KINEMATIKA

1. Dva vlaky, z ktorých je jeden dlhý $l_1 = 150$m a druhý $l_2 = 200$m sa stretnú na voľných tratiach. Akú rýchlosť majú oba protiidúce vlaky, keď ich jazda vedľa seba trvá $t = 10$s a keď prvý vlak ubehne za tento čas dráhu $s = 160$m? $[v_1 = 16\mathrm{m.s}^{-1}, v_2 = 19\mathrm{m.s}^{-1}]$

2. Akou rýchlosťou v letí a aký smer musí mať lietadlo, aby za čas $t = 1$ hod preletelo v smere na sever dráhu $s = 200$ km, ak počas letu pôsobí severovýchodný vietor pod uhlom $\alpha = 35^o$ k poludníku rýchlosťou $v_1 = 30$ km/hod ? [v = 225.23km.h^{-1}, b = 4.38^o k poludníku]

3. Pohyb bodu je určený rovnicami $\mathbf{x} = A_1t^2 + B_11, \mathbf{y} = A_2t^2 + B_2$, kde $A_1 = 20$ cm.s^{-2}, $A_2 = 15$ cm.s^{-2}, $B_1 = 5$ cm, $B_2 = -3$ cm. Nájdite veľkosť aj smer rýchlosti a zrýchlenia v čase $t = 2$ s ! $[v = 2t\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 1 \text{ m.s}^{-1}, \alpha = 36.87^o$ voči osi $x, a = 2\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0.5 \text{ m.s}^{-2}, \beta = \alpha]$

4. Bod sa pohybuje po osi x tak, že závislosť jeho dráhy od času ja daná rovnicou $x = k/2(\mathrm{e}^{wt} + \mathrm{e}^{-wt})$, kde k, w sú známe konštanty. Nájdite rýchlosť a zrýchlenie bodu ako funkciu x !(Umocnite výrazy pre x a potom pre rýchlosť.) $[v = w\sqrt{x^2 - k^2}, a = \omega^2 x]$

5. Hmotný bod sa pohybuje v rovine tak, že časová závislosť jeho polohového vektora $\mathbf{r} = a\cos(\omega t)\mathbf{i} + a\cos(\omega t + j)\mathbf{j}$, kde a, j, ω sú známe konštanty. Dokážte, že pre $j = 90^o$ vykonáva rovnomerný pohyb po kružnici a vypočítajte vektor okamžitej rýchlosti hmotného bodu v čase t pre ľubovolné j ! $[x = a\cos(\omega t), y = -a\sin(\omega t), a^2 = x^2 + y^2, \mathbf{v} = -\omega a\{\sin(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t + j)\mathbf{j}\}]$

6. Vagón sa pohybuje po priamej dráhe so spomalením $a = 0.5\mathrm{ms}^{-2}$. V čase $t_0 = 0$s mal rýchlosť $v_0 = 54$km/h. Za aký čas t a na akej vzdialenosti s sa zastaví ? $[t = \frac{v_0}{a} = 30$s, s $= \frac{v_0^2}{2a} = 225$m].

7. Bežec na krátke trate ubehne $s = 100$m za $t = 12$s, z toho prvých $s_1 = 20$m rovnomerne zrýchlene a zvyšok dráhy konštantnou rýchlosťou. Aké má zrýchlenie a akú má rýchlosť, ktorou beží zvyšok trate ? $[a = \frac{(s+s_1)^2}{2s_1t^2} = 2.5\mathrm{ms}^{-2}, v = \frac{(s+s_1)}{t} = 10\mathrm{ms}^{-1}]$.

8. Akú rýchlosť malo auto, keď vodič po zhliadnutí prekážky až do zastavenia prešiel dráhu $s = 35$m? Jeho reakčný čas $t_r = 0,8$s a brzdil spomalením $a = 6.5\mathrm{ms}^{-2}$. $[v = 16.75\mathrm{ms}^{-1}]$.

9. Pozorovateľ stojaci v okamihu rozbehu vlaku pri jeho začiatku zaznamenal, že prvý vagón prešiel popri ňom za čas $t_1 = 4$s. Ako dlho bude popri ňom prechádzať n-tý vagón ($n = 7$), keď sú všetky vagóny rovnako dlhé, ak pohyb vlaku je priamočiary rovnomerne zrýchlený ? (Vyjadrite si zrýchlenie celého vlaku a zrýchlenie vagóna.) $[t_n = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 0,785$s].

