5.26)$$

Vo všeobecnosti platí, ak $g(x)$ delí $x^n - 1$, potom $[b(x) \bmod (x^n - 1)] \bmod g(x) = b(x) \bmod g(x)$, a teda

$$(x^j a(x)g(x) \bmod (x^n - 1)) \bmod g(x) = x^j a(x)g(x) \bmod g(x) = 0,$$

čo dokazuje, že aj cyklický posun je kódové slovo.

Zhrňme základné vlastnosti $g(x)$.

$$1) \deg g(x) = n - k, \quad (x^3 + x + 1, x^8 = \dots) \quad (5.27)$$

2) $g(x)$ musí mať tvar

$$g(x) = x^{n-k} + \sum_{i=1}^{n-k-1} g_i x^i + 1, \quad g_i \in \{0, 1\} \quad (5.28)$$

$$3) x^n - 1 = g(x)h(x) \quad (5.29)$$

Cyklický kód je úplne určený zadaním generujúceho polynómu. Existuje ešte jeden spôsob určenia kódu, ktorý napíšeme. Polynóm s koeficientami z poľa $GF(q)$ bude kódovým slovom práve vtedy, ak prvky $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in GF(q^m)$ budú jeho koreňmi. Cyklický kód možno teda zadať aj pomocou koreňov generujúceho polynómu.

(5.24) Kódovanie cyklického kódu môžeme uskutočniť dvoma spôsobmi

$$1) c(x) = a(x)g(x) \quad (5.30)$$

(5.25) pretože potom $c(x) \bmod g(x) = 0$.

$$2) c(x) = x^{n-k}a(x) + [x^{n-k}a(x)] \bmod g(x) \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \text{pretože platí } [x^{n-k}a(x) + x^{n-k}a(x) \bmod g(x)] \bmod g(x) &= \\ = x^{n-k}a(x) \bmod g(x) + x^{n-k}a(x) \bmod g(x) \bmod g(x) &= \\ = x^{n-k}a(x) \bmod g(x) + x^{n-k}a(x) \bmod g(x) &= 0. \end{aligned}$$

Prvý spôsob vedie k nesystematickému kódu, t. j. takému, že z jeho kódových slov nemožno priamo extrahovať informačné symboly. Druhý spôsob vedie k systematickému kódu. V kódových slovách systematického kódu existuje pevná kombinácia súradníc kódového vektora, ktorá jednoznačne udáva informačný vektor zakódovaný týmto slovom.

Dekódovanie väčšiny lineárnych kódov sa zakladá na tzv. syndrómovej metóde. Základnou etapou tejto metódy je výpočet syndrómu prijatého slova \bar{v} , v prípade cyklického kódu budeme označovať prijaté slovo $v(x)$. Pre ľubovoľný lineárny kód je syndróm vektor dĺžky $n - k$ daný vzťahom

$$\bar{s} = \bar{v}H^T$$

V prípade polynomiálnych kódov existujú 3 formy syndrómov, ktoré sú navzájom tesne zviazané:

1. Syndróm možno definovať ako polynóm stupňa $n - k - 1$ daný vzťahom

$$s(x) = v(x) \bmod g(x). \quad (5.32)$$

Pretože všetky kódové slová $c(x)$ sú deliteľné $g(x)$, $s(x)$ nezávisí od vyslaného kódového slova, ale len od chýb, ktoré v ňom vznikli pri prenose.

2. Druhý spôsob možno zaviesť ak generujúci polynóm je súčinom dvoch alebo viacerých ireducibilných polynómov. Nech

$$g(x) = g_1(x)g_2(x) \dots g_j(x) \quad (5.33)$$

potom

$s_1(x)$

$s_2(x)$

...

$s_j(x)$

3. T

S_1'

$S_1 =$

$S_2 =$

...

$S_j =$

istú

ľubov

kódov

dekód

hlavn

dekód

kódy.

lineá

5.2.

vyzn

kódo

(2^n)

matl

vekt

Iná

Hamm

$g(x)$

kore

$$\begin{aligned}
 (5.31) \quad s_1(x) &= v(x) \bmod g_1(x) \\
 s_2(x) &= v(x) \bmod g_2(x) \\
 &\dots \\
 s_j(x) &= v(x) \bmod g_j(x).
 \end{aligned}
 \tag{5.34}$$

mu, ze
rmačne
dových
radnic-
vektor

3. Tretí spôsob definovania syndrómu tkvie v zavedení vektorov

S_1, S_2, \dots, S_j vo forme

$$\begin{aligned}
 S_1 &= v(\alpha_1); \quad \alpha_1 \text{ je koreňom } g(x) \\
 S_2 &= v(\alpha_2); \quad \alpha_2 \text{ je koreňom } g(x) \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{5.35}$$

tzv.
ypočet
udeme
od je

$S_j = v(\alpha_j); \quad \alpha_j \text{ je koreňom } g(x).$

Všetky tri spôsoby udávajú syndrómy, ktoré obsahujú tú istú informáciu a ľubovoľná forma sa dá transformovať na ľubovoľnú inú formu. Syndrómy umožňujú aj pri cyklických kódach, pretože tieto sú tiež lineárne, zjednodušiť procedúru dekódovania. Okrem postupov, ktoré sme už uviedli existujú hlavne pre cyklické kódy ešte omnoho efektívnejšie metódy dekódovania. Ukážka jednej z nich bude v ďalšom pre konkrétne kódy. Preto si teraz krátko spomenieme niektoré známejšie lineárne blokové kódy.

ómov,
dany

5.32)

5.2.1.1.7 Hammingove kódy

s(x)
ktoré
činom

Dvojkové Hammingove kódy sú zostrojené nad $GF(2)$ a vyznačujú sa kódovou vzdialenosťou $d_m = 3$. V ich každom kódovom slove preto možno opraviť najviac jednu chybu.

5.33)

Jedna z možností, ako zostrojiť dvojkový Hammingov ($2^{n-k} - 1, 2^{n-k} - 1 - n + k$) kód, vychádza z vytvorenia H matice, ktorej stĺpce pozostávajú zo všetkých nenulových vektorov dĺžky $n - k$ (ich počet je $2^{n-k} - 1$).
Iná možnosť vychádza z vlastností cyklickosti Hammingovho kódu.
Hammingov kód s dĺžkou slov $n = 2^{n-k} - 1$ je určený polynómom $g(x)$ takým, aby primitívny prvok α poľa $GF(2^{n-k})$ bol jeho koreňom.

Napr. $g(x) = x^3 + x + 1$ má koreň α , ktorý je primitívnym prvkom poľa $GF(2^3)$.

(7, 4) kód dostaneme, ak zvolíme $g(x) = x^3 + x + 1$. Potom aj kontrolná matica H Hammingovho kódu môže byť zapísaná takto

$$H = [\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}] \quad (5.36)$$

Poznámka:

Permutáciami polôh súradníc kódových vektorov dostaneme tzv. ekvivalentné kódy, preto elementárne operácie so stĺpcami matice H , ako je napr. ich zámena vyjadrujú ten istý kód.

5.2.1.1.8 Binárne BCH kódy

Bose Chaudhuri Hocquenghemove kódy označované ako BCH kódy tvoria nekonečnú množinu cyklických kódov, ktoré umožňujú opravu viacnásobných chýb v ich kódových slovách. Dá sa na ne pozerať ako na zovšeobecnenie Hammingových kódov. Zatiaľ čo generujúci polynóm Hammingovho kódu má jeden koreň z príslušného poľa rozšírenia, pri BCH kódach má generujúci polynóm aspoň 2t koreňov. Je definovaný vzťahom

$$g(x) = \text{NSN} [m_{\alpha^j}(x), m_{\alpha^{j+1}}(x), \dots, m_{\alpha^{j+2t-1}}(x)] \quad (5.37)$$

kde NSN označuje najmenší spoločný násobok a $m_{\alpha^j}(x)$ označuje minimálny polynóm $m(x)$ prvku α^j . Pre $j = 0$, a ak koeficienty minimálnych polnómov sú z $GF(2)$, dostávame tzv. primitívne BCH kódy. Existujú tabuľky, pomocou ktorých možno konstruovať BCH kódy. Hodnota $2t - 1$ udáva tzv. konštrukčnú kódovú vzdialenosť. Skutočná kódová vzdialenosť môže byť v niektorých prípadoch väčšia ako konštrukčná

$$d_m \geq 2t - 1 \quad (5.38)$$

Na obr. 5.9. sú uvedené krivky P_B v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$ pre koherentne demodulovanú moduláciu BPSK s použitím BCH kódov (127, 64) a (127, 36) pri prenose cez kanál s AWGN.

Kri
nad
(12

Obr
po
pri
pev
kód
vel
vyr
s
v

nym Krivky zdanlivo odporujú nášmu očakávaniu. Kód s väčšou
tom nadbytočnosťou (127,36) dáva menší zisk kódovania ako kód
to (127,64) s menšou nadbytočnosťou. V literatúre sa uvádza, že

36)

eme
amiódy
ujú
ne
čo
reň
ici

37)

lje

ity

}CH

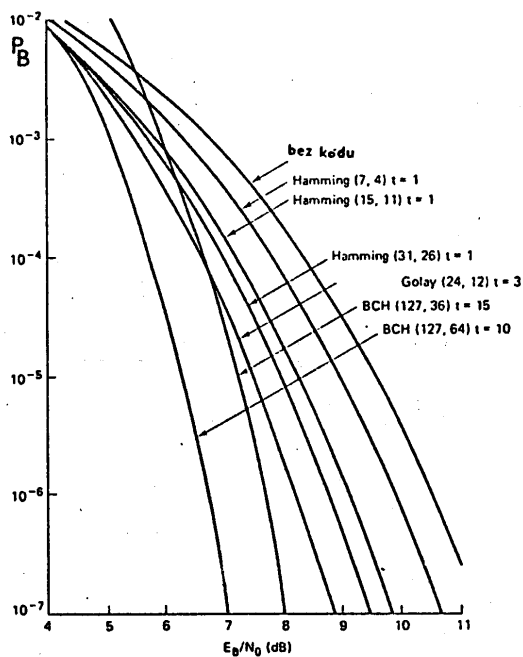
}CH

:f.

}ch

:)

ov

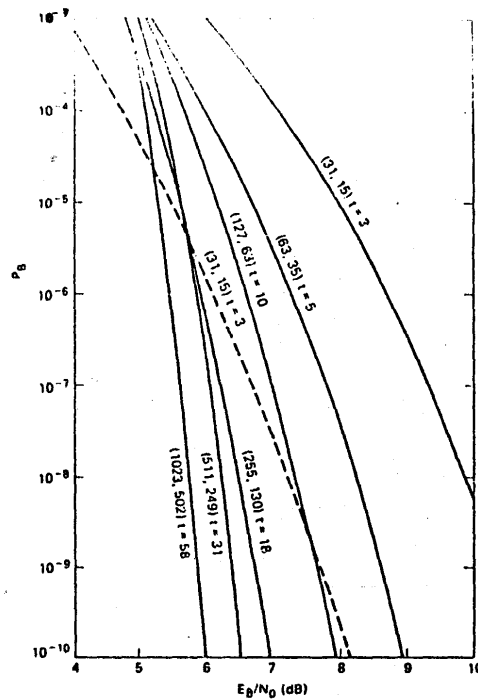


Obr. 5.9

pomerne široké maximum zisku kódovania dosahujú BCH kódy
pri

pevnej dĺžke kódových slov pre rýchlosti od $\frac{1}{3}$ do $\frac{1}{2}$. Ich zisk
kódovania pri prenose Gaussovým kanálom podstatne klesá pri
veľmi malých a veľkých rýchlostiach. Na obr. 5.10. sú
vypočítané hodnoty P_B v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$ pri prenose cez kanál
s AWGN pri tvrdom a mäkkom dekódovaní. Mäkké dekódovanie sa
v praxi nepoužíva veľmi často pre blokové kódy, pretože je

výpočtovo veľmi náročné. Ak sa však použije, možno očakávať zväčšenie zisku kódovania oproti tvrdému dekódovaniu asi o 2 dB.



— tvrdé dekódovanie
 - - - makké dekódovanie

Obr. 5. 10.

5.2.1.1.9 Reedove - Solomonove kódy

Reedove - Solomonove kódy budeme označovať ako RS kódy. Boli zavedené v práci [29] a patria medzi lineárne blokové cyklické (n, k) kódy. Sú definované v IubovoInom $GF(q)$ nasledujúcim generujúcim polynómom

$$g(x) = (x - \alpha^j)(x - \alpha^{j+1}) \dots (x - \alpha^{j+2t-1}) \quad (5.39)$$

prí
 $J =$
 $GF(q)$
 poč
 ze

$t =$

a p

kone
 z p
 vyh

kaž
 mno
 $c(\alpha^j)$

deko
 opi
 chy

v(x

Poz

ozn
 Syn

\bar{S}_k

Vo
 zák
 ko
 chy
 Ak

akávať
asi o

príčom j je celé nezáporné číslo (v praxi sa najčastejšie volí $j = 0$ alebo $j = 1$), je prvkom $GF(q)$. Ak je α primitívny prvok $GF(q)$, dostaneme primitívne RS kódy a t označuje maximálny počet zaručene opraviteľných chýb RS kódu. V [30] je dokázané, že pre RS kódy platí

$$t = \frac{n - k}{2} \quad (5.40)$$

a pre dané n, k neexistuje kód s väčšou hodnotou t .

RS kódy možno skrátiť bežným spôsobom vyčiarknutím konečného počtu informačných symbolov k' . Tak vznikne z pôvodného (n, k') kódu skrátený (n, k) kód, ktorý môže lepšie vyhovovať praktickým požiadavkám.

Keďže kódové slová RS kódu možno opísať polynómom $c(x)$ a každé je generované polynómom $g(x)$, každé z nich má rovnakú množinu koreňov ako $g(x)$ a platí

$$c(\alpha^i) = 0, \quad i = j, j + 1, \dots, j + 2t - 1 \quad (5.41)$$

Pre dekódovanie RS kódov sa používa tzv. syndrónna metóda dekódovania, ktorú stručne opíšeme. Nech $v(x)$ je polynóm opisujúci prijaté slovo a $e(x)$ je polynóm opisujúci tzv. chybové slovo, potom platí

$$v(x) = c(x) + e(x) \quad (5.42)$$

Poznámka:

Polynómy sú definované v príslušnom poli $GF(q)$ a $+$ označuje operáciu sčítania v tomto poli.

Syndrómy \bar{S}_k pre RS kódy definované vzťahmi (5.35)

$$\bar{S}_k = v(\alpha^k) = c(\alpha^k) + e(\alpha^k), \quad k = j, j + 1, \dots, j + 2t - 1. \quad (5.43)$$

kódy.
okové
 $GF(q)$

Vo všeobecnosti úloha dekódovania tkvie v nájdení $e(x)$ na základe prijatého slova $v(x)$, pričom $e(x)$ má nenulové koeficienty iba na tých miestach, ktoré zodpovedajú pozíciám chýb.

5.39)

Ak nastane t chýb, potom platí

$$\bar{S}_k = \sum_{i=1}^t Y_i X_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, 2t - 1. \quad (5.44)$$

kde X_i označuje lokátor i -tej chyby, Y_i označuje hodnotu chyby.

Poznámka:

Lokátor chyby bude prvkom poľa $GF(q)$ takým, že jeho exponent určuje polohu chyby.

Dekódovanie teda tkvie v riešení sústavy nelineárnych rovníc (5.44) s neznámymi X_i a Y_i a t . Z literatúry je známe, že (5.44) možno pretransformovať na sústavu lineárnych rovníc pomocou tzv. polynómu lokátorov $\sigma(x)$

$$\sigma(x) = x^t + \sigma_1 x^{t-1} + \dots + \sigma_t \quad (5.45)$$

pričom

$$\sigma(X_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \overset{t}{\cancel{2t-1}}. \quad (5.46)$$

Vzťah (5.46) možno prepísať takto

$$X_i^t + \sigma_1 X_i^{t-1} + \dots + \sigma_t = 0, \quad i = 1, 2, \dots, t \quad (5.47)$$

Ak vynásobíme tento vzťah $Y_i X_i^z$, dostaneme

$$Y_i X_i^{t+z} + \sigma_1 Y_i X_i^{t-1+z} + \dots + \sigma_t Y_i X_i^z = 0, \quad i = 1, 2, \dots, t. \quad (5.48)$$

Vzťah (5.48) pre názornosť rozpíšeme pre $z = 0$

$$\begin{aligned} Y_1 X_1^t + \sigma_1 Y_1 X_1^{t-1} + \dots + \sigma_t Y_1 X_1^0 &= 0 \\ Y_2 X_2^t + \sigma_1 Y_2 X_2^{t-1} + \dots + \sigma_t Y_2 X_2^0 &= 0 \\ \dots & \\ Y_t X_t^t + \sigma_1 Y_t X_t^{t-1} + \dots + \sigma_t Y_t X_t^0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

a ta

Y_1

$Y_1 X_1$

$Y_1 X_1^2$

...

$Y_1 X_1^2$

...

Zo

prep

\bar{S}_t

\bar{S}_{t+1}

...

\bar{S}_{2t-}

...

...

1. V

2. M

3. M

4. V

zná

rozl

vla

zák

Jed

Záv

kro

④

\bar{S}_k

②

Dru

eli

(5.44) a tak isto pre názornosť rozpíšeme vzťah (5.44) pre $j = 0$:

notu chyby.

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t &= \bar{S}_0 \\ Y_1 X_1 + Y_2 X_2 + \dots + Y_t X_t &= \bar{S}_1 \\ Y_1 X_1^2 + Y_2 X_2^2 + \dots + Y_t X_t^2 &= \bar{S}_2 \\ &\dots \\ Y_1 X_1^{2t-1} + Y_2 X_2^{2t-1} + \dots + Y_t X_t^{2t-1} &= \bar{S}_t \end{aligned} \quad (5.50)$$

ze jeho

lineárnych

Je známe,

ch rovníc

Zo vzťahov (5.49) a (5.50) vidíme, že vzťah (5.49) možno prepísať takto

$$\begin{aligned} (5.45) \quad \bar{S}_t + \sigma_1 \bar{S}_{t-1} + \dots + \sigma_t \bar{S}_0 &= 0 \\ \bar{S}_{t+1} + \sigma_1 \bar{S}_t + \dots + \sigma_t \bar{S}_1 &= 0 \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$(5.46) \quad \bar{S}_{2t-1} + \sigma_1 \bar{S}_{2t-2} + \dots + \sigma_t \bar{S}_{t-1} = 0$$

Proces dekódovania potom pozostáva z nasledujúcich krokov:

- (5.47)
1. Výpočet \bar{S}_k , $k = j, j+1, \dots, j+2t-1$.
 2. Nájdenie $\sigma(x)$.
 3. Nájdenie koreňov $\sigma(x)$ - lokátorov X_1 .
 4. Výpočet Y_1 a oprava chýb.

(5.48) Pre realizáciu krokov 2., 3. a 4. procedúry dekódovania sú známe viaceré postupy a o výhodnosti jednotlivých variantov rozhoduje celý rad faktorov. K najdôležitejším z nich patria vlastnosti kódov, nároky na rýchlosť dekódovania, súčiastková základňa a iné. V [31] bola urobená analýza zložitosti jednotlivých krokov dekódovania RS kódov syndrónnou metódou. Závěry z tejto práce k jednotlivým krokom sú tieto: Prvý

krok možno urýchliť výpočtom syndrónov podľa vzťahu

$$\textcircled{1} \quad \bar{S}_k = (\dots (v_{n-1} \alpha^k + v_{n-2}) \alpha^k + v_{n-3}) \alpha^k + \dots + v_1) \alpha^k + v_0 \quad (5.52)$$

(5.49) $\textcircled{2}$ Druhý krok možno riešiť viacerými spôsobmi, napr. Gaussovou eliminačnou metódou, Gaussovou - Jordanovou redukciovou,

Winogradovým algoritmom, Choleskeho modifikáciou Gauss - Doolittlovej metódy a Berlekampovým - Masseyho algoritmom. Zistilo sa, že pre menšie hodnoty t je výhodné použiť Choleskeho metódu a pre hodnoty $t \geq 5$ je najvýhodnejší Berlekampov - Masseyho algoritmus.

- ② Tretí krok možno riešiť pomocou Chienovho algoritmu, ktorý tkvie v postupnom dosadzovaní všetkých prvkov poľa do vzťahu (5.45). Koreňmi sú tie prvky poľa, pre ktoré $\sigma(x) = 0$. Pre skrátané RS kódy sa možno obmedziť na prvky poľa, ktoré zodpovedajú prípustným lokátorom.
- ④ Štvrtý krok je najvýhodnejšie uskutočniť použitím Forneyho algoritmu

$$Y_j = \frac{\sum_{k=0}^{t-1} \sigma_{jk} S_{t-k}}{t-1}, \quad j = 1, 2, \dots, t \quad (5.53)$$

$$\sum_{k=0}^{t-1} \sigma_{jk} X_j^{t-k}$$

pričom koeficienty σ_{ji} sa dajú vypočítať pomocou rekurentného vzťahu

$$\sigma_{j,i+1} = \sigma_{ji} - \frac{\sigma_i}{X_j}, \quad j = 1, \dots, t; \quad i = 1, \dots, t-1 \quad (5.54)$$

pričom

$$\sigma_{j0} = 1, \quad j = 1, \dots, t \quad (5.55)$$

Oprava tkvie v pripočítaní hodnôt chýb Y_1 k hodnotám, ktoré boli prijaté na pozíciách určených lokátormi chýb X_1 .

Pre RS kódy v $GF(2^m)$ možno určiť aj odhad pravdepodobnosti P_B . Pravdepodobnosť chyby symbolu kódového slova RS kódu v kanáli je pri prenose cez BSC s pravdepodobnosťou chyby P daná vzťahom

$P_E =$

$\frac{P_B}{P_E} =$

Obr:
Záv:
kód:
zná:
mod:

uss -
mom.
použit
dnejší

$$P_E = \frac{1}{2^m - 1} \sum_{j=t+1}^{2^m - 1} \binom{2^m - 1}{j} P^j (1 - P)^{2^m - 1 - j} \quad (5.56)$$

ktory
vztahu
0. Pre
ktoré

$$\frac{P_B}{P_E} = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} \quad (5.57)$$

rneyho

(5.53)

ntného

(5.54)

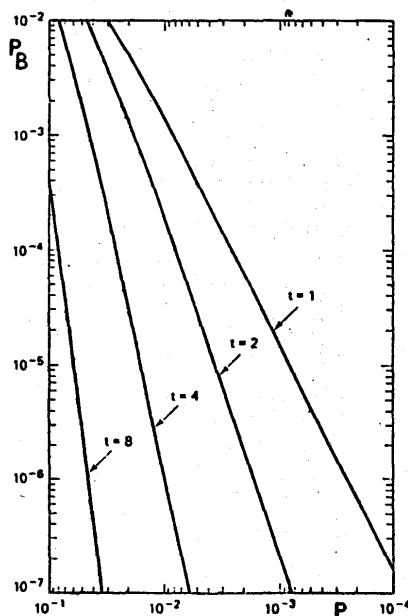
(5.55)

ré boli

bnosti

s kódu

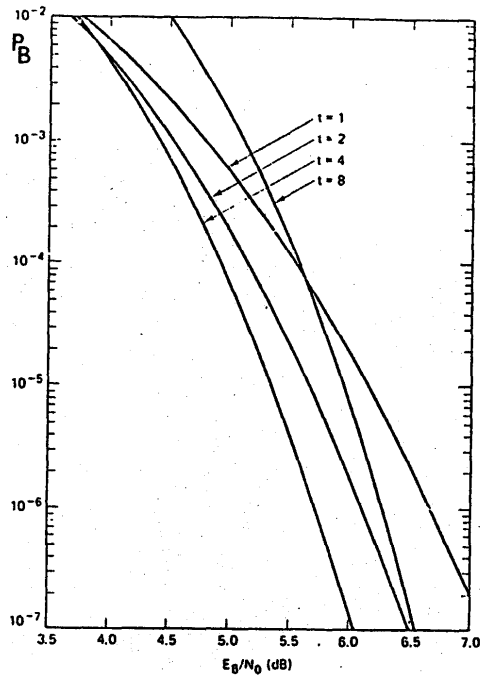
hyby P



Obr. 5.12.

Závislosť P_B od $\frac{E_B}{N_0}$ pre RS kódy zostrojené nad $GF(2^5)$ s dĺžkou kódových slov $n=31$ je pre rôzne počty opraviteľných chýb znázornená na obr. 5.11. a to pri použití nekoherentnej modulácie MFSK pri prenose cez kanál s AWGN [32]. Na obr. 5.12.

Je znázornená závislosť P_B od P pre tie isté kódy pri rovnakej modulácii.



Obr. 5.1

5.2.1.2 Stromové kódy

Základné pojmy zavedené pre stromové kódy si pripomenieme v zmysle označení používaných v lit. [30] a pre názornosť použijeme obr.5.13, na ktorom je znázornený kodér jedného konvolučného kódu. Tok vstupných informačných symbolov je rozdelený na segmenty po k_0 symbolov. Tieto segmenty sa nazývajú zábery informačných symbolov. V kodéri možno naraz uchovávať m záberov. Na základe vstupného záberu a $m - 1$ uchovávaných záberov vytvára kodér jeden záber kódového slova dĺžky n_0 symbolov.

Stromový (n_0, k_0) kód je zobrazenie množiny polonekonečných postupností prvkov z $GF(q)$ na seba tak, že platí: ak pre

Iubc
post
post

Obr.

vzfa
Rýct

$R_k =$

dízl

$K =$

5.2

má

pom

(f)

pol

pos

nás

kód

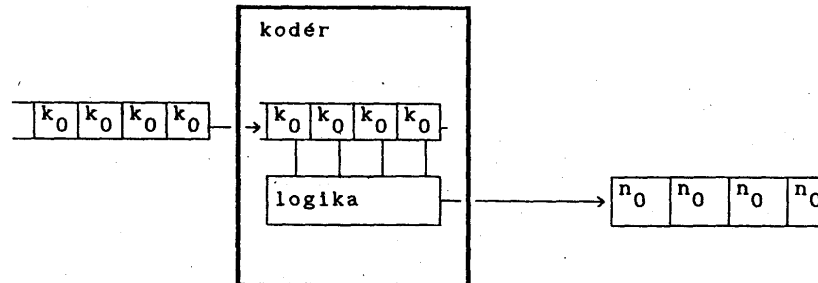
...

do

G()

vnakej

ľubovoľné celé číslo M sú prvé Mk_0 prvky polonekonečných postupností, vtedy aj prvé Mn_0 prvky zobrazení týchto postupností sú rovnaké.



Obr. 5.13.

Pre stromové kódy sú zavedené tieto základné pojmy a vzťahy:

Rýchlosť stromového kódu

$$R_k = \frac{k_0}{n_0} \quad (5.58)$$

dĺžka kódového ohraničenia

$$K = mk_0 \quad \text{kódové ohraničenie } K \quad (5.59)$$

5.2.1.2.1 Konvolučné kódy

Linerárny časovo invariantný (n_0, k_0) stromový kód, ktorý má konečnú informačnú dĺžku K sa nazýva konvolučný kód.

nieme
rnost
dného
v je
y sa
naraz
- 1
slova
čných
pre

Konvolučný (n_0, k_0) kód možno vo všeobecnosti generovať pomocou súboru k_0 filtrov s konečnou impulzovou odpoveďou (filtrov KIO) nad $GF(q)$. Každý filter KIO je opísateľný polynómom stupňa menšieho alebo rovného m . Ak je aj vstupná postupnosť vyjadrená polynómom dá sa práca filtra opísať ako násobenie polynómov a kodér množinou generujúcich polynómov kódu označovaných $g_{ij}(x)$, pričom $i = 1, 2, \dots, k_0$ a $j = 1, 2, \dots, n_0$ (počet polynómov je $n_0 k_0$). Tieto polynómy možno zapísať do matice, ktorú nazývame generujúcou maticou z polynómov

$$G(x) = [g_{ij}(x)] \quad (5.60)$$

5.2.1.2.2 Ilustrácia rôznych spôsobov opisu konvolučných kódov

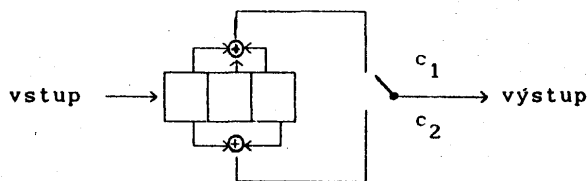
Vo všeobecnosti môžeme konvolučný kód opísať tiež funkciou kódovania

$$\bar{c} = G(\bar{a}) \quad (5.61)$$

kde \bar{a} je vstupujúca postupnosť zodpovedajúca správe a \bar{c} je zakódovaná postupnosť. Existuje mnoho spôsobov opisu konvolučných kódov. Najčastejšie sa používajú nasledujúce

1. schematický obrázok kodéra,
2. vektorový opis väzieb,
3. opis väzieb pomocou polynómov,
4. stavový diagram,
5. stromový diagram,
6. mriežkový diagram.

Kazdý z týchto opisov má svoje výhody a preto ich v ďalšom budeme ilustrovať na jednoduchom príklade konvolučného kódu s $R_k = 0,5$ a kódovým ohraničením $K = 3$ Obr. 5.14. znázorňuje tento konvolučný kód a zároveň predstavuje prvý spôsob opisu.



Obr. 5.14.

V každom takte vstupuje do posuvného registra zľava jeden bit a všetky bity v posuvnom registri sú posunuté o jednu pozíciu doprava. Potom komutátor na výstupe odoberie vzorky z jednotlivých výstupov sumátorov modulo 2 (najprv z horného). Tak je vytvorený záber kódového slova prislúchajúci bitu, ktorý práve vstúpil do kodéra. Voľbou väzieb medzi jednotlivými bunkami posuvného registra a sumátormi možno zadať rôzne konvolučné kódy. Lubovoľná voľba, pochopiteľne, nemusí vždy dať dobrý konvolučný kód. Nájdenie konvolučných kódov s dobrými korekčnými schopnosťami je zväčša riešené prehľadávaním všetkých možností pomocou počítača.

Na rozdiel od blokového kódu treba potom, ako cez kodér

pre-
vzní-
deko-
efek

2
takt
 $\bar{g}_1 =$

$\bar{g}_2 =$

Pred
sprá-
 t_1 ,
post
celk
vynu
jedn
vzni

prejdú všetky kódované bity správy, vynulovať kodér. Takto vznikne tzv. chvost, ktorý je nevyhnutný pre správne dekódovanie. Tento chvost znižuje rýchlosť kódu, a preto efektívna rýchlosť kódu R_{kef} je vždy menšia ako R_k .

