Spojité pravdepodobnostné rozdelenia
Číselné charakteristiky

Príklad 1:

Je daná funkcia hustoty f(x) = 2/(x+1) na intervale [0, exp(0.5)-1]. V Matlabe si ju môžeme definovať ako inline objekt (kvôli ďalším výpočtom musí ísť pred delenie bodka):

```
>> f=inline('2./(x+1)');
```

Ubezpečme sa, že je definovaná správne a zistime hodnotu integrálu na danom intervale. Na numerické integrovanie využijeme príkaz quad:

```
>> format long, d=exp(0.5)-1;
>> quad(f,0,d)

ans =
   1.000000023810609e+000
```

Očakávali sme výsledok 1 a odpoveď Matlabu nie je ďaleko od očakávaní. Nepresnosť je spôsobená tým, že quad integruje štandardne s presnosťou 1e-6. Túto presnosť môžeme zvýšiť štvrtým parametrom:

```
>> quad(f,0,d, 1e-12)

ans =
   1.000000000000002e+000

>> quad(f,0,d, 1e-16)

ans =
    1
```

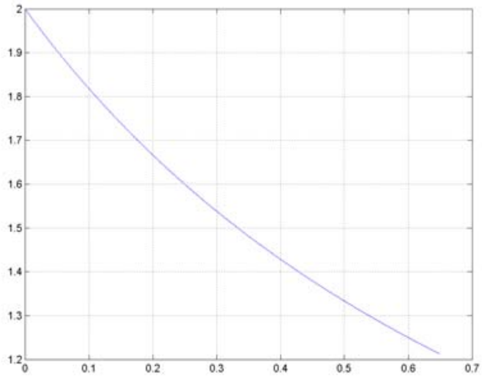
Nájdime distribučnú funkciu pravd. rozdelenia F. S integrovaním nám poradí Matlab a možnosti jeho symbolického módu. (Zeleným písmom sú uvedené časti, bez ktorých sa bude dať zaobísť na písomkách a predstavujú priestor na dobrovoľné rozširovanie si obzoru.)

```
>> s=sym('s');
>> int(f(s))

ans =
      2*log(s+1)
```

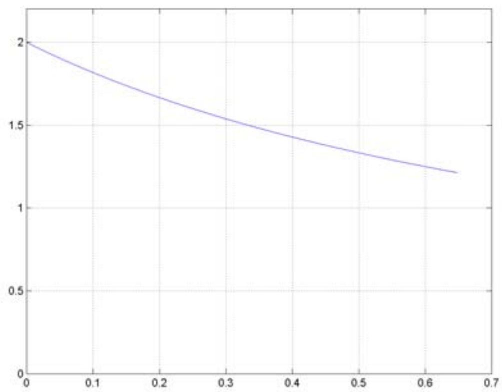
Vykreslíme teraz grafy funkcií f a F. Interval [0, d] rozdelíme na 1000 častí príkazom linspace (daný interval rozdelí na n častí, zadávame však číslo n+1 ako počet deliacich bodov).

```
>> xd = linspace(0,d,1001);
>> plot(xd,f(xd)), grid on
```



Nie je to celkom ono… Upresníme, akú oblasť roviny má Matlab znázorniť:

```
>> plot(xd,f(xd)), axis([0, 0.7, 0, 2.2]), grid on
```



<u>Úloha:</u> Podobne nakreslite funkciu F (najprv si ju definujte ako inline objekt s premennou x).

Na výpočet kvantilov potrebujeme inverznú funkciu k F. V tomto príklade nie je problém ju nájsť (ručne), ale nie vždy sa to podarí. Ukážeme si teda univerzálnejší postup[1] využívajúci príkaz `fzero`, ktorým Matlab hľadá korene rovnice f(x) = 0. Pripomíname, že nájsť kvantil q_a znamená nájsť číslo, pre ktoré platí $F(q_a) = a$, čo je to isté ako $F(q_a) - a = 0$. Nájdime najprv medián, teda 0.5-kvantil. Definujeme Fq = F - 0.5 a nájdeme jej koreň:

```
>> Fq=inline('2*log(x+1)-0.5'); q05=fzero(Fq, 0)

q05 =    2.840254166877414e-001
```

Príkaz fzero potrebuje „poradiť“, kde začať hľadať koreň, preto je druhý vstup 0 (odhad hľadanej hodnoty). Treba sa ubezpečiť, že výsledok nie je „mimo“ prípustného intervalu.

<u>Úloha:</u> Nájdite kvartily funkcie F a 0.1, 0.9 a 0.95 -kvantily.
<u>Úloha:</u> Riešte to isté pre inú funkciu hustoty na inom intervale (sami si vhodne zvoľte).

[1] Jeho nevýhodou je väčšia prácnosť, ak potrebujeme tých kvantilov viac.

Príklad 2:

Je daná hustota f(x,y) = 1-x+y pravdepodobnostného vektora (X,Y), na ploche možných udalostí [0,1] × [0,1]. Na teórii sme už zistili, ako vyzerajú fx a fy (hustota premenných X, Y samostatne).

Úloha 1: Zadajte f, fx, fy ako inline objekty. Ubezpečte sa, že f, fx a fy sú zadané správne.