10. Pozorovateľ stojaci na nástupišti zistil, že prvý vagón vlaku, približujúceho sa k stanici, prešiel okolo neho za čas $t_1 = 4$s a druhý za čas $t_2 = 5$s. Potom vlak zastavil tak, že začiatok vlaku bol $s = 75$m od pozorovateľa. Považujúc pohyb vlaku za priamočiary rovnomerne spomalený, určte spomalenie vlaku! $[a = \frac{2s(t_1-t_2)^2}{\left[\frac{1}{2}\left(t_1^2-t_2^2\right)-t_1t_2\right]^2} = 0.25\mathrm{ms}^{-2}]$.

11. Teleso A sa začína pohybovať s počiatočnou rýchlosťou $v_{01} = 2\mathrm{ms}^{-1}$ so stálym zrýchlením a. Za čas $\Delta t = 10$s od začiatku pohybu sa z toho istého miesta, začína pohybovať teleso B s počiatočnou rýchlosťou $v_{02} = 12\mathrm{ms}^{-1}$ s tým istým zrýchlením a. Pri akom maximálnom zrýchlení a teleso B dohoní teleso A ? [aby sa stretli v reálnom čase, musí byť $a < \frac{v_{02}-v_{01}}{\Delta t}; a < 1\mathrm{ms}^{-2}$].

12. Teleso vykonalo v poslednej sekunde svojho voľného pádu n-tinu svojej celkovej dráhy. Ako dlho a z akej výšky padalo? $[t = n\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right), h = \frac{1}{2}g\left[n^2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^2\right]]$.

13. Teleso vyhodíme z výšky h nad Zemou zvisle nahor s rýchlosťou v_0. Za aký čas za ním musíme voľne pustiť z tej istej výšky druhé teleso, aby dopadli na Zem súčasne ? $[\Delta t = \frac{v_0+\sqrt{v_o^2=2gh}-\sqrt{2gh}}{g}]$.

14. V miestnosti s výškou h je z podlahy zvislo nahor hodená lopta s počiatočnou rýchlosťou v_1. Pri odraze (od stropu aj podlahy) sa rýchlosť lopty zmenší na hodnotu $v = kv(k < 1)$. Aká musí byť minimálna rýchlosż lopty, aby sa odrazila od stropu dva razy ? $[v_1 > \sqrt{2gh\left(1 - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4}\right)}]$.

15. Teleso sa pohybovalo na prvej polovine svojej dráhy rovnomerne zrýchlene a na druhej pokračovalo rovnomeným pohybom. Druhé teleso prebehlo rovnomerne zrýchlene celú dráhu za rovnaký čas. V akom pomere sú zrýchlenia oboch telies? $[\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{8}]$.

16. Raketa vypustená vo vertikálnom smere sa pohybovala so zrýchlením a počas doby t_1 ,kým pracovali motory. Vypočítajte do akej výšky nad Zemou raketa vystúpi, ak zanedbáme odpor vzduchu a závislosť gravitačného zrýchlenia od výšky ! [$h = \frac{1}{2}at_1^2\left(1+\frac{a}{g}\right)$].

17. Teleso bolo vrhnuté po naklonenej rovine smerom nahor. Bod, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti d od začiatku pohybu, prebehne teleso dva razy, v čase t_1 nahor, a nadol v čase t_2 od začiatku pohybu. Určte poèiatoènú rýchlosť telesa v_0 a zrýchlenie pohybu a! [$v_0 = d\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}, a = \frac{2d}{t_1t_2}$].

18. Elektrický rušeň sa rozbieha z pokoja so zrýchlením, ktoré rovnomerne rastie a to tak, že v čase $t_1 = 100\text{s}$ má zrýchlenie $a_1 = 0.5\text{ms}^{-2}$. Vypočítajte rýchlosť rušňa v čase t_1 ako aj dráhu, ktorú rušeň za tento čas prešiel ! [$v_1 = \frac{1}{2}a_1t_1 = 25\text{ms}^{-1}, s_1 = \frac{1}{6}a_1t_1^2 = 833.33\text{m}$].

19. Zrýchlenie hmotného bodu pri jeho priamočiarom pohybe rovnomerne klesá zo začiatočnej hodnoty $a_0 = 10\text{ms}^{-2}$ v čase $t_0 = 0\text{s}$ na nulovú hodnotu v èase $t_1 = 20\text{s}$. Aká je rýchlosť hmotného bodu v èase t_1 a akú dráhu za tento čas vykonal, keď v čase t_0 bol v pokoji ? [$v_1 = \frac{1}{2}a_ot_1 = 100$ $\text{m.s}^{-1}, s_1 = \frac{1}{3}a_0t_1^2 = 1333.3$ m].