5.61) ② Kodér na obr. 5.14. môžeme opísať pomocou vektorov väzieb

\bar{c} je takto

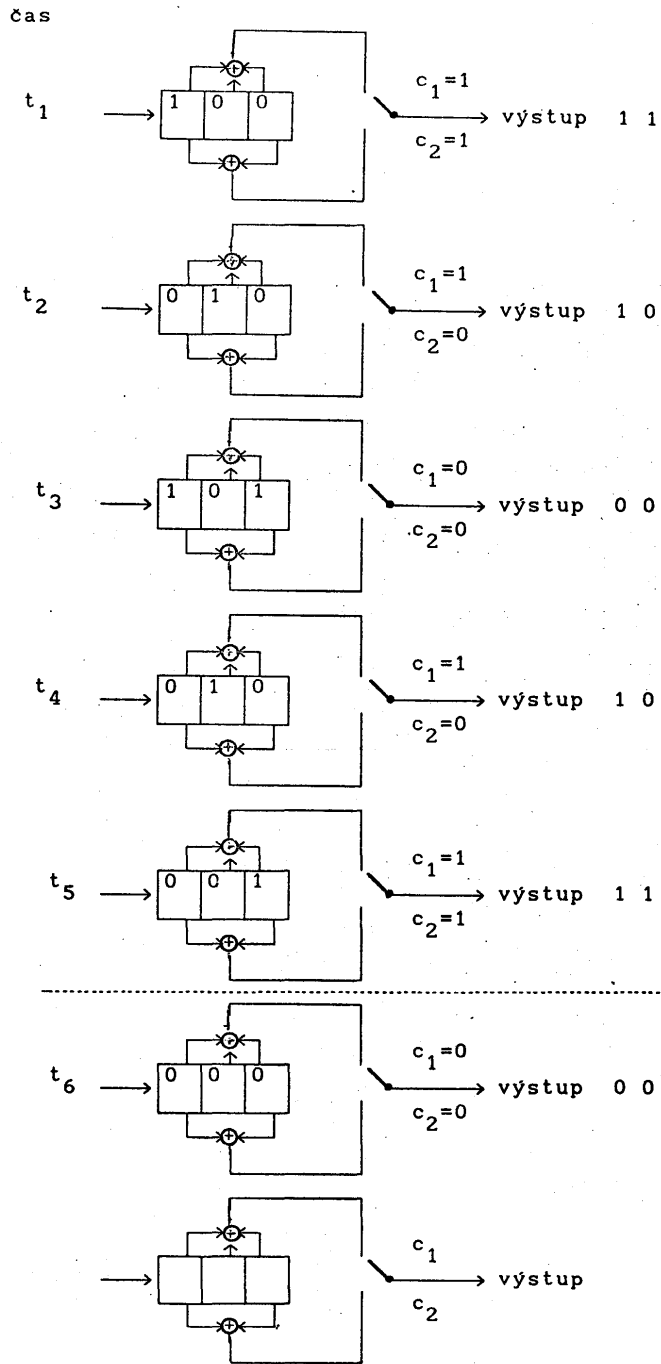
$$\bar{g}_1 = 111$$

$$\bar{g}_2 = 101$$

Predpokladajme, že pomocou kodéra na obr. 5.14. je kódovaná správa 101. Bity správy vstupujú do kodéra v časových okamihoch t_1, t_2, t_3, \dots , ako je to znázornené na obr. 5.15. Výstupná postupnosť má potom nasledujúcu formu 1110001011, pričom symbol celkom vľavo predstavuje symbol, ktorý je prenášaný najskôr. Na vynulovanie kodéra treba pripojiť k správe chvost, ktorý je o jednu nulu kratší ako počet buniek v posuvnom registri. Tým vznikne príslušný (dlhší) chvost aj v zakódovanej postupnosti.

$$R_k = \frac{k}{h_0} \quad ; \quad K = m \cdot h_0$$

bit a
ziciu
zorky
ého).
ktorý
ivými
rôzne
y dat
brými
vaním
kodér



Obr. 5.15.

kon
stu
rov
vo
g₁(
g₂(
kde
vst
Pre
a(x
1.
2.
1.
2.
c(x
c

①

Obr

③ Niekedy sa namiesto vektorov väzieb používa na opis konvolučného kódu súbor generujúcich polynómov. Polynómy majú stupeň $\leq K - 1$ a koeficienty pri jednotlivých mocninách sú buď rovné 1, ak pre príslušnú buňku existuje väzba, alebo rovné 0 v opačnom prípade. Pre kódér podľa obr. 5.14. platí

$$g_1(x) = 1 + x + x^2$$

$$g_2(x) = 1 + x^2$$

kde členy najnižšieho stupňa zodpovedajú buňke pripojenej na vstup. Správu $c(x)$ dostaneme prekladaním $a(x)g_1(x)$ a $a(x)g_2(x)$. Pre príklad, ktorý sa použil na ilustráciu, platí

$$a(x) = 1 + x^2 \quad (101)$$

$$1. \quad a(x)g_1(x) = (1 + x^2)(1 + x + x^2) = 1 + x + x^3 + x^4 =$$

$$2. \quad a(x)g_2(x) = (1 + x^2)(1 + x^2) = 1 + x^4 =$$

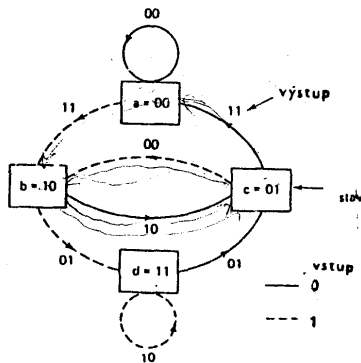
$$1. = \quad 1 \quad + \quad 1x \quad + \quad 0x^2 \quad + \quad 1x^3 \quad + \quad 1x^4$$

$$2. = \quad 1 \quad + \quad 0x \quad + \quad 0x^2 \quad + \quad 0x^3 \quad + \quad 1x^4$$

$$c(x) = (1, 1) + (1, 0)x + (0, 0)x^2 + (1, 0)x^3 + (1, 1)x^4$$

$$\bar{c} = \quad 11 \quad \quad 10 \quad \quad 00 \quad \quad 10 \quad \quad 11$$

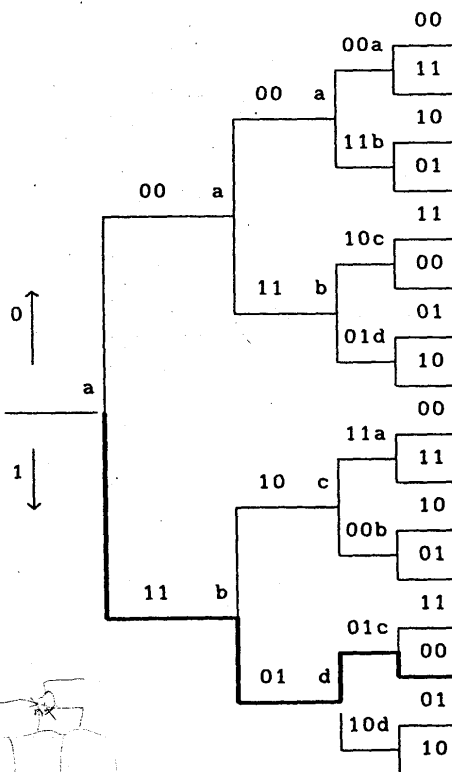
④ STAV. DIAGRAM



Obr. 5.16.

7) Ďalšia možnosť opisu konvolučného kódu vychádza z predstavy kodéra ako konečného automatu. Stav konvolučného kodéra definujeme obsahom jeho posledných $K - 1$ buniek, ktoré sú celkom vpravo. Ak poznáme stav kodéra a nasledujúci vstupný symbol, vieme určiť, čo bude na výstupe. Jednoduché kodéry potom ľahko možno charakterizovať pomocou stavových diagramov. Pre náš príklad je stavový diagram znázornený na obr. 5.16.

Aj keď stavový diagram úplne opisuje kodér, nie je veľmi pohodlný na opis opisu kódovania v dlhšom časovom úseku. Stromový diagram je v istom zmysle rozšírením stavového diagramu o časový rozmer. Pre náš príklad je stromový diagram znázornený na obr. 5.17.



Obr. 5.17.

Tmavšia čiara zodpovedá vstupnej postupnosti 1101 a na

vyzr
dvo
jedr
nevý
čas
stav
čas
Z h
čas
dost
nrie

Obr.

odp

Obs

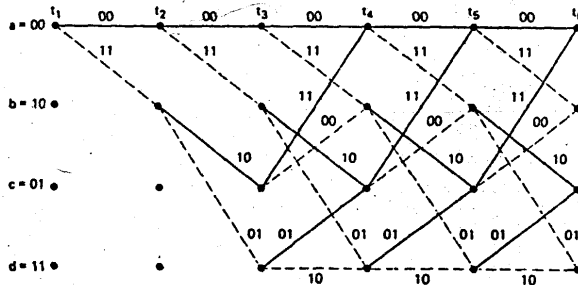
vst
vys

Lut
imj

chádza
učného
ktoré
stupný
kodéry
ramov.
6.

veľmi
úseku.
vového
iagram

vyznačenom slede je výstupná postupnosť 11010100. Každá dvojica zodpovedá jednej vetve stromu. Uzly stromu zodpovedajú jednotlivým stavom. Stromový graf má tiež jednu zásadnú nevýhodu. Počet jeho vetiev veľmi rýchlo narastá s rastúcim časom. Ak si však lepšie všimneme stromový graf na obr. 5.17. ~~15/18~~ zistíme, že sa v ňom opakuje určitá zákonitosť. Označme ⁶ stavy takto: a = 00, b = 10, c = 01, d = 11. Počnúc časovým okamihom t_4 je horná a dolná polovica stromu rovnaká. Z hľadiska opisu sledov v strome môžu byť identické stavy v čase t_1 zlúčené a znázornené pomocou jediného uzla. Takto dostaneme kompaktnejší opis pomocou tzv. mriežky, alebo mriežkového diagramu, ktorý je znázornený na obr. 5.18.



Obr. 5.18.

Kodér možno opísať aj pomocou impulznej odpovede. (Je to odpoveď na postupnosť obsahujúcu iba jednu 1.)

| Obsah registra | vetvové slová |
|----------------|---------------|
| 100 | 11 |
| 010 | 10 |
| 001 | 11 |

vstupná postupnosť: 100

výstupná postupnosť (impulzná odpoveď): 111011.

Lubovoľnú výstupnú postupnosť možno dostať superpozíciou impulzných odpovedí prislúchajúcich správe takto:

na

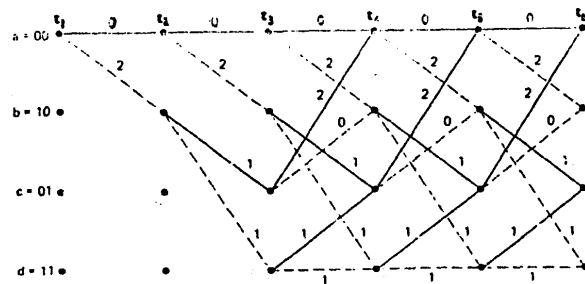
| Vstupná správa | výstup |
|----------------|----------|
| 1 | 11 10 11 |
| 0 | 00 00 00 |
| 1 | 11 10 11 |

$$\bar{c} = 11 10 00 10 11$$

Vidíme, že konvolučné kódy sú lineárne kódy.

• Korekčná schopnosť konvolučných kódov •

Schopnosť opravovať chyby pri lineárnych blokových kódoch súvisela s Hammingovou vzdialenosťou medzi jednotlivými slovami kódu. Podobne je to tak aj pri konvolučných kódoch s rozdielom, že kódové slová sú polonekonečné postupnosti symbolov. Keby sme teda uvažovali celkovú vzdialenosť, zistili by sme, že všetky rôzne kódové slová majú nekonečnú vzdialenosť. To, pravda nemá veľký praktický význam. Užitočnejšie bude poznať vzdialenostné charakteristiky na konečných úsekoch kódových slov. Vďaka linearite stačí bez straty všeobecnosti skúmať vzdialenosti všetkých slov od nulového kódového slova. Predpokladajme, že bolo vyslané nulové kódové slovo. Kedy vznikne chyba po dekódovaní prijatého slova? Zrejme, vtedy, ak prijatá postupnosť je bližšie k inej kódovej postupnosti než postupnosti zo samých núl. Na obr. 5.19. je prekreslená mriežka kódu, ktorý používame ako príklad označená Hammingovými



Obr. 5.19.

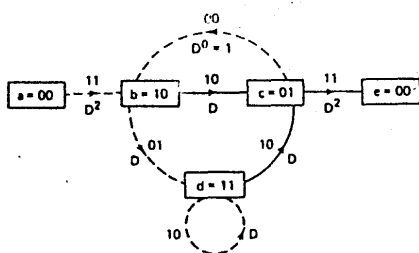
vzdialenostami každej vetvy od nulovej. Preskúmame sledy,

ktor
spáj
jede
v ča
sled
v ča
s ni
dlhý
mini
našo
VoIn
nasl
mocn
aleb
nulo
nepr
okre
vstu
konč
obr.
zákl
Výsl
sled
sled
dost

Obr

ktoré sa oddeľujú od sledu zo samých núl a potom sa s nimi opäť spájajú. Z obr. 5.19. je zrejmé, že pre náš príklad existuje jeden sled so vzdialenosťou 5, ktorý sa oddeľuje od nulového v čase t_1 a opäť sa s ním spája v čase t_4 . Podobne existujú dva sledy so vzdialenosťou 6, jeden sa oddeľuje v čase t_1 a spája v čase t_5 a druhý sa oddeľuje v čase t_1 a spája v čase t_6 s nulovým sledom. Minimálna vzdialenosť v množine ľubovoľne dlhých sledov, ktoré sa oddeľujú a opäť spájajú, sa nazýva minimálna voľná vzdialenosť, resp. voľná vzdialenosť d_f . V našom príklade $d_f = 5$.

Voľnú vzdialenosť možno priamo vypočítať zo stavového diagramu nasledujúcou metódou. Na obr. 5.16. treba ohodnotiť každú vetvu mocninou pomocnej premennej D pre náš príklad $D^0 = 1$, alebo D^1 alebo D^2 pričom exponent D určuje Hammingovu vzdialenosť od nulového slova. Slučku v uzle a môžeme odstrániť, pretože neprispieva k vzdialenosti od nulového kódového slova. Uzol a okrem toho môžeme rozštiepiť na 2 uzly. Jeden reprezentujúci vstup a druhý výstup. Všetky sledy začínajúce v uzle a a končiacie v uzle e sa môžu skúmať pomocou modifikovaného obr. 5.20. Prenosovú funkciu sledu $a-b-c-e$ môžeme vypočítať na základe násobenia ohodnotení na príslušných vetvách $D^2 D D^2 = D^5$. Výsledný exponent D udáva kumulovanú Hammingovu vzdialenosť sledu $abce$ od nulového sledu. Podobne by sme mohli preskúmať sledy $a-b-d-c-e$ a $a-b-c-b-c-e$ a zistili by sme, že pre ne dostaneme hodnotu D^6 .



Obr. 5.20.

Systematický výpočet d_f si vyzaduje zostaviť stavové

rovnice :

$$X_b = D^2 X_a + X_c$$

$$X_c = DX_b + DX_d$$

$$X_e = D^2 X_c$$

X_a, X_b, X_c, X_d, X_e sú pomocné premenné. Prenosovú funkciu $T(D)$ dostaneme na základe vzťahu z literatúry

$$T(D) = \frac{D^5}{1 - 2D} = D^5 + 2D^6 + 4D^7 + \dots + 2^l D^{l+5}$$

Z nej sa dá určiť, že kód sa vyznačuje jedným sledom s Hammingovou vzdialenosťou 5, dvoma sledmi so vzdialenosťou 6 a štyrmi sledmi so vzdialenosťou 7. Preto $d_f = 5$.

Podobnou metódou sa dá zistiť okrem d_f aj ďalšia informácia o kóde. Treba zaviesť do ohodnotenia ďalšie premenné. Nech mocnina L udáva počet vetiev v slede a mocnina N počet jednotiek vo vstupnej postupnosti, ktorá vyvolá príslušný sled. Príklad je uvedený na obr. 5.21. a platí preň

$$X_b = D^2 L N X_a + L N X_c$$

$$X_c = DL X_b + DL X_d$$

$$X_d = DL N X_b + DL N X_d$$

$$X_e = D^2 L X_c$$

Pre prenosovú funkciu platí

$$T(D, L, N) = \frac{D^5 L^3 N}{1 - DL(1 + L)N} =$$

= D

Obr

Z p

sle

vst

hra

P_B

pri

z o

T(D

a d

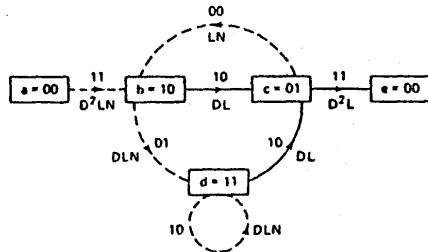
dT(

d

dos

P_B

$$= D^5 L^3 N + D^6 L^4 (1 + L) N^2 + D^7 L^5 (1 + L^2) N^3 \dots$$



L - počet nuly
N - počet 1 vo vstupnej postupnosti

vstup:
—— 0
- - - 1

$T(D)$

Obr. 5.21.

Z posledného vzťahu môžeme vyčítať, že kód charakterizuje jeden sled so vzdialenosťou 5, dĺžkou 3, ktorý sa líši v jednom vstupnom bite od postupnosti zo samých núl atď.

V literatúre je uvedený nasledujúci vzťah pre hornú hranicu pravdepodobnosti P_B .

$$P_B \approx \left. \frac{dT(D, N)}{dN} \right|_{N=1, D=2\sqrt{P(1-P)}} \quad (5.62)$$

prícom P je pravdepodobnosť chyby v kanáli. Napr. pre kód z obr. 5.14. dostaneme $T(DN)$ z $T(D, L, N)$ dosadením $L = 1$ potom

$$T(D, N) = \frac{D^5 N}{1 - 2DN}$$

a ďalej

$$\left. \frac{dT(D, N)}{dN} \right|_{N=1} = \frac{D^5}{(1 - 2D)^2} \quad (5.63)$$

dosadením (5.62) do (5.63) dostávame

$$P_B \approx \frac{\frac{1}{(2[P(1-P)])^2}^5}{\frac{1}{(1 - 4[P(1-P)])^2}^2} \quad (5.64)$$

sledom
stou 6
falsia
falsie
lina N
slušný

Pre koherentnú BPSK sa dá ukázať [33], že :

$$P_B \approx Q \left[\sqrt{2d_f \frac{E_c}{N_0}} \right] \exp \left(d_f \frac{E_c}{N_0} \right) \frac{dT(D, N)}{dN} \quad (5.65)$$

$$N = 1,$$

$$D = \exp \left(- \frac{E_c}{N_0} \right)$$

prítom

$$\frac{E_c}{N_0} = R_k \frac{E_B}{N_0}$$

$\frac{E_B}{N_0}$ je pomer energie na bit informácie k výkonovej hustote spektra,

$\frac{E_c}{N_0}$ je pomer energie na symbol v kanáli k výkonovej hustote spektra sumu.

$R_k = \frac{k_0}{n_0}$ je rýchlosť kódu, potom pre kód s $d_f = 5$ pre koherentnej BPSK platí

$$P_B \approx Q \left[\sqrt{\frac{5E_B}{N_0}} \right] \exp \left(\frac{5E_B}{N_0} \right) \frac{\exp \left(\frac{-5E_B}{2N_0} \right)}{\left[1 - 2 \exp \left(\frac{-E_B}{2N_0} \right) \right]^2} \quad (5.67)$$

$$P_B \approx \frac{Q \left[\sqrt{\frac{5E_B}{N_0}} \right]}{\left[1 - 2 \exp \left(\frac{-E_B}{2N_0} \right) \right]^2} \quad (5.68)$$

5.2.1.2.3 Dekódovanie konvolučných kódov

5.2.1.2.4 ML dekódovanie

5.65)

V prípade, že všetky správy sú rovnako pravdepodobné, teda všetky kódové postupnosti \bar{c} sú rovnako pravdepodobné, vtedy dekódér dosiahne minimálnu pravdepodobnosť chyby, ak postupuje takto. Porovná všetky podmienené pravdepodobnosti $P(\bar{v}/\bar{c})$, pričom \bar{v} je prijatá postupnosť a vyberie tú postupnosť $\hat{\bar{c}}$, ktorá

5.66)

sa vyznačuje maximálnou hodnotou $P(\bar{v}/\hat{\bar{c}})$, čiže

$$P(\bar{v}/\hat{\bar{c}}) = \max_{\text{cez všetky } \bar{c}} P(\bar{v}/\bar{c}) \quad (5.69)$$

ustote

Optimálny dekódér, ktorý pracuje podľa vzťahu (5.69), sa nazýva ML dekódér (maximum likelihood). Tento vzťah je základným z hľadiska teórie rozhodovania, ale aj bez hlbokých teoretických úvah sa dá vycítiť, že je v súlade s naším očakávaním. Pri demodulácii boli v binárnom prípade vždy len dve možnosti, pre ktoré sa dekódér, resp. demodulátor mohol rozhodnúť - signály $s_1(t)$ a $s_2(t)$.

ustote

pri

Pri dekódovaní konvolučných kódov však pracujeme s celou množinou správ \bar{c} , z ktorých môže pochádzať vyslaná správa. Napr. ak kódovaná postupnosť pozostáva z L bitov, počet možných postupností je 2^L . Ak podmienené pravdepodobnosti nie sú známe, musia sa zistiť, alebo ich treba vypočítať na základe vlastností kanála. Budeme predpokladať, že šum je AWGN, teda kanál je bez pamäti a šum zasahuje ľubovoľný prenášaný symbol nezávisle od ostatných symbolov. Pre konvolučný kód s rýchlosťou $\frac{1}{n}$ môžeme pravdepodobnosť $P(\bar{v}/\bar{c})$ vyjadriť takto

5.67)

$$P(\bar{v}/\bar{c}) = \prod_{i=1}^{\infty} P(\bar{v}_i/\bar{c}_i) = \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n_0} P(v_{ji}/c_{ji}) \quad (5.70)$$

5.68)

kde \bar{v}_i je i -tá vetva prijatej postupnosti \bar{v} , \bar{c}_i je i -tá vetva (záber) príslušného kódového slova \bar{c} a v_{ji} je j -ty symbol vetvy \bar{v}_i , c_{ji} je j -tý symbol \bar{c}_i , pričom každý záber, resp. vetva pozostáva z n_0 symbolov.

Problém dekódovania tkvie v nájdení sledu v mriežke,

pričom každý možný sled opisuje jedno možné kódové slovo, a to tak, aby

$$\prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n_0} P(v_{ji}/c_{ji}) \text{ bolo maximálne.}$$

Vo všeobecnosti je pohodlnejšie použiť logaritmus výrazu (5.70) pre podmienené pravdepodobnosti. Nahradia sa tým násobeniami za sčítania. Logaritmovat' môžeme preto, lebo logaritmus je monotónne narastajúca funkcia, a teda neovplyvní to výsledný výber kódového slova. Definujme funkciu LL (log-likelihood) $\gamma_{\bar{c}}$ takto

$$\gamma_{\bar{c}} = \log P(\bar{v}/\bar{c}) = \sum_{i=0}^{\infty} \log(\bar{v}_i/\bar{c}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_0} \log P(v_{ji}/c_{ji}) \quad (5.71)$$

Problém dekódovania teraz môžeme formulovať ako problém výberu toho sledu v mriežke kódu, ktorý maximalizuje $\gamma_{\bar{c}}$. V prípade, že by sme namiesto mriežky použili stromový diagram, potrebovali by sme pri hľadaní v strome pri kódovanej postupnosti z L bitov porovnávať 2^L akumulovaných LL metrik, ktoré by reprezentovali 2^L možných kódových postupností. Preto ML dekódovanie nie je veľmi praktické ak použijeme stromový diagram. Pri použití mriežky naopak možno mnohé z potenciálnych kódových postupností vylúčiť počas prehľadávania mriežky. Nevylúčené sledy nazývame prežívajúcimi sledmi. Z nich sa nakoniec vyberie optimálny odhad vyslanej postupnosti.

Je známy Viterbiho algoritmus, ktorý realizuje ML dekódovanie. Existujú aj aproximačné riešenia ML dekódovania, ktoré sú však suboptimálne.

Prv, než opíšeme Viterbiho algoritmus, budeme sa bližšie zaoberať prenosovým kanálom. Kódová postupnosť \bar{c} zložená z vetiev, z ktorých každá má n_0 kódových symbolov, predstavuje nekonečnú postupnosť. Postupnosť z kódéra vstupuje do modulátora, kde sú kódové symboly transformované na signály. Pritom signály môžu byť v základnom pásme (impulzy), alebo v preloženom pásme (číslicová modulácia). Vo všeobecnosti vstupuje naraz do modulátora k' symbolov a tieto sú transformované na signál $s_i(t)$ pričom $i = 1, 2, \dots, M = 2^k$. Ak

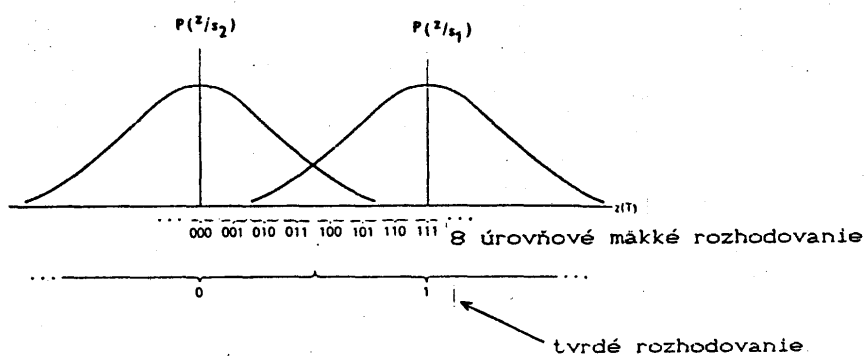
k'
modu
ruše
a po
je i
aleb
+ n(
príj
vzor
z(T)
a₁,
sumo
Demo
roz
roz
príd

Obr.
Pri
kval
pove
úrov
odov
tak
v

to $k' = 1$, potom modulátor priraduje jednému symbolu jeden modulačný symbol. Predpokladáme, že signál je potom pri prenose rušený AWGN. Prijatý signál je najprv spracovaný demodulátorom a potom dekodérom.

izu tým lebo vni LI 71) eru ze ali tov ali je ití ostí rame ilny ML nia, zšie zená vuje do ály. lebo ostí sú . Ak

Predpokladajme, že binárny signál prenášaný v čase $(0, T)$ je reprezentovaný pomocou signálu $s_1(t)$ ak je prenášaná 0 , alebo $s_2(t)$, ak je prenášaná 1 . Prijatý signál je $r(t) = s_1(t) + n(t)$, pričom $n(t)$ je Gaussov proces. Vieme, že pri optimálnom prijíme v prvom kroku je prijatý signál $r(t)$ transformovaný na vzorku $z(T)$ a v druhom kroku prebieha rozhodnutie porovnávaním $z(T)$ s rozhodovacou hranicou. Vzorka $z(T)$ je zložená zo zložky a_1 , ak je vyslaný signál 1 , resp. a_2 , ak je vyslaný signál 0 a sumovej zložky n_0 , ktorá predstavuje Gaussovu náhodnú premennú. Demodulátor môže vykonať na základe vzorky $z(T)$ tvrdé rozhodnutie alebo mäkké rozhodnutie. Pri tvrdom jednoducho rozhodne, že bola vyslaná 0 alebo 1 a neodovzdáva ďalej žiadnu prídavnú informáciu.



Obr. 5.22.

Pri mäkkom naopak dáva dekodéru aj určitú kvalitatívnu mieru o kvalite, resp. spoľahlivosti rozhodnutia, ktoré urobil. Inak povedané: dáva ďalej kvantovanú hodnotu $z(T)$ s viac ako dvoma úrovňami. Ak počet úrovní je nekonečný, môže v krajnom prípade odovzdávať dekodéru priamo nekvantovanú hodnotu $z(T)$. Dekodér takto dostáva viac informácie ako pri tvrdom rozhodovaní. V takomto prípade proces dekódovania nazývame mäkkým

dekódovaním. Ak teda dekodér dostáva v binárnom prípade výsledky tvrdého rozhodovania, dostáva pre každé rozhodnutie maximálne 1 bit informácie. V prípade použitia 8 úrovní kvantovania $z(T)$, dostáva na každé rozhodnutie najviac 3 bity. V súvislosti s obr. 5.22. môžeme povedať, že ak dekodér dostane kombináciu 111, tak má informáciu, že 1 je spoľahlivejšia ako v prípade, že dostane kombináciu 100.

Pre Gaussov kanál už použitie 8 úrovní kvantovania znamená zlepšenie vo vyžadovanom odstupe signál-sum o 2 dB oproti tvrdému rozhodovaniu. To značí, že odstup signál-sum menší o 2 dB zabezpečí tú istú hodnotu P_B . Nekonečné množstvo úrovní teda odovzdávanie $z(T)$ bez kvantovania môže zabezpečiť zlepšenie asi o 2,2 dB. Vidíme, že 8 úrovní prakticky vyčerpáva veľkú časť možného zlepšenia. Cenou, ktorú treba zaplatiť za tento zisk je zväčšenie počtu bitov, s ktorými musí dekodér narábať, teda zväčšenie zložitosti dekódovania.

Mäkké dekódovanie spojené s lineárnymi blokovými kódmi podstatne zväčšuje zložitost dekódovania. Naproti tomu spojenie mäkkého dekódovania s Viterbiho algoritmom predstavuje prijateľné zväčšenie zložitosti čo spôsobilo široké praktické uplatnenie takéhoto riešenia.

Binárny symetrický kanál je diskretný kanál bez pamäti, ktorý je najznámejším príkladom kanála s tvrdým rozhodovaním. Každý symbol na výstupe kanála označme teraz tak, aby korešpondoval s označeniami použitými v časti ML dekódovanie. Nech \bar{c} je kódové slovo prenášané cez BSC s pravdepodobnosťou chyby P a nech \bar{v} je prijatá postupnosť vstupujúca do dekodéra. ML dekodér vyberie tú postupnosť \bar{c} , ktorá maximalizuje $P(\bar{v}/\bar{c})$, alebo $\log[P(\bar{v}/\bar{c})]$. Táto úloha je ekvivalentná úlohe vybrať to kódové slovo spomedzi všetkých možných, ktoré sa vyznačuje minimálnou Hammingovou vzdialenosťou od prijatej postupnosti \bar{v} . Hammingova metrika je v tomto prípade vyhovujúca.

Predpokladajme, že \bar{c} a \bar{v} majú N bitov a líšia sa v d_N pozíciách (Hammingova vzdialenosť medzi \bar{v} a \bar{c} je d_N). Potom, pretože kanál je bez pamäti je pravdepodobnosť, že bolo vyslané slovo \bar{c} za predpokladu prijatia \bar{v} , daná vzťahom

$$P(\bar{v}/\bar{c}) = P^{d_N} (1 - P)^{N - d_N} \quad (5.72)$$

BSC - Binárny Symetrický Kanál

aleť

logF

Pri
bude
vyja

logF

pric
s mi
znam
maxi

5.2.

z de
prís
[33]medz
anal
vzor $\sum_{i=1}^{\infty}$

To

vzdi

rozi

vybi

výra

s al

ari

pome

kval

ver:

sigl

alebo

$$\log P(\bar{v}/\bar{c}) = -d_N \log \left(\frac{1-P}{P} \right) + N \log(1-P) \quad (5.73)$$

Pri počítaní metriky pre každý možný sled podľa vzťahu (5.73) bude druhý člen na pravej strane konštantný. Nech $P < 0,5$ vyjadríme (5.73) takto

$$\log P(\bar{v}/\bar{c}) = -Ad_N - B \quad (5.74)$$

príčom A, B sú kladné konštanty. Preto vybrať kódové slovo s minimálnou Hammingovou vzdialenosťou od prijatej postupnosti znamená vybrať spomedzi všetkých možných sledov ten, ktorý má maximálnu hodnotu metriky (5.74).

