Na plánované predstavenie sa omylom predalo 120 lístkov, lenže kapacita siene je 99. Tútor podujatia rozhodol, že jeho začiatok sa cielene omešká a snáď sa niekoľko ľudí naštve a odíde. Trpezlivosť diváka, čiže jeho ochota počkať x minút (potom to zabalí), je daná funkciou hustoty

f(x) = 1.004^(-(x-k)^2)/m   na intervale [0,3k], kde k=30

a) Doplňte konštantu *m* podľa vlastného zodpovedného uváženia.

Konštantu *m* musíme zvoliť tak, aby integrál funkcie *f* mal na danom intervale hodnotu 1. Až vtedy je funkcia *f* dobre definovanou funkciou hustoty.

```
>> f = inline('1.004.^(-(x-30).^2)');
>> format long e
>> m = quad(f,0,90)
                    m =    2.794986749439160e+001
>> f = inline('1.004.^(-(x-30).^2)/27.94986749439160');
```

----

b) Aká je stredná hodnota diváckej trpezlivosti? (v minútach)

Odpoveď získame použitím základného vzorca na výpočet strednej hodnoty (spojitý variant):

```
>> fx = inline('x.*1.004.^(-(x-30).^2)/27.94986749439160');
>> EX=quad(fx,0,90)
                         EX =    3.012332373832060e+001
```

----

c) Aká je šanca, že oneskorenie začiatku predstavenia o (k-10) minút spôsobí odchod aspoň 21 divákov?

Oneskorenie o 20 minút z pohľadu diváka jednotlivca znamená

```
>> p = quad(f,0,20)
                    p =    1.827826276923697e-001
```

okolo 18% pravdepodobnosť toho, že sa za ten čas zbalí a odíde. Pravdepodobnosť odchodu aspoň 21 divákov zo 120 (a teda šanca, že problém nadbytočných lístkov sa vyrieši prirodzenou selekciou) sa vypočíta podľa binomického rozdelenia. Aspoň 21 divákov znamená 21, 22, 23, … alebo 120. Bude azda o niečo úspornejšie klásť otázku najprv opačne – aká je pravdepodobnosť, že odíde najviac 20 divákov – tj. 0,1,2 … alebo 20?
Pravdepodobnosť, že neodíde nikto, je

```
>> s0=(1-p)^120
                    s0 =    3.023505956604391e-011
```

Najviac 20 ľudí:

```
>> S=s0; s=s0; for k=1:20, s=s/(1-p)*p*(120-k+1)/k; S=S+s; end, S

S =    3.759886902486426e-001
```

Aspoň 21 ľudí teda odíde s pravdepodobnosťou asi 62 percent.

```
>> P21plus=1-S
                P21plus =    6.240113097513574e-001
```

----

d) Najmenej o koľko (diskrétne v celých minútach) sa musí začiatok omeškať, aby sa na 99% všetci, čo neušli, pomestili?

Otázka sa stále týka počtu 21 a viac. Môžeme použiť predošlý výpočet 1-S, budeme však hýbať hodnotou p. Odpoveď hľadáme v celých minútach, čo nám umožňuje vyhnúť sa komplikovanejším výpočtom a stačí nám hľadať skusmo. Videli sme, že 20 minút je málo – skúsme 30:

```
>> p=quad(f,0,30), s0=(1-p)^120; S=s0; s=s0; for k=1:20, s=s/(1-p)*p*(120-k+1)/k; S=S+s; end, 1-S

p =     4.981559983606417e-001
ans =  9.999999999999629e-001
```

To už bohato stačí a možno je to až priveľa, skúsme hľadať optimálny výsledok – najnižší celominútový čas, ktorý splní požadovaný cieľ. Skúšať budeme rôzne časové hodnoty, ktorých poradie budeme voliť zhruba tak, ako sa to deje pri bisekcii:

```
>> p=quad(f,0,25), s0=(1-p)^120; S=s0; s=s0; for k=1:20, s=s/(1-p)*p*(120-k+1)/k; S=S+s; end, 1-S

p =    3.250414479363958e-001
ans =    9.999284068124452e-001

>> p=quad(f,0,23), s0=(1-p)^120; S=s0; s=s0; for k=1:20, s=s/(1-p)*p*(120-k+1)/k; S=S+s; end, 1-S

p =    2.631223100040215e-001
ans =    9.914275669585271e-001

>> p=quad(f,0,22), s0=(1-p)^120; S=s0; s=s0; for k=1:20, s=s/(1-p)*p*(120-k+1)/k; S=S+s; end, 1-S

p =    2.345451296802308e-001
ans =    9.541156235365187e-001
```

Takže 23 minút stačí, ale 22 je málo. Odpoveďou je 23 minút.

****
****
****
****
****
****
****

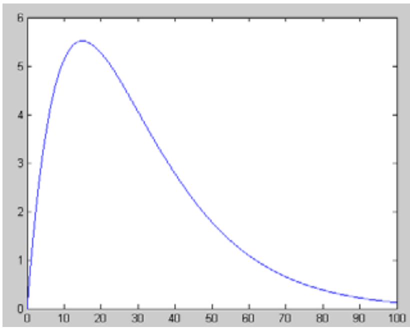
Na ďalekú cestu sa chcelo vybrať 40 zbojníkov. Odchod bol stanovený zhruba na 8:15. Niektorí zbojníci sa začali schádzať už skôr, iní meškali, jedným slovom, ich dochvíľnosť sa dala vyjadriť hustotou

$$f(x) = c*x*e^{-(x/15)} \text{ na } [0, \infty), \text{ kde x sú minúty po ôsmej.}$$

a) Doplňte vhodné c.
b) Aká je pravdepdobnosť, že o 8:15 sa zíde aspoň polovica z nich?
c) Najskôr o koľkej by ich mal Alibaba s autobusom vyzdvihnúť, aby mal s 80% pravdepodobnosťou aspoň 30 chlapov? (odpoveď s presnosťou na celé minúty)
d) S akým počtom chlapov môže Alibaba na 90% počítať, ak príde o 8:30?
e) Aj Alibaba je len zbojník ako každý iný a jeho príchod je podriadený tej istej funkcii hustoty ako u jeho kolegov. S akým počtom zbojníkov s najväčšou pravdepodobnosťou odíde?