20. Teleso s počiatočnou rýchlosťou v_0 má pod pôsobením brzdiacej sily zrýchlenie $a = -kv^2$ (k je konštanta). Určte časovú závislosť rýchlosti a dráhy, ak je pohyb priamočiary? [$v = \frac{v_0}{1+v_0kt}, x = \frac{1}{k}\ln(v_0kt+1)$].

21. Delo je umiestnené na úpätí svahu,ktorý zviera s vodorovnou rovinou uhol α .Nájdite uhol β, ktorý zviera hlaveň dela so svahom,ak strela vystrelená z dela dopadne na svah pod pravým uhlom! [$\text{cotg}(\alpha) = 2\text{tg}(\beta)$]

22. Počiatočná rýchlosť strely z mínometu je v_0 a uhol, ktorý zviera s vodorovnou rovinou je α ($\alpha > 45^0$). Priamo k mínometu sa blíži tank s rýchlosťou v_t. V akej vzdialenosti d_1 tanku od mínometu musí mínomet vystreliť, aby tank zasiahol? V akej vzdialenosti d_2 od mínometu bude tank zasiahnutý? [$\text{d}_1 = \frac{\text{v}_0}{\text{g}}\left(\text{v}_0\sin(2\alpha) + 2\text{v}_\text{t}\sin(\alpha)\right), \text{d}_2 = \text{v}_02\sin(2\alpha)$]

23. Dve telesá sú hodené súčasne z toho istého miesta s počiatočnými rýchlosťami v_{01} a vi_{02}, ktoré zvierajú s vodorovnou rovinou uhly α_1 a α_2. Určte závislosť veľkosti a smeru ich vzájomnej rýchlosti od času počas pohybu, ak ich dráhy ležia v jednej rovine! [$\mathbf{v} = (\text{v}_{02}\cos(\alpha_2) - \text{v}_{01}\cos(\alpha_1)\mathbf{i} + (\text{v}_{02}\sin(\alpha_2 - \text{v}_{01}\sin(\alpha_1))\mathbf{j}$, je nezávislá od času, nemení smer ani veľ-kosť.]

24. Dve častice sú vystrelené z toho istého miesta s počiatočnými rýchlosťami v_{01} a v_{02} pod uhlami α_1 a α_2 k vodorovnej rovine ($\alpha_1 > \alpha_2$) tak, aby sa ešte za letu zrazili. Za akú dobu po vystrelení prvej musí byť vystrelená druhá? [$\Delta\text{t} = \frac{2\text{v}_{01}\text{v}_{02}\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\text{g}(\text{v}_{02}\cos(\alpha_2+\text{v}_{01}\cos(\alpha_1)}$]

25. Spojnica ústia hlavne a cieľa zviera s vodorovnou rovinou uhol ϕ a ich vzdialenosť je d. Určte rýchlosť strely po opustení hlavne, ak hlaveň zviera s vodorovným smerom uhol α ! [$\text{v}_0 = \sqrt{\frac{\text{gd}\cos^2(\phi)}{2\cos^2(\alpha)(\text{tg}(\alpha)\cos(\phi)-\sin(\phi))}}$]

26. Guľôčku sme vystrelili vodorovne vo výške h pri jednej stene. Akú minimálnu rychlosť musíme udeliť guľôčke, aby sa odrazila dva razy od druhej steny pred dopadom na podlahu? Vzdialenosť stien je d a guľôčka pri odraze nestráca žiadnu energiu (veľkosť rýchlosti sa zachováva a uhol dopadu na stenu je rovný uhlu odrazu). [$\text{v}_0 > \sqrt{\frac{9\text{gd}^2}{2\text{h}}}$]

27. Koleso s polomerom R sa valí po ceste s rýchlosťou v. Kúsky blata sú vymršťované zo všetkých bodov na obvode kolesa. Vypočítajte do akej najväčšej výšky nad cestou môžu vyletovať ! [$\text{h}_{\text{max}} = \text{R} + \frac{\text{R}^2\text{g}}{2\text{v}_0^2} + \frac{\text{v}_0^2}{2\text{g}}$]