5.2.1.2.5 Gaussov kanál

Pre Gaussov kanál predstavuje každý symbol z_{ji} vystupujúci z demodulátora spojité náhodnú premennú. Tieto hodnoty udávajú príslušné hodnoty podmienených pravdepodobností. Dá sa ukázať [33], že maximalizovať $P(\bar{v}/\bar{c})$ znamená maximalizovať násobok medzi postupnosťou kódového slova \bar{c} (z binárnych symbolov) a analógovými hodnotami prijatej postupnosti \bar{v} (t.j. spojitými vzorkami z_{ji}). Treba teda vybrať slovo, ktoré maximalizuje

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_0} z_{ji} c_{ji} \quad (5.75)$$

To je ekvivalentné výberu slova s minimálnou Euklidovou vzdialenosťou od prijatej postupnosti. Aj keď tvrdé a mäkké rozhodovanie využíva rozdielnú metriku, spoločným je cieľ vybrať to \bar{c} , ktoré je najbližšie k \bar{v} . Realizácia maximalizácie výrazu (5.75) by si vyžadovala, aby bol dekodér schopný narábať s analógovými vzorkami a aby s nimi dokázal vykonávať príslušné aritmetické operácie. Avšak preto, že dekodéry sú realizované pomocou číslicových obvodov, treba prijaté symboly z_{ji} kvantovať. Co nám pripomína (5.75)? Je to vlastne diskrétna verzia korelácie prijateho signálu $s_1(t)$ a referenčného signálu $r(t)$. Kvantovaný Gaussov kanál je teda príkladom kanála

s mäkkým rozhodovaním.

5.2.1.2.6 Viterbiho algoritmus

Viterbiho algoritmus, ktorý realizuje ML, dekódovanie využíva na redukcii zložitosti dekódovania špeciálnu štruktúru mriežky v ktorej pre každý časový okamih t_i (potom ako sa mriežka rozvinie) existuje len konečný počet stavov. Pritom do každého uzla vstupujú vo všeobecnosti aspoň 2 vetvy z uzlov predstavujúcich stavy v čase t_{i-1} . Dekodér pre každý časový okamih t_i určí metriku všetkých možných sledov. Len čo do jedného uzla vchádza viac ako jeden sled, vyberá ten, ktorý má najlepšiu metriku (tú, ktorá vedie k minimálnej vzdialenosti). Dôvod je, že sledy s horšou metriku nemajú v ďalšom, po spojení sa v jednom uzle už šancu nikdy nadobudnúť lepšiu metriku ako sled s najlepšou metriku vybratý spomedzi tých, ktoré vzniknú priradením ďalších vetiev vychádzajúcich z daného uzla. Takto pre každý časový okamih t_i prežije len konečný počet sledov. Dekódovanie končí výberom sledu s najlepšou metriku spomedzi tých, ktoré prežijú.

Pri poslednom rozhodovaní netreba čakať na spracovanie celej prijatej postupnosti. Už po spracovaní približne 5K symbolov sa možno vrátiť späť a rozhodnúť o symboloch na začiatku tejto postupnosti dĺžky 5K. Dekódovanie môže teda prebiehať prakticky tak, že po spracovaní dĺžky aspoň 5K symbolov dekodér rozhodne o symboloch, ktoré doň vstúpili ako prvé a potom pokračuje opäť v smere dopredu, až pokým nie je dekódovanie ukončené. Existuje celý rad veľmi praktických modifikácií, ktoré vedú k zefektívneniu práce dekodérov, či už hardwarových alebo softwarových [34,31]. Univerzálne dekodéry pre RS kódy a konvolučné kódy s Viterbiho algoritmom sa dajú dnes kúpiť vo forme integrovaných obvodov.

Treba spomenúť, že RS kódy vzhľadom na to, že ich symboly predstavujú z hľadiska dvojkovej postupnosti skupiny bitov, umožňujú opravovať zhľuky chýb. Konvolučné kódy sú zasa v spojení s Viterbiho algoritmom vhodnejšie pre nezávislé chyby.

Vynikajúce hodnoty zisku kódovania možno dosiahnuť kaskádnym použitím RS kódov a konvolučných kódov s Viterbiho

algor

5.2.

opti
z ni

Obr

algoritmom.

5.2.1.2.7 Sekvenčné dekódovanie

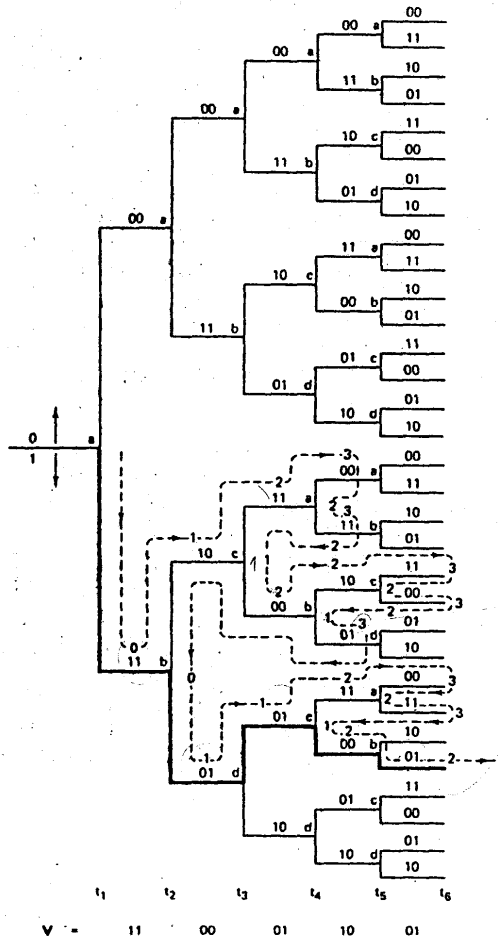
ódo-
vane
truktúru
ako sa
ritom do
z uzlov
časovy
n čo do
ktorý má
nosti).
som, po
lepšíu
zi tých,
z daného
konečný
najlepšou

Prv, než sa bol pre dekódovanie konvolučných kódov našiel optimálny Viterbiho algoritmus, boli známe iné metódy. Jednou z nich je sekvenčné dekódovanie [19]. Sekvenčný dekodér pracuje

racovanie
lízne SK
oloch na
že teda
aspoň SK
pili ako
m nie je
aktických
v, či už
dekodéry
sa dajú

i symboly
y bitov,
sú zasa
nezávislé

dosiahnuť
Viterbiho



11011

tu by asi
malo byť 4

Obr. 5.23.

tak, že generuje hypotézy o vyslanom kódovom slove a počíta metriku úmernú vzdialenosti medzi týmito hypotézami a prijatým signálom. Postupuje dopredu v strome dovtedy, kým metrika signalizuje, že je na správnej ceste. V opačnom prípade sa vracia späť a skúša inú hypotézu systematickým spôsobom až dovtedy, kým nájde hypotézu, ktorá sa javí ako pravdepodobná. V súlade s jeho pravidlami pre takéto hodnotenie. Na obr. 5.23 je príklad prehadzovania stromu pre prijatú postupnosť 11 00 01 10 01, pričom pravidlo pre návrat (zavrnutie hypotézy) je, že metrika nadobudne hodnotu 3. To znamená, že počet rozdielnych symbolov medzi hypotetickým sledom a prijatou postupnosťou je 3.

Algoritmus pripomína postup automobilistu, ktorý má mapu a ak sa mu zdá, že cesta, po ktorej sa pohybuje, prestáva súhlasiť do značnej miery s tou, s ktorou chce ísť podľa mapy, vráti sa do bodu, kde sú rozdiely prijateľné podľa jeho osobnej metriky.

• 5.2.1.2.8 Dekódovanie metódou porovnávania •

Inou možnou metódou dekódovania je metóda porovnávania odrezkov stromu s fragmentmi prijatej postupnosti.

Dekodér, keď sa nachádza v uzle j porovnáva časť prijatej postupnosti so všetkými možnými sledmi pozostávajúcimi z $u + 1$, (kde u je vhodné zvolené celé číslo) vetiev a rozhoduje sa pre tú, ktorá vykazuje minimálnu Hammingovu vzdialenosť od rovnako dlhej časti prijatej postupnosti. Potom opakuje tento postup v uzle na úrovni $j + 1$ atď. Po každom rozhodnutí odovzdáva užívateľovi vstupný symbol, ktorý spôsobuje prechod do nasledujúceho uzla. Algoritmus je ilustrovaný na obr. 5.24.

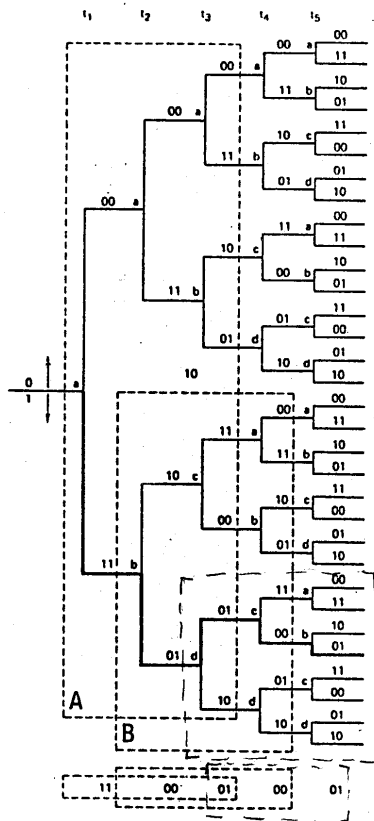
Posledné dva algoritmy nie sú optimálne avšak pri správnom návrhu môžu priniesť úsporu v zložitosti procedúry dekódovania.

a
m
a
a
12
1.
23
01
ze
ch
je

a
va
y,
no

ia
ej
1,
re
ko
v
va
do

om
a.



Obr. 5.24.

• 5.2.2 Translačné kódy •

Úlohou translačných kódov je vylúčiť zo zakódovanej postupnosti symbolov určité sledy symbolov, ktoré sú pre daný kanál nevhodné. Pritom do kódéra translačného kódu môžu vstupovať ľubovoľné sledy symbolov z použitej abecedy. Väčšina translačných kódov používaných v telekomunikačnej praxi bola zostrojená na základe skúseností ich autorov. V súčasnosti sa rozvíja teória translačných kódov, ktorá je užitočnou pri konštrukcii takýchto kódov.

• 5.2.2.1 Empiricky zostrojené translačné kódy •

• 5.2.2.1.1 Najznámejšie translačné kódy používané v telekomunikáciách •

Medzi najznámejšie translačné kódy patria rôzne linkové kódy používané v telekomunikáciách. Preto problematika tejto časti bezprostredne navdzuje na 3. časť.

Linkový kód HDB_n (high density bipolar) by sme podľa našich doterajších spôsobov značenia (časť 3.) mohli charakterizovať ako BPNRZ - AMI, ak by skratka neobsahovala n . Toto malé n má však zásadný význam. Označuje maximálny počet intervalov, ktoré sa môžu vyskytnúť v signáli bez prechodu medzi úrovňami za sebou. Od BPNRZ - AMI sa HDB_n líši tým, že v prípade, ak kódovaná postupnosť obsahuje viac ako n "zakázaných" symbolov, napr. núl, dôjde k porušeniu pravidla o striedaní polarity impulzov zodpovedajúcich jednotkám.

Špeciálnym prípadom HDB_n sú kódy BNZS (bipolar with N zeros substitution). V týchto kódoch sa sled bezprostredne za sebou idúcich núl v bipolárnom signáli zamenia špeciálnou kombináciou z N symbolov pri súčasnom porušení pravidla striedania polarity impulzov zodpovedajúcich jednotkám. Výsledkom tejto substitúcie je zväčšenie celkového počtu impulzov. Dosadené kombinácie sú na prijímajúcej strane rozoznateľné vďaka porušeniu pravidla o polarite. Prijímač ich takto znovu môže zameniť na pôvodných N núl. Príkladom, je kód B3ZS, v ktorom sa sled troch núl zamenia špeciálnou postupnosťou 00V alebo postupnosťou označovanou ako 00V, 00V

pozostáva z dvoch intervalov bez impulzov, za ktorými nasleduje impulz, ktorého polarita porušuje (V - violation) pravidlo o striedaní polarít: Kombinácia označovaná ako BOV je zložená z jedného impulzu so správnou polaritou, intervalu bez impulzu a impulzu porušujúceho svojou polaritou pravidlo o striedaní polarít. V každej substitúcii je impulz V na konci trojice použitej na zámenu, čo uľahčuje jej odhalenie. O tom, či sa tri nuly kódujú ako 00V alebo BOV, sa rozhoduje tak, aby počet impulzov typu B medzi impulzmi typu V v postupnosti linkového kódu bol nepárny. Inak povedané ak po poslednej substitúcii bol vyslaný nepárny počet jednotiek, tak pre substitúciu sa volí kombinácia 00V, ak počet jednotiek vyslaný po poslednej zámene bol párný, volí sa BOV. Takto zabezpečíme, že hodnota RDS je počas prenosu blízka nule. Skratka RDS je vysvetlená ďalej. Pravidlá zámény analyzovaného kódu sú zhrnuté v tab.5.1.

Tabuľka 5.1

| Polarita predchádzajúceho impulzu | Kombinácie použité pre substitúciu pre počet impulzov | |
|---|--|-------|
| | Nepárny | Párny |
| - | 0 0 - | + 0 + |
| + | 0 0 + | - 0 - |
| | 00V | BOV |

Iným príkladom kódu z tejto triedy je kód používaný firmou Bell, je to kód B6ZS [35]. Pravidlá substitúcie kódu B6ZS sú dané tabuľkou 5.2

Tabuľka 5.2

| Polarita predchádzajúceho impulzu | Kombinácie použité pre substitúciu | |
|---|------------------------------------|--|
| | | |
| - | 0 - + 0 + - | |
| + | 0 + - 0 - + | |

Ak napr. predchádzajúci impulz bezprostredne pred sledom siestich núl mal zápornú polaritu, potom situácia vyzerá takto:

kódovaná postupnosť 10000001011000000000000001
 po substitúcii -0-+0--0-+0-+0-+0-+000-

Najznámejším z tejto triedy linkových kódov je kód HDB3. Pravidlá zámény pri použití kódu HDB3 (ináč by sme ho mohli označiť ako B4ZS) sú zhrnuté v tab. 5.3.

Tabuľka 5.3

| Polarita predchádzajúceho impulzu | Kombinácie použité pre substitúciu pre počet impulzov | |
|---|--|---------|
| | Nepárny | Párny |
| - | 0 0 0 - | + 0 0 + |
| + | 0 0 0 + | - 0 0 - |

Ďalšou skupinou sú kódy, v ktorých sa blokom z binárnych symbolov priradujú bloky trojkových symbolov. Pravidlá priradenia jedného z nich označovaného ako PST (pair selected ternary) sú dané tab. 5.4

Tabuľka 5.4

| Blok pozostávajúci z dvoch dvojkových symbolov vstupujúcich do kodéra | Mód 1 | Mód 2 |
|--|-------|-------|
| 0 0 | - + | - + |
| 0 1 | 0 + | 0 - |
| 1 0 | + 0 | - 0 |
| 1 1 | + - | + - |

Tento konkrétny linkový kód zaručuje nielen dostatok impulzov potrebných na obnovu synchronizácie, ale zabráňuje tiež kolísaniu jednosmernej zložky signálu vďaka prepínaniu módov.

Pre
a z
- K
dov
- v
opa
akt

Nap
Kód
Akt
Akt

v t
ten
dvo
5.5

3,

Tro
med
dru
ner

toh
vys

vys
(mó

(m

s p

pod

mož

0

dvo

kód

avš

Na

1B2

1,

lom
kto:

Prepínaním módov sa dosahuje približná rovnováha medzi kladnými a zápornými impulzmi. Mechanizmus prepínania je takýto:

- Kódové kombinácie sa vyberajú z práve aktuálneho stĺpca až dovtedy, kým sa na vstupe kodéra objaví kombinácia 1 0,
- v momente objavenia sa 1 0 na vstupe sa kodér prepne do opačného módu a už túto kombináciu kóduje podľa nového aktuálneho módu.

DB3.
ohli

Napr.:

| | | |
|---------------------|-------------------------------------|--|
| Kódovaná postupnosť | 01 00 11 ^{1 2} 10 10 11 00 | 10 |
| Aktuálny mód 1 | 0+ -+ +- -0 +0 +- -+ | |
| Aktuálny mód 2 | 0- -+ +- +0 -0 +- -+ | |

Ďalším príkladom takéhoto kódu, ktorý sa používa v telekomunikačnej praxi, je kód 4B3T. Pravidlá, podľa ktorých tento kód priraduje blokom pozostávajúcim zo štvorice dvojkových symbolov trojice trojkových symbolov sú dané tab. 5.5. Pretože v tomto kóde dochádza tiež k striedaniu stĺpcov 2, 3, 4 tab. 5.5, pri kódovaní treba objasniť tento mechanizmus. Trojkové kombinácie v strednom stĺpci sa vyznačujú rovnováhou medzi počtom kladných a záporných impulzov. Kódové kombinácie z druhého a štvrtého stĺpca sa vyznačujú protichodnou nerovnováhou. Preto sa druhý a štvrtý stĺpec striedajú podľa toho, či bolo v aktuálnom okamihu od začiatku vysielania vyslaných viac kladných alebo záporných impulzov. Ak napr. bolo vyslaných viac kladných impulzov vyberá sa druhý stĺpec (mód 1).

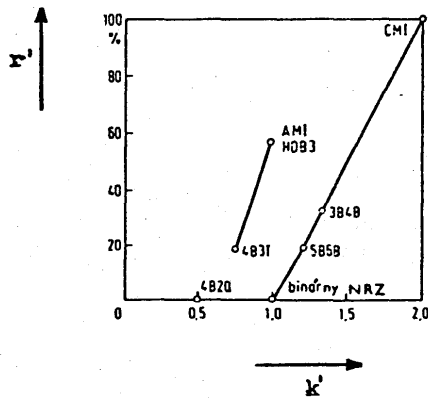
Veľký význam majú dvojkové kódy označované ako mBnB (m - "bitom" je priradených n - "bitov"). Už sme sa stretli s predstaviteľom takéhoto kódu. Bol to kód bi - φ - S. Veľmi podobný je kód označovaný ako CMI. Z pohľadu triedy mBnB ho možno označiť ako kód 1B2B, pretože každej 0 priraduje dvojicu 0 1 a každej jednotke dvojicu 1 1 alebo 0 0. Pritom kódové dvojice sú prenášané za jeden charakteristický interval. Tento kód zlepšuje synchronizačné vlastnosti oproti kódu NRZ - L, avšak na úkor rozšírenia vyžadovaného prenosového spektra. Najvyššia základná frekvencia sa zvyšuje na dvojnásobok. Ďalším 1B2B kódom je kód bi - φ - L alebo ináč Manchester kód: 0 0 1, 1 1 0. Uvedené 1B2B kódy sa používajú v súčasnosti aj

zov
iez
ov.

v optokomunikačných systémoch s nižšími rýchlosťami. Pre systémy s väčšími rýchlosťami je nadbytočnosť, resp. vyžadovaná šírka prenosového pásma týchto kódov neziadúca, preto sa v nich častejšie používajú kódy 3B4B, 5B6B, 7B8B. Na obr. 5.25 je znázornená súvislosť medzi nadbytočnosťou r' a koeficientom

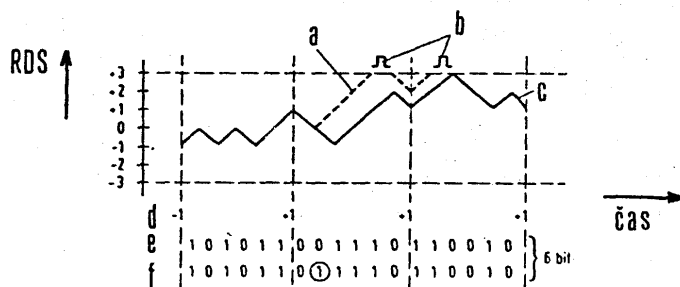
Tabuľka 5.5

| Blok kódovaných dvojkových symbolov | Trojice trojkových symbolov | | |
|-------------------------------------|-----------------------------|----------|------------|
| | mód 1 | mód 2 | mód 3 |
| 0 0 0 0 | - - - | | + + + |
| 0 0 0 1 | - - 0 | | + + 0 |
| 0 0 1 0 | - 0 - | | + 0 + |
| 0 0 1 1 | 0 - - | | 0 + + |
| 0 1 0 0 | - - + | | + + - |
| 0 1 0 1 | - + - | | + - + |
| 0 1 1 0 | + - - | | - + + |
| 0 1 1 1 | - 0 0 | | + 0 0 |
| 1 0 0 0 | 0 - 0 | | 0 + 0 |
| 1 0 0 1 | 0 0 - | zomrocha | 0 0 + |
| 1 0 1 0 | <u>nie</u> | 0 + - | |
| 1 0 1 1 | | 0 - + | <u>nie</u> |
| 1 1 0 0 | | + 0 - | |
| 1 1 0 1 | | - 0 + | |
| 1 1 1 0 | | + - 0 | |
| 1 1 1 1 | | - + 0 | |



Obr. 5.25. Súvislosť medzi r' a k' niektorých nBmB kódov

Pre rozšírenia spektra k (vzťahnuté na binárny kód NRZ). Jednou z variantov 5B6B kódu je uvedená v tab. 5.6 V tab. 5.6 D označuje tzv. disparitu, čo je vlastne rozdiel medzi počtom jednotiek a počtom núl v kódovom slove. S týmto pojmom úzko súvisí pojem RDS (running digital sum), ktorý označuje hodnotu súčtu disparít od začiatku vysielania po daný okamih - okamžitú disparitu celej odvysielanej správy. Vhodným prepínaním módu možno ohraničiť hodnotu RDS. Módy sú v tabuľke označené ako + a -. Hodnota RDS pri tomto spôsobe kódovania je pri bezchybnom prenose v ľubovoľnom okamihu menšia alebo rovná ako ∓ 3 a po skončení kódových slov je jej hodnota z intervalu ∓ 2 . Tieto dve skutočnosti umožňujú odhaliť niektoré chyby, ktoré vznikajú pri prenose. Princíp je znázornený na obr. 5.26.



Obr. 5.26. Ukážka detekcie chýb na základe sledovania RDS pre 5B6B kód: a) RDS chybného signálu, b) impulzy signalizujúce chybu, c) RDS bezchybného signálu, d) medzivýsledky, e) originálny signál, f) signál zatažený chybou

Tabuľka 5.6

| 5B-slovo | 6B-slovo | | | | | |
|----------|----------|----|-----------|--------|----|-----------|
| | + | D | nasleduje | - | D | nasleduje |
| 00000 | 110010 | 0 | + | 110010 | 0 | - |
| 00001 | 110011 | +2 | - | 100001 | -2 | + |
| 00010 | 110110 | +2 | - | 100010 | -2 | + |
| 00011 | 100011 | 0 | + | 100011 | 0 | - |
| 00100 | 110101 | +2 | - | 100100 | -2 | + |
| 00101 | 100101 | 0 | + | 100101 | 0 | - |
| 00110 | 100110 | 0 | + | 100110 | 0 | - |
| 00111 | 100111 | +2 | - | 000111 | 0 | - |
| 01000 | 101011 | +2 | - | 101000 | -2 | + |
| 01001 | 101001 | 0 | + | 101001 | 0 | - |
| 01010 | 101010 | 0 | + | 101010 | 0 | - |
| 01011 | 001011 | 0 | + | 001011 | 0 | - |
| 01100 | 101100 | 0 | + | 101100 | 0 | - |
| 01101 | 101101 | +2 | - | 000101 | -2 | + |
| 01110 | 101110 | +2 | - | 000110 | -2 | + |
| 01111 | 001110 | 0 | + | 001110 | 0 | - |
| 10000 | 110001 | 0 | + | 110001 | 0 | - |
| 10001 | 111001 | +2 | - | 010001 | -2 | + |
| 10010 | 111010 | +2 | - | 010010 | -2 | + |
| 10011 | 010011 | 0 | + | 010011 | 0 | - |
| 10100 | 110100 | 0 | + | 110100 | 0 | - |
| 10101 | 010101 | 0 | + | 010101 | 0 | - |
| 10110 | 010110 | 0 | + | 010110 | 0 | - |
| 10111 | 010111 | +2 | - | 010100 | -2 | + |
| 11000 | 111000 | 0 | + | 111000 | 0 | + |
| 11001 | 011001 | 0 | + | 011001 | 0 | - |
| 11010 | 011010 | 0 | + | 011010 | 0 | - |
| 11011 | 011011 | +2 | - | 001010 | -2 | + |
| 11100 | 011100 | 0 | + | 011100 | 0 | - |
| 11101 | 011101 | +2 | - | 001001 | -2 | + |
| 11110 | 011110 | +2 | - | 001100 | -2 | + |
| 11111 | 001101 | 0 | + | 001101 | 0 | - |

V práci [36] bol navrhnutý 13B14B kód, ktorý vylučuje behy

viac ako 10 núl alebo jednotiek za sebou a vyznačuje sa RDS \pm 4. V práci neodporúča ďalšie znižovanie nadbytočnosti mBnB kódov, pretože kódy s $m > 14$ sú podstatne zložitejšie, hodnota ich RDS je z intervalu ± 6 a ďalšie zníženie modulačnej rýchlosti je nepatrné.

5.2.2.1.2 Záver k empirickým translačným kódom

Teória translačných kódov umožňuje vo veľkej miere nahradit empirické prístupy konštrukcie. Požiadavky na linkové kódy potom možno formulovať ako určité obmedzenia na diskretný kanál, ktoré treba splniť, napr. zákaz opakovania rovnakých symbolov viac ako n-krát a pod. v súvislosti s rozličnými požiadavkami praxe, napr. v súvislosti so zlepšením podpory synchronizácie alebo odstránením jednosmernej zložky, prípadne kontrolovaným návrhom frekvenčného spektra. Teória translačných kódov potom umožňuje zostrojiť kódy, resp. linkové signály vyznačujúce sa presne vyžadovanými charakteristikami pre takéto kanály.

5.2.2.2 Základy teórie translačných kódov

Najjednoduchší telekomunikačný kanál je kanál bez pamäti, sumov a obmedzení. Kanál bez pamäti je taký kanál, v ktorom nedochádza k interferencii medzi prenášanými symbolmi a vzorky sumu, ktoré nasledujú za sebou sú nezávislé. Kanál bez sumu je taký, v ktorom nikdy nevznikajú chyby. Kanál bez obmedzení je taký, že dovoľuje prenos vstupných symbolov v ľubovoľnom poradí. Kanál, ktorý sa vyznačuje všetkými už uvedenými ideálnymi vlastnosťami, je natoľko triviálny, že si nezaslúhuje ďalší rozbor.

V tejto časti sa budeme zaoberať kanálmi s obmedzením, avšak pre jednoduchosť budeme predpokladať, že sú bez pamäti a sumu. Úlohou translačného kódu je pretvárať postupnosť údajov, v ktorej sa môžu vyskytovať symboly ľubovoľne usporiadané na inú postupnosť údajov, ktorá respektuje obmedzenia dané kanálom [37]. Translačný kód sa môže použiť v kaskáde s linkovým alebo prenosovým kódom, ktorého účelom je eliminovať vplyv sumu na prenášané údaje. Takýto prístup umožňuje zjednodušiť analýzu,

problém i návrh telekomunikačného systému.

5.2.2.2.1 Diskrétny bezšumový kanál

Diskrétny kanál je systém, v ktorom môže byť prenášaná postupnosť písmen zostavená z konečnej množiny symbolov často nazývanej abecedou $\{a_0, a_1, \dots, a_{j-1}\}$. Najznámejšími príkladmi diskretných kanálov sú telegrafný a ďalekopisný kanál.

Každý symbol a_j v diskretnom kanáli má konečnú dĺžku trvania T_j sekúnd. Dĺžka trvania nemusí byť nevyhnutne rovnaká pre každé a_j , avšak často to tak je. Vo všeobecnosti môže diskretný kanál brániť prenosu určitých špecifických postupností symbolov zo súboru abecedy. Napr. v telegrafnom kanáli boli stanovené dohodou nasledujúce symboly: bodka, čiarka, medzera medzi písmenami a medzera medzi slovami. Definujme ich takto:

1. Bodke zodpovedá zopnutie kľúča na jednu jednotku času a rozopnutie na jednu jednotku času /bezprostredne za sebou/,
2. čiarke zodpovedá zopnutie kľúča na tri jednotky času a rozopnutie na jednu jednotku času,
3. medzere medzi písmenami rozopnutie kľúča na tri jednotky času,
4. medzere medzi slovami zodpovedá rozopnutie kľúča na šesť jednotiek času.

Špecifikujme ďalej nasledujúce obmedzenie: žiadna medzera nesmie nasledovať za inou medzerou. Tento súbor pravidiel môžeme brať ako formálnu definíciu telegrafného kanála. Morseho kód uvedený v tab. 5.7 je jeden zo spôsobov kódovania, ktorý vyhovuje pre tento kanál.

Modernejším príkladom je binárny kanál s tzv. obmedzením na dĺžku behu /sledu/ /runlength constraint/. Binárny kanál môže mať na vstupe dva symboly: 0, 1. Čas trvania oboch je rovnaký. Obmedzenie na dĺžku behu je obmedzenie počtu opakovaní toho istého symbolu /v nepretržitej postupnosti za sebou/. Typickým príkladom je napr. požiadavka, aby sa nevyskytol reťazec zo samých núl alebo jednotiek dlhší ako X. Takáto podmienka zabezpečí, aby prechody medzi nulou a jednotkou neboli príliš zriedkavé, čo má význam v systemoch, ktoré vyzadujú obnovu synchronizácie.

Iným typickým obmedzením je požiadavka, aby po každej 1 nasledovalo aspoň 1 núl a za sebou sa nesmie objaviť viac ako 1 núl.

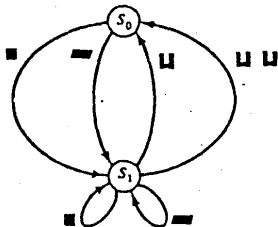
Tabuľka 5.7 Morseovka

| Symbol | Pravdepodobnosť P_j | Značka | Čas trvania l_j |
|---------|--------------------------|--------|----------------------|
| A | 0,0642 | .- | 9 |
| B | 0,0127 | -... | 13 |
| C | 0,0218 | -.-. | 15 |
| D | 0,0317 | -.. | 11 |
| E | 0,1031 | . | 5 |
| F | 0,0208 | ...- | 13 |
| G | 0,0152 | --. | 13 |
| H | 0,0467 | | 11 |
| I | 0,0575 | .. | 7 |
| J | 0,0008 |- | 17 |
| K | 0,0049 | -.- | 13 |
| L | 0,0321 | .-.. | 13 |
| M | 0,0198 | -- | 11 |
| N | 0,0574 | -.- | 9 |
| O | 0,0632 | --- | 15 |
| P | 0,0152 | ...- | 15 |
| Q | 0,0008 | ---. | 17 |
| R | 0,0484 | .-. | 11 |
| S | 0,0514 | ...- | 9 |
| T | 0,0796 | - | 7 |
| U | 0,0228 | ...- | 11 |
| V | 0,0083 | ...- | 13 |
| W | 0,0175 | ...- | 13 |
| X | 0,0013 | ...- | 15 |
| Y | 0,0164 | -.-. | 17 |
| Z | 0,0005 | ---. | 15 |
| medzera | 0,1859 | | 6 |

⊗ 5.2.2.2.2 Stavové diagramy a mriežky ⊗

Ak treba na prenos využiť kanál s obmedzením, je nevyhnutné v nejakej forme uchovávať priebežne históriu

predchádzajúcej vstupnej postupnosti určitej dĺžky. Takáto informácia môže byť opísaná stavovým diagramom. Stavový diagram je graf, v ktorom je každá významná udalosť v histórii odlíšená uzlom, ktorý sa nazýva stavom. Označme tieto stavy ako S_0, S_1, \dots, S_{N-1} . Ináč môžeme povedať, že kanál sa nachádza v jednom zo stavov, avšak presnejšie by sme mali povedať, že história vstupu je v tomto stave. Hrany a sledy v grafe ukazujú ako sa môžu meniť stavy v čase. V každom stave možno ako nasledujúci symbol preniesť len niektorý z podmnožiny množiny $\{a_0, \dots, a_{j-1}\}$. V nasledujúcom časovom okamihu je prenesený jeden z dovolených symbolov a kanál prejde do iného stavu v závislosti od starého stavu a od práve prenášaného symbolu. Jednoduchou ilustráciou stavového diagramu je obr. 5.27., ktorý znázorňuje telegrafný kanál. Stav S_0 špecifikuje, že ako posledný symbol bola prenesená medzera a stav S_1 hovorí, že ako posledný symbol nebola prenesená medzera. V stave S_0 môže nasledovať len bodka alebo čiarka a stav sa vždy potom zmení. V stave S_1 môže nasledovať ľubovoľný symbol a stav sa zmení, iba ak to bude medzera, inak ostane nezmenený.



