XII. Základné rozdelenia spojitej náhodnej premenej

1. Rovnomerné rozdelenie

Náhodná premenná X má rovnomerné rozdelenie na intervale (a,b), $a,b \in \mathcal{R}$, $a < b$, ak jej hustota pravdepodobnosti má tvar

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\boldsymbol{b-a}} & \text{pre} \quad \boldsymbol{x \in (a,b)} \\ 0 & \text{pre} \quad \boldsymbol{x \notin (a,b)} \end{cases} \tag{12.1}$$

Stručne zapisujeme $\boldsymbol{X \sim R(a,b)}$.
Distribučná funkcia:

$$\boldsymbol{F(x) = P(X < x)} = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad \boldsymbol{x \leq a} \\ \dfrac{\boldsymbol{x-a}}{\boldsymbol{b-a}} & \text{pre} \quad \boldsymbol{a < x \leq b} \\ 1 & \text{pre} \quad \boldsymbol{x > b} \end{cases} \tag{12.2}$$

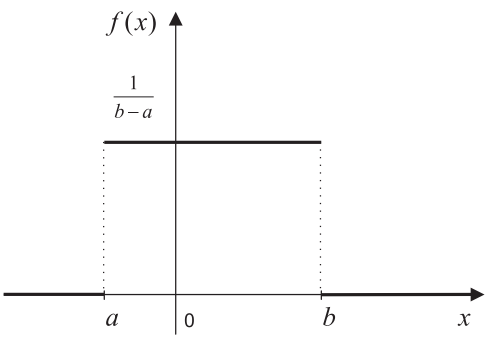
Číselné charakteristiky :

$$\boldsymbol{E(X)} = \frac{\boldsymbol{a+b}}{2}, \quad \boldsymbol{D(X)} = \frac{\boldsymbol{(b-a)}^2}{12}, \quad \boldsymbol{\alpha(X)} = 0, \quad \boldsymbol{\beta(X) = -1,2.} \tag{12.3 – 6}$$

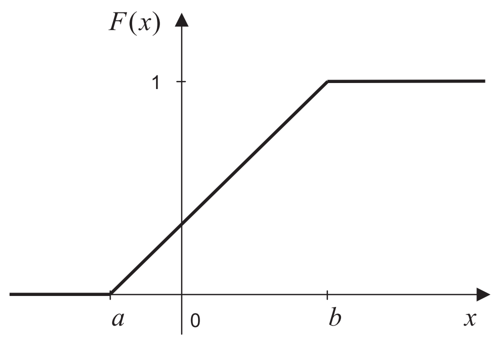
Charakteristická funkcia:

$$\boldsymbol{\varphi}_X\boldsymbol{(t)} = \frac{\boldsymbol{e}^{itb} - \boldsymbol{e}^{ita}}{\boldsymbol{it(b-a)}}, \boldsymbol{t} \in \mathcal{R}. \tag{12.7}$$

Na obrázku Obr. 12.1 je graf hustoty a na Obr. 12.2 je distribučná funkcia rovnomerného rozdelenia.



Obr. 12.1



Obr. 12.2

2. Normálne rozdelenie

Náhodná premenná X má normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2, $\mu \in \mathcal{R}$, $\sigma > 0$, ak jej hustota pravdepodobnosti má tvar

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathcal{R}.} \tag{12.8}$$

Stručne zapisujeme $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$.
Distribučná funkcia:

$$\boldsymbol{F(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt.} \tag{12.9}$$

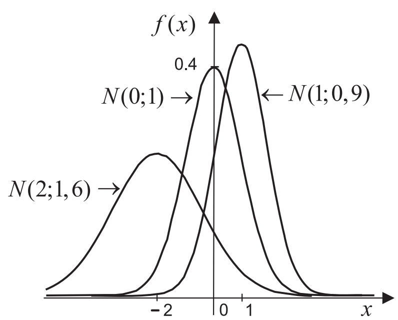
Číselné charakteristiky :

$$\boldsymbol{E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \alpha(X) = 0, \quad \beta(X) = 0.} \tag{12.10 -- 13}$$

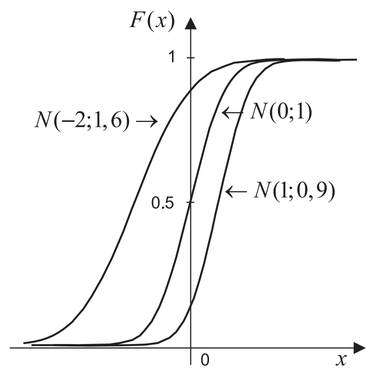
Charakteristická funkcia:

$$\boldsymbol{\varphi_X(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}, \, t \in \mathcal{R}.} \tag{12.14}$$

Na obrázku Obr. 12.3 je graf hustoty a na Obr. 12.4 je distribučná funkcia normálneho rozdelenia.