28. Koleso s polomerom R rotuje s frekvenciou f. Pôsobením brzdiacej sily ho zastavíme za čas t_1. Aké bolo tangenciálne, dostredivé a celkové zrýchlenie počas pohybu (ak predpokladáme, že tangenciálne zrýchlenie je konštantné) ? [$\text{a}_\text{t} = \frac{2\pi\text{Rf}}{\text{t}_1}, \text{a}_\text{n} = 4\pi^2\text{Rf}^2\left(1-\frac{\text{t}}{\text{t}_1}\right)^2, \text{a}_\text{c} = 2\pi\text{Rf}\sqrt{\frac{1}{\text{t}_1^2} + 4\pi^2\text{f}^2\left(1-\frac{\text{t}}{\text{t}_1}\right)^4}$]

29. Polohový vektor častice závisí od času nasledovne: $\mathbf{r} = \text{t}\,\mathbf{i} + (\text{t} + 0.5\text{t}^2\,)\mathbf{j} + \frac{4}{\pi^2}\sin(\phi t/2)\,\mathbf{k}$. Vypočítajte veľkosť rýchlosti, tangenciálneho a celkového zrýchlenia v čase t_1 ! [$\text{v} = \sqrt{1 + (1+\text{t}_1)^2 + \frac{4}{\pi^2}\cos^2(\frac{\pi}{2}\text{t}_1)}$, $\text{a}_\text{t} = \frac{1+\text{t}_1-\frac{1}{\pi}\sin(\pi\text{t}_1)}{\sqrt{1+(1+\text{t}_1^2+\frac{4}{\pi^2}\cos^2(\frac{\pi}{2}\text{t}_1)}}, \text{a}_\text{c} = \sqrt{1+\sin^2(\frac{\pi}{2}\text{t}_1)}$]

30. Hmotný bod sa pohybuje z pokoja po kružnici s polomerom R tak, že jeho uhlová súradnica závisí od času nasledovne $\phi = \text{A} + \text{Bt}^3$, kde A,B sú konštanty. Vypočítajte veľkosť tangenciálneho, dostredivého a celkového zrýchlenia v čase t_1. V akom čase t_2 bude uhol medzi vektorom rýchlosti a vektorom celkového zrýchlenia α ? [$\text{a}_\text{t} = 6\text{RBt}_1, \text{a}_\text{n} = 9\text{RB}^2\text{t}_1^4, \text{a}_\text{c} = 3\text{RBt}_1\sqrt{4+9\text{B}^2\text{t}_1^6}, \text{t}_2 = \sqrt[3]{\frac{2tg(\alpha)}{3B}}$]

31. Koleso sa otáča tak, že závislosť uhla otočenia polomeru kolesa od času má tvar $\phi = \mathrm{A} + \mathrm{Bt} + \mathrm{Ct}^2 + \mathrm{Dt}^3$, kde A = 1 rad, B = 1 rad.s^{-1}, C = 1 rad.s^{-2}, d = 1 rad.s^{-3}. Nájdite polomer kolesa R, ak vieme, že na konci druhej sekundy pohybu normálové zrýchlenie a_n = 346 m.s^{-2} ! [$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{a_n}}{(\mathrm{B}+2\mathrm{Ct}+3\mathrm{Dt}^2)^2} = 1.2\mathrm{m}$]

32. Počet otáčok brúsneho kotúča sa poèas t = 10 s zníži z n_1 = 3000 ot.min^{-1} na n_2 = 2000 ot.min^{-1}. Koľko ráz sa otočí kotúč v uvedenom čase ? [$\mathrm{z} = \frac{\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2}{2}\mathrm{t} = 416.65$]

33. Počas t = 5 s koleso vykoná z = 120 otáčok, pričom sa zdvojnásobí uhlová rýchlosť kolesa. Aká je uhlová rýchlosť na začiatku a na konci tohto deja, ak uhlové zrýchlenie je konštantné ? [$\omega_0 = \frac{4\pi\mathrm{z}}{3\mathrm{t}} = 100.53\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_1 = 201.06\mathrm{s}^{-1}$]

34. Koleso rozbiehajúce sa zo stavu pokoja vykoná v druhej sekunde z = 16 otáčok. Aké je uhlové zrýchlenie kolesa ϵ , ak je konštantné? [$\epsilon = \frac{4\pi z}{\mathrm{t}_2^2-\mathrm{t}_1^2} = 67.02\mathrm{s}^{-2}$]

35. Bod sa pohybuje po kružnici s polomerom R = 0,1 m s komštantným tangenciálnym zrýchlením a_t. Na konci piatej otáčky má obvodovú rýchlosť v_5 = 0,1 m.s^{-1}.

