VIII. Náhodná premenná a jej rozdelenia

Definícia 8.1. Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Zobrazenie $X : \Omega \to \mathcal{R}$ nazývame **náhodnou premennou**, ak pre každé $x \in \mathcal{R}$ platí

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{S}.$$

T.j. pre každé $x \in \mathcal{R}$ je vzorom intervalu $(-\infty, x)$ nejaký náhodný jav $A = \{\omega : X(\omega) < x\}$ patriaci do množiny $\mathcal{S}$. Náhodná premenná X priradí jednoznačne každému elementárnemu javu ω reálne číslo.

$X(\omega)$ sa nazýva **realizácia náhodnej premennej** X.
Náhodné premenné označujeme veľkými písmenami abecedy: X, Y, Z, ..., X_1, X_2, ..., ich možné hodnoty malými písmenami abecedy: x, y, z, ..., x_1, x_2, ...

Podľa toho, aké hodnoty nadobúdajú náhodné premenné, delíme ich na

1. **diskrétne -** diskrétna náhodná premenná nadobúda hodnoty z konečnej alebo spočítateľnej množiny;
2. **spojité -** spojitá náhodná premenná nadobúda všetky možné hodnoty z konečného alebo nekonečného intervalu.

Poznať náhodnú premennú znamená vedieť jej **rozdelenie pravdepodobnosti**, t.j. vedieť aké hodnoty a s akými pravdepodobnosťami nadobúda. Môže byť zadané tabuľkou, funkciou, grafom.

Distribučná funkcia

Pravdepodobné správanie sa náhodnej premennej charakterizuje distribučná funkcia. Distribučnou funkciou môžeme zadať rozdelenie pravdepodobnosti diskrétnej i spojitej náhodnej premennej.
Definícia 8.2. Distribučnou funkciou náhodnej premennej X nazývame reálnu funkciu $F : \mathcal{R} \to \langle 0, 1\rangle$ definovanú pre každé $x \in \mathcal{R}$ vzťahom

$$\boldsymbol{F(x) = P(X < x).} \tag{8.1}$$

T.j. pravdepodobnosť, že náhodná premenná X nadobudne hodnotu menšiu ako reálne číslo x.

Vlastnosti distribučnej funkcie:

1. $F(x)$ je neklesajúca funkcia.
2. Pre každé $x \in \mathcal{R}$ platí: $0 \le F(x) \le 1$.
3. $F(x)$ je zľava spojitá.
4. $$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \tag{8.2}$$
   $$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \tag{8.3}$$
5. $$P(a \le X < b) = F(b) - F(a),\ a, b \in \mathcal{R},\ a < b. \tag{8.4}$$

Diskrétna náhodná premenná

Definícia 8.3. Náhodná premenná X sa nazýva **diskrétna**, ak existuje postupnosť reálnych čísel $x_1, x_2, x_3, ...$ a postupnosť nezáporných reálnych čísel $p_1, p_2, p_3, ...$ taká, že

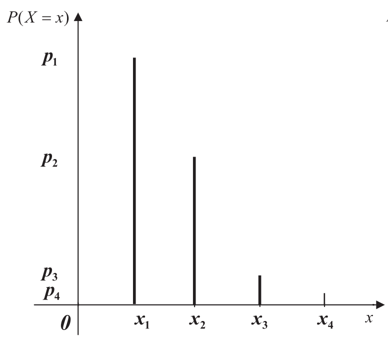
$$\boldsymbol{P\left(X = x_k\right) = p_k} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\sum_k p_k = 1.}$$

$x_1, x_2, x_3, ...$ sú hodnoty, ktoré náhodná premenná nadobúda s príslušnými pravdepodobnosťami $P(X = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, ...$ Hovoríme, že postupnosť $\{p_k\}$, $p_k = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, ...$, je **rozdelenie pravdepodobnosti** diskrétnej náhodnej premennej X.
Funkcia $P(X = x)$ sa nazýva **pravdepodobnostná funkcia**.