- bodka
- čiarka
- medzera medzi písmenami
- medzera medzi slovami

Obr. 5.27. Stavový diagram telegrafného kanála

Iný príklad je na obr. 5.28., na ktorom je stavový diagram binárneho kanála, ktorý nedovoľuje prenos postupnosti obsahujúcej beh viac ako troch opakovaní toho istého symbolu.

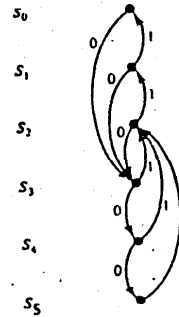
V
 S_0
 S_1
 S_2
 S_3
 S_4
 S_5
 Obr
 ned
 Kaž
 nes
 v s
 zme
 sta
 z k
 -
 ire
 Neb
 leb

Obr
 (0:

áto
ram
aná
S₁,
zo
ia
sa
icí
..
len
vu
u.
rý
ko
ko
ze
i.
i.

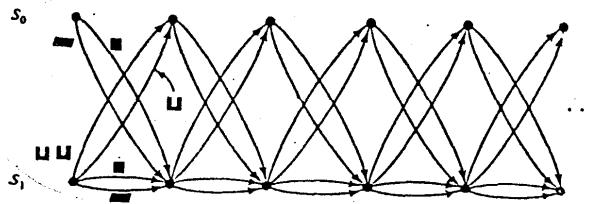
V takomto prípade možno špecifikovať nasledujúcich 6 stavov:

| | |
|----------------|-------|
| S ₀ | 1 1 1 |
| S ₁ | 1 1 |
| S ₂ | 1 |
| S ₃ | 0 |
| S ₄ | 0 0 |
| S ₅ | 0 0 0 |



Obr. 5.28. Stavový diagram dvojkového kanála, ktorý nedovoľuje trojnásobné opakovanie rovnakého symbolu.

Každý stav označuje posledný beh rovnakých symbolov. Keďže sa nesmú vyskytnúť viac ako tri jednotky, resp. nuly za sebou v stave S₀, musí byť ako ďalší symbol prenesená nula a stav sa zmení na S₃. V stave S₅ musí byť prenesená 1 a stav prejde do stavu S₂. V príkladoch, ktoré boli uvedené, možno prejsť z každého stavu do každého iného stavu /niekedy na viac krokov - cez viac hrán/. Kanáľ s grafom tejto vlastnosti sa nazýva ireducibilný kanál, jeho graf ireducibilným stavovým diagramom. Nebudeme sa zaoberať kanálmi, ktoré nie sú ireducibilné, lebo tieto nemajú veľký praktický význam.

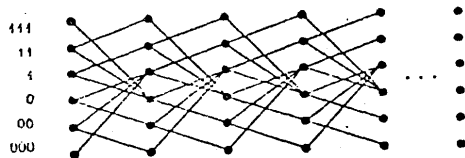


Obr. 5.29. Mriežka telegrafného kanála
(Označenie hrán je analogické ako na obr. 5.27.)

V niektorých prípadoch je namiesto stavového diagramu

výhodnejšie použiť mriežkový diagram /mriežku/. Je to vlastne stavový diagram rozšírený o časovú os, takže pohodlnejšie možno sledovať, ako sa menia stavy v čase. Mriežka pre telegrafný kanál je znázornená na obr. 5.29. Morseovka je vlastne súbor niektorých sledov* po tejto mriežke, pričom každý zodpovedá jednej postupnosti symbolov.

*/ Význam termínov z oblasti teórie grafov, ktorá je využívaná v tejto časti je dobre objasnený napr. v [38].



Obr. 5.30. Mriežka dvojkového kanála s obmedzeniami, ktorého stavový diagram je znázornený na obr. 5.28.

Optimálny kód z hľadiska teórie informácií by mal využiť všetky možné sledy, avšak pravidlo priradenia množiny zdrojových symbolov na množinu sledov by pre takýto optimálny kód bolo veľmi zložité pre praktické použitie. Praktické kódy využívajú iba podmnožinu množiny všetkých možných ciest. Mriežka zobrazená na obr. 5.30. zodpovedá stavovému diagramu na obr. 5.28. Každý stav v ňom opúšťajú dve hrany okrem stavu S_0 a S_5 , ktoré opúšťa vždy iba jedna hrana.

Kanály s obmedzením môžu byť tiež opísané pomocou matice susednosti B. Prvok b_{ij} matice B určuje počet orientovaných hrán (násobnosť hrany) zo stavu S_i do stavu S_j . Pre telegrafný kanál má matica susednosti tvar

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

zo
s
S_j
ob

B :

pri
spe
Vet
Mri
rov
Dok
Nec
res
kto
nej
sle
sta
kon
Prv \sum k
čo
Autsta
pre
sle

tne
zno
fný
bor
edá

Táto matica dáva tú istú informáciu ako obr. 5.30. Dá sa zostrojiť aj matica susednosti na dva kroky. Jej prvok s indexom ij udáva počet rozličných sledov zo stavu S_i do stavu S_j , ktoré pozostávajú z dvoch hrán. Ak preskúmame sledy obsahujúce dve hrany podľa obr. 5.28. dostávame maticu

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

prítom sa dá ukázať, že táto matica je rovná B^2 . Je to špeciálny prípad nasledujúcej všeobecnejšej vety.

Veta 5.1:

Mriežka s maticou susednosti B má maticu susednosti na m krokov rovnú B^m .

Dôkaz:

Nech B_s a B_r s prvkami b_{ij}^s a b_{ij}^r sú matice susednosti na s , resp. r krokov. Každý sled dĺžky $s + r$ (obsahujúci $s + r$ hrán), ktorý začína v stave S_i a končí v stave S_j , musí prejsť cez nejaký stav S_k po s krokoch, pritom do stavu S_k vedie b_{ik}^s sledov začínajúcich v S_i . Zo stavu S_k vedie b_{kj}^r sledov do stavu S_j . Spolu je teda $b_{ik}^s \cdot b_{kj}^r$ sledov začínajúcich v S_i a končiacich v S_j takých, že prechádzajú cez S_k po s hranách. Prvok b_{ij}^m matice susednosti na m krokov je rovný

$$\sum_k b_{ik}^s \cdot b_{kj}^r$$

čo je vlastne súčin matic $B_{s+r} = B_s \cdot B_r$. Keďže s a r sú ľubovoľné $B_m = B^m$.

Matica susednosti medzi stavmi určuje počet sledov medzi stavmi. Neobsahuje údaje o čase trvania symbolov, ktoré sú prenášané v kanáli pri prechode po príslušných, hranách resp. sledoch. Túto informáciu udáva ináč matica, ktorá úplnejšie

ho
it
ny
ny
ly
:
na
a
e
h
ý

opisuje kanál.

Nech $t_{ij,1}$ je čas trvania 1-tého symbolu vstupujúceho do kanála, ktorý je prípustný v stave i a vyvoláva prechod do stavu j . Štruktúra súboru prechodov je daná maticou $B(x)$, ktorej prvky sú definované vzťahom

$$b_{ij}(x) = \sum_1 x^{-t_{ij,1}} \quad (5.78)$$

Prvky matice sú funkciami pomocnej premennej x . Maticu B je možno dostať z matice $B(x)$, pretože platí

$$B = B(1) \quad (5.79)$$

Pre telegrafný kanál takáto matica nadobudne tvar

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & x^{-2} + x^{-4} \\ x^{-3} + x^{-6} & x^{-2} + x^{-4} \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

Maticu budeme nazývať ohodnotenou maticou susednosti. Tak, ako pri neohodnotenej matici, opäť možno zostrojiť maticu $B(x)$ na m krokov, o čom hovorí nasledujúca veta.

Veta 5.2 :

Mriežka s ohodnotenou maticou susednosti $B(x)$ má ohodnotenú maticu susednosti na m krokov rovnú $B(x)^m$.

Dôkaz je analogický ako pre vetu 5.1.

Príkladom pre aplikáciu takejto matice môže poslúžiť telegrafný kanál, pre ktorý platí

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

v ktorej je zrejmé, že zo stavu S_1 do stavu S_1 sa môžeme cez dve hrany dostať ôsmimi sledmi, v ktorých jeden trvá styri, jeden trvá päť, dva trvajú šesť, jeden trvá sedem, dva trvajú

osem a jeden trvá desať jednotiek času, resp. charakteristických intervalov.

do
do
x).

5.2.2.2.3 Kapacita diskrétného bezsumového kanála s obmedzením

78) Otázka, ktorou sa budeme teraz zaoberať je ako určiť kapacitu kanála s obmedzeniami. Odpoveď možno získať na základe takejto definície kapacity

je

Definícia:

Kapacita C (v bitoch za sekundu) diskrétného bezsumového kanála je daná vzťahom

79)

$$C = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(\tau)}{\tau} \quad [bit/s] \quad (5.82)$$

kde $M(\tau)$ je počet dovolených postupností, ktoré trvajú čas τ .

80)

Definícia nehovorí o tom, či má postupnosť začínať v určitom stave, alebo či môže začínať v ľubovoľnom stave. Pre ireducibilný kanál to ani nie je podstatné, pretože po prejdení niekoľkých hrán kanál môže prejsť z ľubovoľného stavu do ľubovoľného iného stavu. Počet hrán, ktorý je na to potrebný je v limite zanedbateľný, keďže $\tau \rightarrow \infty$. Kapacitu možno tiež určiť v jednotkách bit na vstupný symbol, a to v tom prípade, ak majú všetky symboly rovnaký čas trvania. Kapacita diskrétného bezsumového kanála so symbolmi rovnakého trvania v bitoch na symbol je daná vzťahom

ako

na

tenú

afný

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(n)}{n} \quad [bit/symbol] \quad (5.83)$$

81)

príčom $M(n)$ je počet dovolených postupností dĺžky n . V prípade bezsumového kanála bez obmedzení s q symbolmi $M(n) = q^n$ a kapacita v takomto prípade je $\log_2 q$. Ak $q = 2$, kapacita je 1 bit na symbol (niekedy sa v literatúre potom kanálový symbol označuje ako bit, čo však môže viesť k nedorozumeniam). V praktických prípadoch bude limita v definičných vzťahoch pre kapacitu mať konečnú hodnotu. Z definície je zrejmé, že pre veľké hodnoty možno za čas τ preniesť kanálom približne $2^{C\tau}$

cez
yri.
vajú

správ. Jednoduchšie môžeme povedať, že cez kanál možno preniesť C bitov za sekundu. Inými slovami ľubovoľné slovo údajov pozostávajúce z binárnych symbolov dĺžky $C\tau$ bitov môže byť prenesené ak priradíme každé z $2^{C\tau}$ údajových slov jednej z $2^{C\tau}$ prípustných kanálových postupností. Dostaneme tak súpis údajových slov a súpis kódových slov (t.j. tých, ktoré vstupujú do diskretného kanála, resp. modulátora). V praxi, ak hodnota $C\tau$ je veľká nemožno takyto súpis prakticky pre jeho veľký objem zaznamenať. Jedinou možnosťou je pokúsiť sa nahradiť tabuľky zodpovedajúce súpisom nejakou vhodnou výpočtovou procedúrou, alebo zostaviť dlhú správu z malých kúskov. Kapacita ďalekopisného kanála je 5 bitov za sekundu, čo je v súlade s intuitívnym predpokladom. Situácia je však zložitejšia, ak sa symboly vyznačujú rôznymi časmi trvania, alebo ak kanál kladie obmedzenia na prenášané postupnosti, ako je to napr. pri telegrafnom kanáli. Ak majú všetky symboly zhodný čas trvania, možno na určenie kapacity použiť maticu B^n . Ak zvolíme počet hrán n dostatočne veľké, môžeme približne určiť počet sledov dĺžky n a odhadnúť kapacitu. Počet sledov dĺžky n je rovný sume všetkých prvkov B^n . Ak sa kanál vyznačuje obmedzeniami a nachádza sa v počiatočnom stave, nemožno všetky sledy použiť ako kódové slová. Celkový počet kódových slov nemôže byť väčší ako celkový počet sledov, z čoho vyplýva horná hranica daná vzťahom

$$M(n) \leq \sum_{i,j} b_{ij}^n \quad (5.84)$$

príčom b_{ij}^n je prvkom matice B^n s indexami ij . Na druhej strane kódové slová, ktoré končia v stave S_i , nemôžu byť vždy spojené do kaskády s kódovými slovami, ktoré začínajú v stave S_i . Ak n je dostatočne veľké môžeme urobiť nasledovné zjednodušenie. Spočítame iba sledy začínajúce v stave S_i a končiace v stave S_i , pričom i je ľubovoľné. Prínajhoršom takto nezapočítame niekoľko hrán na začiatku a na konci mriežky, nakoľko zo stavu S_i sa môžeme dostať do ľubovoľného stavu S_k a z ľubovoľného stavu S_k sa môžeme dostať do ľubovoľného stavu S_i . Predpokladáme totiž, že matica B je irreducibilná. Ak n je

veľmi veľké, počet takto vylúčených sledov je zanedbateľný. Na základe týchto úvah môžeme $M(n)$ ohraničiť takto

$$b_{ii}^n \leq M(n) \leq \sum_{i,j} b_{ij}^n \quad (5.85)$$

Pre $C(n) = \frac{1}{n} \log_2 M(n)$ dostávame

$$\frac{1}{n} \log_2 b_{ii}^n \leq C(n) \leq \frac{1}{n} \log_2 \sum_{i,j} b_{ij}^n \quad (5.86)$$

Čím je n väčšie, tým sú obe hranice bližšie k sebe a dávajú presnejší odhad.

5.2.2.2.4 Blokové translačné kódy

Binárny blokový translačný (n, k) - kód s rýchlosťou $\frac{k}{n}$ bitov na kanálový symbol pozostáva z 2^k postupností kanálových symbolov, z ktorých každá má dĺžku bloku n . Tieto postupnosti sa nazývajú kódové slová. Musia vyhovovať obmedzeniam kanála nielen každé samo osebe, ale aj v ľubovoľných dvojiciach spojených za sebou. Jedna z možností ako postupovať pri konštrukcii binárneho blokového translačného (n, k) - kódu, je napísať všetky dvojkové postupnosti dĺžky n , ktoré vyhovujú obmedzeniam. Pretože kódové slová sú prenášané za sebou a pospájané ľubovoľné páry musia tiež vyhovovať obmedzeniam, treba vylúčiť zo súpisu niektoré bloky tak, aby bola splnená aj táto požiadavka. Ak n je veľké v porovnaní s dĺžkou ľubovoľnej zakázanej postupnosti bude takéto zredukovanie počtu slov tvoriť nepatrnú časť zo všetkých kódových slov. Ďalej treba pre zvolené k vybrať 2^k kombinácií, ktoré budú tvoriť využívané kódové slová. Kodér potom podľa pevného predpisu priraduje každej postupnosti (bloku) k informačných bitov jedno z týchto kódových slov s dĺžkov n symbolov. Dekodér vykoná opačné

priradenie. Jednoduchým príkladom je dvojkový (3, 2) - kód, v ktorom nesmú byť behy viac ako dvoch núl. Po určitom úsilí môžeme napísať 5 nasledujúcich kódových slov:

```
0 1 0
0 1 1
1 0 1
1 1 0
1 1 1
```

Je zrejmé, že týchto 5 slov môže byť pospájaných v ľubovoľnom poradí za sebou (aj s opakovaním), a teda vyhovujú obmedzeniam. Na vytvorenie kódu preto možno vybrať ľubovoľnú štvoricu slov a zvoliť potom pevné priradenie, čím je kód zostrojený.

Jedna z možností je nasledujúca

```
0 0 → 0 1 0
0 1 → 0 1 1
1 0 → 1 1 0
1 1 → 1 1 1.
```

Rychlosť takéhoto kódu je 0,667 a je menšia ako kapacita kanála, ktorá je 0,879. Vyššiu rychlosť kódu možno dosiahnuť voľbou väčšej dĺžky bloku.

V prípade, že nie je známy výpočtový algoritmus kódovania, dá sa toto uskutočniť tabuľkovou metódou. k bitov, ktoré kódujeme, môže slúžiť ako adresa pamäti a obsah adresovaného pamäťového miesta bude samotné kódové slovo s dĺžkou n symbolov (bitov). Dekódovanie je realizovateľné analogicky.

Stavy, v ktorých sa môže kanál nachádzať na začiatku bloku a do ktorých sa musí vrátiť na konci bloku, nazveme terminálnymi stavmi. (V niektorých prípadoch je súbor terminálnych stavov totožný s množinou všetkých stavov použitého kanála.) Každé kódové slovo musí byť zostrojené tak, že na jeho konci sa kanál vráti do terminálneho stavu. V ďalšom uvidíme, že terminálne stavy slúžia ako pomôcka pri konštrukcii kódov. Stavy kanála, z ktorých vychádza menej ako 2^k sledov dĺžky n, nebudú mať dost kódových slov, a preto môžu byť vylúčené z množiny terminálnych stavov. Dôsledkom toho je skutočnosť, že žiadne kódové slovo nemôže v týchto stavoch končiť. Nasledujúca veta dáva nevyhnutnú, avšak nie postačujúcu podmienku pre dĺžku bloku, ktorú musí mať kód, aby dosiahol

ur
Ve
Bl
su
Bⁿ
ne
ri
vl
Dö
Ne
ka
po
ri
mu

st
ri
(n
po
Si
ka

kt
na
ob

01

ód, v
úsili

určitú vopred danú rýchlosť.

Veta 5.3:

Blokový (n, k) -kód pre kanál s obmedzeniami opísanou maticou susednosti B neexistuje dovtedy, kým suma každého riadku matice B^n nenadobudne hodnotu väčšiu alebo rovnú 2^k , alebo kým neobsahuje podmaticu získanú vyčiarknutím jej ľubovoľného riadku a príslušného stĺpca, ktorá by spĺňala uvedenú vlastnosť.

Dôkaz:

oInom
niam.
lov a

Nech všetky stavy kanála sú terminálne stavy, to znamená, že kanál môže byť na začiatku bloku v ľubovoľnom stave. Celkový počet sledov dĺžky n vedúcich zo stavu S_i je rovný sume i -tého riadku matice B^n , to ale značí, že hodnota sumy i -tého riadku musí byť väčšia alebo rovná 2^k pre každé i .

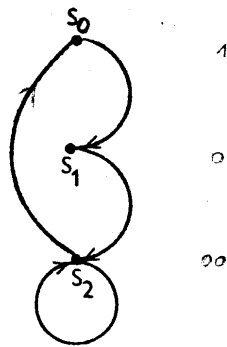
acita
ahnuť

Nech kanál môže byť na začiatku bloku iba v niektorých stavoch, ktoré patria do množiny terminálnych. Po vymazaní riadkov a stĺpcov zodpovedajúcich vylúčeným stavom (neterminálnym) je opäť suma i -tého riadku takto získanej podmatice rovná počtu sledov s dĺžkou n , ktoré vedú zo stavu S_i . Suma riadku musí mať opäť hodnotu väčšiu alebo rovnú 2^k pre každé i , ktoré je indexom terminálneho stavu.

ania,
ktoré
aného
bolov

Jednoduchým príkladom pre aplikáciu je kanál s obmedzením, ktoré tkvie v tom, že za každou jednotkou musia nasledovať najmenej dve nuly. Stavový diagram tohto kanála je na obr. 5.31.

bloku
zveme
súbor
stavov
tak,
alsom
ukcii
ledov
byť
o je
avoch
ujúcu
lahol



Obr. 5.31 Príslušná matica susednosti je nasledujúca

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(n, k) -kód s rýchlosťou $1/2$ musí vyhovovať poslednej vete, pričom n je párne. Budeme počítať B^n postupne pre $n = 2, 3, \dots$ a vždy prekontrolujeme splnenie podmienky z vety 5.3.

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n = 2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow 2^k = 2$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{13} = \begin{bmatrix} 8 & 19 & 41 \\ 41 & 28 & 60 \\ 60 & 41 & 88 \end{bmatrix}$$

$$B^{14} = \begin{bmatrix} 41 & 28 & 60 \\ 60 & 41 & 88 \\ 88 & 60 & 129 \end{bmatrix}$$

$$n = 14 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow 2^k = 2^7 = 128$$

Vidíme, že dĺžka bloku musí byť aspoň 14. V matici B^{14} je súčet každého riadku väčší alebo rovný 2^7 . Podmienka nie je splnená pre žiadnu z matic B, B^2, \dots, B^{13} , ani pre žiadnu ich podmaticu. Pretože v pravom dolnom rohu matice B^{14} je prvok väčší ako 128, môžeme príslušný stav zvoliť ako jediný terminálny stav. Nakoniec treba vybrať 128 sledov, ktoré začínajú a končia v stave S_2 . Dostaneme tak $(14, 7)$ - kód pre

sk

dí

st.

si

vy

op

súl

ak

mo:

Tal

z

tal

v

koc

v

sta

kóc

tkv

čas

(su

vzo

ter

vri

po

má

po:

po:

po:

me

s/

sm

mr

st

se

pr

ne

skúmaný kanál.

vete,
3, ...

Podmienka uvedená vo vete 5.3 nie je postačujúca preto, že dĺžka kódových slov blokového kódu je pevná a nezávisí od stavu, z ktorého kódové slovo vychádza. Preto treba splniť silnejšiu požiadavku, aby z každého terminálneho stavu vychádzal rovnaký súbor 2^k sledov. Ak existuje 2^k sledov, ktoré opúšťajú každý terminálny stav, ale tieto netvoria rovnaké súbory, nemožno skonštruovať jednoduchý blokový (n, k) -kód tak, ako vo vyššie uvedenom príklade. V takejto situácii je však možno vytvoriť tzv. blokovo stavovo závislý (n, k) - kód. Takýto kód je zložený z rozličných blokových (n, k) - kódov, z ktorých každý patrí jednému terminálnemu stavu. Použitie takéhoto kódu si vyžaduje, aby si kodér a dekodér pamätali, v akom stave opustili predchádzajúci blok. Potom v stave S_i kodér a dekodér použijú i -tý blokový kód. Kódové slovo je v takomto prípade vlastne funkciou predchádzajúceho slova a stavu. Stavovo závislý blokový kód je príkladom stromového kódu.

Jedna systematická metóda konštruovania blokových kódov tkvie vo vytváraní kódových slov pozostávajúcich sa z dvoch častí: prefixnej (budeme ju označovať ako prefix) a sufixnej (sufix). Prefix je navrhnutý tak, aby sa pri jeho použití kanál vždy dostal do uzla, ktorý závisí iba od prefixu a nezávisí od terminálneho stavu, v ktorom je kanál na začiatku. Sufix potom vráti kanál do niektorého z terminálnych stavov. Ak je n párne, potom prefix aj sufix majú dĺžku $\frac{n}{2}$. Ak je n nepárne, prefix má dĺžku $\frac{n-1}{2}$ a sufix má dĺžku $\frac{n+1}{2}$. Kódové slovo pozostáva z prefixu, za ktorým nasleduje sufix, ktorý je povolený s týmto prefixom.

súčet
lnená
ich
prvok
ediný
ktoré
d pre

Uvedieme príklad pre konštrukciu kódu pomocou tejto metódy. Nájdeme kódové slová $(5, 3)$ - kódu pre kanál s obmedzeniami, ktorého stavový diagram je na obr. 5.30. Aby sme dostali $(5, 3)$ - kód musíme vybrať 2^3 sledov v príslušnej mriežke, ktoré začínajú a končia v zvolenom súbore terminálnych stavov. Splnenie tejto požiadavky umožní spájať kódové slová za sebou bez narušenia obmedzujúcich podmienok. Musíme nájsť prefixné časti dĺžky 2, ktoré dostanú kanál do stavu nezávisiaceho od počiatočného stavu kanála.

V tabuľke 5.8 sú zapísané stavy, ktoré dosiahne kanál z každého počiatočného stavu po každej dvojici vstupných symbolov. Stavy zodpovedajúce zakázaným vstupným postupnostiam nie sú uvedené. V strede tabuľky je zvýraznené políčko, ktorého riadky pozostávajú z identických stavov.

Tabuľka 5.8

| Vstupné dvojice | P o č i a t o č n é s t a v y | | | | | |
|-----------------|-------------------------------|----------|----------|-----|----|-----|
| | 000 | 00 | 0 | 1 | 11 | 111 |
| 00 | - | - | 000 | 00 | 00 | 00 |
| 01 | - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - |
| 11 | 00 11 | 00 11 | 00 11 | 111 | - | - |

medzi prefixov

Je zrejme, že ak obmedzíme počiatočné stavy na množinu uvedenú v orámovanej časti v strede tabuľky 5.8 a vstupné dvojice symbolov sú tiež podobne obmedzené (tieto dvojice tvoria množinu prefixov), potom každý prefix dostane kanál do stavu, ktorý nezávisí od počiatočného stavu. Stačí, ak poznáme prefix a hneď vieme, v ktorom stave sa bude nachádzať kanál po jeho prenose. Pre každý prefix, v našom prípade 0, 1 a 1, 0 môžeme zapísať do tabuľky prípustné sufíxy, ktoré zanechajú kanál v jednom z terminálnych stavov:

Tabuľka 5.9

| 0 1 | 1 0 |
|-------|-------|
| 1 1 0 | 0 0 1 |
| 1 0 1 | 0 1 0 |
| 1 0 0 | 0 1 1 |
| 0 1 0 | 1 0 1 |
| 0 1 1 | 1 0 0 |
| 0 0 1 | 1 1 0 |

Táto tabuľka nám umožňuje výber kódových slov z 12 možných kombinácií dvojkových symbolov. Aby sme dostali blokový

(5.
z p
z mo
0 0
0 0
0 1
0 1
1 0
1 0
1 1
1 1
Spôs
poda
impl
pouz

5.2.

kódo
ich
stro
nako
kons
pozo
v [3

ého
avy
né.
dky

(5, 3) - kód, môžeme vybrať ľubovoľnú osmicu a zvoliť jedno z priradení kódovanej informácie ku kódovým slovám. Jedna z možností vyzerá takto:

0 0 0 → 0 1 1 1 0
 0 0 1 → 0 1 1 0 1
 0 1 0 → 0 1 1 0 0
 0 1 1 → 0 1 0 1 0
 1 0 0 → 1 0 0 0 1
 1 0 1 → 1 0 0 1 0
 1 1 0 → 1 0 0 1 1
 1 1 1 → 1 0 1 0 1

Spôsobov priradenia je viac. V takýchto prípadoch sa niekedy podarí nájsť kód, ktorý umožňuje zjednodušiť napr. obvodovú implementáciu. Bežne sa na hľadanie optimálneho riešenia používa počítač.

enú
ice
cia
zu,
fix
eho
eme
nál

5.2.2.2.5 Prefixné translačné kódy

Existujú aj translačné kódy, ktoré nemajú pevnú dĺžku kódových slov. Označujú sa ako prefixné translačné kódy. Metódy ich konštrukcie sa zatiaľ zakladajú zväčša na prehľadávaní stromových grafov pomocou počítača. Vzhľadom na tento fakt, nakoľko ich teória zatiaľ nedáva veľmi účinné pomôcky pre ich konštrukciu, nebudeme im v tomto skripte venovať bližšiu pozornosť. Niektoré poznatky o týchto kódoch možno nájsť v [37].

ch
vý

6 Kodulácia

6.1 Parametre dôležité pri výbere kódu a modulácie

Rozumné ciele pri návrhu číslicového systému sú tieto:

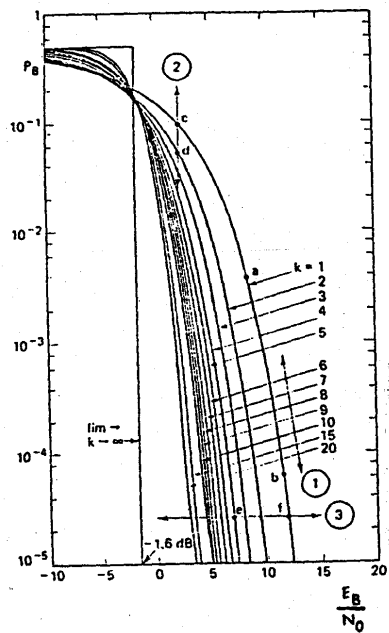
1. Maximalizovať prenosovú rýchlosť $R \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right]$.
2. Minimalizovať pravdepodobnosť chybného bitu P_B .
3. Minimalizovať vyžadovaný výkon alebo pomer energie pripadajúcej na jeden bit k výkonovej spektrálnej hustote sumy $\frac{E_B}{N_0}$.
4. Minimalizovať vyžadované frekvenčné pásmo W .
5. Maximalizovať využiteľnosť systému, zabezpečiť spoľahlivú obsluhu pre maximálny počet užívateľov s minimálnym oneskorením a s maximálnou odolnosťou proti interferenciám.
6. Minimalizovať zložitosť systému, výpočtovú náročnosť a cenu systému.

Dobry návrhár sa usiluje dosiahnuť všetky tieto ciele súčasne. Ciele prvý a druhý sú v rozpore s cieľmi tretím a štvrtým. Ich splnenie žiada súčasne maximalizovať R a minimalizovať P_B , $\frac{E_B}{N_0}$ a W . Sú známe viaceré teoretické obmedzenia a hranice, ktoré vzájomne zväzujú spomínané parametre. Niektoré z nich sú: teoretická minimálna vyžadovaná šírka frekvenčného pásma podľa Nyquistovej podmienky, Shannonova - Hartleyova veta o kapacite a Shannonova hranica, platné predpisy (napr. o umiestnení nosných frekvencií), technologické ohraničenia (napr. stav a úroveň dostupnej súčiastkovej základne), iné požiadavky (napr. výber dráhy telekomunikačnej družice a pod.). Realizovateľné modulácie a kódovania je z hľadiska návrhu najlepšie znázorniť pomocou pracovného bodu na jednom z nasledujúcich grafov. Graf, ktorý udáva P_B ako funkciu $\frac{E_B}{N_0}$, sa nazýva rovina pravdepodobnosti chyby. Graf, ktorý udáva $\frac{W}{C}$ ako funkciu $\frac{E_B}{N_0}$, sa nazýva rovina účinnosti využitia frekvenčného pásma (W označuje frekvenčné

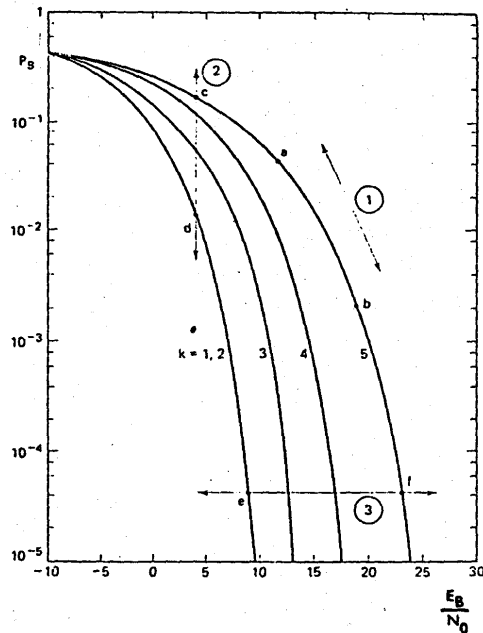
pásmo a C kapacitu kanála).

