

Vyšetřovanie funkcie $f \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ v jej stacionárnych bodoch

(39)

- Nech funkcia $f \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ má na nejakom okolí stacionárneho bodu $\bar{a}$ spojité všetky 2-ke parciálne derivácie a nesie

$$D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) = \sum_{j,k=1}^n \left[\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_k} \right]_{\bar{x}=\bar{a}} h_j h_k, \quad \bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$$

potom:

(a) Ak $D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) > 0$ pre všetky $\bar{h} \neq (0, 0, \dots, 0)$, potom f má v bode $\bar{a}$ ostré lokálne minimum.

(b) Ak $D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) < 0$ pre všetky $\bar{h} \neq (0, 0, \dots, 0)$, potom f má v bode $\bar{a}$ ostré lokálne maximum.

(c) Ak existujú $\bar{h}^{(1)} \neq \bar{h}^{(2)}$ také že $D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}^{(1)}) \cdot D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}^{(2)}) < 0$ tak f má

v $\bar{a}$ sedlový bod (nemá v $\bar{a}$ lokálny extrém)

v príkladoch na strane (38):

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$, $\bar{a} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1)$
 $D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) > 0$ pre všetky $\bar{h} \neq (0, 0, 0)$ jediný stacionárny bod f
 $\Rightarrow f$ má v $\bar{a} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1)$ ostré lokálne minimum

- $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$, $\bar{a} = (0, 0, 0)$ je jediný stac. bod f

$$D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) = 2h_1^2 - 2h_2^2 - 2h_3^2 \begin{cases} > 0 \text{ pre } \bar{h}^{(1)} = (1, 0, 0) \\ < 0 \text{ pre } \bar{h}^{(2)} = (0, 1, 0) \end{cases}$$

f má v $\bar{a} = (0, 0, 0)$ sedlový bod.

Vyšetrovanie funkcie $f \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ v jej stacionárnych bodoch

(40)

- Nech funkcia $f \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ má na nejakom okolí stacionárneho bodu $\bar{a} = (a_1, a_2)$ spojité všetky parciálne derivácie druhého rádu. Nech

$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \right)^2$$

Podom:

(a) ak $H_f(a_1, a_2) > 0$ & $\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right]_{\bar{x} = \bar{a}} < 0$

tak f má v $\bar{a}$ ostre lokálne maximum.

(b) ak $H_f(a_1, a_2) > 0$ & $\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right]_{\bar{x} = \bar{a}} > 0$

tak f má v $\bar{a}$ ostre lokálne minimum.

(c) ak $H_f(a_1, a_2) < 0$ tak f má v $\bar{a}$ sedlový bod.

- podmienka; ak $H_f(a_1, a_2) = 0$ potom f môže ale nemusí mať v $\bar{a}$ lokálny extrém.

✓ $f(x, y) = x^2 y$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -4x^2 \Rightarrow H_f(\bar{a}) = 0$

vo všetkých stac. bodoch f

Stacionárne body

$\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

pokračovanie →

→ pokračovanie

(41)

$f(0,3)=0$ a existuje $\mathcal{O}_f(0,3)$

že $f(x,y)=x^2y \geq 0$ pre $(x,y) \in \mathcal{O}_f(0,3)$

$\Rightarrow f$ má v $\bar{a}=(0,3)$ lokálne minimum

$\mathcal{O}_f(\bar{a}) = \mathcal{O}_f(0,3)$

$\bar{a}=(0,3)$

$x=0, y \in \mathbb{R}$ sú stacionárne body f

$f(0,-3)=0$ a existuje

$\mathcal{O}_f(0,-3)$ že $f(x,y)=x^2y \leq 0$ pre všetky $(x,y) \in \mathcal{O}_f(0,-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ má v $\bar{a}=(0,-3)$ lokálne maximum.

$f(0,0)=0$ ale v každom okolí $\mathcal{O}_f(0,0)$ existujú body $(x,y) \in \mathcal{O}_f(0,0)$ že $f(x,y) > 0$ aj body $(x,y) \in \mathcal{O}_f(0,0)$ že $f(x,y) < 0$. Preto f nemá v bode $\bar{a}=(0,0)$ lokálny extrém.

f má vo všetkých bodoch $\bar{a}=(0,y)$ kde $y > 0$ lokálne minimum (podobne ako v $\bar{a}=(0,3)$)

f má vo všetkých bodoch $\bar{a}=(0,y)$ kde $y < 0$ lokálne maximum (podobne ako v $\bar{a}=(0,-3)$)

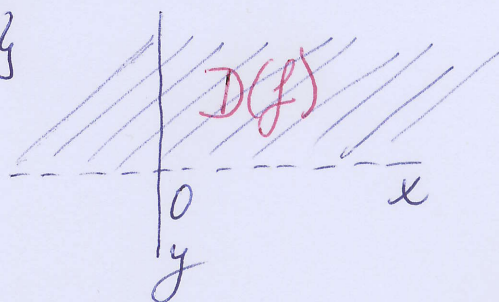
• $f(x,y)=x^2+y$; $\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \frac{\partial f}{\partial y}=1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ nemá stacionárne body

$\Downarrow$
 f nemá žiadne lokálne extrémny
(keďže je diferencovateľná v každom $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$)

✓ $f(x, y) = (x - y) \ln y$

(a) $D(f)$: $\ln y$ je definované iba pre $y > 0$ a teda

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$



(b) 1-ve par. derivácie
a diferenciability f

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \ln y, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\ln y + \frac{x - y}{y}$$

existujú na $D(f)$ a sú spojité na $D(f) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ je diferencovateľná na $D(f)$ (t.j. v každom
bode $a \in D(f)$).