Obr. 12.3



Obr. 12.4

Normované normálne rozdelenie

Ak $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ má náhodná premenná X tzv. **normované normálne rozdelenie**. Stručne zapisujeme $\boldsymbol{X \sim N(0, 1)}$. Hustota pravdepodobnosti sa označuje $\boldsymbol{\varphi(x)}$ a má tvar

$$\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathcal{R}.} \tag{12.15}$$

Distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia sa označuje $\Phi(\boldsymbol{x})$ a má tvar

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.} \tag{12.16}$$

Platí :

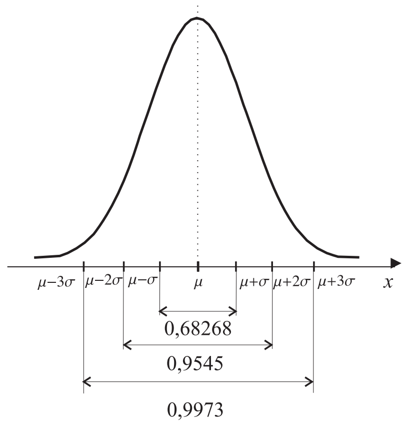
1. Zo symetrie $\varphi(x)$ podľa $x = 0$ vyplýva pre každé $x \in \mathcal{R}$
$$\varphi(-x) = \varphi(x), \tag{12.17}$$
$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x). \tag{12.18}$$
2. Ak náhodná premenná X má rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$, potom náhodná premenná $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ má rozdelenie $N(0,1)$.
3. Ak náhodná premenná X má rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$, potom
$$P(X < a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \tag{12.19}$$
$$P(a \le X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \tag{12.20}$$

Hodnoty hustoty pravdepodobnosti $\varphi(x)$ a distribučnej funkcie $\Phi(x)$ sú tabelované.

Pravidlo troch $\boldsymbol{\sigma}$

Ak $X \sim N(\mu,\, \sigma^2)$, tak platí
$$P(\mu - 3\,\sigma < X < \mu + 3\,\sigma) = 0,9973.$$

Podobne sa dá zistiť, že
$$P(\mu - 2\,\sigma < X < \mu + 2\,\sigma) = 0,9545$$
$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,68268$$



Obr. 12.5

3. Exponenciálne rozdelenie

Náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie s parametrami λ a A, $\lambda > 0$, $A \geq 0$, ak jej hustota pravdepodobnosti má tvar

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\lambda\, e}^{-\lambda(x-A)} & \text{pre} \quad \boldsymbol{x > A} \\ 0 & \text{pre} \quad \boldsymbol{x \leq A} \end{cases} \tag{12.21}$$

Stručne zapisujeme $\boldsymbol{X \sim Ex(\lambda, A)}$.
Distribučná funkcia:

$$\boldsymbol{F(x) = P(X < x)} = \begin{cases} 1 - \boldsymbol{e}^{-\lambda(x-A)} & \text{pre} \quad \boldsymbol{x > A} \\ 0 & \text{pre} \quad \boldsymbol{x \leq A} \end{cases} \tag{12.22}$$

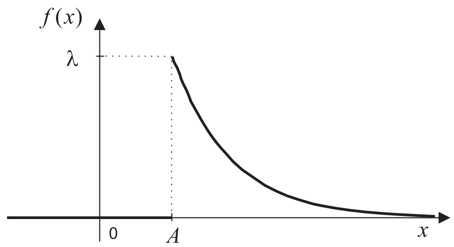
Číselné charakteristiky :

$$\boldsymbol{E(X) = A} + \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{D(X)} = \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}^2}, \quad \boldsymbol{\alpha(X)} = 2, \quad \boldsymbol{\beta(X)} = 6. \tag{12.23 – 26}$$

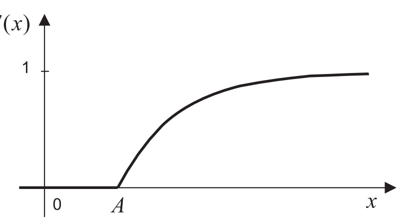
Charakteristická funkcia:

$$\varphi_X(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\lambda - it}}, \ \boldsymbol{t} \in \mathcal{R}. \tag{12.27}$$

Na obrázku Obr. 12.6 je graf hustoty a na Obr. 12.7 je distribučná funkcia exponenciálneho rozdelenia.