6.2 Rovina pravdepodobnosti chyby

Na obr. 6.1. je znázornených niekoľko kriviek udávajúcich závislosť P_B na $\frac{E_B}{N_0}$ pre koherentné detekcie ortogonálnych signálov (obr. 6.1.a) a viacstavových fázovo modulovaných signálov (obr. 6.1.b)).



Obr. 6.1.a)



Obr. 6.1.b)

Systémy modulácie, ktoré naraz umožňujú spracovanie k bitov vstupujúcich do modulátora sa označujú ako M -stavové (časť 4.2.5 skript). Modulátor využíva jeden z $M = 2^k$ signálov na reprezentáciu každej správy zlozenej z k bitov. Na obr. 6.1.a) je znázornené potenciálne zlepšenie odolnosti proti chybám (zníženie pravdepodobnosti chyby) za predpokladu zväčšenia hodnoty k a pre modulačné súbory ortogonálnych signálov. Pre ortogonálne množiny signálov, ktoré využívajú napr. pre FSK modulácie, zväčšenie počtu signálov v súbore môže sprevádzať

zníženie pravdepodobnosti chyby P_B , alebo zníženie vyžadovaného pomeru $\frac{E_B}{N_0}$ za cenu nárastu vyžadovaného frekvenčného pásma.

Na obr. 6.1.b) je znázornené potenciálne zhoršenie odolnosti proti chybám (zväčšenie pravdepodobnosti P_B) pre neortogonálne súbory signálov pri zväčšovaní hodnoty k . Pre súbory nekoherentných signálov, ktoré sa používajú napr. pri modulácii MPSK zväčšenie počtu signálov v súbore používanom pre moduláciu môže redukovať nároky na šírku frekvenčného pásma, avšak za cenu zväčšenia P_B , alebo zväčšenia vyžadovaného $\frac{E_B}{N_0}$.

Krivky znázornené na obr. 6.1.a) alebo 6.1.b) sa niekedy nazývajú krivky pravdepodobnosti chyby. V rovine pravdepodobnosti chyby sú na uvedených krivkách znázornené prípustné pracovné body pre príslušné typy modulácie, resp. kódovania. Pre danú prenosovú rýchlosť môže byť každej krivke v tejto rovine pevne priradená určitá minimálna vyžadovaná šírka pásma, preto tieto krivky môžeme tiež označiť ako krivky rovnakej šírky pásma.

Posúvaním kriviek smerom k vertikálnej osi vyžadované prenosové pásmo narastá (v opačnom smere klesá). V prípade, že je zvolený spôsob modulácie a kódovania a je zvolený prípustný pomer $\frac{E_B}{N_0}$, systém je charakterizovaný jedným bodom v rovine pravdepodobnosti chyby. Zmeny pri návrhu sa dajú znázorniť ako zmeny umiestnenia pracovného bodu v tejto rovine. Tieto zmeny sú zjednodušene znázornené šípkami (v zmysle ich rozkladu do smerov, v ktorých má jeden z hlavných parametrov konštantnú hodnotu) na obr. 6.1.a), b).

Pohyb po priamke prechádzajúcej bodmi a a b predstavuje voľbu kompromisu medzi P_B a $\frac{E_B}{N_0}$ (ak W má pevnú hodnotu). Podobne pohyb po priamke 2 prechádzajúcej bodmi c a d predstavuje voľbu kompromisu medzi P_B a W (pričom $\frac{E_B}{N_0}$ má pevnú hodnotu). Nakoniec pohyb pozdĺž priamky 3 prechádzajúcej bodmi e a f predstavuje voľbu kompromisu medzi W a $\frac{E_B}{N_0}$ (pre pevnú

hodnotu P_B). Pohyb pozdĺz priamky 1 sa dá jednoducho realizovať zväčšovaním alebo zmenšovaním $\frac{E_B}{N_0}$. Možno to dosiahnuť napr. zväčšovaním vysielacieho výkonu to znamená - obrazne povedané - "otočiť gombík", aj keď je systém už realizovaný). Pri ostatných voľbách pohyb po 2 alebo 3 treba vždy potrebné určitým spôsobom zmeniť aj spôsob modulácie alebo kódovania a tieto zmeny sa musia uskutočniť počas etapy návrhu systému.

6.3 Nyquistova minimálna šírka pásma

Každý realizovateľný systém, ktorý obsahuje nejaké neideálne filtre bude trpieť medzysymbolovou interferenciou (ISI). Nyquist v [11] ukázal, že teoreticky bez ISI môže byť detekovaných R_s symbolov za sekundu prenášaných v pásme $\frac{R_s}{2}$ [Hz] (Nyquistove pásmo). To je základné teoretické ohraňenie, ktoré obmedzuje návrhára pri úsilí použiť čo možno najmenšie frekvenčné pásmo. V praxi je však v typických prípadoch potrebné R_s [Hz] na prenos rýchlosťou R_s symbolov za sekundu. Inými slovami typická priepustnosť číslicovného prenosového systému bez ISI je 1 symbol za sekundu na 1 Hz.

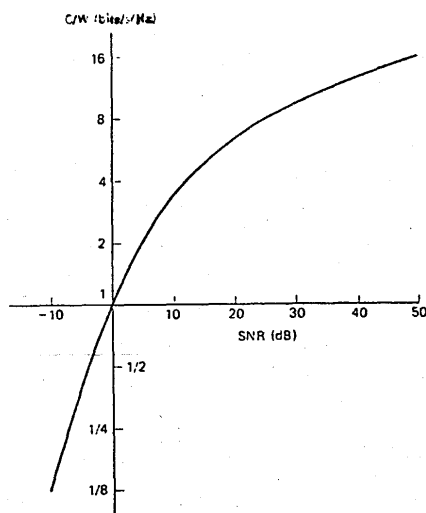
Systém kódovania alebo modulácie môže každému z M symbolov priradiť k bitov, pričom $M = 2^k$. Pre modulácie s pevným frekvenčným pásmom, ako napr. MPSK, s nárastom k rastie prenosová rýchlosť, a preto aj efektívnosť využitia prenosového pásma $\frac{R}{W}$ meraná v bitoch za sekundu na Hz. Napr. premiestnenie pracovného bodu pozdĺz 3 z bodu e do bodu f na obr. 6.1.b) predstavuje voľbu $\frac{E_B}{N_0}$ pre menšie nároky na pásmo. Inými slovami cez to isté pásmo možno prenášať väčšou prenosovou rýchlosťou, a teda rastie $\frac{R}{W}$.

6.4 Shannonova - Hartleyova veta o kapacite

Shannon v [39] ukázal, že kapacita kanála s AWGN je funkciou stredného výkonu prijímaného signálu S , stredného výkonu šumu N a pásma W . Shannonova - Hartleyova veta sa dá vyjadriť vzťahom

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right). \quad (6.1)$$

Ak W je v Hz a \log je pri základe 2 ako v (6.1), kapacita je udaná v bitoch za sekundu. Teoreticky možno prenášať cez kanál s kapacitou C akoukoľvek prenosovou rýchlosťou $R \leq C$ s ľubovoľne malou pravdepodobnosťou chyby za predpokladu, ak použijeme dostatočne komplikovanú metódu kódovania. Pre prenosovú rýchlosť $R > C$ nemožno nájsť kód, ktorý by zabezpečil ľubovoľne malú pravdepodobnosť chyby. V Shannonových prácach je ukázané, že hodnoty S , N a W určujú hranice pre prenosovú rýchlosť, a nie pre pravdepodobnosť chyby.



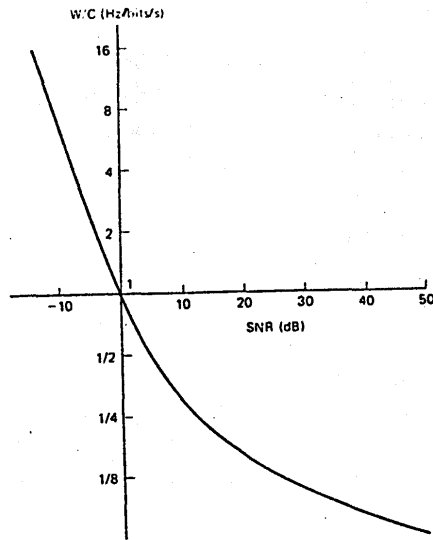
Obr. 6.2

Vyjadruje normalizovanú kapacitu $\frac{C}{W}$ [bit/Hz] ako funkciu pomeru signál - šum SNR.

Shannon použil (6.1) na grafické vyjadrenie hranice dosiahnuteľnej kvality praktických systémov. Tento graf je znázornený na obr. 6.2. Na obr. 6.3. je podobne znázornená závislosť normalizovanej šírky pásma $\frac{W}{C}$ [Hz/bit] ako funkcia SNR. Obr. 6.3. sa niekedy používa na ilustráciu voľby kompromisu v ideálnom kanále. Treba si však uvedomiť, že sa tu nejde o jednoduchý vzťah medzi dvoma veličinami, nakoľko výkon šumu je úmerný šírke pásma

$$N = N_0 W \quad (6.2)$$

(6.1)
 ta je
 kanál
 $\leq C$
 u, ak
 Pre
 pečil
 ch je
 iosová



Obr. 6.3.

Dosadením (6.2) do (6.1) a úpravou dostaneme

$$\frac{C}{W} = \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 W} \right) \quad (6.3)$$

Pre prípad, keď prenosová rýchlosť je rovná kapacite $R = C$, môžeme použiť vzťah (3.9.4) a dostávame

$$\frac{S}{N_0 W} = \frac{E_b}{N_0} \quad (6.4)$$

inkciu

a (6.3) môžeme upraviť takto

ranice
 af je
 orná

$$\frac{C}{W} = \log_2 \left[1 + \frac{E_b}{N_0} \left(\frac{C}{W} \right) \right] \quad (6.5)$$

inkcia
 voľby
 sa tu
 výkon

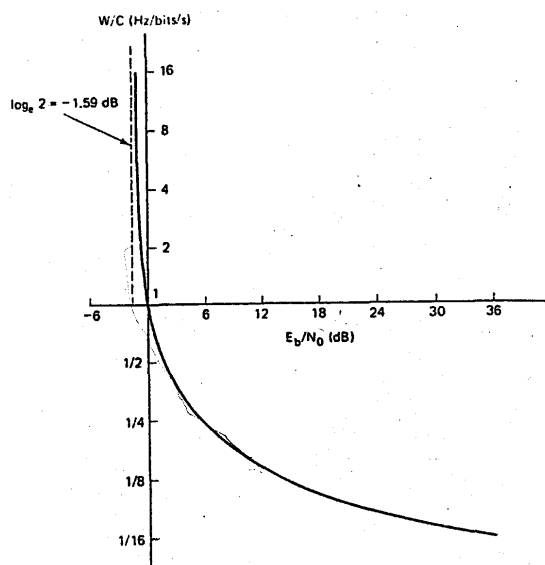
$$2^{\frac{C}{W}} = 1 + \frac{E_b}{N_0} \left(\frac{C}{W} \right)$$

(6.2)

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C} \left(2^{\frac{C}{W}} - 1 \right) \quad (6.6)$$

Na obr. 6.4. je znázornená hodnota $\frac{W}{C}$ ako funkcia $\frac{E_b}{N_0}$ v súlade so vzťahom (6.6).

Asymptotické vlastnosti tejto krivky $\left(\frac{C}{W} \rightarrow 0 \text{ alebo } \frac{C}{W} \rightarrow \infty \right)$ sú uvedené v ďalšej časti.



Obr. 6.4.

6.4.1. Shannonova hranica

Ukážeme, že existuje hraničná hodnota $\frac{E_b}{N_0}$, pod ktorou nie je možná bezchybná komunikácia pri žiadnej rýchlosti prenosu.

Poznámka: E_b označuje energiu pripadajúcu na jeden bit informácie na vstupe prijímača. Prítom bit sa tu chápe ako množstvo informácie a nie ako binárny symbol, ktorý niektorí autori označujú ako binit. Binit môže niest maximálne 1 bit informácie. V tomto skripte binit aj bit v texte označujeme podľa bežnej praxe ako bit, pri indexoch označuje b - bit, B - binit.

$$\frac{E_b}{N_0}$$

Použijeme vzťah

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

vypočítame limitnú hodnotu $\frac{E_b}{N_0}$ takto.

Nech $x = \frac{E_b}{N_0} \left(\frac{C}{W} \right)$, potom zo vzťahu (6.5) vyplýva

$$\frac{C}{W} = x \log_2 (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$1 = \frac{E_b}{N_0} \log_2 (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

v limite, ak $\frac{C}{W} \rightarrow 0$ dostávame

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{\log_2 e} = 0,693 \text{ alebo v dB}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = -1,59 \text{ dB} \quad (6.7)$$

Táto hodnota $\frac{E_b}{N_0}$ sa nazýva Shannonova hranica. Na

nie
osu.
bit
ako
torí
bit
jeme
B -

obr. 6.1.a) Shannonova hranica zodpovedá krivke $P_B = f\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$ v prípade, že $k \rightarrow \infty$. Krivka je nespojitá a prechádza od hodnoty $P_B = 0,5$ k hodnote $P_B = 0$ pri $\frac{E_b}{N_0} = -1,59 \text{ dB}$.

V praxi nemožno dosiahnuť Shannonovu hranicu pretože ak $k \rightarrow \infty$, požiadavky na frekvenčné pásmo a zložitost realizácie systému nekonečne rastú. V Shannonových prácach je teoretický dôkaz existencie kódov, ktoré môžu znížiť P_B alebo znížiť

vyžadovanú hodnotu $\frac{E_B}{N_0}$ z pôvodnej (pre nekódovanú binárnu moduláciu) na hodnotu dosahujúcu hraničnú krivku. Pre $P_B = 10^{-5}$ vyžaduje modulácia BPSK hodnotu $\frac{E_B}{N_0} = 9,6$ dB (ide sa o optimálnu nekódovanú moduláciu). Preto Shannonove práce predpovedali existenciu teoretického zlepšenia o 11,2 dB pri použití kódovania oproti nekódovanej optimálnej modulácii. Dnes je väčšina tohto zlepšenia realizovateľná [40] (približne 7 dB). Optimálny návrh systému sa dá charakterizovať ako hľadanie kompromisov medzi rôznymi hranicami a vzájomne protirečivými cieľmi. Dobrý výber vhodnej modulácie a kódovania je silne motivovaný možnosťou zníženia nákladov na potrebný vysielaný výkon a frekvenčné spektrum.

Efektívna prenosová rýchlosť

Predpokladajme, že vysielame cez binárny symetrický kanál 1000 binárnych symbolov za sekundu a apriórna pravdepodobnosť vyslania nuly a jednotky je rovnaká. Ďalej predpokladajme, že pravdepodobnosť prijatia jednotky je 0,5 bez ohľadu na to, čo bolo vyslané, a to isté platí aj o pravdepodobnosti prijatia nuly. V takomto prípade polovica prijatých symbolov bude správna (len vďaka náhode) a môže sa zdať, že systém prenáša 500 bitov za sekundu, aj keď v skutočnosti neprenáša žiadnu informáciu. Rovnako "dobrý" príjem by sme dostali, ak by sme prijímač odpojili od kanála a nahradili ho náhodným generátorom (hádzanie mince) na vstupe prijímača.

Primeranou korekciou, ktorú treba urobiť, je odpočítať z vysielanej informácie informáciu stratenú v kanáli pri prenose. Shannon v [5] nazval tento korekčný koeficient ekvivokáciou. Ekvivokácia je definovaná ako podmienená entropia správy X, ak poznáme Y, vztahom

$$H(X/Y) = - \sum_{X,Y} P(X,Y) \log_2 P(X/Y) = - \sum_Y P(Y) \sum_X P(X/Y) \log_2 P(X/Y) \quad (6.8)$$

pričom X je pokus vysielania správy a Y je pokus prijatia

nárnu
de sa
práce
3 pri
Dnes
ne 7
danie
ivými
silne
elany

správy. $P(X,Y)$ je úhrnná pravdepodobnosť, že nastane udalosť X a Y a $P(X/Y)$ je podmienená pravdepodobnosť udalosti X za predpokladu, že nastala udalosť Y . Ekvivokáciu si možno predstaviť ako neurčitost správy X za predpokladu prijatia správy Y . Pre bezchybný kanál $H(X/Y) = 0$, pretože ak poznáme Y , máme úplnú istotu o X . Avšak pre kanály s nenulovou pravdepodobnosťou chyby $H(X/Y) > 0$, pretože kanál vnáša neurčitost. Analyzujeme binárnu postupnosť X , v ktorej apriórne pravdepodobnosti sú $P(1) = P(0) = 0,5$, a predpokladajme, že kanál v priemere vnesie jednu chybu na každých 100 symbolov, čiže $P_B = 0,01$. Použitím vzťahu (6.8) vypočítame ekvivokáciu $H(X/Y) = -(1 - P_B) \log_2(1 - P_B) - P_B \log_2 P_B = -0,99 \log_2 0,99 - 0,01 \log_2 0,01 = 0,081$ bit/prijatý symbol. Preto kanál vnáša 0,081 bitu neurčitosti na každý prijatý symbol. Shannon ukázal, že priemerné efektívne množstvo informácie H_{ef} na vstupe prijímača je dané vzťahom

canál
onost
ze
čo
jatia
bude
náša
adnu
sme
rom

$$H_{ef} = H(X) - H(X/Y) \quad (6.9)$$

Pre náš príklad potom efektívna prenosová rýchlosť je

itat
pri
ient
opia
6.8)
atia

$$R_{ef} = R H_{ef} \quad (6.10)$$

t. j. $1000 \cdot 0,0819$ bit/s = 919 bit/s. Poznamenajme, že v prípade, ak $P_B = 0,5$, potom $H(X/Y) = 1$ bit/symbol a $R_{ef} = 0$ bit/s.

6.5. Rovina efektívnosti využitia pásma

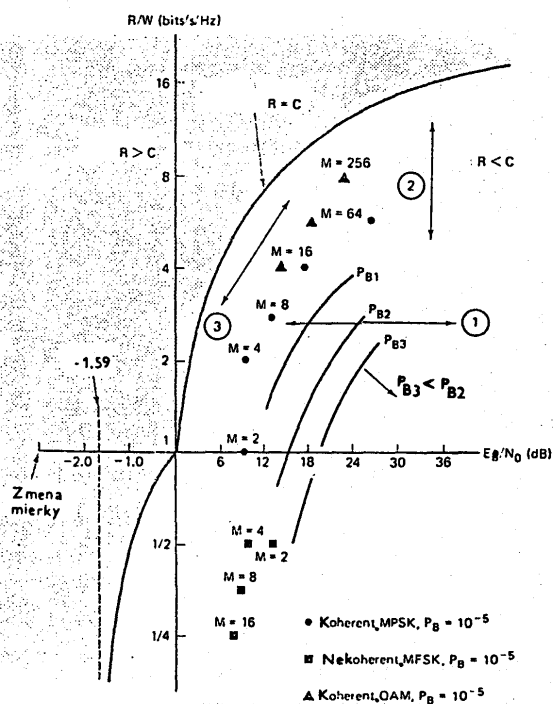
Použitím vzťahu (6.6) môžeme zostrojiť graf $\frac{W}{C}$ [Hz/bit/s] v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$, ako je to znázornené na obr. 6.4. Na tomto grafe vidíme skutočný vzťah medzi výkonom a frekvenčným pásmom. Dá sa ukázať [41], že dobre navrhnuté systémy majú tendenciu pracovať v blízkosti kolena krivky pre $R_p = C$ zostrojenej v tejto rovine. Prakticky používané systémy majú často účinnosť o 10 dB horšiu ako ideálne. Existencia kolena naznačuje, že úsilie zmenšiť potrebné prenosové pásmo

alebo výkon signálu v systéme je vždy vykúpená často ťažko prijateľným zhoršením druhého parametra. Napr. na obr. 6.4. ideálny systém pracujúci pri $\frac{E_B}{N_0} = 1,8$ dB a využívajúci 0,5 Hz/bit/s by potreboval o 20 dB väčšiu hodnotu $\frac{E_B}{N_0}$, aby mohol pracovať v pásme 0,1 Hz/bit/s.

Voľba s opačnou požiadavkou je podobne ťažko prijateľná.

Použitím (6.6) môžeme tiež znázorniť závislosť $\frac{C}{W}$ od $\frac{E_B}{N_0}$. Táto závislosť je znázornená na obr. 6.5. kde je vynesená

$\frac{R_D}{W}$ od $\frac{E_B}{N_0}$, túto rovinu nazývame rovinou účinnosti využitia pásma.



Obr. 6.5.

Os $\frac{R_D}{W}$ označuje množstvo údajov, ktoré môže byť prenesené v určitom frekvenčnom pásme za určitý čas. Dáva preto obraz o

azko
6.4.

jüci

aby

Iná.

$\frac{E_B}{N_0}$

itia

tom, ako dobre je využité frekvenčné pásmo. Krivka prislúchajúca prípadu, keď $R_p = C$, na obr. 6.5. predstavuje hranicu, ktorá oddeľuje oblasť prakticky realizovateľných systémov od oblasti, v ktorej sú systémy nerealizovateľné. Podobne, ako na obr. 6.2. rovina efektívnosti využitia frekvenčného pásma na obr. 6.5. udáva maximálne kvalitatívne ukazovatele, ktoré môžu dosiahnuť realizovateľné systémy. Pretože x-ová os udáva $\frac{E_B}{N_0}$, a nie SNR, obr. 6.5. je užitočnejší pri porovnávaní rozličných systémov modulácie a kódovania ako obr. 6.2.

6.5.1 Účinnosť využitia pásma pri moduláciách MPSK a MFSK

V rovine účinnosti využitia pásma na obr. 6.5. sú znázornené pracovné body pre koherentnú MPSK moduláciu pri pravdepodobnosti chyby 10^{-5} . Predpokladajme, že filtrácia sa uskutočňuje v základnom pásme ideálnym pravouhlým Nyquistovým filtrom. Preto dvojstranné pásmo $W = \frac{1}{T}$, kde T je čas trvania jedného symbolu (charakteristický interval). Efektívnosť využitia pásma $\frac{R_p}{W} = \log_2 M$, kde M je počet symbolov modulačnej abecedy. Pre reálne kanály a signály treba predpokladať, že efektívnosť bude nižšia, keďže dôjde k rozšíreniu potrebného pásma vzhľadom na použitie realizovateľných filtrov. Poznamenajme, že pre MPSK moduláciu hodnota $\frac{R_p}{W}$ rastie so zväčšovaním M. Poloha pracovných bodov pre MPSK v prípade $M = 2$ (BPSK) a $M = 4$ (QPSK) vyžadujú tú istú hodnotu $\frac{E_B}{N_0}$. To znamená, že pre tú istú hodnotu $\frac{E_B}{N_0}$ QPSK má účinnosť 2 bit/s/Hz a BPSK má účinnosť 1 bit/s/Hz. Táto výnimočná vlastnosť je dôsledkom toho, že QPSK je v skutočnosti kompozíciou dvoch BPSK vysielaných na ortogonálnych zložkách nosnej.

Na obr. 6.5. sú v rovine účinnosti využitia pásma znázornené pracovné body pre nekoherentné MFSK modulácie pri pravdepodobnosti chyby 10^{-5} . Predpokladajme, že šírka pásma $W = \frac{M}{T}$, a preto $\frac{R_p}{W} = \frac{k}{M}$. Poznamenajme, že $\frac{R_p}{W}$ klesá s nárastom M.

sené
iz o



alebo
pr
vka

Pracovné body pre MFSK svedčia o tom, že tieto modulácie (BFSK) a $M = 4$ BQFSK dosahujú tú istú účinnosť, a, aj keď BFSK vyžaduje väčšiu hodnotu $\frac{E_B}{N_0}$ pre tú istú podobnosť chyby. Účinnosť využitia pásma sa mení v závislosti od indexu modulácie (dĺžka intervalov medzi signálmi v Hz delená prenosovou rýchlosťou). Za predpokladu, že pre každý signál MFSK treba zväčšiť pásmo o rovnaký diel je z obrázka zrejmé, že pre $M = 2$ je účinnosť využitia pásma $\frac{R_p}{W} = 1 \text{ bit/s/2Hz}$ t.j. $(\frac{1}{2})$ a pre $M = 4$ je $\frac{R_p}{W} = 2 \text{ bit/s/4 Hz}$, t.j. $(\frac{1}{2})$.

Pracovné body pre koherentnú QAM moduláciu sú tiež znázornené na obr. 6.5. Spomedzi zobrazených druhov modulácie QAM jasne najefektívnejšie využíva frekvenčné pásmo. Detailnejšie sa ňou budeme zaoberať v časti 6.9.3.

6.5.2 Analógie medzi rovinami pravdepodobnosti chyby a rovinou efektívnosti využitia pásma

Rovina efektívnosti využitia pásma znázornenej na obr. 6.5. je analogická ako rovina zobrazená na obr. 6.1. Shannonova hranica na obr. 6.1. zodpovedá hraničnej kapacite na obr. 6.5. Krivky označené ako P_{B1} , P_{B2} , P_{B3} na obr. 6.5. sú hypoteticky skonštruované pre nejaké typy modulácie a kódovania. Pritom krivke P_{B1} zodpovedá najväčšia pravdepodobnosť chyby a krivke P_{B3} najmenšia. Tieto krivky by sme mohli označiť ako ekvipravdepodobnostné. Všeobecný smer posunu kriviek, pri ktorom dochádza k zlepšeniu P_B , je zrejmý na obr. 6.5. Podobne, ako sme analyzovali voľbu P_B , $\frac{E_B}{N_0}$ a W v rovine pravdepodobnosti chyby, môžeme to urobiť aj v rovine účinnosti využitia pásma. Možné voľby kompromisov medzi jednotlivými kritériami kvality sa dajú najnázornejšie sledovať v smeroch označených šípkami. Pohyb pracovného bodu pozdĺž priamky 1 sa dá charakterizovať ako voľba kompromisu medzi P_B a $\frac{E_B}{N_0}$, pričom $\frac{R_p}{W}$ je pevné.

ácie
nost
e tú
mení
edzi
, ze
l je
ásma
Hz,

Podobne premiestňovanie pracovného bodu pozdĺž priamky 2 zodpovedá voľbe kompromisu medzi P_B a W (alebo $\frac{R_p}{W}$), pričom $\frac{E_B}{N_0}$ má pevnú hodnotu. Nakoniec zmena umiestnenia pracovného bodu pozdĺž priamky 3 predstavuje voľbu kompromisu medzi W (alebo $\frac{R_p}{W}$) a $\frac{E_B}{N_0}$, pričom P_B má konštantnú hodnotu. Ako na obr. 6.1., tak aj na obr. 6.6. zmeny pozdĺž priamky 1 môžu byť vyvolené zväčšením alebo zmenšením veľkosti $\frac{E_B}{N_0}$. Pozdĺž priamky 2 a 3 treba meniť systém modulácie alebo kódovania.

tiez
ácie
smo.

Dve základné východiskové "suroviny", ktoré sa spotrebúvajú v komunikačnom systéme, sú výkon potrebný na prenos a prenosové pásmo. V mnohých systémoch je jedna z nich často podstatne drahšia ako druhá, a preto ich môžeme tiež podľa toho roztriediť na:

a

- systémy s obmedzeným výkonom - v nich sa dá dosiahnuť kódovaním úspora výkonu na úkor pásma;
- systémy s obmedzeným pásmom, v ktorých možno použiť spektrálne účinné metódy modulácie na úsporu pásma na úkor výkonu.

obr.
nova
6.5.
ický

6.6. Systémy s obmedzeným výkonom

itom
ivke
ako
pri
bne,
vine

V systémoch s obmedzeným výkonom možno usporiť výkon na úkor frekvenčného pásma (napr. v kozmických kanáloch). Možno pre ne zvoliť dve stratégie zlepšenia:

osti
ými
roch
l sa
ičom

1. Zlepšiť (zmenšiť) P_B použitím širšieho pásma pri tom istom pomere $\frac{E_B}{N_0}$.

2. Zmenšiť potrebné $\frac{E_B}{N_0}$ použitím širšieho pásma pre pevnú hodnotu P_B .

Pre rozhodovania v rámci týchto stratégií je užitočné použiť rovinu pravdepodobnosti chyby obr. 6.1. Môžeme pomocou nej zistiť, či navrhovaný spôsob modulácie alebo kódovania poskytne vyžadované zlepšenie $\frac{E_B}{N_0}$ pre príslušný kanál a pre špecifikovanú hodnotu P_B (alebo či modulácia, prípadne kód

poskytnú vyžadované zlepšenie P_B pre danú hodnotu $\frac{E_B}{N_0}$.

6.7. Systémy s obmedzeným pásmom

Systém, ktorý umožňuje prenos $\log_2 M$ bitov za T sekúnd pri použití pásma W Hz využíva pásmo s účinnosťou $\frac{R_p}{W} = \frac{\log_2 M}{WT}$ [bit/s/Hz]. Z tohto vzťahu je zrejmé, že čím menší je súčin WT , tým účinnejšie systém využíva frekvenčné pásmo. Signály s malou hodnotou WT sa najčastejšie používajú v systémoch, v ktorých je pásmo obmedzené a zvýšenie výkonu je do určitej miery prípustné. V takomto prípade je často cieľom maximalizovať prenosovú rýchlosť cez kanál s obmedzeným frekvenčným pásmom na úkor zväčšenia $\frac{E_B}{N_0}$ (pri súčasnom udržaní hodnoty P_B na zvolenej úrovni). Kritériom kvality takýchto systémov je účinnosť využitia frekvenčného pásma a najužitočnejšia pre príslušné analýzy pri ich návrhu je rovina účinnosti využitia frekvenčného pásma (obr. 6.5.). Na obr. 6.5. sú znázornené dve oblasti: oblasť s obmedzeným pásmom a oblasť s obmedzeným výkonom. Medzi týmito oblasťami je určitý rozdiel. Pre oblasť s obmedzeným pásmom možno dosiahnuť veľkú hodnotu $\frac{R_p}{W}$, ale s tým, ako rastie $\frac{E_B}{N_0}$, krivka hraničnej kapacity sa vyrovnáva a je potrebný čoraz väčší nárast $\frac{E_B}{N_0}$ na to isté zlepšenie $\frac{R_p}{W}$.

Podobne aj v oblasti s obmedzením výkonu úspora $\frac{E_B}{N_0}$ vyžaduje postupne čoraz výraznejšie znižovanie hodnoty $\frac{R_p}{W}$.

