Exponenciálne rozdelenie

1. Čakanie na hraniciach – časová strata v minútach, s ktorou treba počítať, má rozdelenie Exp(0,02).

f(x) = 0.02*exp(-0.02*x)   na [0, nekonečno], inak 0
F(x) = 1 - exp(-0.02*x)   na [0, nekonečno], inak 0

– Vykreslite grafy funkcií f a F na intervale [-5, 195].

//

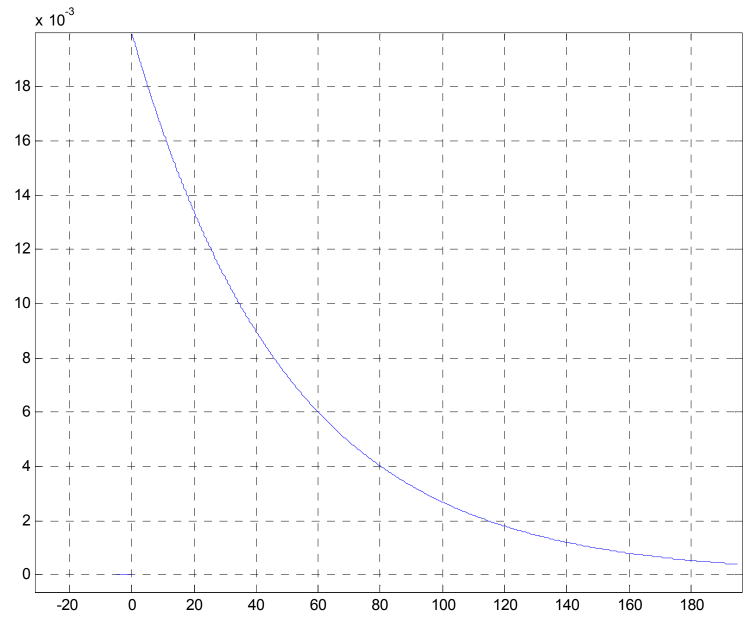
Riešenie:

Rozdelenie Exp(0,02):

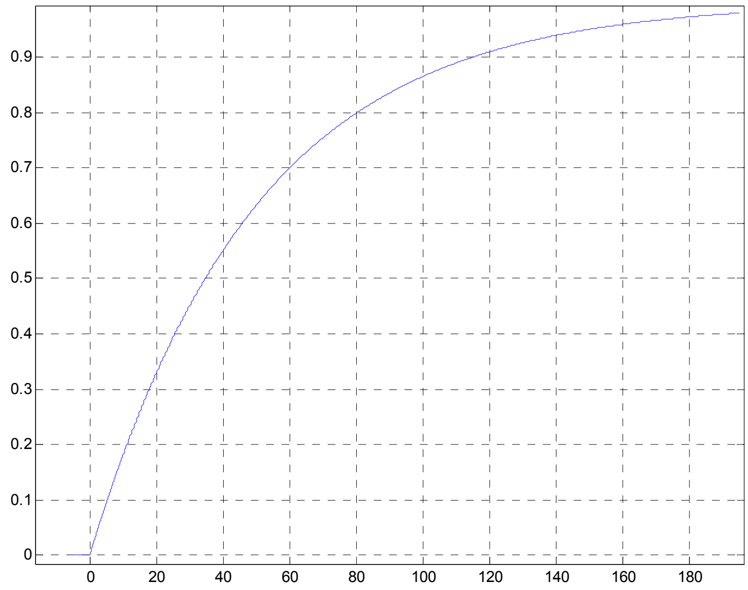
f(x) = 0.02*exp(-0.02*x)   na [0, nekonečno], inak 0
F(x) = 1 - exp(-0.02*x)   na [0, nekonečno], inak 0

Grafy funkcií f a F na intervale [-5, 195]. (Pozor!! na úseku [-5, 0] je funkcia nulová.)

```
>> x=0:0.01:195; y=0.02*exp(-0.02*x); Y=1-exp(-0.02*x);
>> plot([-5,0],[0,0],'b',x,y,'b')
>> grid on
```




```
>> plot([-5,0],[0,0],'b',x,Y,'b')
>> grid on
```



//

Aká je pravdepodobnosť, že čakanie potrvá a) najviac hodinu, b) najmenej polhodinu?

//

Riešenie:

Najviac hodinu znamená 0 až 60 minút, čas je teda F(60)-F(0)=F(60).

```
>> F60=1-exp(-0.02*60)

F60 =    0.6988057880877979
```

Je takmer 70% pravdepodobnosť, že čakanie nepresiahne hodinu.

Najmenej polhodinu znamená 30 minút až nekonečno, tj. F(∞)-F(30)=1-F(30).

```
>> minut30aViac=exp(-0.02*30)

minut30aViac =    5.488116360940265e-001
```

Erlangovo rozdelenie

2. V jeden deň treba absolvovať prejazd cez štyri hraničné prechody, na ktorých je približné rovnaké čakanie, modelované hustotou f z predošlého príkladu.

– Nájdite funkciu hustoty fe zodpovedajúcu celkovej časovej strate na hraniciach.
– Nakreslite funkciu hustoty fe a distribučnú funkciu Fe na intervale [-5, 395].