Obr. 12.6



Obr. 12.7

4. chí-kvadrát rozdelenie (Pearsonovo rozdelenie)

Ak $X_1, X_2, ..., X_n$ sú navzájom nezávislé náhodné premenné, z ktorých má každá normované normálne rozdelenie $N(0,1)$. Potom náhodná premenná $X = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$ má chí-kvadrát rozdelenie s n stupňami voľnosti, $n \in \mathcal{N}$, ak jej hustota pravdepodobnosti má tvar

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},} \quad \text{pre}\, \boldsymbol{x > 0.} \tag{12.28}$$

Stručne zapisujeme $\boldsymbol{X \sim \chi^2(n)}$.
Číselné charakteristiky :

$$\boldsymbol{E(X) = n,} \quad \boldsymbol{D(X) = 2n,} \quad \boldsymbol{\alpha(X) = \sqrt{\frac{8}{n}},} \quad \boldsymbol{\beta(X) = \frac{12}{n}.} \tag{12.29 – 32}$$

Na obrázku Obr. 12.8 je graf hustoty pravdepodobnosti chí-kvadrát rozdelenia pre $n = 2,\ 6,\ 10$.

5. t-rozdelenie (Studentovo rozdelenie)

Ak náhodné premenné $X_1 \sim N(0,1)$ a $X_2 \sim \chi^2(n)$ a sú navzájom nezávislé, potom náhodná premenná $X = \dfrac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}$ má t-rozdelenie s n stupňami voľnosti, $n \in \mathcal{N}$, ak jej hustota pravdepodobnosti má tvar

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},} \quad \text{pre}\, \boldsymbol{x > 0.} \tag{12.33}$$

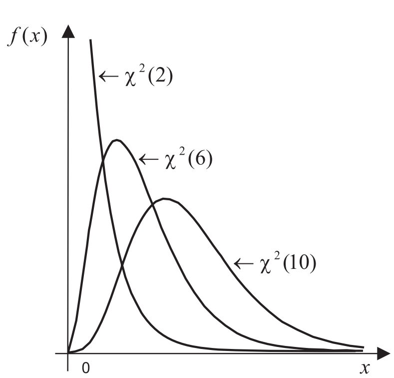
Stručne zapisujeme $\boldsymbol{X \sim t(n)}$.
Číselné charakteristiky :

$$\boldsymbol{E(X) = 0,}\ \text{pre}\, \boldsymbol{n > 1,} \quad \boldsymbol{D(X) = \frac{n}{n-2,}}\ \text{pre}\, \boldsymbol{n > 2,} \tag{12.34 – 35}$$

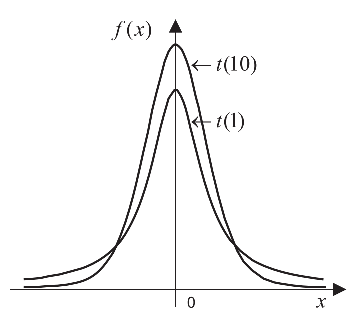
$$\boldsymbol{\alpha(X) = 0,} \quad \boldsymbol{\beta(X) = \frac{6}{n-4},}\ \text{pre}\, \boldsymbol{n > 4.} \tag{12.36 – 37}$$

Poznámka 12.1. Pre $n > 30$ je t-rozdelenie veľmi blízke rozdeleniu $N(0,\ 1)$.

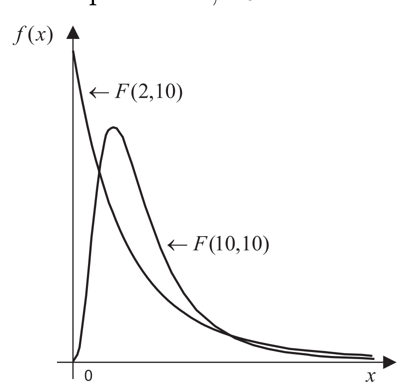
Na obrázku Obr. 12.9 je graf hustoty pravdepodobnosti t-rozdelenia pre $n = 1,\ 10$.