6.8 Výber modulácie a kódovania

Obr. 6.6. je užitočný na ilustráciu analógií medzi dvoma rovinami, ktorými sme sa vyššie zaoberali (obr. 6.1 a 6.5.). Obr. 6.6a je kópiou obr. 6.1. a obr. 6.6.b) je kópiou 6.6. až na to, že mierky na osiach sú zvolené tak, aby obrázky vyzerali symetricky. Šípky na obrázkoch, znázorňujúce smery možných zmien

pr
kt
pr

G
C
F
G: V
C: P
F: F

G
C
F

Ob

Pr

vý

pc

ob

vy

k

úč

a:

(

st

4

v

r

s

p

u

P

s

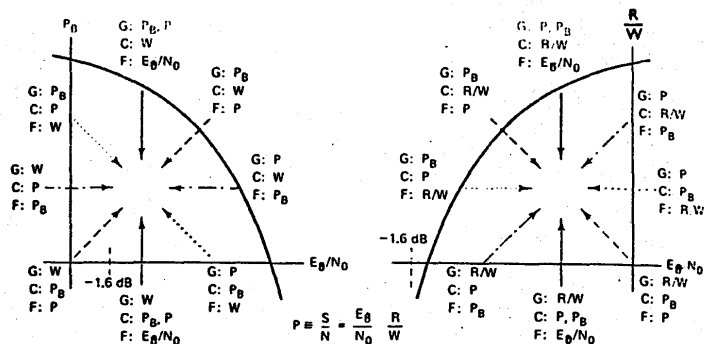
k

u

pracovného bodu, sú označené pomocou príslušného parametra, ktorý sa pri premiestňovaní pracovného bodu pozdĺž súpky mení, pričom: G: označuje zlepšovaný parameter (zisk - gain),

C: cena (zhoršovaný parameter),

F: pevná hodnota (parameter, ktorý sa nemení).



Obr. 6.6.a)

Obr. 6.6.b)

Pritom parametre, ktoré sa zúčastňujú ako hlavné na tomto výbere, sú P_B , W , $\frac{R}{W}$ a P -výkon (alebo $\frac{S}{N}$). Práve tak, ako posun pracovného bodu smerom k Shannonovej hranici na obr. 6.6.a) vyvoláva zlepšenie P_B alebo zníženie vyžadovaného výkonu na úkor pásma, aj posun pracovného bodu smerom k hraničnej kapacite na obr. 6.6.b) vyvoláva zlepšenie účinnosti využitia pásma na úkor zväčšenia vyžadovaného výkonu alebo zhoršenia P_B .

Najčastejšie sa pri návrhu predpokladá pevná hodnota P_B (daná systémovými požiadavkami). Preto najzaujímavejšie smery sú tie, ktorých súpky znázornené ($F : P_B$) na obr. 6.6. sú práve 4 takéto súpky: dve v rovine pravdepodobnosti chyby a dve v rovine účinnosti využitia frekvenčného pásma. Roviny reprezentujú dva možné pohľady na niektoré kľúčové parametre systému - každá rovina zvyrazňuje trochu odlišné aspekty problému návrhu. Rovina pravdepodobnosti chyby sa javí ako užitočnejšia pre systémy s obmedzeným výkonom, v ktorej, ak sa pohybujeme od krivky ku krivke, šírka vyžadovaného pásma je skrytá, kým pravdepodobnosť chyby je jasne znázornená vo vzťahu k $\frac{E_B}{N_0}$. Rovina účinnosti využitia pásma sa zase javí ako užitočnejšia pre systémy s obmedzeným pásmom. V nej, ak sa

pohybujeme od krivky ku krivke, pravdepodobnosť chyby P_B je skrytá, avšak požiadavky na frekvenčné pásmo sú znázornené explicitne v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$.

Myšlienky, ktoré sme tu heuristicky prezentovali na jednoduchých príkladoch ortogonálnych a viacstavových fázach modulácií, by mali dať určitý pohľad na návrh systémov, hlavne z hľadiska P_B , W , $\frac{E_B}{N_0}$. Sú užitočné pre väčšinu spôsobov kódovania a modulácií. Existujú však určité výnimky. Pre niektoré kódy a kombinované spôsoby kódovania a modulácie sa sledované krivky nesprávajú podľa predpokladov, ktoré platili pre analyzované príklady. Dôvody sú skryté vo vlastnostiach kódov (v ich sile a vlastnosti expanzie frekvenčného pásma niektorých kódov). V oblasti mriezkovo kódovaných modulácií analyzovaných v časti 6.10.6 sa dajú nájsť kódy, ktoré dosahujú zisk kódovania bez akejkoľvek expanzie frekvenčného pásma. Krivky hodnotiace kvalitu takýchto kódov sa tiež správajú ináč ako krivky väčšiny metód kódovania a modulácie, ktorými sme sa zaoberali dosiaľ.

6.9 Modulácia s efektívnym využitím frekvenčného pásma

Hlavným cieľom pri použití modulácií, ktorými sa teraz budeme zaoberať, je dosiahnuť maximálnu efektívnosť využitia pásma [42]. Niektoré systémy musia okrem požiadavky na efektívne využitie frekvenčného pásma spĺňať aj ďalšie požiadavky. Napr. pri moduláciách pre satelitné systémy treba okrem efektívnosti využitia pásma brať ohľad aj na vysokú nelinearitu transpondérov, ktorá si vyžaduje moduláciu s konštantnou obálkou. Je to preto, že nelineárny transpondér produkuje prídavné postranné pásmo, ak ním prechádza signál, v ktorom dochádza k fluktuácii amplitúdy. Tieto postranné pásma rusia informáciu prechádzajúcu samotným transpondérom tým, že príslušné signály strácajú - sú ochudobnené - o časť výkonu transpondéra a tiež môžu spôsobiť interferenciu s blízкими kanálmi, alebo dokonca inými telekomunikačnými zariadeniami.

Je
ené

na
ach
vne

bov
Pre
sa
ili
ach
sma
cif
ujú
ma.
áč
sa

V ďalšom sa budeme zaoberať dvoma príkladmi modulácií s konštantnou obálkou. Sú to modulácia OQPSK (ofsetová QPSK) a modulácia MSK (minimum shift keying), ktoré sú vhodné pre systémy s nelineárnymi transpondérmi.

6.9.1 QPSK a OQPSK

Na obr. 6.7. je znázornený rozklad typickej postupnosti impulzov pri QPSK modulácii. Na obr. 6.7.a) je znázornená pôvodná postupnosť údajov $d_k(t) = d_0, d_1, \dots$ vyjadrená pomocou bipolárnych impulzov, t. j. $d_k(t) \in \{+1, -1\}$. Táto pôvodná postupnosť je rozložená na dve postupnosti $d_I(t)$ a $d_Q(t)$ (I z angl. in phase a Q z angl. quadrature) takto

$$d_I(t) = d_0, d_2, d_4 \dots \quad (\text{párne}) \quad (6.11)$$

$$d_Q(t) = d_1, d_3, d_5 \dots \quad (\text{nepárne})$$

Každá z nich má polovičnú rýchlosť ako pôvodná postupnosť. Konvenčný spôsob realizácie signálu QPSK spočíva v tom, že sa amplitúdovo namoduluje $d_I(t)$ na kosínusovku a $d_Q(t)$ na sínusovku

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} d_I(t) \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} d_Q(t) \sin\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (6.12)$$

Použitím trigonometrických vzťahov dostávame

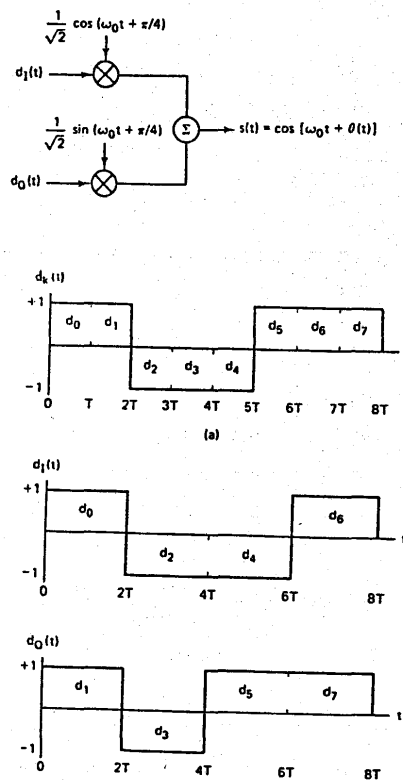
$$s(t) = \cos [2\pi f_0 t + \theta(t)] \quad (6.15)$$

Princíp modulátora QPSK je znázornený na obr. 6.7.c). Postupnosť impulzov $d_I(t)$ amplitúdovo moduluje kosínusovku hodnotami +1 alebo -1. To je ale to isté, ako keby sme posúvali fázu kosínusovky o 0 alebo π , a preto výsledkom je signál BPSK. Podobne postupnosť impulzov $d_Q(t)$ moduluje sínusovku a výsledkom tejto modulácie je signál BPSK ortogonálny k tomu,

raz
tia
na
sie
eba
okú
ciu
dér
ál,
sma
ze
konu
ymi
mi.

ktorý vznikol z kosínusovky. Sčítaním oboch ortogonálnych signálov dostaneme signál QPSK. Hodnota $\theta(t)$ bude korešpondovať s jednou zo štyroch možných kombinácií hodnôt $d_I(t)$ a $d_Q(t)$ vo vzťahu (6.12), $\theta(t) \in \{0^\circ, +90^\circ, -90^\circ, 180^\circ\}$. Výsledný vektor signálu je znázornený na obr. 6.8. Pretože $\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4})$ a $\sin(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4})$ sú ortogonálne. Uvedené dva signály môžu byť detekované oddelene.

Ofsetová QPSK modulácia (OQPSK) sa dá tiež opísať vzťahom (6.12) a (6.13). Rozdiel medzi QPSK a OQPSK tkvie len v posunutí "rozsynchronizovaní" dvoch zložkových signálov v základnom pásme. Z obr. 6.7. je zrejmé, že čas trvania každého pôvodného impulzu je T (obr. 6.7.a)), a preto čas



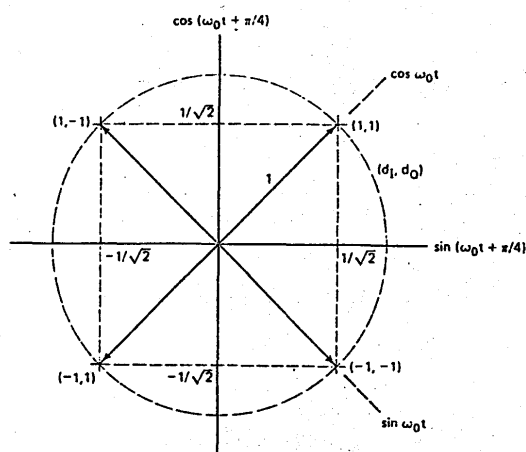
Obr. 6.7.

ných
ovat
) vo
ktor
-) a

byť

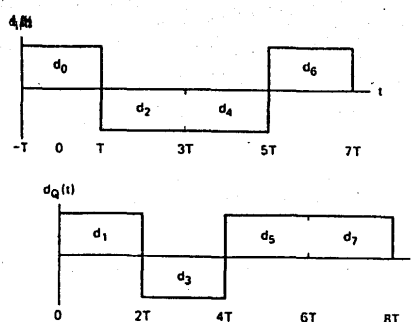
ahom
len
álov
ania
čas

trvania každého impulzu v zložkových signáloch bude $2T$. Pri standardnej QPSK postupnosti párných a nepárnych impulzov sú obe vysielané rýchlosťou $\frac{1}{2T}$ a sú zosynchronizované, takže ich charakteristické okamihy sa môžu stretnúť v tých istých časových okamihoch.



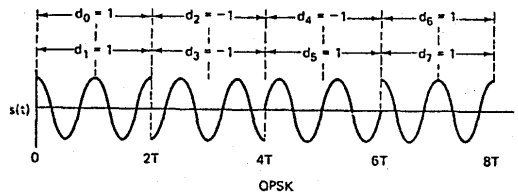
Obr. 6.8.

V prípade OQPSK, ktorú niekedy v literatúre nazývajú staggered QPSK (SQPSK), je rozklad signálu úplne rovnaký ako pri QPSK, ale rozdiel je v taktovaní postupností $d_I(t)$ a $d_Q(t)$, ktoré sú posunuté tak, že obe postupnosti sú rozsynchronizované alebo ináč povedané zosynchronizované s posunutím presne o čas T . Toto posunutie (ofset) je znázornené na obr. 6.9.

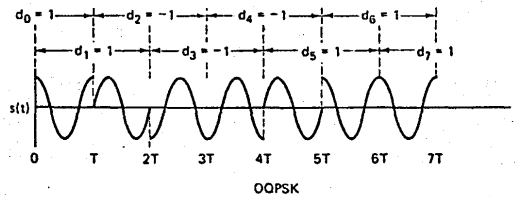


Obr. 6.9.

Pri standardnej QPSK vďaka spolupôsobeniu charakteristických okamihov $d_I(t)$ a $d_Q(t)$ v tých istých časových okamihoch sa fáza môže meniť len raz za $2T$ sekúnd. Fáza nosnej počas $2T$ s môže nadobudnúť ľubovoľnú zo štyroch prípustných hodnôt v závislosti od hodnôt $d_I(t)$ a $d_Q(t)$, obr. 6.8. V nasledujúcich $2T$ s môže ostať fáza rovnaká, a to v prípade, že sa nemení ani hodnota $d_I(t)$, ani hodnota $d_Q(t)$. Ak sa zmení len jedna z nich, dôjde k zmene fázy o $\pm 90^\circ$. V prípade, že sa zmenia obe hodnoty, fáza sa zmení o 180° .



Obr. 6.10.a)



Obr. 6.10.b)

Na obr. 6.10.a) je znázornený typický prípad QPSK signálu pre rovnaký príklad ako na obr. 6.7. Ak takýto QPSK signál bude filtrovaný s cieľom redukovať jeho postranné pásma, stratí vlastnosť konštantnosti obálky a zmena fázy o 180° vyvolá nulovú hodnotu obálky, obr. 6.10.a). Tento efekt, ako sme už spomínali, je nežiadúci pri prechode takéhoto signálu nelineárnymi transpondérmi (zosilňovačmi).

V prípade OQPSK postupnosti impulzov $d_I(t)$ a $d_Q(t)$ sú vzájomne posunuté, a preto nemôžu meniť obe súčasne fázu nosnej. Tým je odstránená možnosť fázových skokov o 180° , keďže naraz sa môže meniť len jedna zo zložkových postupností. Zmeny fázy nosnej sú obmedzené na množinu $\{0^\circ, \pm 90^\circ\}$ a k týmto zmenám môže dochádzať raz za T s. Typický signál OQPSK je znázornený na obr. 6.10.b) pre tú istú správu ako na obr. 6.9.

Po filtrácii, ktorá ohraničuje pásmo dochádza pri signáli OQPSK k miernemu "prepadnutiu" obálky v okamihoch, kedy dochádza k zmenám o $\pm 90^\circ$, avšak obálka neklesne na nulu, pretože boli odstránené skoky o 180° . Ak takýto signál ďalej postupuje do nelineárneho transpondéra, poklesy obálky sú odstránené, avšak vysokofrekvenčné zložky spojené s týmito prepadnutiami obálky nie sú potlačené, a preto interferencia s inými kanálmi nie je celkom odstránená [43].

6.9.2 Modulácia s minimálnym posunom (MSK)

Hlavnú výhodu OQPSK oproti QPSK, ktorá je v potlačení možnosti interferencie, možno ešte ďalej vylepšiť, ak celkom odstránime fázové skoky. Táto skutočnosť bola motiváciou pre zavedenie modulácií so spojitou fázou CPM (continuous phase modulation). MSK je príkladom jednej takejto CPM modulácie [43, 44].

Na moduláciu MSK sa možno pozerať buď ako na špeciálny prípad CPFSK (continuous phase frequency shift keying), alebo ako na špeciálny prípad OQPSK s váhovaním sínusových symbolov. Ak sa na ňu budeme pozerať ako na CPFSK, môžeme signál MSK vyjadriť nasledujúcim vzťahom [45]

$$s(t) = \cos\left[2\pi\left(f_0 + \frac{d_k}{4T}\right)t + x_k\right]; \quad kT < t < (k+1)T, \quad (6.14)$$

kde f_0 je frekvencia nosnej, $d_k = \pm 1$ reprezentuje bipolárny signál, vysielaný rýchlosťou $R = \frac{1}{T}$ a x_k je fázová konštanta, ktorá platí v k -tom binárnom intervale údajov.

Poznamenajme, že pre $d_k = 1$ má vysielaná frekvencia hodnotu $f_0 + \frac{1}{4T}$ a pre $d_k = -1$ má vysielaná frekvencia hodnotu $f_0 - \frac{1}{4T}$. Intervaly medzi frekvenciami signálov sú preto pri MSK polovičné v porovnaní s intervalmi pri nekoherentne demodulovaných ortogonálnych FSK signáloch. Preto bola táto modulácia nazvaná MSK (minimum shift keying). Počas každého intervalu T s hodnota x_k je konštantná, pričom hodnota $x_k = 0$ alebo $x_k = \pi$, podľa toho, ako je to práve potrebné na splnenie požiadavky spojitej fázy v časových okamihoch $t = kT$. Táto požiadavka sa odráža v nasledujúcom rekurzívnom obmedzení

pre x_k

$$x_k = [x_{k-1} + \frac{\pi k}{2} (d_{k-1} - d_k)] \bmod 2\pi \quad (6.15)$$

Vzťah (6.14) možno vyjadriť takto

$$s(t) = a_k \cos \frac{\pi t}{2T} \cos 2\pi f_0 t - b_k \sin \frac{\pi t}{2T} \sin 2\pi f_0 t; \quad (6.16)$$

$kT < t < (k+1)T$

pričom

$$a_k = \cos x_k = \pm 1, \quad b_k = d_k \cos x_k = \pm 1 \quad (6.17)$$

Pritom zložka $a_k \cos \frac{\pi t}{2T} \cos 2\pi f_0 t$ sa nazýva I zložka a v nej $\cos 2\pi f_0 t$ predstavuje nosnú a $\cos \frac{\pi t}{2T}$ sa označuje ako váhovanie sínusového symbolu a člen a_k je závislý od údajov. Podobne zložka Q (quadrature) je definovaná vzťahom

$b_k \sin \frac{\pi t}{2T} \sin 2\pi f_0 t$, pričom $\sin 2\pi f_0 t$ je kvadratickou zložkou nosnej a $\sin \frac{\pi t}{2T}$ sa dá označiť ako váhovanie sínusového symbolu a b_k je člen závislý od údajov.

Môže sa zdať, že členy a_k a b_k sa môžu meniť každých T s, keďže údaje zo zdroja d_k sa môžu meniť každých T s. Avšak vďaka obmedzeniu kladenému na fázu (v zmysle požiadavky, aby bola spojitá) sa člen a_k môže meniť iba v okamihu, kedy $\cos \frac{\pi t}{2T}$ prechádza nulovou hodnotou a b_k môže meniť hodnotu, keď $\sin \frac{\pi t}{2T}$ prechádza nulovou hodnotou. Preto je váhovanie symbolu, či už v zložke I alebo v zložke Q, impulzom zodpovedajúcim sínusovke za pol periódy s trvaním 2T s, pričom znamienko pred ňou sa striedavo mení. Podobne ako v prípade OQPSK, sú zložky I a Q vzájomne posunuté o T s.

Poznamenajme, že x_k vo vzťahu (6.15) je funkciou rozdielu medzi predchádzajúcim bitom údajov a aktuálnym bitom údajov (diferenciálne kódovanie). Preto aj členy a_k a b_k vo vzťahu (6.16) môžu byť označené ako diferenciálne zakódované zložky d_k .

Keďže údaje d_k sú vzájomne nezávislé, aj znamienka impulzov v zložkách I a Q v každom intervale impulzov 2T sekúnd sú nezávislé. Preto, ak sa pozeráme na túto moduláciu ako na

speciálny prípad OQPSK, môžeme vzťah (6.16) prepísať do jasnejšieho tvaru (v tom zmysle, že sa v ňom nevyskytuje rekurentný vzťah) [45]

$$s(t) = d_I(t) \cos \frac{\pi t}{2T} \cos 2\pi f_0 t - d_Q(t) \sin \frac{\pi t}{2T} \sin 2\pi f_0 t \quad (6.18)$$

kde $d_I(t)$ a $d_Q(t)$ majú ten istý zmysel ako vo vzťahu (6.11). Tento tvar vyjadrenia MSK modulácie (6.18) sa niekedy označuje ako predkódovaná MSK (precoded MSK).

Na obr. 6.11. je znázornený vzťah (6.18). Na obr. 6.11.a) a c) sú znázornené sínusové váhovacie koeficienty impulzov I a Q zložiek. Postupnosti impulzov na obr. 6.11. reprezentujú tie isté postupnosti údajov, ktoré boli východiskové pre konštrukciu znázornenú na obr. 6.9. Rozdiel je v tom, že násobenie sínusoidami spôsobuje jemnejšie prechody medzi jednotlivými hodnotami fázy v porovnaní s pôvodným vyjadrením. Obr. 6.11.b) a d) znázorňujú moduláciu ortogonálnych zložiek $\cos 2\pi f_0 t$ a $\sin 2\pi f_0 t$, pričom obálka signálu je tvorená sínusovkami. Na obr. 6.11.e) je znázornený výsledný signál, ktorý je súčtom ortogonálnych zložiek znázornených na obr. 6.11.b) a d).

Na základe analýzy vzťahu (6.18) a obr. 6.11. môžeme zhrnúť tieto vlastnosti MSK modulácie:

1. Signál $s(t)$ má konštantnú hodnotu amplitúdy.
2. Fáza signálu $s(t)$ sa mení spojito v charakteristických okamihoch údajovej postupnosti.
3. Signál $s(t)$ sa dá opísať ako FSK s frekvenciami $f_0 + \frac{1}{4T}$ a $f_0 - \frac{1}{4T}$. Preto minimálny interval medzi týmito frekvenciami, vyžadovaný pre MSK je

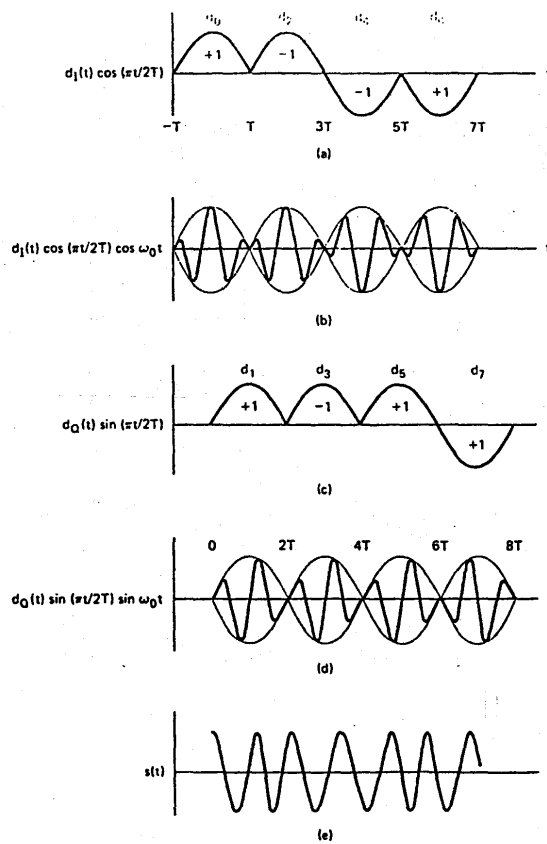
$$\left(f_0 + \frac{1}{4T} \right) - \left(f_0 - \frac{1}{4T} \right) = \frac{1}{2T} \quad (6.19)$$

čo zodpovedá presne polovičnej rýchlosti bitovej postupnosti. Všimnime si, že tento oddeľovací interval je polovičný oproti intervalu $\frac{1}{T}$, ktorý je potrebný pre nekoherentnú detekciu FSK (časť 3.6.4). Je to preto, že bol koherentne demodulovaný. Výkonová hustota spektra $G(f)$ pre QPSK a OQPSK je daná vzťahom prevzatým z [45].

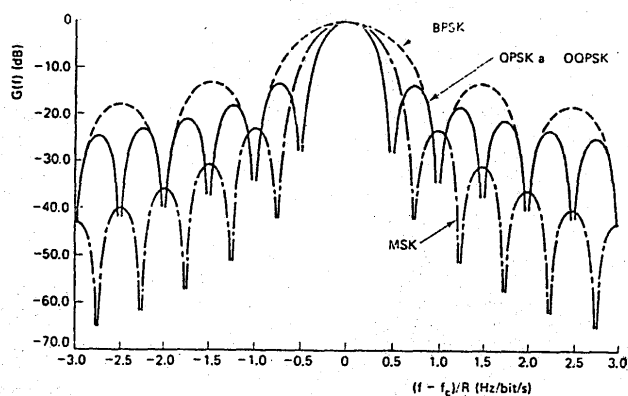
$$G(f) = 2PT \left(\sin \frac{2\pi fT}{2\pi fT} \right)^2 \quad (6.20)$$

kde P je stredný výkon modulovanej nosnej. Pre MSK je G(f) dané vzťahom z [45]

$$G(f) = \frac{16PT}{\pi^2} \left(\frac{\cos 2\pi fT}{1 - 16f^2T^2} \right)^2 \quad (6.21)$$



Obr. 6.11.



Obr. 6.12.

Normalizované ($P = 1W$) priebehy výkonovej hustoty spektra sú znázornené na obr. 6.12. Na uvedenom obrázku je znázornené aj $G(f)$ pre BPSK kvôli porovnaniu. Skutočnosť, že BPSK potrebuje širšie pásmo, by nemala prekvapovať. V časti 6.5.1 na obr. 6.5. sme videli, že účinnosť využitia pásma je pri BPSK polovičná ako pri QPSK. Z obr. 6.12. je zrejmé, že MSK má menšie postranné zložky ako QPSK a OQPSK. To je dôsledok násobenia sínusoidami, ktoré vyvolalo jemnejšie prechody medzi jednotlivými hodnotami fázy. Čím jemnejšie sú prechody medzi hodnotami fáz, tým rýchlejšie klesajú postranné zložky v $G(f)$ k nule. MSK je spektrálne účinnejším typom modulácie ako QPSK alebo OQPSK, ale ako je zrejmé z obr. 6.12. MSK má širšiu hlavnú zložku (oblúk) v spektre ako QPSK a OQPSK. Preto MSK modulácia by nemala byť uprednostňovaná pre úzkopásmové kanály.

6.9.2.1 Odolnosť proti chybám modulácií OQPSK a MSK

Z už prv vykonaných úvah vieme, že modulácie BPSK a QPSK majú tú istú pravdepodobnosť chyby P_B , pretože QPSK je zložená z dvoch BPSK signálov namodulovaných na vzájomne ortogonálnych zložkách nosnej. Pretože posun (staggering) dvoch zložiek údajovej postupnosti nemení ortogonalitu týchto dvoch zložiek nosnej, modulácia OQPSK má tú istú teoretickú pravdepodobnosť chyby ako BPSK a QPSK. Modulácia MSK využíva antipodálne obálky $\pm \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$ a $\pm \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$ počas intervalu $2T$ s na modulovanie dvoch kvadraturných zložiek nosnej. Preto, ak sa na spätné získanie údajov z každej z týchto zložiek použije spriahnutý filter MSK definovaný vzťahom (6.18) má tú istú odolnosť proti chybám ako BPSK, QPSK a OQPSK [43]. Pravdaže, ak je MSK koherentne detekovaná ako signál FSK počas intervalu pozorovania T s, bude táto odolnosť o 3 dB horšia ako pre BPSK [43]. MSK modulácia s diferenciálne zakódovanými údajmi podľa vzťahu (6.14) má rovnakú pravdepodobnosť chyby P_B ako koherentne detekovaná diferenciálne zakódovaná PSK modulácia.

OQPSK systémy vyžadujú úplne koherentnú alebo diferenciálne koherentnú detekciu. Keďže MSK je jednou z typov FSK modulácií môže byť tiež detekovaná nekoherentne. To umožňuje lacnú demoduláciu MSK, ak to dovoľuje dostatočne veľká hodnota $\frac{E_B}{N_0}$.

6.9.3 Kvadratúrna amplitúdová modulácia

Koherentná M-stavová fázová modulácia (MPSK) je známym typom modulácie, ktorá umožňuje dosiahnuť zníženie nárokov na šírku frekvenčného pásma. Namiesto binárnej abecedy, ktorá umožňuje prenášať maximálne 1 bit informácie na jeden symbol, je použitá abeceda s M-symbolmi, ktorá umožňuje prenášať $k = \log_2 M$ bitov informácie na jeden symbol (za čas zodpovedajúci jednému symbolu).

Pretože použitie M-árnych symbolov umožňuje k-násobne zvýšiť rýchlosť prenosu údajov pri zachovaní toho istého frekvenčného pásma, ich použitie môže k-násobne zmenšiť frekvenčné pásmo pri zachovaní tej istej prenosovej rýchlosti.

Zo vzťahu (6.12) vidieť, že QPSK modulácia pozostáva

z dvo
modu
druhy
signa
carr
dvojr
QAM
QPSK,
ampli
(prec
po
v či
nosn
detek

(ampl
alter
APK
modul
ampli

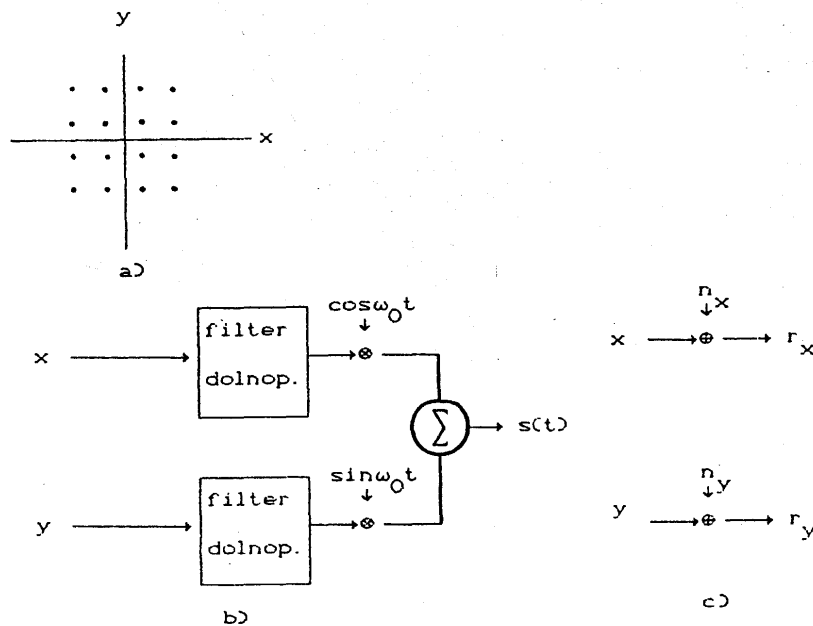
×

y

Obr.

z dvoch nezávislých tokov údajov. Jedným z nich je amplitúdovo modulovaná kosínusová zložka nosnej s úrovňami $+1$ a -1 a druhým je podobne modulovaná sínusová zložka nosnej. Výsledný signál sa označuje ako DSB - SC (double - sideband suppressed - carrier wave), pretože spektrum QPSK v preloženom pásme je dvojnásobné ako v základnom pásme a neobsahuje zložku nosnej. QAM (quadrature amplitude modulation) je logickým rozšírením QPSK, pretože QAM tiež pozostáva z dvoch nezávislých amplitúdovo modulovaných nosných. Každý k -bitový blok (predpokladá sa, že k je párne) môže byť rozdelený na dva bloky po $k/2$ bitov, z ktorých každý môže byť prevedený v číslicovo-analógovom prevodníku na vyžadované napätie pre nosnú. V prijímači každý z týchto dvoch signálov je nezávisle detekovaný pomocou spriahnutého filtra.