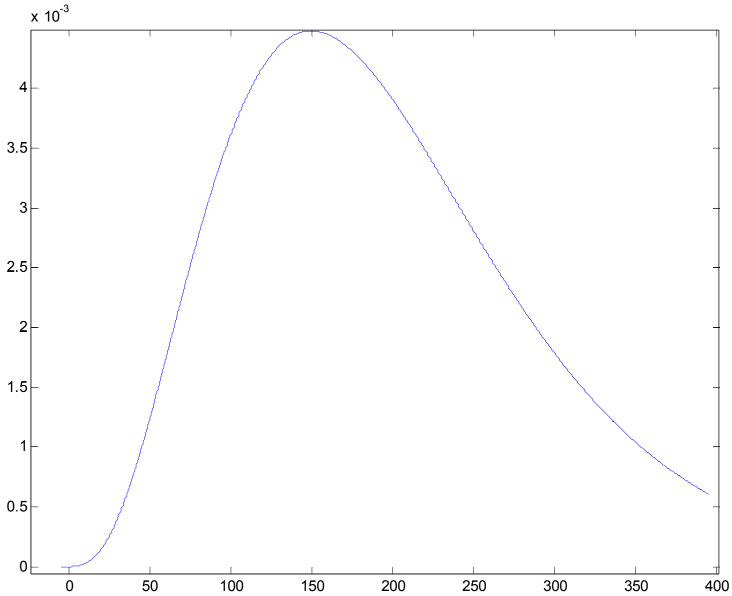
//

Riešenie:

2. Celková časová strata (súčet 4 čakaní na 4 prechodoch) je modelovaná Erlangovým rozdelením s parametrami 4, 0.02.

Jeho funkcia hustoty fe je (obr. na intervale [-5, 395]):

```
>> fe=inline('0.02^4/6*x.^3.*exp(-0.02*x)');
>> x=0:0.01:395; y=fe(x); plot([-5,0],[0,0],'b',x,y,'b')
```



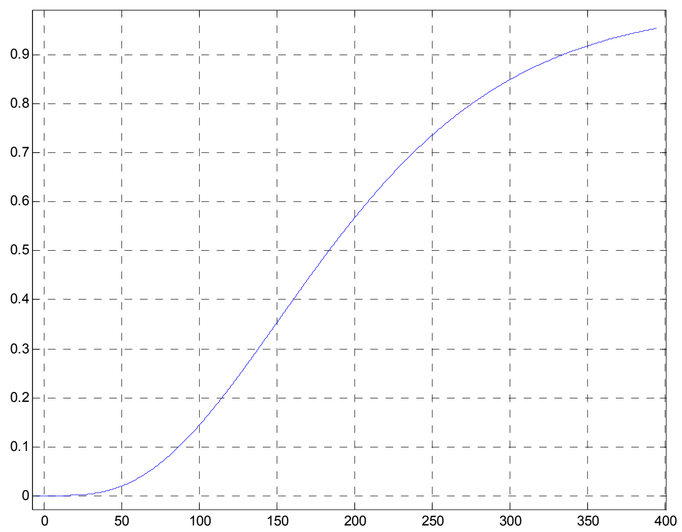
Jeho distribučná funkcia Fe sa získa integrovaním. Vzhľadom na nevyhnutnosť viacnásobného použitia metódy per partes (študenti sú povzbudzovaní k tomu aby si to ručne skúsili a zopakovali si tak svoje hlboké a trvalé vedomosti z M1), pomôžeme si matlabovským integrovaním v symbolickom móde:

```
>> t=sym('t'); F=int(f(t))
                         F =     -2518595457530477 5/188894659314785808547 84*t^3*exp(-1/50*t)-
                                 18889465931478581 25/944473296573929042739 2*t^2*exp(-1/50*t)-
                                 47223664828696453125/2361183241434822606848*t*exp(-1/50*t)-
                                 1180591620717411328125/1180591620717411303424*exp(-1/50*t)
```

Naša distribučná funkcia je určitý integrál, preto hľadaná Fe(x) = F(x)-F(0).

Vykreslenie:

```
>> t=x; Y1=subs(F); t=0; Y0=subs(F);
>> Y=Y1-Y0; plot([-5,0],[0,0],'b',x,Y,'b')
>> grid on
```



<u>*//*</u>

Aká je pravdepodobnosť, že časová strata bude a) najviac 1 hodina, b) najmenej tri hodiny ?

<u>*//*</u>

<u>Riešenie:</u>

Najviac hodina, to je 0 až 60 minút, strata S60 je teda:

```
>> S60=quad(fe,0,60)

        S60 =    3.376891333835345e-002
```

Je teda pravdepodobnosť len niečo cez 3%, že celková strata času nepresiahne hodinu.

Aspoň tri hodiny, to je 180 až nekonečno, strata S180aViac je (počítame cez komplement):

```
>> S180aViac=1-quad(f,0,180)

S180aViac =  5.152160797511098e-001
```

Je teda zhruba 51,5% pravdepodobnosť, že sa bude čakať viac ako 3 hodiny.