Riešenie: Funkcie fx a fy nájdeme ručným integrovaním.

```
>> f=inline('1-x+y'); fx=inline('1.5-x'); fy=inline('0.5+y');
```

Kontrola správnosti:

```
>> i1=quad(fx,0,1); i2=quad(fy,0,1); i3=dblquad(f,0,1,0,1); [i1,i2,i3]

ans =    1    1    1
```

Na výpočet dvojitého integrálu sme použili príkaz dblquad, do ktorého sa vkladajú postupne hranice intervalov premennej x a y (pozor na poradie).

Úloha 2: Vypočítajte strednú hodnotu E(X), E(Y), rozptyl var(X), var(Y), kovarianciu a korelačný koeficient vektora (X,Y). *Riešte samostatne a až nakoniec si porovnajte výsledky s nasledujúcim postupom!*

Riešenie: – Keďže Matlab nevie integrovať vstup x*f(x) apod., kde f je zadaná ako inline objekt, musíme každý takýto integrand zadať ako nový inline objekt. Tento postup je schodný, ale trochu otravný … Nepomohlo by, ak by sa f zadalo ako m-funkcia?

```
>> fxe=inline('1.5*x-x.^2'); fye=inline('0.5*y+y.^2');
>> Ex=quad(fxe, 0, 1); Ey=quad(fye, 0, 1); [Ex, Ey]

ans =    4.166666666666667e-001    5.833333333333334e-001

>> fxv=inline('1.5*x.^2-x.^3'); fyv=inline('0.5*y.^2+y.^3');
>> varx=quad(fxv, 0, 1)-Ex^2; vary=quad(fyv, 0, 1)-Ey^2; [varx, vary]

ans =    7.638888888888881e-002    7.638888888888878e-002

>> fxy=inline('x.*y.*(1-x+y)'); EXY=dblquad(fxy,0,1,0,1); covxy=EXY-Ex*Ey

covxy =    6.944444444444392e-003

>> cocfxy=covxy/(varx*vary)^0.5

cocfxy =    9.090909090909033e-002
```

Úloha 3: Na oblasti [-1, 2] × [-2, 4] je daná funkcia hustoty f(x,y) = (2-x+y)/9. Vypočítajte jednotlivé číselné charakteristiky pravdepodobnostného rozdelenia určeného funkciou f.

Príklad 3:

Nakoniec sa budeme venovať situácii, keď má oblasť nenulových hodnôt funkcie hustoty iný tvar ako obdĺžnik.

Nech oblasť Q je daná takto: $Q = \{(x,y) \in R^2 ;\ x, y \geq 0 \ \wedge x+y \geq 2 \wedge x+y \leq 5\}$.

Funkcia hustoty bude: $f = 2/21$ pre $(x,y) \in Q$

a $f = 0$ inde.

Úloha: Načrtnite (na papier) oblasť Q.

Matlab nám nedáva priamu možnosť počítať integrál z funkcie na iných ako obdĺžnikových oblastiach. Musíme preto úlohu riešiť nepriamo – integrovať budeme na obdĺžniku $B = [0, 5] \times [0, 5]$ a funkciu f položíme rovnú nule všade na B/Q.[2] To nám v Matlabe umožňuje zapojenie boolovských výrazov do predpisu funkcie:

```
>> f=inline('(x+y<=5).*(x+y>=2)*2/21');

>> dblquad(f,0,5,0,5,1e-10)
```

Na danej oblasti je hodnota integrálu takmer 1, takže f je dobre definovaná funkcia hustoty. (Výstupy už neuvádzame, vidno ich vo vašom matlabe).

Funkcie hustoty fx a fy (funkcia fy je zhodná s fx) premenných X, Y samostatne možno jednoducho zistiť z náčrtu na papieri (skúste!). Ide o „vetvičkové“ funkcie, čo opäť možno matlabu vysvetliť pomocou boolovských výrazov, ktoré „zapnú“ príslušnú vetvu vtedy, keď hodnoty x,y sú na správnej oblasti:

```
>> fx = inline('2/7*(x<2)+(5-x).*(x>2)*2/21');
>> quad(fx,0,5)
```

Výpočet strednej hodnoty: (pre X aj Y rovnaká)

```
>> fxx=inline('(2/7*(x<2)+(5-x).*(x>2)*2/21).*x');
>> ex=quad(fxx,0,5,1e-11)
```

Výpočet variancie: (pre X aj Y rovnaká)

```
>> fxxx=inline('(2/7*(x<2)+(5-x).*(x>2)*2/21).*x.*x');
>> vax=quad(fxxx,0,5,1e-11) – ex^2
```

Výpočet kovariancie a korelačného koeficientu:

```
>> fxy=inline('((x+y<5).*(x+y>2)/10.5).*x.*y');
>> cox=dblquad(fxy,0,5,0,5,1e-11)-ex*ey
>> cocof=cox/vax
```

Úloha: Pri výpočte korelačného koeficientu máme v menovateli niečo iné, ako sa uvádza v štandardnom vzorci použitom napr. v príklade 2. Prečo?

[2] Do predpisu nedávame podmienky nezápornosti x, y. Budeme však na ne pamätať a pri výpočtoch sa budeme vyhýbať všetkým kvadrantom okrem prvého.

<u>Úloha:</u> Zvoľte si samostatne na nejakej nepravidelnej oblasti (napr. trojuholník daný tromi náhodne zvolenými bodmi v rovine) vhodnú funkciu hustoty f(x,y) a nájdite číselné charakteristiky takto určeného rozdelenia náhodnej premennej.