Na QAM sa možno pozerat aj ako na kombináciu ASK (amplitude shift keying) a PSK, čo je príčinou jej alternatívneho pomenovania ako APK (amplitude phase keying). APK je tiež zvykom označovať ako dvojrozmernú amplitúdovú moduláciu, čo súvisí s jej pomenovaním QASK (quadrature amplitude shift keying).



Obr. 6.13.

Na obr. 6.13.a) je znázornený dvojrozmerný priestor signálov a súbor vektorov 16-stavovej QAM reprezentovaných bodmi, ktoré sú usporiadané do pravouhlej konstelácie. Jedna z možných realizácií QAM modulátora je znázornená na obr. 6.13.b). Predpokladajme, že jediným zdrojom rušenia je AWGN, a preto platí jednoduchý model kanála znázornený na obr. 6.13.c). Signály sú v tomto modeli tvorené z usporiadaných dvojíc (x, y) . Model indikuje, že každá súradnica signálu je prenášaná cez osobitný kanál a že každá súradnica je nezávisle rušená sumom, ktorý môžeme vyjadriť pomocou usporiadanej dvojice náhodných veličín (n_x, n_y) . Každá z nich sa vyznačuje nulovou strednou hodnotou a disperziou N . Ináč môžeme povedať, že bod prislúchajúci dvojrozmernému signálu je rozptylovaný (rušený) dvojrozmernou Gaussovou premennou. V prípade, že vezmeme strednú hodnotu výkonu signálu S , dostaneme pomer signál - sum $\frac{S}{N}$. Najjednoduchšia metóda, ako prenášať číslicovú informáciu takýmto systémom, je použitie jednorozmernej PAM (pulse amplitude modulation) nezávisle pre každú zložku signálu. Ak chceme PAM vysielat k -bitov na jeden rozmer cez Gaussov kanál, každá súradnica bodu zodpovedajúceho signálu môže s rovnakou pravdepodobnosťou nadobudnúť jednu z 2^k -hodnôt (medzi ktorými sú spravidla rovnaké medzery).

6.9.3.1 Pravdepodobnosť chyby P_B pri QAM modulácii

Pre pravouhlé konstelácie a Gaussov kanál je pri prijímači so spriahnutým filtrom P_B dané vzťahom

$$P_B \approx \frac{2(1 - L^{-1})}{\log_2 L} Q \left\{ \sqrt{\left[\left(\frac{3 \log_2 L}{L^2 - 1} \right) \frac{2E_B}{N_0} \right]} \right\} \quad (6.22)$$

pričom $Q(x)$ je definovaná vzťahom (2.4.2) a L označuje počet amplitúd v jednom rozmere. Pritom sa tiež predpokladá, že postupnosť $\log_2 L$ bitov je priradená k jednému L -árnemu symbolu pomocou Grayovho kódu definovaného v (3.9.4).

6.9.3.2 Voľba kompromisu medzi účinnosťou využitia pásma a výkonom

Niektoré prípustné pracovné body M-stavovej modulácie QAM sú pre pravdepodobnosť $P_B = 10^{-5}$ znázornené na obr. 6.5., pričom na x-ovej osi je vynesená stredná hodnota $\frac{E_B}{N_0}$.

Predpokladá sa použitie Nyquistových filtrov, ideálnych impulzov v základnom pásme tak, že šírka pásma DSB je

$W = \frac{1}{T}$, kde T je čas trvania symbolov. Preto účinnosť využitia pásma $\frac{R}{W} = \log_2 M$, pričom M je počet symbolov v súbore použitom pre moduláciu.

Pre reálne kanály a signály je efektívnosť nižšia z dôvodov použitia neideálnych filtrov. Z obr. 6.5. je zrejmé, že QAM je jedna z modulácií, ktoré umožňujú zmenšiť požiadavky na prenosové pásmo. Podobne ako pri M-stavovej PSK modulácii efektívnosť využitia pásma sa dá dosiahnuť za cenu zvýšenia výkonu alebo hodnoty $\frac{E_b}{N_0}$, avšak pri QAM možno túto výmenu uskutočniť podstatne výhodnejšie ako pri M-stavovej PSK.

Pre všeobecné porovnanie číslicových modulácií je užitočná lit [46].

Príklad: Predpokladajme, že cez rádiový kanál treba preniesť pri použití niektorej z DSB modulácie údaje rýchlosťou 144 Mbit/s. Pre jednoduchosť ďalej predpokladajme, že je pritom použitá Nyquistova filtrácia a možno využiť prenosové pásmo šírky 36 MHz.

Ktorý typ modulácie by ste zvolili pri uvedených požiadavkách?

Ak je $\frac{E_B}{N_0} = 20$ aká bude výsledná pravdepodobnosť chyby bitu P_B ?

Riešenie:

Vyžadovaná účinnosť využitia frekvenčného pásma je

$$\frac{R_P}{W} = \frac{144 \text{ Mbit/s}}{36 \text{ MHz}} = 4 \text{ bit/s/Hz}$$

Z obr. 6.5. je zrejme, ze 16 stavová QAM modulácia s teoretickou efektívnosťou využitia frekvenčného pásma

4 bit/s/Hz potrebuje menšiu hodnotu $\frac{E_B}{N_0}$ ako 16-stavová modulácia PSK pre tú istú pravdepodobnosť chyby P_B . Preto zvolíme 16-stavovú QAM moduláciu.

Na základe hodnoty $\frac{E_B}{N_0} = 20$, použitím vzťahu (6.22) vypočítame

$$P_B = \frac{3}{4} Q \left(\sqrt{\frac{4E_B}{5N_0}} \right) = 2,5 \cdot 10^{-5}$$

Príklad na výpočet spektrálnej účinnosti

a) Vysvetlite výpočet účinnosti využitia pásma pre QAM v predošlom príklade za predpokladu, že QAM je vysielaná pomocou ortogonálnych zložiek nosnej.

b) Šírka použiteľného pásma DSB je v predošlom príklade 36 MHz. Predpokladajme použitie polovičného pásma pre prenos prenosovou rýchlosťou 144 Mbit/s v základnom pásme použitím viacstavovej PAM. Aká musí byť účinnosť využitia pásma, aby to bolo možné uskutočniť, a koľko úrovní PAM je na to potrebné? Predpokladajme Nyquistovu filtráciu.

Riešenie

a) Pri QAM modulácii pre preložené pásmo možno postupovať takto: Tok údajov s rýchlosťou 144 Mbit/s sa rozdelí na dva toky po 72 Mbit/s. Pomocou jedného z nich sa amplitúdovo moduluje kosínusová zložka nosnej v pásme 36 MHz a druhým sa moduluje sínusová zložka nosnej v tom istom pásme 36 MHz. Pretože každý z týchto tokov s prenosovou rýchlosťou 72 Mbit/s je použitý pre moduláciu ortogonálnej zložky nosnej, sú v pásme

36 MHz prenášané oba toky, teda spolu 144 Mbit/s. Preto je účinnosť využitia pásma $144 \text{ Mbit/s} / 36 \text{ MHz} = 4 \text{ bit/s/Hz}$.

b) Vyzadovaná účinnosť využitia pásma v základnom pásme je

$$\frac{R}{W} = \frac{144 \text{ Mbit/s}}{18 \text{ MHz}} = 8 \text{ bit/s/Hz}$$

Za ideálneho predpokladu Nyquistovej filtrácie pásmom 18 MHz môže byť prenášané maximálne rýchlosťou $R_s = 2W = 36$ megasymbolov/s. Každý impulz PAM musí preto predstavovať k - bitov, a preto

$$R_p = kR_s,$$

z toho vyplýva

$$k = \frac{144 \text{ Mbit/s}}{36 \text{ megaimpulzov/s}} = 4 \text{ bit/impulz}$$

kde $k = \log_2 M$ a $M = 16$ úrovní.

6.10 Modulácia a kódovanie pre kanály s obmedzeným frekvenčným pásmom

Kódovanie pre kanál, o ktorom sa hovorilo v častiach 4.2 nebolo spájané s telefónnym kanálom. V poslednom čase sa však venovala veľká pozornosť metódam, ktoré by mohli priniesť zisk z kódovania pre kanály s obmedzeným pásmom. Motiváciou je dosiahnuť spoľahlivý prenos vysokými prenosovými rýchlosťami cez štandardné telefónne kanály. Najväčší záujem sa sústredil do nasledujúcich troch oblastí kódovania:

1. Hranice optimálnych konštelácií signálov (výberom husto zbalených podmnožín signálov ľubovoľných polí alebo mriežok).
2. Hustejšie štruktúry mriežok (zlepšením vybraného súboru signálov, pričom sa vychádza z najhustejšej možnej mriežky pre daný priestor).



3. Modulácia s mriezkovým kódovaním (kombinovaná metóda zložená z kódovania a modulácie, ktorej účelom je dosiahnuť zisk kódovania pre kanály s obmedzeným pásmom).

Prvé dve spomenuté oblasti nie sú "pravé" metódy samoopravného kódovania. "Pravými" metódami samoopravného kódovania sa rozumejú také metódy, ktoré obsahujú štrukturalizovanú nadbytočnosť s cieľom zlepšiť odolnosť proti chybám. Iba tretia metóda využíva v tomto zmysle nadbytočnosť. Všetky tri oblasti a ich prínosy budú uvedené v ďalších častiach.

6.10.1. Komerčné modemy pre telefónny kanál

Najprogressívnejší v presadzovaní efektívnych modulácií je tradične telekomunikačný priemysel. Je to spôsobené tým, že telekomunikačné kanály majú ohraničené frekvenčné pásma. Typický telefónny kanál sa dá charakterizovať vysokým pomerom signál - šum (približne 30 dB) a prenosovým pásmom približne 3 kHz. V tab. 6.1 je ilustrovaný pokrok v oblasti modemov pre telefónny kanál. Ich efektívnosť využitia pásma $\frac{R}{W}$ sa pohybuje v rozmedzí od 2 do 8 bit/s/Hz. Prvým v tabuľke je uvedený Bell 201 z roku 1961, ktorý používal moduláciu QPSK v nominálnom pásme 1200 Hz, dosahuje rýchlosť 2400 bit/s na pevných spojoch. Prvým komerčne dôležitým modemom s rýchlosťou 4800 bit/s bol Milgo 4400/48 zavedený v roku 1967. Využíval nominálne pásmo 1600 Hz a 8-stavovú moduláciu PSK, pričom dosahoval 3 bit/s/Hz. Roku 1971 bol zavedený Codex 9600 C. Umožňuje prenos 9600 bit/s v pásme 2400 Hz ($\frac{R}{W} = 4$ bit/s/Hz) pri použití 16-stavovej modulácie QAM. To, že sa minimálna šírka pásma zväčšovala, bolo spôsobené zdokonaľovaním korektorov frekvenčných charakteristík. Roku 1962 sa dalo použiť 1200 Hz a roku 1971 už dvojnásobné frekvenčné pásmo. Roku 1980 boli zavedené modemy prvej generácie s rýchlosťou 14400 bit/s Paradyne (MP 14400) a roku 1981 Codex (SP 14.4). Tieto modemy zlepšili využitie frekvenčného pásma použitím 64-stavovej QAM modulácie a dosiahli hodnotu $\frac{R}{W} = 6$ bit/s/Hz. V druhej generácii, ktorá sa objavila roku 1984 sa používala mriezkovo kódovaná modulácia QAM (ktorou sa budeme zaoberať v časti

6.
za
ry

Ro

19

19

19

19

19

19

19

6.

QA
od

si

[4

ki

vi

je

6.10.6) s cieľom zlepšiť odolnosť proti chybám. Roku 1985 Codex začal vyrábať modem s hodnotou $\frac{R}{W} = 8 \text{ bit/s/Hz}$, ktorý dosahuje rýchlosť 19200 bit/s v nominálnom pásme 2400 Hz.

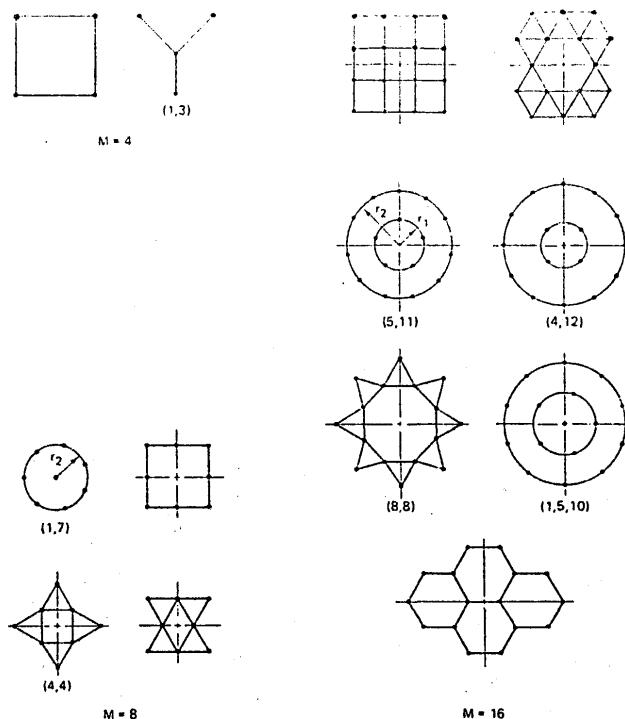
Tabuľka 6.1

| Rok | Model | Rýchlosť [bit/s] | Pásmo [Hz] | Modulácia | $\frac{R}{W}$ [bit/s/Hz] |
|------|----------------------|---------------------|---------------|-------------|-----------------------------|
| 1962 | Bell 201 | 2400 | 1200 | 4-PSK | 2 |
| 1967 | Milgo 4400/48 | 4800 | 1600 | 8-PSK | 3 |
| 1971 | Codex 9600C | 9600 | 2400 | 16-QAM | 4 |
| 1980 | Paradyne MP 14400 | 14400 | 2400 | 64-QAM | 6 |
| 1984 | Codex 2660 | 14400 | 2400 | Trellis-QAM | 6 |
| 1985 | Codex 2680 | 19200 | 2400 | Trellis-QAM | 8 |
| 1992 | ? (vývoj) | 24000 | ? | ? | ? |

6.10.2 Hranice konstelácií signálov

Viaceri výskumníci [47 - 51] sa zaoberali skúmaním rôznych QAM konstelácií signálov. Ich cieľom bolo nájsť najlepšiu možnú odolnosť proti chybám pre daný pomer signál - šum.

Na obr. 6.14. sú znázornené niektoré príklady konstelácií signálov pre $M = 4, 8, 16$, ktoré boli analyzované napr. v práci [47]. Súbory signálov reprezentované bodmi umiestnenými na kružniciach sa označujú ako (a, b, ...), čo značí, že na vnútornej kružnici je a týchto bodov, na nasledujúcej kružnici je b bodov atď.

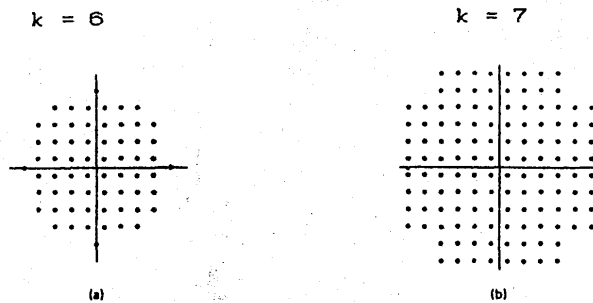


Obr. 6.14.

Všeobecnejším pravidlom nachádzania optimálnych konstelácií je tzv. Campopionovo - Gläserovo pravidlo, ktoré navrhuje nasledujúci postup:

Z nekonečného poľa bodov husto zbalených v regulárnom poli alebo mriezke treba vziať husto zbalenú podmnožinu 2^k bodov. Pri takomto výbere treba za optimálnu považovať tú voľbu, ktorej stredný alebo spíčkový výkon je minimálny pre danú pravdepodobnosť chyby.

V dvojrozmernom priestore signálov optimálna hranica ohraničuje priestor, ktorý má tendenciu približovať sa ku kruhu. Na obr. 6.15. je znázornený príklad súboru bodov 64-stavovej ($k = 6$) a 128-stavovej ($k = 7$) modulácie, ktoré boli zostrojené z pravouhlého poľa. Konstelácia pre $k = 6$ bola použitá v modeme Paradyne s rýchlosťou 14,4 kbit/s. V porovnaní so štvorcovou konfiguráciou je zisk pomerne malý - 0,2 dB [52].



Obr. 6.15.

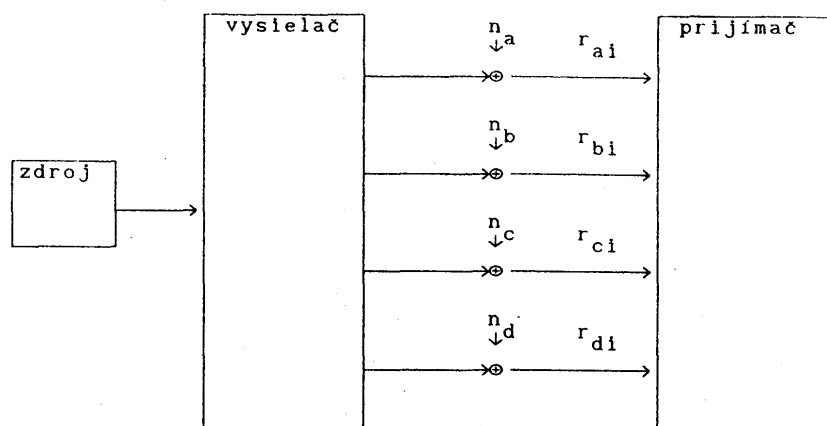
6.10.3 Viacrozmerné konstelácie signálov

Pre ľubovoľnú prenosovú rýchlosť platí, ak je súm nezávisle a zhodne rozdelený v dvoch rozmeroch, že dvojrozmerná modulácia QAM dosahuje s menším stredným výkonom rovnakú pravdepodobnosť chyby ako modulácia PAM v jednorozmernom priestore. Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že je to v dôsledku toho, že ohraňovanie vybraných bodov (reprezentujúcich signály) z dvojrozmernej mriežky sa viac blíži ku kružnici ako ku štvorcovi. Podobným spôsobom sa dá odôvodniť použitie aj viacrozmerných (N -rozmerných) priestorov signálov. Vo viacrozmernom priestore vždy možno vybrať z N -rozmernej mriežky bodov signálov takú konsteláciu, ktorá sa viac približuje k N -rozmernej guli ako k N -rozmernému pravouholníku. Tým sa dá dosiahnuť ďalšia úspora energie. Viacerí výskumníci [53 - 56] študovali viacrozmerné konstelácie signálov. Rozoberme 4-rozmernú konsteláciu znázornenú na obr. 6.16.

ch
ré

li
v.
u,
nú

je
Na
ej
né
me
ou



Obr. 6.16.

Vysielač vysiela súčasne 4 postupnosti impulzov cez kanál s ohraničeným pásmom a AWGN. Predpokladajme, že zdroj produkuje jeden z M symbolov, $m_i = 1, 2, \dots, M$ každých T s. Daný symbol m_i vyvolá vyslanie 4 impulzov $a_i s(t)$, $b_i s(t)$, $c_i s(t)$, $d_i s(t)$, ako je to znázornené na obr. 6.16. Štyri nezávislé kanály môžu byť vytvorené niekoľkými spôsobmi, napr.:

1. Použijú sa 2 kanály v preloženom pásme, v každom z nich je osobitne modulovaná zložka I a zložka Q nosnej. Napr. QAM alebo MPSK modulácia v každom kanáli.
2. 2 kanály v preloženom pásme môžu byť vytvorené v tom istom prenosovom médiu pomocou časového alebo frekvenčného multiplexu.
3. Môže sa použiť ortogonálna polarizácia elektromagnetických vln.

Porovnajme 2-rozmernú 16-stavovú moduláciu QAM so 4-rozmernou. V prípade 2-rozmernej modulácie počas každého intervalu T s sa vysiela 4-bitový symbol pomocou I a Q zložiek nosnej. Inými slovami na opísanie vektora 16-stavovej modulácie v dvoch rozmeroch sú potrebné 2 stvorkové čísla. Alternatívne možno v 4-rozmernej modulácii vysielať 2 za sebou nasledujúce symboly (8 bitov) každých $2T$ s vysielaním 4-och stvorkových čísel reprezentujúcich jeden z 256-tich bodov signálu. Dá sa

ukázat, že zväčšenie počtu rozmerov priestoru signálov umožňuje usporiť strednú energiu signálu pri danej úrovni pravdepodobnosti chyby. Ináč povedané, pri prechode na viacrozmerný priestor možno dosiahnuť úsporu energie tým, že vyberieme body zodpovedajúce signálom, ktoré zaberajú priestor bližší k N-sfére ako N-kocke. Pri tom istom objeme N-sfére zodpovedá nižšia stredná energia bodov signálu ako N-kocke. V tab. 6.2 sú zhrnuté údaje o potenciálnej možnej úspore pri N-rozmeroch. Samozrejme, že realizácia viacrozmerného spôsobu modulácie si vyzaduje zväčšenie zložitosti.

Tabuľka 6.2

| Rozmer (N) | zisk dB |
|---------------|------------|
| 2 | 0.2 |
| 4 | 1.45 |
| 8 | 0.73 |
| 16 | 0.98 |
| 24 | 1.10 |
| 32 | 1.17 |
| 48 | 1.26 |
| 64 | 1.31 |

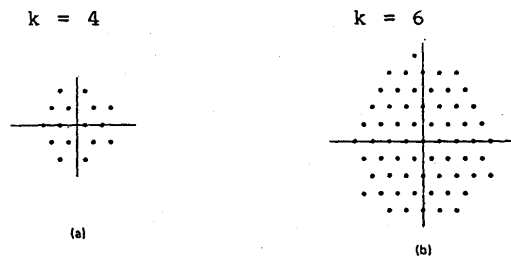
Na to, aby bolo možné vysielat n-bitov na symbol v N-rozmeroch (predpokladajme N párne), bity prichádzajúce zo zdroja musia

byť zoskupené do blokov po $\frac{nN}{2}$. Potom musí nasledovať ich

zobrazenie do priestoru $2^{\frac{nN}{2}}$ N-rozmerných vektorov, ktoré vykazujú najmenšiu energiu spomedzi všetkých vektorov. Na prijímajúcej strane treba realizovať príslušné inverzné zobrazenie. Zväčšenie náročnosti realizácie môže byť vyvážené ziskom, alebo môže prevážiť dosiahnutý zisk. Ak N sa blíži k nekonečnu, zisk spomenutého spôsobu sa blíži k 1,53 dB [52].

6.10.4 Mriežky s väčšou hustotou

V časti 6.10.3 sme diskutovali spôsob výberu tesne zbalených podmnožín bodov z regulárneho poľa alebo mriežky. Teraz rozoberieme možnosť zlepšenia vychádzajúc z najhustejšej možnej mriežky v priestore. V dvojrozmernom priestore je najhustejšou mriežkou 6-uholníková mriežka. Výsledkom využitia 6-uholníkovvej mriežky namiesto pravouhlej, aká je znázornená na obr. 6.15. sa dá ušetriť 0,6 dB strednej hodnoty energie signálov.



Obr. 6.17.

Tabuľka 6.3

| Rozmer (N) | zisk dB |
|---------------|------------|
| 2 | 0.62 |
| 4 | 1.51 |
| 8 | 3.01 |
| 16 | 4.52 |
| 24 | 6.02 |
| 32 | 6.02 |
| 48 | 7.78 |
| 64 | 8.09 |

Na obr. 6.17. sú znázornené príklady 6-uholníkových súborov signálov. Konsteláciu pre $k = 4$ na obr. 6.17. bola našiel Faschini a kol. [51] a je dosiaľ najlepšou známou 16-kovou konsteláciou. Konstelácia pre $k = 6$ na obr. 6.17.b) je použitá v modeme Codex 14.4.

Hexagonálna mriežka je optimálnou pre 2-rozmerný priestor. Pre viacrozmerné priestory existujú iné mriežkové štruktúry, ktoré umožňujú najhustejšie zbalenie. V tab. 6.3 sú udané možné zlepšenia oproti pravouhlej mriežke v dB, pri použití v súčasnosti najhustejších známych konštelácií pre niektoré viacrozmerné priestory.

6.10.5 Kombinácia metódy hustých mriežok ako zobrazenia do N-rozmerného priestoru

Existuje možnosť skombinovať výhodu, ktorú dáva Campopionovo-Glaserova konštrukcia v N-rozmernom priestore so ziskom dosahovaným vďaka použitiu najhustejšej mriežky v N-rozmernom priestore. Výsledný energetický zisk udaný v tab. 6.4 je kombináciou ziskov uvedených v tab. 6.2 a 6.3.

Tabuľka 6.4

| Rozmer (N) | zisk dB |
|---------------|------------|
| 2 | 0.82 |
| 4 | 1.96 |
| 8 | 3.74 |
| 16 | 5.50 |
| 24 | 7.12 |
| 32 | 7.19 |
| 48 | 9.04 |
| 64 | 9.40 |

rov
iel
vou
itá

6.10.6. Mriezkovo kódovaná modulácia

Samoopravné kódy dosahujú zníženie P_B na úkor rozšírenia prenosového pásma. V prípade blokových aj konvolučných kódov je to preto, že každá k -tica správy musí byť nahradená n -ticou v kódovom slove, pričom $n > k$. Pre kanály s obmedzeným pásmom nie je rozšírenie pásma možné. V minulosti preto samoopravné kódy neboli veľmi populárne v aplikáciách pre kanály s obmedzeným spektrom. Nedávno však značne vzrástol záujem o niektoré typy kombinovaných metód kódovania a modulácie, z hľadiska praxe najviac o mriezkovo kódovanú moduláciu, ktorou možno dosiahnuť zisk z kódovania bez expanzie spektra. Na prvý pohľad sa môže zdať, že to odporuje niektorému zo základných princípov pri voľbe kompromisu medzi hlavnými parametrami výkonom - pásmom - pravdepodobnosťou chyby. Existuje však ešte jeden parameter, na úkor ktorého možno dosiahnuť zlepšenie, a tým je zložitosť dekodéra. Zisk z mriezkovo kódovanej modulácie je založený práve na tomto zväčšení zložitosti dekodéra.

Mriezkovo kódovaná modulácia je kombináciou viacúrovňovej fázovej modulácie (PSK, resp. QAM) s mriezkovým kódovaním. Viacúrovňovými fázovými moduláciami rozumíme súbory signálov, ktorých konstelácie sa vyznačujú obsahom vektorov s viacerými amplitúdami a viacerými fázami. Mriezkový kód je taký, ktorý možno charakterizovať pomocou stromového grafu. Konvolučné kódy sú lineárne mriezkové kódy a tvoria podmnožinu množiny všetkých stromových kódov, ktorá obsahuje aj nelineárne kódy. Zisk kódovania možno dosiahnuť blokovými aj stromovými kódmi. Ďalej sa budeme zaoberať mriezkovými kódmi, ktoré sú efektívne dekódovateľné podľa Viterbiho algoritmu. Aj kódovanie pre kanály s obmedzeným frekvenčným pásmom si vyžaduje vnesenie nadbytočnosti. V tomto prípade však nadbytočnosť vyvolá zväčšenie počtu signálov v modulačnej abecede viacúrovňovej fázovej modulácie, takže pásmo kanála sa nezväčší. Ungerboeck publikoval v [57] viacstavový fázový mriezkový kód, ktorý dosahuje zisk kódovania bez potreby rozšírenia prenosového pásma. Ukázal tiež, že v kanáli s AWGN sa dá takto v porovnaní s prípadom bez kódovania dosiahnuť čistý zisk od 3 do 6 dB.

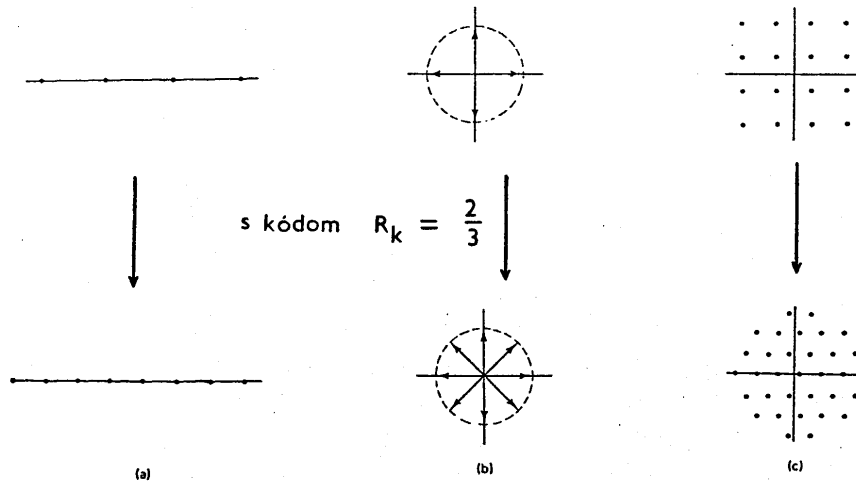
6.10.6.1 Princíp mriezkovo kódovanej modulácie

Odolnosť proti chybám pri nekódovanej neortogónalnej M-stavovej modulácii typu PAM, PSK, QAM závisí od vzdialenosti medzi najbližšími dvoma bodmi reprezentujúcimi signály. Táto minimálna vzdialenosť je určená stredným výkonom vysielača a počtom signálnych bodov. Pre konštantný stredný výkon vysielača minimálna vzdialenosť medzi bodmi klesá úmerne tomu, ako vzrastá ich počet. Preto ak predpokladáme konštantnú rýchlosť prenosu symbolov v kanáli a konštantný stredný výkon vysielača je v systéme dosahované zväčšenie prenosovej rýchlosti, zväčšením počtu symbolov v modulačnej abecede, pričom klesá odolnosť proti chybám. Cieľom mriezkového kódovania pri modulácii je zväčšiť minimálnu vzdialenosť medzi signálmi, ktoré môžu byť s najväčšou pravdepodobnosťou zamenené (chybne) bez toho, aby vzrástol stredný výkon.

Mriezkové kódovanie možno realizovať napr. pomocou konvolučného kodéra, v ktorom k -bitov zo zdroja práve vstupujúcich do kodéra a predchádzajúcich $k - 1$ bitov je využitých pri kódovaní na $n = k + p$ bitov. Ak chceme prenášať $n = k + p$ bitov, potrebujeme na to 2^n binárnych kanálových symbolov. Poznamenajme, že kódovanie má za následok zväčšenie počtu signálov v modulačnej abecede z pôvodného počtu 2^k na počet $2^{(k+p)}$.