Rôzne úlohy

Na strome je 30 zrelých jabĺk, ktoré každú chvíľu spadnú ma zem. Presnejšie povedané, možnosť pádu zrelého jablka do x minút od momentu, ktorý označíme 0 (začiatok akcie McApple), je náhodná veličina s rozdelením Exp(0.002). To znamená, že

```
>> f1=inline('0.002*exp(-0.002*x)'); quad(f1,0,24*60)
      ans =      0.9439
```

do 24 hodín na 94% každé z jabĺk spadne. Predpokladáme, že padať bude slušne a nezatrasie zemou natoľko, aby tým priamo spôsobilo pád iného jablka a pokazilo tak štatistickú nezávislosť pádov jednotlivých jabĺk.

Pod stromom sa zhromaždilo 30 ježov z *Klubu nadpozemskej výživy* presvedčených o tom, že konzumácia potravy, ktorá sa nikdy nedotkla zeme, zvyšuje ostrosť pichliačov až o 67%. Každý z ježov sa postavil pod jedno z jabĺk a čaká na jeho pád. Ak zachytí pichliačmi padajúce jablko, zabráni jeho dotyku so zemou a okrem získania nadpozemskej stravy získa ako bonus aj osvietenie spočívajúce v pochopení gravitačného zákona.

Na to aby jež dobre zachytil jablko, musí čakať s chrbátom ohnutým do špeciálneho poloblúka, čo je aj pre ježov jogínov pomerne náročná poloha a ich výdrž je limitovaná – rezignácia ježa na čakanie z dôvodu únavy je náhodná veličina s rozdelením Exp(0.003). To znamená, že

```
>> f2=inline('0.003*exp(-0.003*x)'); quad(f2,0,24*60)
      ans =    0.9867
```

na skoro 99% jež nevydrží čakať celých 24 hodín.

Nie všetci ježkovia si tak potrpia na pichliačoch a celkom ich uspokojí obyčajný plný žalúdok. Takí založili rovnako tridsaťčlenný *Spolok rýchleho stravovania*. Samozrejme, že sa v momente 0 zhromaždia okolo stromu a priam ako supy čakajú, ktorí z klubových ježov rezignuje, aby sa ulakomili na jeho jablko. Keďže majú pri čakaní pohodlie, zajačie úmysly týchto ježov vyjadruje rozdelenie Exp(0.001). Čakajú pekne v rade (vylosované poradie), kto nevydrží, odchádza a tí za ním postupujú o pozíciu dopredu. Ak padne jablko a nie je pod ním klubový jež, prvý spolkový jež v poradí prichádza a berie korisť.

Úlohy:

1. Nakreslite (farbičkami) opísanú situáciu.
2. Aká je pravdepodobnosť, že klubový jež bude (sám za seba) úspešný (v čase akcie)? Aká je pravdepodobnosť, že všetci kluboví ježkovia budú úspešní? Aká je pravdepodobnosť, že aspoň polovica klubových ježkov bude úspešná?
3. Aká je pravdepodobnosť, že deviaty spolkový jež v poradí získa jablko?

Riešenie:

1. 

2. Úspešnosť ježka jednotlivca je daná súhrou včasného pádu jablka a adekvátnej trpezlivosti ježka. Trpezlivosť ježa musí byť vyššia ako otáľanie jablka na strome.

Zhrňme to:
Možnosť pádu jablka presne v čase t sa vyjadrí funkciou hustoty f1. Dôležité je, aby tam presne v tomto momente tam klubový jež bol, čo znamená, že miera jeho trpezlivosti sa musí merať hodnotu t alebo vyššou, čo ho pravdepodobnosť je integrál od *t* po ∞ z f2:

$$P2 = \int_{[t,\infty]} f2\ dx = 1 - \int_{[0,t]} f2\ dx = \exp(-0.03*t)$$

Pravdepodobnosť úspechu klubového ježa (v čase akcie) teda bude

$$Pk = \int_{[0,24]} f1(t)*\exp(-0.03*t)\ dt = \int_{[0,24]} 0.02*\exp(-0.02*t)*\exp(-0.03*t)\ dt$$

```
>> p=quad('0.02*exp(-0.02*t).*exp(-0.03*t)',0,24)

p =     0.2795
```

Nemajú to v tom klube ježkovia ľahké… vyše dvoch tretín má asi smolu. Úspešnosť celého klubu alebo iného počtu ježkov sa už ľahko zráta použitím binomického rozdelenia a získaného čísla p.

3. Úspech deviateho v poradí závisí od toho, či bude dosť príležitostí, či sa dostane na rad (tí pred ním musia odísť s jablkom alebo bez) a či sám vydrží dovtedy čakať. To všetko treba vhodne skombinovať … smelo do toho … ťažké? No dobre. Vhodne a prípadne aj viacerými spôsobmi upravte (zmenšite počet náhodných veličín vstupujúcich do výpočtu) zadanie úlohy tak, aby ste ju vedeli riešiť. A riešte ju… Koho to začne nudiť, nech sa vráti k pôvodnému zadaniu.