---

a) Dobre definovaná funkcia hustoty musí mať integrál na svojom definičnom intervale rovný jednej. Keďže sa nekonečno ťažko numericky dosadzuje, miesto nekonečna dosadíme niekoľko väčších čísel. Ak sa pozrieme na graf funkcie f,



vidíme, že jeho vrchol je v čísle 15, teda v čase keď sa podľa dohody malo odchádzať. Zároveň vidíme, ako funkcia smerom k nekonečnu klesá.

```
>> quad(f,0,200)
                    ans =  224.9948
>> quad(f,0,500)
                    ans =  225.0000
>> quad(f,0,1000)
                    ans =  225.0000
```

Zdá sa, že na hodnote 225 sa to ustáli. Komu sa takéto numerické odhadovanie nepáči a túži po dôveryhodnejšom postupe, môže vyrátať presný integrál:

```
>> syms s,  int(f(s))
                    ans = -15*s*exp(-1/15*s)-225*exp(-1/15*s)
>> s=0; subs(F)
                    ans =  -225
```

Výsledkom je teda funkcia F = -15*s*exp(-1/15*s)-225*exp(-1/15*s) +225, ktorá má v nekonečne (trošku pouvažujeme o limite...) hodnotu 225. Náš numerický tip bol dobrý.

b) `>> f = inline('x.*exp(-x/15)/225')`

Najprv musíme určiť pravdepodobnosť p, že sa nejaký jednotlivec z družiny dostaví o 8:15:

```
>> p=quad(f,0,15)
                    p =    0.2642
```

Aspoň polovica, to pri počte 40 znamená čosi medzi 20 a 40 prítomnými:

```
>> q=p^40; S=q; for i=39:-1:20, q=q*(i+1)/(40-i)/p*(1-p); S=S+q; end, S

      S =    0.0012
```

Nevyzerá to veľmi perspektívne...

c) Stačí to v celých minútach, tak budeme skúšať. 15 minút je asi málo, skúsme 30, 70, 40… posledné naše pokusy boli:

```
>> p=quad(f,0,45); q=p^40; S=q; for i=39:-1:30, q=q*(i+1)/(40-i)/p*(1-p); S=S+q; end, S

   S =    0.8426

>> p=quad(f,0,43); q=p^40; S=q; for i=39:-1:30, q=q*(i+1)/(40-i)/p*(1-p); S=S+q; end, S

   S =    0.7485

>> p=quad(f,0,44); q=p^40; S=q; for i=39:-1:30, q=q*(i+1)/(40-i)/p*(1-p); S=S+q; end, S

   S =    0.7993
```

Takže to vychádza orientačne na tých 44 minút a ak chceme mať istotu o 80% spoľahlivosti, tak radšej až 45.

d) O 8:30 má každý zo zbojníkov osobnú pravdepodobnosť príchodu:

```
>> p=quad(f,0,30)
               p =    0.5940
```

Ak Alibaba očakáva 90% úspech svojich očakávaní, mal by očakávať koľko chlapov? (Ak ich bude viac, to samozrejme nevadí!) Žeby 15?

```
>> q=p^40; S=q; for i=39:-1:15, q=q*(i+1)/(40-i)/p*(1-p); S=S+q; end, S

S =    0.9984
```

V pohode, môže rúbať vyššie. Žeby 20?

```
>> q=p^40; S=q; for i=39:-1:20, q=q*(i+1)/(40-i)/p*(1-p); S=S+q; end, S

S =    0.9139
```

Zdá sa, že sme trafili, ale overíme:

```
>> q=p^40; S=q; for i=39:-1:21, q=q*(i+1)/(40-i)/p*(1-p); S=S+q; end, S

S =    0.8529
```

Takže 21 už je veľa. Správna odpoveď je 20.

e) Pri tejto otázke si stačí uvedomiť, že výsledok závisí len na tom, kedy príde kápo. Graf funkcie, ktorý je na obrázku vyššie (ešte pred vydelením konštantou, ale tvar krivky sa nezmení), ukazuje, že najvyššia pravdepodobnosť Alibabovho príchodu je o 8:15. Pripomenieme si, že pravdepodobnosť príchodu jednotlivca **do** 8:15 je p =   0.2642.

Vyrátame si teraz pravdepodobnosti príchodu rôznych počtov zbojníkov:

```
>> q=p^40; S=q; for i=39:-1:0, q=q*(i+1)/(40-i)/p*(1-p); S=[q,S]; end, S

S =  0.0000    0.0001    0.0005    0.0021    0.0071    0.0184    0.0385    0.0672    0.0995
0.1270    0.1414    0.1384    0.1201    0.0929    0.0643    0.0400    0.0225    0.0114    0.0052
0.0022    0.0008    0.0003    0.0001    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000
```

Je to jasné – najvyššie číslo, ktoré vo výpise vidíme, je 0.1414 na 11. pozícii a to zodpovedá počtu 10 zbojníkov. Odpovedď teda znie, že najpravdepodobnejší počet zbojníkov, s ktorými kápo odíde, je 10 ks bez veliteľa.