1. Aký čas t_5 uplynul od začiatku pohybu, kým bod získal rýchlosť v_5 ?
2. Aká je veľkosť normálového zrýchlenia a_{n1} v čase t_1 = 10 s od začiatku pohybu ?
3. Aké je celkové zrýchlenie a bodu v čase t_1 od začiatku pohybu ?

[$\mathrm{t}_5 = \frac{4\pi\mathrm{Rn}}{\mathrm{v}_5} = 20\pi\mathrm{s}, \mathrm{a_n} = \frac{\mathrm{t}_1^2\mathrm{v}_5^4}{\mathrm{R}^3 400\pi^2} = \frac{1}{40\pi^2}\mathrm{m.s}^{-2}, \mathrm{a} = \frac{1}{40\pi}\sqrt{\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{5}} = 2.99.10^{-3}\mathrm{m.s}^{-2}$]

36. Bod sa pohybuje z pokoja po kružnici s polomerom R = 0.2 m s konštantným tangenciálnym zrýchlením a_t. Aké je normálové zrýchlenie a_{n1} v čase t_1 = 20 s od začiatku pohybu, keď na konci tretej otáčky mal obvodovú rýchlosť v_3 = 0,2 m.s^{-1} ? [$\mathrm{a_{n1}} = \frac{\mathrm{v}_3^4\mathrm{t}_1^2}{\mathrm{R}^3 144\pi^2} = 0.0563\mathrm{m.s}^{-2}$]

37. Bod sa pohybuje po kružnici s polomerom R tak, že prebehnutá dráha s = v_0 t - 0.5 k t^2, kde k,v_0 sú konštanty. Určte

1. veľkosť tangenciálneho zrýchlenia
2. veľkosť normálového zrýchlenia
3. veľkosť celkového zrýchlenia
4. v ktorom čase t_x je celkové zrýchlenie rovné konštante k ?
5. počet obehov n_x bodu za čas t_x !

[$\mathrm{a_t} = -\mathrm{k}, \mathrm{a_n} = \frac{(\mathrm{v}_0-\mathrm{kt})^2}{\mathrm{R}}, \mathrm{a} = \sqrt{\mathrm{k}^2+\frac{(\mathrm{v}_0-\mathrm{kt})^4}{\mathrm{R}^2}}, \mathrm{t_x} = \frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{k}}, \mathrm{n_x} = \frac{\mathrm{v}_0^2}{4\pi\mathrm{Rk}}$]

38. Koleso s polomerom r = 0.3 m sa dáva do pohybu pomocou namotaného vlákna, na ktorom je zavesené závažie. Za čas t = 12 s klesne závažie o h = 5.4 m. Akú má frekvenciu f a koľko otočení z vykoná koleso za tento čas? [$\mathrm{f} = \frac{\mathrm{h}}{\pi\mathrm{rt}} = 0.47746\mathrm{s}^{-1}, \mathrm{z} = \frac{\mathrm{h}}{2\pi\mathrm{r}} = 2.864$]

39. Koleso s polomerom R sa začína valiť po vodorovnej ceste tak, že jeho stred sa pohybuje so zrýchlením a_0. Vypočítajte rýchlosť a zrýchlenie bodu na obvode kolesa, ktorý sa na začiatku pohybu dotýka cesty, ako funkciu času ! Smery v a a určte pre uhol pootočenia kolesa z pôvodnej polohy o 30^o len graficky na obrázku. (Riešte ako zložený pohyb - sústava S' sa bude pohybovať priamočiaro so zrýchlením a_0.) [$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + \mathrm{v}'$, kde $\mathrm{v}' = \mathrm{a}_0\mathrm{t}, \mathrm{a} = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}'$, kde $\mathrm{a}' = \frac{\mathrm{a}_0^2\mathrm{t}^2}{\mathrm{R}}$]

40. Hmotný bod sa pohybuje z vrcholu kužeľa pozdåž povrchovej priamky so zrýchlením a_0 vzhľadom na kužeľ. Vypočítajte veľkosť rýchlosti a zrýchlenia v čase t, ak kužeľ rotuje s uhlovou rýchlosťou ω a povrchová priamka zviera uhol α s osou kužeľa ! [$\mathrm{v} = \mathrm{a}_0\mathrm{t}\sqrt{1+\frac{1}{4}\mathrm{t}^2\omega^2\sin^2(\alpha)}, \mathrm{a} = \mathrm{a}_o\sqrt{1+\omega^2\mathrm{t}^2\sin^2(\alpha)\left(4+\frac{1}{4}\omega^2\mathrm{t}^2\right)}$]