4. Matematické kyvadlo

Vyšetrite závislosť doby kmitu matematického kyvadla od výchylky. Z nameranej závislosti určte dobu kmitu $T(0^{o})$ a hodnotu tiažového zrýchlenia g v laboratóriu.

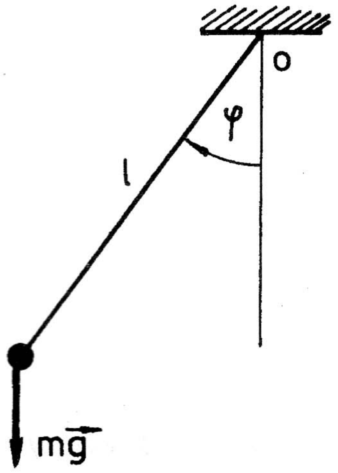
TEORETICKÝ ÚVOD

Matematické kyvadlo je idealizovaný mechanický oscilátor, pozostávajúci z bodu s hmotnosťou m zavesenom na nehmotnej niti s dĺžkou l (obr. 4.1).

Pohybová rovnica fyzikálneho i matematického kyvadla je totožná s rovnicou opisujúcou pohyb telesa okolo osi, ktorá neprechádza ťažiskom

$$\vec{M} = I\,\vec{\varepsilon} \tag{4.1}$$

kde I je moment zotrvačnosti pohybujúceho sa telesa vzhľadom na os O. Pre kyvadlo na obr. 4.1 bude mať rovnica (4.1) tvar



Obr. 4.1
Matematické kyvadlo

$$I\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\,l\,\sin\varphi \tag{4.2}$$

kde l je dĺžka závesu matematického kyvadla.

Kyvadlo bude vykonávať harmonický pohyb len pri malých výchylkách z rovnovážnej polohy, keď sila udržiavajúca kyvadlo v pohybe je úmerná okamžitej výchylke z rovnovážnej polohy a smeruje proti nej. Vtedy $\sin\varphi \doteq \varphi$ a rovnica (4.2) sa zjednoduší a bude mať tvar

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - mg\ell\varphi \qquad (4.3)$$

Riešením rovnice (4.3) je harmonická funkcia

$$\varphi(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \qquad (4.4)$$

kde

$$\omega_0^2 = \frac{mg\ell}{I} = \frac{mg\ell}{m\ell^2} = \frac{g}{\ell}$$

Ak začiatok počítania času zvolíme v okamihu maximálnej výchylky φ_0 kyvadla, môžeme pohyb kyvadla opísať funkciou

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$$

Doba kmitu T_0 pre malé uhly φ_0 (do 5^0) je potom daná vzťahom

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (4.5)$$

a nezávisí od výchylky φ_0.

METÓDA MERANIA

Pohyb v laboratóriu realizovaného "matematického kyvadla" nie je netlmený harmonický pohyb, ale uplatňuje sa tlmenie kyvadla brzdením v prostredí pohybu a pri väčších výchylkách kyvadla z rovnovážnej polohy pohyb kyvadla už nie je prísne harmonický a jeho pohybový stav opisuje rovnica (4.2). Jej riešením dostaneme pre dobu kmitu kyvadla vzťah

$$T(\varphi_0) = T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \dots\right] \quad (4.6)$$

kde T_0 je doba kmitu pri výchylkách $\varphi_0 \longrightarrow 0^o$.

Pre praktické meranie postačuje uvažovať prvé dva členy v zátvorke na pravej strane vzťahu (4.6), takže doba kmitu $T(\varphi_0)$ bude daná vzťahom

$$T(\varphi_0) = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right) \quad (4.7)$$

Vplyv tlmenia sa prejaví v zmenšovaní sa výchylky s časom i zmenou uhlovej frekvencie podľa vzťahov

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0\, e^{-bt} \cos(\omega t) \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

kde b je koeficient útlmu, pre ktorý platia vzťahy

$$\ln \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)} = bT$$

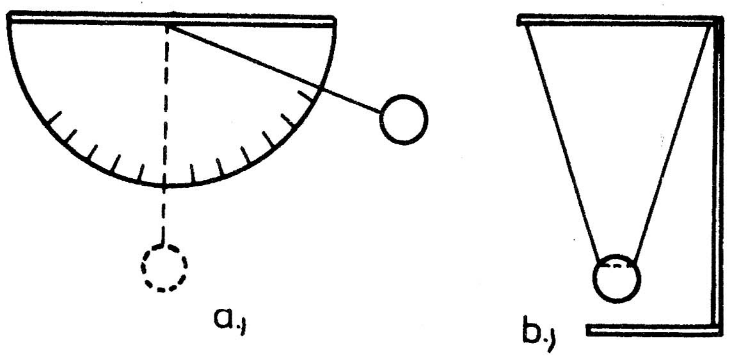
alebo

$$b = \frac{\ln \dfrac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)}}{t_2 - t_1}$$

kde T je doba kmitu tlmených kmitov, $\varphi(t_1)$ a $\varphi(t_2)$ sú amplitúdy kmitov odmerané v časoch t_1 a t_2.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky: matematické kyvadlo - realizované guľôčkou zavesenou na dvojitom vlákne, čím zabezpečíme, že kyvadlo kmitá v rovine rovnobežnej s rovinou uhlomeru (obr. 4.2) presné stopky, dĺžkové meradlo



Obr. 4.2 Model matematického kyvadla

b) Postup práce:

1. Odmerajte dobu kmitu T_0 pre malé výchylky kyvadla ($\varphi_0 \sim 5^0$). Merajte dobu 50-tich kmitov niekoľkokrát (Tab. 4.1) a vypočítajte aritmetický priemer. Odmerajte vzdialenosť ℓ .
2. Pre uhly 10^0 - 50^0 odmerajte závislosť $T(\varphi_0)$ (tab. 4.2) a porovnajte ju s teoretickou závislosťou podľa vzťahu (4.7).
3. Pre amplitúdu $\varphi_0 = 50^0$ odmerajte výchylku po 50-tich kmitoch a vypočítajte koeficient útlmu b; odmerajte aj dobu kmitu T tlmených kmitov.

Vyhodnotenie:

Na základe merania č. 1 vypočítajte hodnotu tiažového zrýchlenia g použitím vzťahu (4.5).

Extrapoláciou závislosti $T(\varphi_0)$ alebo lineárnej závislosti $T(\sin^2\frac{\varphi_0}{2})$ určte $T(0^o)$ a pomocou nej vypočítajte hodnotu tiažového zrýchlenia g. Porovnajte tento výsledok s hodnotou určenou z merania č. 1 a v obidvoch prípadoch určte relatívnu chybu merania použijúc hodnotu g_B = 9,806 $m.s^{-2}$ pre Bratislavu.

Tab. 4.1 ℓ =

i	1	2	3	
50 T_0 (s)				

Tab. 4.2

φ_0	2 T (s)										T	$\frac{\varphi_0}{2}$	$\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(s)	2	

OTÁZKY a PROBLÉMY

1. Ktorá poloha - krajná alebo rovnovážna - je výhodnejšia na meranie doby kmitov a prečo?
2. Aký tvar tlmiacej sily prepokladáme v prípade, ktorý vedie k vzťahu (4.8)?