Obr. 12.8



Obr. 12.9



Obr. 12.10

6. F-rozdelenie (Fisher - Snedecorovo rozdelenie)

Ak náhodné premenné $X_1 \sim \chi^2(n)$ a $X_2 \sim \chi^2(m)$ a sú navzájom nezávislé, potom náhodná premenná $X = \dfrac{X_1/n}{X_2/m}$ má F-rozdelenie s n a m stupňami voľnosti, $n, m \in \mathcal{N}$, ak jej hustota pravdepodobnosti má tvar

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{n^n m^m}}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} (m + nx)^{-\frac{n+m}{2}}}, \quad \text{pre}\, \boldsymbol{x > 0}. \tag{12.38}$$

Stručne zapisujeme $\boldsymbol{X \sim F(n, m)}$.
Číselné charakteristiky :

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{m}{m-2}}, \text{ pre}\, \boldsymbol{m > 2}, \quad \boldsymbol{D(X) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}}, \text{ pre}\, \boldsymbol{m > 4}. \tag{12.39 − 40}$$

Na obrázku Obr. 12.10 je graf hustoty pravdepodobnosti F-rozdelenia pre $m = 2$, $n = 10$ a $m = 10$, $n = 10$.

7. Weibullovo-rozdelenie

Náhodná premenná X má Weibullovo rozdelenie s parametrami δ a c, $\delta > 0$, $c > 0$, ak jej hustota pravdepodobnosti má tvar

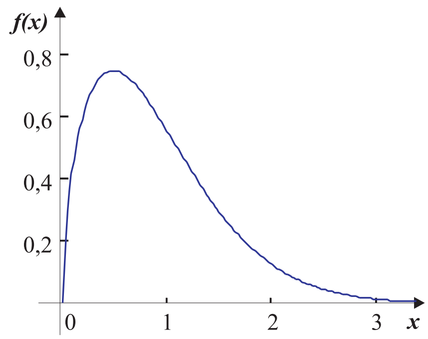
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{\delta}^c}\boldsymbol{x}^{k-1}\boldsymbol{e}^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^c}, \text{ pre } \boldsymbol{x} > 0. \tag{12.41}$$

Stručne zapisujeme $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{c})$.

Číselné charakteristiky :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\delta}\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\boldsymbol{c}}\right), \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\delta}^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\boldsymbol{c}}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\boldsymbol{c}}\right)\right]. \qquad (12.42 - 43)$$

Na obrázku Obr. 12.11 je graf hustoty pravdepodobnosti Weibullovho rozdelenia $W(1,5;\,1)$.



Obr. 12.11

Kritické hodnoty

1. **Kritické hodnoty rozdelenia $\boldsymbol{N}(0,1)$.** Ak náhodná premenná $X \sim N(0,1)$, tak hodnota k_α, ktorú náhodná premenná X prekročí s pravdepodobnosťou α, sa nazýva kritická hodnota rozdelenia $N(0,1)$ na hladine α, t.j.

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{X} > \boldsymbol{k}_\alpha\right) = \int\limits_{k_\alpha}^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\alpha}, \tag{12.44}$$

   kde $f(x)$ je hustota normovaného normálneho rozdelenia.

2. **Kritické hodnoty chí-kvadrát rozdelenia.** Ak náhodná premenná $X \sim \chi^2(n)$, tak hodnota $\chi^2_\alpha(n)$, ktorú náhodná premenná X prekročí s pravdepodobnosťou α, sa nazýva kritická hodnota rozdelenia χ^2 na hladine α, t.j.

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{X} > \boldsymbol{\chi}^2_\alpha\right) = \int\limits_{\chi^2_\alpha(n)}^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\alpha}, \tag{12.45}$$

   kde $f(x)$ je hustota χ^2-rozdelenia.

3. **Kritické hodnoty t-rozdelenia.** Ak náhodná premenná $X \sim t_\alpha(n)$, tak hodnota $t_\alpha(n)$, ktorú náhodná premenná X prekročí s pravdepodobnosťou α, sa nazýva kritická hodnota t-rozdelenia na hladine α, t.j.

$$\boldsymbol{P}\left(|\boldsymbol{X}| > \boldsymbol{t}_\alpha(\boldsymbol{n})\right) = \boldsymbol{\alpha}. \tag{12.46}$$

4. **Kritické hodnoty F-rozdelenia.** Ak náhodná premenná $X \sim F(n,m)$, tak hodnota, ktorú náhodná premenná X prekročí s pravdepodobnosťou α, sa nazýva kritická hodnota F-rozdelenia na hladine α, t.j.

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{X} > \boldsymbol{F}_\alpha(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})\right) = \int\limits_{F_\alpha(n,m)}^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\alpha}. \tag{12.47}$$

   kde $f(x)$ je hustota F-rozdelenia.

   Pre kritické hodnoty F-rozdelenia platí vzťah

$$\boldsymbol{F}_\alpha(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}) = \frac{1}{\boldsymbol{F}_{(1-\alpha)}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})}. \tag{12.48}$$