

3. Určenie momentov zotrvačnosti tuhých telies pomocou kyvadla na trifilárnom závесе

Určte moment zotrvačnosti vybraných telies.

TEORETICKÝ ÚVOD A METÓDA MERANIA

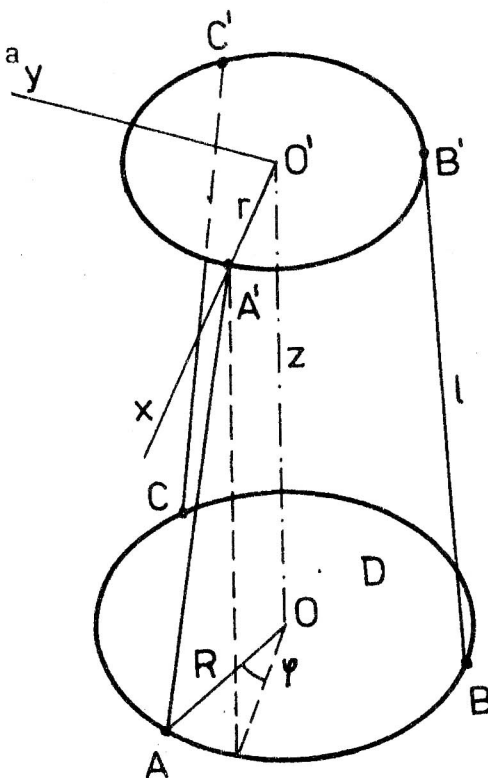
Moment zotrvačnosti I tuhého telesa vzhľadom na nejakú os je definovaný

$$I = \int r^2 dm \quad (3.1)$$

kde r je kolmá vzdialenosť hmotného elementu dm od osi.

V prípade jednoduchých telies možno integrál vo vzťahu (3.1) vypočítať, zatiaľ čo pri zložitých telesách sa moment zotrvačnosti určuje meraním. Jednou z metód merania momentu zotrvačnosti je metóda pomocou kyvadla na trifilárnom závесе (obr. 3.1).

Homogénna kruhová doska D je symetricky zavesená na troch rovnako dlhých nitiach AA' , BB' , CC' tak, že body A , B , C a A' , B' , C' tvoria vrcholy rovnostranných trojuholníkov s ťažiskami O a O' nad sebou, ktorými prechádza aj zvislá os otáčania spodnej dosky. Trojuholník $A'B'C'$ je vo vodorovnej rovine pri kývaní kyvadla nepohyblivý. Vychýlením spodnej



Obr. 3.1 Kyvadlo na trifilárnom závесе

dosky D z rovnovážnej polohy o uhol φ vznikne moment síl, ktorý má snahu vrátiť dosku späť do rovnovážnej polohy a po pustení začne kruhová doska vykonávať kmity okolo zvislej osi. Je nutné vypočítať periodu T malých kmitov dosky.

Pri odvodzovaní zanedbáme trenie a deformačnú prácu na skrútenie závesných nití. Ide o pohyb v homogénnom tiažovom poli Zeme, pričom systém je konzervatívny, t.j. zachováva sa jeho celková energia E.

Potenciálnu energiu kladieme nulovú v rovnovážnej polohe. Potom

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + Mg(z_0 - z) = E \quad (3.2)$$

kde I je moment zotrvačnosti kruhovej dosky D, M je jej hmotnosť, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ je uhlová rýchlosť otáčania dosky okolo osi OO' , z_0 je vzdialenosť bodov O a O' v rovnovážnej polohe (pri $\varphi = 0$), $z = z(\varphi) = z[\varphi(t)]$ je vzdialenosť OO' ako funkcia φ (resp. času t), E je celková energia systému.

Vypočítajme $z = z(\varphi)$. Kartézsky súradnicový systém zvolíme tak, aby jeho začiatok ležal v bode O' , z-ová os prechádzala od O' k O. Voľba smeru x-ovej osi je ľubovoľná (v rovine $A'B'C'$), uhol φ meriame od x-ovej osi. Súradnice bodov A a A' sú potom $(R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$ a $(r, 0, 0)$, pričom význam symbolov R a r je zrejmý z obr. 3.1. Vzdialenosť AA' , čo je dĺžka nití l , je

$$l^2 = (R \cos \varphi - r)^2 + R^2 \sin^2 \varphi + z^2 \quad (3.3)$$

odtiaľ

$$z^2 = l^2 - R^2 - r^2 + 2Rr \cos \varphi \quad (3.4)$$

Z výrazu pre z_0

$$z_0^2 = l^2 - R^2 - r^2 + 2Rr$$

(vtedy je $\cos \varphi = 1$) dostaneme

$$z^2 = z_0^2 - 2Rr(1 - \cos \varphi) \quad (3.5)$$

V ďalšom budeme predpokladať, že uhol φ je "malý", takže $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, a tiež, že

$$\frac{Rr\varphi^2}{z_0^2} \ll 1$$

Pre z dostaneme

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{z_0^2 - Rr\varphi^2} = z_0 \sqrt{1 - \frac{Rr\varphi^2}{z_0^2}} \doteq \\ &\doteq z_0 \left(1 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0^2}\right) = z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Po dosadení do (3.2) za z zo vzťahu (3.6) máme rovnicu