Na obr. 6.18.a) je znázornená nekódovaná 4-stavová modulácia PAM pred a po kódovaní kódom s rýchlosťou $\frac{2}{3}$. Podobne na obr. 6.18.b) je znázornená 4-stavová PSK modulácia (QPSK) pred a po kódovaní kódom s tou istou rýchlosťou. Na obr. 6.18.c) je znázornená 16-stavová QAM modulácia pred a po kódovaní kódom s rýchlosťou $\frac{4}{5}$. V každom z týchto troch prípadov je systém modulácie pred a po kódovaní taký, že sa vyznačuje tým istým stredným výkonom. Príklady znázornené na obr. 6.18. ilustrujú základnú myšlienku mriezkovo kódovanej modulácie. V každom z týchto príkladov počet signálov v súbore vzrástok z 2^k na 2^{k+1} . Počet kódovaných symbolov je dvojnásobný v porovnaní s počtom nekódovaných, čím sa dosahuje vnesenie potrebnej nadbytočnosti. V každom z týchto prípadov zväčšenie počtu

signálov nemá za následok rozšírenie vyžadovaného pásma. Rozšírenie súboru signálov má za následok zmenšenie bez kódu



Obr. 6.18.

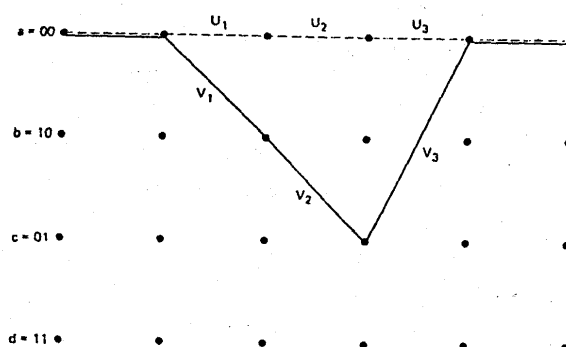
vzdialenosti medzi jednotlivými susednými signálmi (pri pevnom strednom výkone). Vďaka vneseniu nadbytočnosti kódom toto zmenšenie vzdialenosti už nie je určujúce pre odolnosť proti chybám. Namiesto toho je rozhodujúcou tzv. voľná vzdialenosť, ktorá je minimálnou vzdialenosťou medzi povolenými kódovými slovami. Ungerboeck v [57] uvádza možnosť zväčšenia prenosovej rýchlosti v kanáli, ktoré je dosiahnuteľné rozšírením súboru signálov. Uvádza, že zdvojnásobenie počtu kanálových symbolov ($p = 1$) má za následok, že takmer celý možný zisk, ktorý je dosiahnuteľný, sa tým vyčerpá. Dá sa to realizovať kódovaním pomocou kódu s rýchlosťou $\frac{k}{k+1}$ a následným zobrazením $k+1$ bitov na 2^{k+1} kanálových symbolov.

6.10.6.2 O chybách v mriezkových kódoch

Na obr. 6.19. je znázornený prípad, kedy dochádza k chybe v mriezkovom kóde. Postupnosť označená $U = U_1, U_2, \dots$ znázorňuje vyslanú postupnosť a postupnosť označená $V = V_1, V_2, \dots$ predstavuje inú postupnosť, takú, ktorá sa rozvetvuje a opäť spája s postupnosťou U . Za predpokladu

a.
ie

použitia mäkkého dekódovania udalosť chyby nastane, ak sú prijaté symboly bližšie v zmysle Euklidovej vzdialenosti k nejakej inej ako vyslanej postupnosti. Preto pravdepodobnosť chyby je nepriamo úmerná Euklidovej vzdialenosti medzi postupnosťami U a V.



Obr. 6.19. U vyslané - - - - -
V alternatíva —————

vnom
toto
roti
ost,
vými
ovej
boru
olov
ý je
aním
+ 1

Z uvedených úvah zároveň vyplýva, že kódy pre viacstavovú fázovú moduláciu je rozumné konštruovať tak, aby sa vyznačovali maximálnou možnou Euklidovou vzdialenosťou, a nie z hľadiska maximálnej Hammingovej vzdialenosti. Pri mäkkom dekódovaní platí, že čím je väčšia Euklidova vzdialenosť, tým menšia je pravdepodobnosť chyby. Kľúčom k optimálnemu mriežkovému kódu je preto priradenie signálnych bodov kódovým bitom s cieľom maximalizácie Euklidovej vzdialenosti. Ungerboeck v [57 - 59] formuloval tento problém zobrazenia bitov na symboly a tiež navrhol procedúru priradenia nazývanú metóda rozkladu množín.

Táto vždy poskytuje zisk z kódovania, ak sa vhodne vyberie mriežkový kód. Pravidlá tejto metódy sa dajú vyjadriť takto:

chybe
...
ačená
á sa
kladu

1. Všetky paralelné vetvy v mriežke sú oddelené maximálnou možnou Euklidovou vzdialenosťou. Paralelné prechody sú spôsobené kódovými slovami, ktoré sú výsledkom prenosu nekódovaných bitov spolu s kódovanými bitmi (pozri príklad uvedený v nasledujúcej časti). Odôvodnením tejto požiadavky je, že pri pomýlení si kanálových symbolov zodpovedajúcich

týmto paralelným vetvám dochádza k jednej chybe. Toto obmedzuje zdola minimálnu Euklidovu vzdialenosť na tú, ktorá je v podmnožinách signálov priradených paralelným prechodom.

2. Všetkým vetvám, ktoré vychádzajú z toho istého stavu (uzla, mriežky), alebo vchádzajú do toho istého stavu sa priraduje nasledujúca možná maximálna Euklidova vzdialenosť.

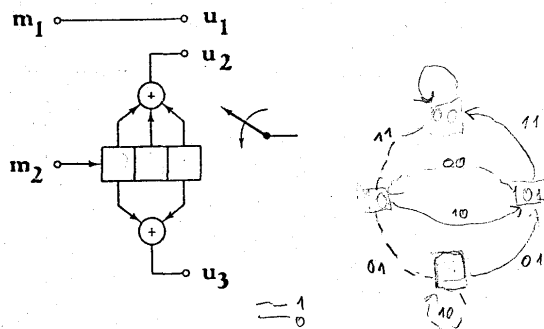
Celkovo mriežkové kódovanie pre kanál s obmedzeným pásmom využíva modulačné abecedy s väčším počtom signálov, ktoré poskytujú viacstavové modulácie, ako napr. M-stavové PAM, MPSK alebo QAM, takže nedochádza k rozšíreniu potrebného pásma. Aj keď zväčšením počtu signálov sa zmenší minimálna vzdialenosť medzi susednými bodmi zodpovedajúcimi signálom, voľná Euklidova vzdialenosť svojím účinkom na P_B viac, ako kompenzuje toto priblíženie signálnych bodov. Výsledkom je čistý zisk okolo 3 - 6 dB, bez nevyhnutnosti rozšírenia pásma. V nasledujúcej časti ilustrujeme tieto myšlienky na príklade konvolučného kodéra s rýchlosťou $\frac{2}{3}$.

6.10.7 Príklad mriežkovo kódovanej modulácie

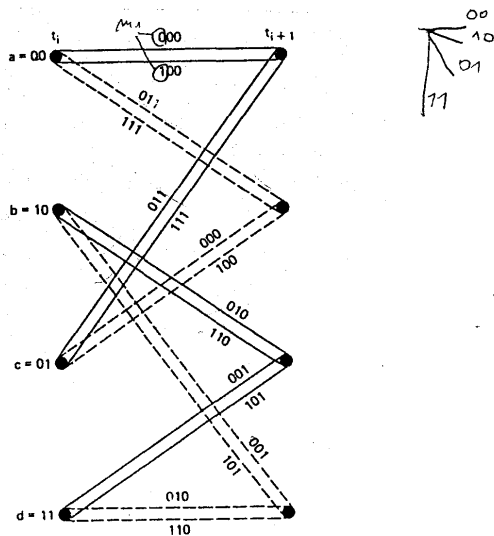
Na obr. 6.20. je znázornený konvolučný kodér s rýchlosťou $\frac{2}{3}$. Táto rýchlosť je daná tým, že pri kódovaní dvojice vstupujúcich bitov jeden prechádza hornou vetvou bez kódovania a druhému kodér priraduje 2 bity na svojom výstupe. Výsledná mriežka je znázornená na obr. 6.21., v ktorom paralelné prechody medzi stavmi sú spôsobené nekódovaným bitom m_1 , ktorý je zapísaný úplne vľavo v každom segmente kódového slova prislúchajúceho vetvy. Dve horné vetvy opúšťajúce každý stav reprezentujú prechody zodpovedajúce bitom m_1, m_2 rovným 00, resp. 10. Dve dolné vetvy reprezentujú prechody vyvolané bitmi m_1, m_2 rovnými 01, resp. 11. Viterbiho algoritmus pre nájdenie postupnosti s maximálnou pravdepodobnosťou pracuje podľa známeho spôsobu. Rozdiely sú len v tom, že:

1. pri tomto kóde s rýchlosťou $\frac{2}{3}$ treba analyzovať dvojnásobný počet vetiev ako pri bežnom konvolučnom kóde;
2. voľba dvoch dekódovaných bitov pre vetvy, ktoré prežijú, je

iná - prvý bit vetvového segmentu kódového slova u_1 je totožný s dekódovaným m_1 . Za druhý dekódovaný bit korešpondujúci s m_2 sa považuje ten, ktorý vyvolá príslušný prechod medzi stavmi.



Obr. 6.20.



Obr. 6.21.

e
e

je

m
é
K
J
t
a
o
o
:j
io

ou
ce
ia
ná
né
rý
va
av
o,
mi
le
Ia

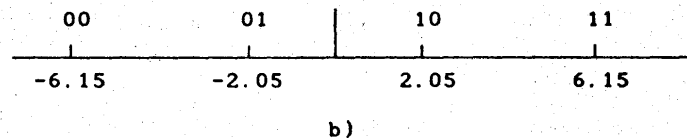
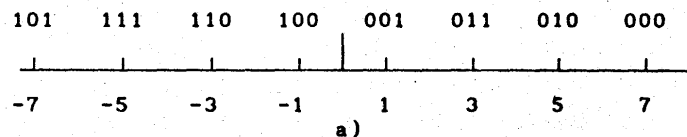
ný

je

Na obr. 6.21. vetvy znázornené plnou čiarou zodpovedajú $m_2 = 0$ a vetvy znázornené prerušovanou čiarou zodpovedajú prípadu, keď $m_2 = 1$.

6.10.7.1 Zisk kódovania pri mriežkovo kódovanej modulácii

Rozoberme zisk kódovania pre príklad z predchádzajúcej časti. Predpokladajme, že pre PAM moduláciu je použitý jednorozmerný priestor znázornený na obr. 6.22.



Obr. 6.22.

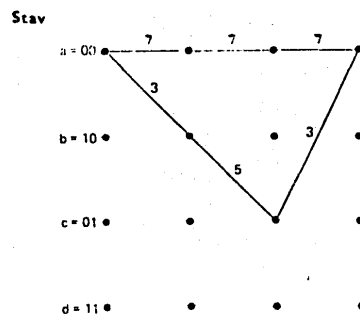
Na obr. 6.22.a) je znázornený súbor 8-stavovej modulácie. Keďže tiež predpokladáme, že je použitý mäkký spôsob dekódovania, primeranou metrikou bude Euklidova vzdialenosť. Euklidova vzdialenosť každého signálu od stredu priestoru signálov je vyjadrená v ľubovoľne zvolených jednotkách. Na obr. 6.22.a) je tiež znázornené zobrazenie bitov na symboly podľa pravidiel metódy rozkladu množín, ktoré sme uviedli vyššie. Všimnime si súlad s týmito pravidlami porovnaním obr. 6.22.a) a obr. 6.21. Všetky paralelné prechody sú oddelené vzdialenosťou 8 jednotiek a všetky vetvy vychádzajúce z rovnakého uzla sú oddelené vzdialenosťou najmenej štyroch jednotiek.

Stredný výkon signálu S sa dá vypočítať zo vzťahu

$$S = \frac{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_M^2}{M} \quad (6.23)$$

kde d_i je Euklidova vzdialenosť i -tého signálu od stredu priestoru a M je počet kódových slov symbolov v analyzovanom súbore. Pre množinu signálov znázornených na obr. 6.22.a), pri ktorých $M = 8$, dostávame použitím vzťahu (6.23) $S = 21$. Na obr. 6.22.b) je znázornená 4-stavová PAM modulácia, ktorá predstavuje nekódovaný ekvivalent množiny kódových slov s rýchlosťou $\frac{2}{3}$. Euklidova vzdialenosť bola zvolená tak, aby jej stredný výkon mal rovnakú hodnotu ako v kódovanom prípade znázornenom na obr. 6.22.a).

Na obr. 6.23. je znázornená minimálna vzdialenosť prípadu nastania chyby pre kódér s rýchlosťou $\frac{2}{3}$ znázornený na obr. 6.20. Predpokladá sa, že vyslaná postupnosť zodpovedá sledu samých núl. Každá z vetiev v tomto slede má Euklidovu vzdialenosť 7 od stredu priestoru signálov. Sled zodpovedajúci chybe opúšťa správny sled tak, že prechádza do stavu 10, potom do stavu 01, a nakoniec sa spája so správnym sledom v stave 00.



Obr. 6.23.

Nad každou vetvou chybného sledu je napísaná jej Euklidova vzdialenosť od stredu priestorov signálov za predpokladu, že nekódovaný bit $m_1 = 0$. Tento predpoklad zabezpečuje, že vzdialenosť medzi sledom, ktorý zodpovedá prenosu samých núl a postupnosťou, ktorá zodpovedá udalosti, že nastane chyba, je

minimálna. Preverte správnosť Euklidovej vzdialenosti pre udalosť chyby na obr. 6.23. tak, že pre každú vetvu prezrite, z ktorého stavu, do ktorého vedie. Z obr. 6.21. určte postupnosť záberov kódového slova zodpovedajúcich vetvám, pri ktorých platí, že $m_1 = 0$, a pomocou obr. 6.22. určte Euklidove vzdialenosti príslušných udalostí chyby (od stredu priestoru signálov).

Amplitúdy signálov sú určené vzdialenostami signálových bodov od počiatku priestorov signálov a výkon signálu zodpovedá druhej mocnine tejto vzdialenosti. Pri porovnaní kvality nekódovanej 4-stavovej PAM modulácie s mriezkovo kódovanou 8-stavovou moduláciou pret treba porovnávať druhé mocniny minimálnych vzdialeností d_{\min}^2 udalosti nastatia chyby, pri rovnakej pevnej hodnote stredného výkonu v oboch prípadoch. Vo všeobecnosti, ak pripustíme aj rôzne hodnoty stredného výkonu v oboch prípadoch zisk kódovania môžeme určiť pomocou vzťahu [60]

$$G = \frac{\left(\frac{d_{\min}^2}{S_{av}} \right)_{\text{kódované}}}{\left(\frac{d_{\min}^2}{S_{av}} \right)_{\text{nekódované}}} \quad (6.24)$$

Pre náš príklad s mriezkovým kódovaním s rýchlosťou $\frac{2}{3}$ sa hodnota d_{\min}^2 počíta pre udalosť chyby takto

$$(d_{\min}^2)_{\text{kódované}} = (7 - 3)^2 + (7 - 5)^2 + (7 - 3)^2 = 36,$$

$$(d_{\min}^2)_{\text{nekódované}} = (6,15 - 2,05)^2 = 16,8.$$

Potom zisk kódovania pre tento prípad je

re
e,
te
ri
ve
ru

$$G = \frac{\frac{36}{21}}{\frac{16,8}{21}} = 2,14, \text{ alebo v dB } G = 3,31 \text{ dB.}$$

ch
dá
ty
ou
ny
ri
Vo
nu
hu

Vidíme, že aj pre tento jednoduchý spôsob kódovania sa dá dosiahnuť značný zisk kódovania bez akéhokoľvek rozšírenia pásma. Väčší zisk kódovania by bolo možné dosiahnuť použitím konvolučného kódu s väčším kódovým ohraničením. Bolo by to však spojené zároveň so zväčšením zložitosti dekódovania. V tab. 6.5 je zapísaný stredný výkon v závislosti od počtu stavov kodéra konvolučného kódu a jeho kódového ohraničenia.

Na vysielači sa prechod na mriežkové kódovanie neprejavuje takým istým nárastom zložitosti ako na prijímači. Problém dekódovania je podstatne zložitejší, preto kompromis pri tejto metóde treba voliť medzi ziskom kódovania a zložitou dekódovania. Zníženie nákladov na LSI obvody však umožňuje prekonať tento problém.

6.11 Záver

4)

a

Zaoberali sme sa myšlienkami týkajúcimi sa kódovania a modulácií. Urobili sme prehľad základných cieľov, ktoré treba splniť pri návrhu systému: maximalizácia prenosovej rýchlosti pri súčasnej minimalizácii pravdepodobnosti chyby, nárokov na prenosové pásmo, $\frac{E_B}{N_0}$ a zložitosti realizácie. Analyzovali sme rôzne kompromisy v rovinách pravdepodobnosti chyby a účinnosti využitia frekvenčného pásma. Prvá ilustruje výber P_B v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$, pričom nároky na frekvenčné pásmo sú v nej implicitne skryté. Druhá explicitne znázorňuje $\frac{R}{W}$ v závislosti od $\frac{E_B}{N_0}$ a implicitne obsahuje informáciu o P_B . Diskutovali sme tiež niektoré základné ohraničenia, ktoré platia pre možnosti zlepšenia základných parametrov systémov. Nyquistovo kritérium hovorí, že nemôžeme donekonečna znižovať

prenosové pásmo. Existuje teoretická hranica, ktorá udáva, že ak chceme prenášať R_S symbolov za sekundu bez medzysymbolovej interferencie, musíme využívať frekvenčné pásmo so šírkou aspoň

$$\frac{R_S}{2} \text{ Hz.}$$

Shannonova - Hartleyova veta sa týka vzťahu výkon - pásmo a jej dôsledkom je existencia inej dôležitej hranice - Shannonovej hranice. Shannonova hranica - 1,59 dB je minimálna hodnota $\frac{E_B}{N_0}$, ktorá je potrebná na to, aby sa dosiahla pri vhodnom kódovaní pre kanál ľubovoľne malá pravdepodobnosť chyby v kanáli s AWGN. Všeobecnejšou hranicou je kapacita kanála. Pri jej prekročení (ak $R_p > C$) sa nemôže uskutočniť bezchybný prenos.

POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] Kahn, D.: The Codebreakers. Macmillan Publ. Comp., N.Y., 1967.
- [2] Denning, D.E.R.: Cryptography and Data Security. Reading, Mass., Addison - Wesley Publ. Comp., 1982.
- [3] Beker, H., Piper, F.: Cipher Systems. N. Y. J Wiley & sons Inc., 1982.
- [4] Aršimov, M.N., Sadovskij, L.E.: Kody i matematika. M. Nauka, 1983.
- [5] Shannon, C.E.: A mathematical Theory of Communication. Bell Syst. Techn. J. 27, 1948 s. 379 - 423 a 623 -625.
- [6] Reza, F.M.: An Introduction to Information Theory. N. Y., Mc - Graw - Hill, 1961
- [7] Vajda, I.: Teória informácie a statistického rozhodovania. Bratislava, Alfa, 1982.
- [8] Csisár, I.: Information Theory. Budapest, Akad. Kiado, 1986.
- [9] Kolesnik, V.D., Poltyrev, G.Š.: Kurs teorii informacii. M., Nauka, 1982.
- [10] Van Trees, H.L.: Detection, Estimation and Modulation Theory. Part 1, N. Y., J. Willey & sons Inc., 1968.
- [11] Nyquist, H.: Certain Topics of Telegraph Transmission Theory. Trans. Am. Inst. Electr. Eng., vol. 47, apríl, 1928, s. 617 - 644.
- [12] Peterson, W.W., Weldon, E.J.Jr.: Kody ispravíajusšie ošibky. (preklad z angličtiny) M., Mir, 1976.
- [13] Park, J.H.Jr.: On Binary DPSK Detection. IEEE Trans. Commun. vol., COM 26, č. 4, 1978, s. 484 - 486.
- [14] Ziemer, R.E., Peterson, R.L.: Digital Communications and Spread Spectrum Systems. N. Y., Macmillan Publ. Comp., Inc., 1985.
- [15] Lindsay, W.C., Simon, M.K.: Telecommunication Systems Engineering, Prentice - Hall, Inc., N.J. Englewood Cliffs, 1973.
- [16] Whalen, A.D.: Detection of Signals in Noise. N. Y., Academic Press, Inc., 1971.

- [17] Korn, I.: Digital Communications. N. Y., Van Nostrand Reinhold Comp., Inc., 1985.
- [18] Couch, L.W.: Digital and Analog Communications Systems. N. Y., Macmillan Publ. Comp., Inc., 1983.
- [19] Wozenkraft, J.M., Jacobs I.M.: Principles of Communication Engineering. N. Y., J. Willey & sons, Inc., 1965.
- [20] Viterbi, A.J.: Principles of Coherent Communications. N. Y., Mc Graw - Hill Comp., 1966.
- [21] Lee, P.J.: Computation of Bit Error Rate of Coherent M-ary PSK with Gray Code Bit Mapping. IEEE Trans., Commun., Vol., COM 34, č. 5, máj 1986, s. 488 - 491.
- [22] Hoo, E.Y., Yeh Y.S.: A New Approach for Evaluating the Error Probability in Presence of Intersymbol Interference and Additive Gaussian Noise. Bell Syst. Tech. J., vol. 49, november 1970, s. 2249 - 2266.
- [23] Shimbo, O., Fang, R.J., Celebiler M.: Performance of M-ary PSK Systems in Gaussian Noise and Intersymbol Interference. IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT 19, január 1973, s. 44 - 58.
- [24] Prabhu, V.K.: Error Probability Performance of M-ary CPSK Systems with Intersymbol Interference. IEEE Trans., Commun., Vol., COM 21, február 1973, s. 97 - 109.
- [25] Yao, K., Tobin, R.M.: Moment Space Upper and Lower Error Bounds for Digital Systems with Intersymbol Interference. IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT 22, január 1976, s. 65 - 74.
- [26] King, M.A., Jr.: Three Dimensional Geometric Moment Bounding Techniques. J. Franklin Inst., vol. 309, č. 4, 1980, s. 195 - 213.
- [27] Prabhu, V.K., Salz, J.: On the Performance of Phase - Shift Keying Systems. Bell Syst. Tech J., vol. 60, 1981, s. 2307 - 2343.
- [28] Viterbi, A.J.: On Coded Phase - Coherent Communications. IRE Trans. Space Electron. Telem., vol. SET 7, 1961, s. 3 - 14.
- [29] Reed, I.S., Solomon, G.: Polynomial Codes over Certain

- Fields. J. SIAM, 8, 1960, s. 300 - 304.
- [30] Blahut, R.E.: Theory and Practice of Error Control Codes. Reading Mass., Addison - Wesley Publ. Comp., 1984.
- [31] Farkaš, P.: Complexity of Software Realization of Decoders of some Reed - Solomon Codes. E. Č. 43, č. 3, 1992, s. 81 - 86.
- [32] Bartee, T.C., Howard, W.: Data Communications, Networks and Systems. Sams Comp., Indianapolis, Ind., 1985.
- [33] Viterbi, A.: Convolutional Codes and Their Performance in Communication Systems. IEEE Trans. Commun. Technology, vol. COM 19, č. 5, október 1971, s. 751 - 772.
- [34] Clark, G.C., Cain J.B.: Error Correction Coding for Digital Communications. Plenum Press, N. Y., 1981.
- [35] Bellamy, J.: Digital telephony. J. Willey & sons, N. Y., 1982.
- [36] Petrovič, R., Stojanovič, N.: Line Codes for Optical Fiber Transmission at High Bit Rates. 32. IWK, TH Ilmenau, NDR, 26.-30. 10.1987, Heft 2, s. 71 - 74.
- [37] Farkaš, P.: Zabezpečenie prenosu informácií v číslicových prenosových systémoch. Učebný text, Katedra telekomunikácií, Bratislava, EF STU, 1989.
- [38] Demel, J.: Grafy. Praha, SNTL, 1989.
- [39] Shannon, C.E.: Communication in the Presence of Noise. Proc. IRE, vol. 37, č. 1, 1949, s. 10 - 21.
- [40] Odenwalder, J.P.: Error Control Coding Handbook. Linkabit Corp., San Diego, Calif., 15. 6. 1977.
- [41] Bedrosian, E.: Spectrum Conservation by Efficient Channel Utilization. Rand Corp., Rep. WN - 9275 - ARPA, Contract DAHC - 15 - 73 - C - 0181, Santa Monica, Calif., 1975.
- [42] Smith, J.G.: Spectral Efficient Modulation Proc. IEEE Int. Conv. Commun. (ICC '77), jún 1977, s. 3.1-37 - 3.1-41.
- [43] Pasupathy, S.: Minimum Shift Keying: A Spectrally Efficient Modulation. IEEE Commun. Mag. júl 1979, s. 14 - 22.
- [44] Anderson, J.B., Aulin, T., Sundberg C.E.: Digital Phase

- Modulation. Plenum Press, N. Y., 1986.
- [45] Gronemeyer, S.A., Mc Bride, A.L.: MSK and Offset QPSK Modulation. IEEE Trans. Commun. vol. COM 24, august 1976, s. 809 - 820.
- [46] Oetting, J.D.: A Comparison of Modulation Techniques for Digital Radio. IEEE Trans. on Commun., vol. COM 27, č. 12, december 1979, s. 1752 - 1762.
- [47] Thomas, C.M., Weidner M.Y., Durrani S.H.: Digital Amplitude-Phase Keying with M-ary Alphabets. IEEE Trans. Commun., vol. COM 22, č. 2, február 1974, s. 168 - 180.
- [48] Lucky, R.W., Hancock J.C.: On the Optimum Performance of N-ary Systems Having Two Degrees of Freedom. IRE Trans. Commun. Syst., vol. CS10, jún 1962, s. 185 - 192.
- [49] Campopiano, C.N., Glazer B.G.: A Coherent Digital Amplitude and Phase Modulation Scheme. IRE Trans. Commun. Syst., vol. CS10, jún 1962, s. 90 - 95.
- [50] Cahn, C.R.: Combined Digital Phase and Amplitude Modulation Communication Systems. IRE Trans. Commun. Technol., september 1960.
- [51] Foschini, G.J., Gitlin R.D., Weinstein S.B.: Optimization of Two Dimensional Signal Constellations in the Presece of Gaussian Noise. IEEE Trans. Cummun., vol. COM 22, č. 1, január 1974, s. 28 - 38.
- [52] Forney, D.: Kaskadnyje kody. (Preklad z angličtiny), M., Mir, 1970.
- [53] MacWilliams, F.J., Sloane, N.J.A.: Teorija kodov ispravljajuščich ošibky. (Preklad y angličtiny), M., Svjaz, 1979.
- [54] Berlekamp, E.R.: Algebraičeskaja teorija kodirovanija. (Preklad z angličtiny), M., Mir, 1971.
- [55] Michelson, A.M., Levesque, A.H.: Error-Control Techniques for digital Communication. N. Y., J. Willey & Sons, 1986.
- [56] Zjuko, A.G.: Pomechoustojčivost i efektivnost sistem peredači informacii. M., Radio i svjaz, 1985.
- [57] Purto, L.P.: Elementy teorii peredači diskretnoj

K

- informacii. M., Svjaz, 1972.
- [58] Reney, A.: A Diary on Information Theory. Budapest, Akad. Kiado, 1987.
- [59] Borodin, L.F.: Vvedenie v teoriju pomechoustojčivogo kodirovanija. M., Sov. radio, 1968.
- [60] Kolesnik, V.D., Mirončikov E.T.: Dekodirovanie cikličeskich kodov. M., Svjaz, 1968.
- [61] Samojlenko, S.I.: Pomechoustojčivoje kodirovanie. M., Nauka, 1966.
- [62] Turin, V.Ja.: Peredača informacii po kanalám s pamjatiu. M., Svjaz, 1977.
- [63] Orisčenko, V.I., Sannikov V.G., Sviridenko V.A.: Sztie dannych v sistemach sbora i peredači informacii. M., Radio i svjaz, Moskva, 1985.
- [64] Gabidulin, E.M., Afanasjev V.B.: Kodirovanie v radioelektronike. M., Radio i svjaz, 1986.
- [65] Tomasi, W.: Electronic Communications Systems. New Jersey, Prentice Hall, Englewood Cliffs. 1988.
- [66] Proakis, G.J.: Digital Communications. N. Y., McGraw Hill Book Comp., 1989
- [67] Sklar, B.: Digital Communications. N. J. Prentice Hall, 1988.
- [68] Nussbaumer, H.: Computer Communications Systems. (Preklad z francúzštiny) , N. Y., J Willey & sons., 1990.
- [69] Suematsu, J., Kataoka, S. a kol.: Osnovy optoelektroniky. (Preklad z japončiny), M., Mir, 1988.
- [70] Weinrichter, H.: Einfuehrung in die Nachrichtentechnik. Viedeň ,TU Wien, 1990.
- [71] Capocelli, R.: Sequences, Combinatorics, Compression, Security and Transmission. N. Y., Springer, 1990.
- [72] Taub, H., Schilling, D.L.: Principles of Communication Systems. N. Y., McGraw Hill Book Comp., 1986.
- [73] Kaderali, F.: Digitale Kommunikationstechnik I. F. Braunschweig, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, 1991.
- [74] Blahut, R.: Digital Transmission of Information. N. Y., Addison Wesley Publishing Comp., 1990.
- [75] Klika, O., Lébl, M.: Teorie diskretnich kódů. Praha, NADAS, 1983.

- [76] Štyrák, J.: Čítač MOD(n) s posuvným registrom. In: Vedecká konferencia EF SVŠT. Sekcia: Aplikovaná elektronika, Bratislava, EF SVŠT, 1986, s. 40 - 44.
- [77] Štyrák, J.: Príspevok k návrhu a realizácii špecializovaných procesorov pre číslicové spracovanie signálov. KDP, EF SVŠT Bratislava, 1987.
- [78] Farkaš, P., Smirnov, A.S., Sotskov, J.V.: Lineárne kódy opravujúce mnohonásobné chyby. Informačné systémy, 14, 1986, č. 5, s. 533-542.
- [79] Farkaš, P., Sotskov, J.V.: Jedna metóda kódovania telemetrických údajov. EČ, 38, 1987, č. 9, s. 725 - 733.
- [80] Farkaš, P.: Výpočet výslednej kvadratickej odchýlky vznikajúcej pri prenose telemetrických dát s využitím lineárnych samoopravných kódov. EČ, 39, 1988, č. 2, s. 154 - 162.
- [81] Čuchran, J., Farkaš, P.: Prenosové systémy pre svetlovodné vlákna. EČ, 35, 1984, č. 8, s. 628 - 635.
- [82] Farkaš, P., Krajčí, P.: Analýza zvyškovej bitovej chybovosti vybraných konvolučných kódov pomocou simulačného modelovania. Informačné systémy, 16, 1988, č. 6, s. 539 - 550.
- [83] Farkaš, P.: Konvolučné kódy vhodné pre programovú realizáciu kodekov. EČ, 38, 1987, č. 9, s. 725 - 733.
- [84] Farkaš, P.: Niektoré otázky programovej realizácie kódovania odolného voči chybám na mikropočítačoch. Zborník "Využitie minipočítačovej a mikropočítačovej techniky SMEP, 1988, Vysoké Tatry, s. 38 - 42.
- [85] Farkaš, P.: Selection of Reed-Solomon codes to discrete channel by simulation. EČ 43, 1992, č. 4, s. 97 - 102.
- [86] Farkaš, P., Sotskov J.V.: Jedna metóda korekcie alfabetických znakov. Zborník prác z vedeckej konferencie Bratislava, EF SVŠT, 1986, sekcia: Aplikovaná elektronika, s. 26 - 31.
- [87] Farkaš, P. a kol.: Meranie a modely reálneho kanála. Zborník prác z 1. vedeckej konferencie EF SVŠT so