(c) stacionárne body f : $\ln y = 0$
 $-\ln y + \frac{x - y}{y} = 0$ sčítaním rovnice $\frac{x - y}{y} = 0$
jediný stat. bod $\bar{a} = (1, 1) \in D(f)$
 $\ln y = 0 \Rightarrow y = 1$ $\frac{x - y}{y} = 0 \Rightarrow x = y$
 $\Rightarrow x = y = 1$

(d) lokálne extrémum

f na $D(f)$. Pretože f je diferencovateľná
v každom bode $D(f) \Rightarrow f$ môže mať lok. extrémum
len v stacionárnych bodoch f .

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y} + \frac{-y - (x - y)}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{x=1, y=1} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{x=1, y=1} = -2, \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right]_{x=1, y=1} = 1$$

$$H_f(1, 1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow f \text{ má v } \bar{a} = (1, 1) \text{ sedlový bod}$$

teda f nemá lokálne extrémum

Najdime lokálne extrémny funkcie

$$f(x, y, z) = e^{2z}(3xy - 2yz)$$

zrejme $D(f) = \mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y e^{2z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (3x - 2z) e^{2z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2e^{2z}(3xy - 2yz) + e^{2z}(-2y) = e^{2z}(6xy - 4yz - 2y)$$

$\Rightarrow f$ je diferencovateľná na $\mathbb{R}^3$ (možnosť
sprížiť všetky 1-re' parci. derivácie)

$$\text{stac body: } \begin{cases} 3y e^{2z} = 0 \\ (3x - 2z) e^{2z} = 0 \\ (6xy - 4yz - 2y) e^{2z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 0 \\ 3x - 2z = 0 \\ 6xy - 4yz - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{predlož:} \\ e^{2z} \neq 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{array}$$

z toho: $y = 0, z = \frac{3}{2}x, x \in \mathbb{R}$ ľubovoľné stac. body f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2e^{2z}(6xy - 4yz - 2y) +$$

$$+ e^{2z}(-4y) = e^{2z}(12xy - 8xy - 8y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3e^{2z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 6y e^{2z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 2e^{2z}(3x - 2z) + e^{2z}(-2) =$$

$$= e^{2z}(6x - 4z - 2)$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{\bar{a}} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{\bar{a}} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right]_{\substack{x=x \\ y=0 \\ z=\frac{3}{2}x}} = 2e^{3x} \cdot 0 = 0$$

→ pokračovanie

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right]_{\substack{x=x \\ y=0 \\ z=\frac{3}{2}x}} = 3e^{2\frac{3}{2}x} = 3e^{3x}, \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right]_{\substack{x=x \\ y=0 \\ z=\frac{3}{2}x}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right)_{\substack{x=x \\ y=0 \\ z=\frac{3}{2}x}} = e^{2\frac{3}{2}x} (6x - 4 \cdot \frac{3}{2}x - 2) = e^{3x} (-2)$$

$$\begin{aligned} D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) &= 0 \cdot h_1^2 + 0 \cdot h_2^2 + 0 \cdot h_3^2 + 2 \cdot 3 \cdot e^{3x} h_1 h_2 + \\ &+ 2 \cdot 0 \cdot h_1 h_3 + 2 \cdot e^{2\frac{3}{2}x} (6x - 4 \cdot \frac{3}{2}x - 2) h_2 h_3 = \\ &= 6e^{3x} h_1 h_2 - 4e^{3x} h_2 h_3, \text{ kde } x \in \mathbb{R} \text{ je dané ľubovoľné číslo.} \end{aligned}$$

$$D^2 f_{\bar{a}}(\bar{h}) = e^{3x} (6h_1 h_2 - 4h_2 h_3) \begin{cases} > 0 \text{ pre } \bar{h}^{(1)} = (1, 1, 0) \\ < 0 \text{ pre } \bar{h}^{(2)} = (0, 1, 1) \end{cases}$$

pretože $e^{3x} > 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Funkcia f má v každom bode $\bar{a} = (x, 0, \frac{3}{2}x), x \in \mathbb{R}$
(t.j. v každom bode priamky $p \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=\frac{3}{2}x \end{cases}$)
sedlový bod.

p je priamka v súradnicovej rovine (x, z)