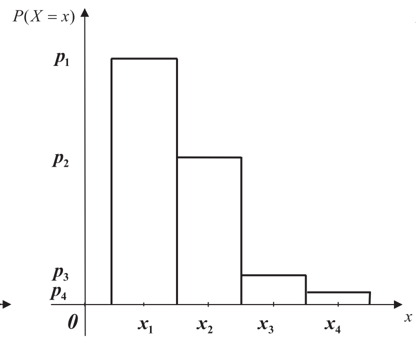
Rozdelenie pravdepodobnosti diskrétnej náhodnej premennej X sa môže najjednoduchšie zadať tak, že udáme hodnoty, ktoré nadobúda $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ a príslušné pravdepodobnosti $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2), ..., p_n = P(X = x_n), ...$
Diskrétna náhodná premenná X sa môže zadať aj **tabuľkou rozdelenia pravdepodobnosti**.

x_k	x_1	x_2	...	x_n	...	$\sum\limits_k p_k$
p_k	p_1	p_2	...	p_n	...	1

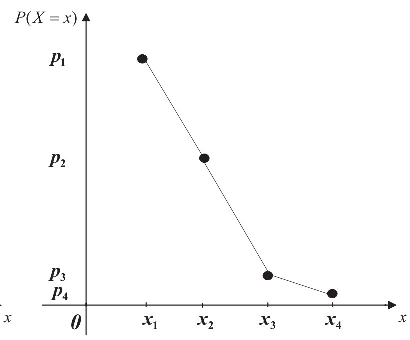
Graficky sa zadáva rozdelenie pravdepodobnosti **úsečkovým grafom, histogramom** alebo **polygónom**. (Obr. 8.1 až 8.3.)



Obr. 8.1



Obr 8.2

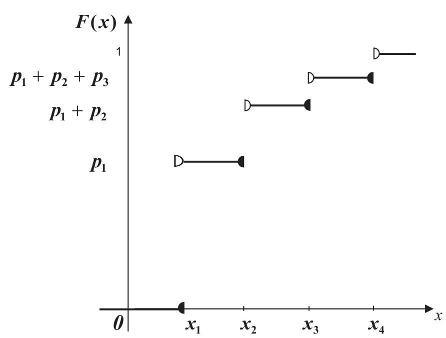


Obr. 8.3

Distribučná funkcia diskrétnej náhodnej premennej X má tvar

$$\boldsymbol{F(x) = P\,(X < x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k) = \sum_{x_k < x} p_k\,, \quad x \in \mathcal{R}.} \tag{8.5}$$

Je to skokovitá funkcia, ktorá má skok v každom bode x_k veľkosti $p_k = P(X = x_k)$. Je konštantná na intervale $(x_k, x_{k+1}\rangle$. (Obr 8.4.)



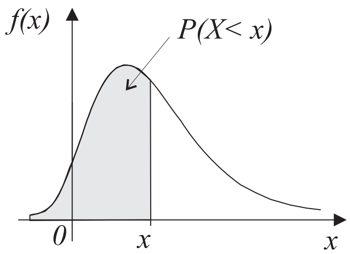
Obr 8.4

Spojitá náhodná premenná

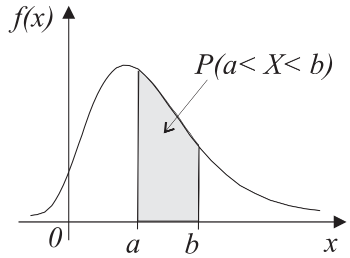
Definícia 8.4. Náhodná premenná X sa nazýva **spojitá**, ak existuje taká nezáporná, reálna, integrovateľná funkcia $f(x)$, že pre každé $x \in \mathcal{R}$ platí

$$\boldsymbol{F(x) = P\,(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.} \tag{8.6}$$

Funkcia $f(x)$ sa nazýva **hustotou pravdepodobnosti** náhodnej premennej X. (Obr 8.5.)



Obr. 8.5



Obr. 8.6

Vlastnosti hustoty pravdepodobnosti:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$ (8.7)

2. $f(x) \geq 0$, pre každé $x \in \mathcal{R}$.

3. Pre všetky $a, b \in \mathcal{R}, a < b$ platí:

$$P\,(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{8.8}$$

$$P\,(a \leq X < b) = P\,(a \leq X \leq b) = P\,(a < X < b) = P\,(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{8.9}$$

(Obr 8.6.)

4. V bodoch spojitosti hustoty pravdepodobnosti platí: $f(x) = F'(x)$.