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + Mg \frac{Rr}{2z_0} \varphi^2 = E \quad (3.7)$$

Derivovaním rovnice (3.7) podľa času dostaneme pohybovú rovnicu pre malé kmity dosky

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + Mg \frac{Rr}{z_0} \varphi = 0 \quad (3.8)$$

Riešenie rovnice (3.8) možno napísať v tvare (presvedčte sa dosadením)

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{MgRr}{Iz_0}} t + \alpha\right) \quad (3.9)$$

kde amplitúda kmitov φ_0 a uhol α sú dané začiatočnými podmienkami. Pre periodu kmitov T vyplýva z rovnosti (3.9) výraz

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I z_0}{MgRr}} \quad (3.10)$$

z ktorého pre moment zotrvačnosti I máme formulu

$$I = kMT^2 \quad (3.11)$$

kde

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \quad (3.12)$$

je konštanta prístroja (daná jeho konštrukciou).

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

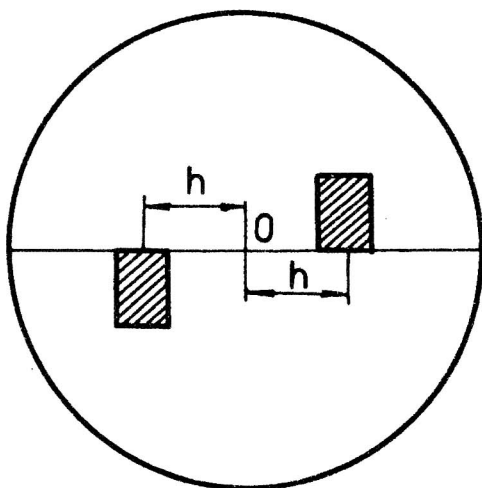
a) Prístroje a pomôcky: kyvadlo na trifilárnom závесе, telesá s neznámym momentom zotrvačnosti, stopky (prístroj na meranie času), dĺžkové meradlo, posuvné meradlo, váhy

Vrchný záves kyvadla je prispôsobený na rozkývanie kyvadla pomocou dvoch medzikruhov, ktorých vzájomné pootočenie možno merať v dielikoch (1 dielik = 4^0). Pri meraní používajte výchylku maximálne 1,5 dielika.

b) Postup práce:

1. Odmerajte z_0 , R a r a vypočítajte konštantu prístroja k . Nájdite veľkosť chyby s_k .
2. Určte moment zotrvačnosti I_0 základnej kruhovej dosky z odmeranej doby kmitu kyvadla a porovnajte ho s vypočítanou hodnotou ak viete, že doska s polomerom R_0 je homogénna a jej hmotnosť M_0 je údaná na prístroji. Počet kmitov potrebných na určenie T určí vedúci cvičenia (tab. 3.1).

3. Z definície vyplýva, že moment zotrvačnosti je aditívna veličina, t.j. moment zotrvačnosti dvoch navzájom pevne spojených telies je súčtom ich momentov zotrvačnosti vzhľadom na tú istú os otáčania. Na základe tejto vlastnosti určte moment zotrvačnosti I_1 kruhovej dosky s otvormi (tab. 3.2).
4. Umiestnite na základnú dosku do stredu dva olovené kvádre nastojato a proti sebe, ktoré budete postupne posúvať k okrajom dosky symetricky voči stredu tak, aby ste mohli zmerať závislosť $T = f(h)$, kde h je vzdialenosť stredov spodných hrán kvádrov od stredu dosky (obr. 3.2).



Obr. 3.2 Pohľad zhora na základnú dosku s posunutými hranolmi

Na meranie h používajte kružnice na základnej doske, ktorých vzdialenosť je 1 cm.

Použitím Steinerovej vety odvodíme pre štvorec doby kmitu T základnej dosky s kvádrami vzťah

$$T^2 = a + bh^2 \quad (2.13)$$

kde

$$b = \frac{M_{kv}}{k(M_0 + M_{kv})} \quad (3.14)$$

Zo vzťahu (3.14) možno vypočítať hmotnosť obidvoch kvádrov M_{kv} zo známej smernice b

$$M_{kv} = \frac{bk}{1 - bk} M_0 \quad (3.15)$$

a túto porovnať s jej nameranou hodnotou. Určte M_{kv} zo vzťahu (3.15) a zistite, o koľko percent sa líši od jej hodnoty určenej vážením. Na výpočet veličiny b použite vzťah (13) z kapitoly "Metódy spracovania...". Kvôli kontrole vyneste na milimetrový papier závislosť medzi T^2 a h^2 a porovnajte vypočítanú hodnotu smernice b s odčítanou z tohto grafu (tab. 3.3).

Tab. 3.1

$M_0 =$

i					
50 T_0 (s)					

Tab. 3.2

$M_1 =$

i					
50 T_1 (s)					

Tab. 3.3

i	h (cm)	50 T (s)	h^2 (cm ²)	T^2 (s ²)

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Pri akých zjednodušeníach bola odvodená formula (3.11) pre I?
2. Možno uvedenú metódu použiť na určenie momentu zotrvačnosti telesa, ktorého ťažisko neleží na osi otáčania základnej dosky D?
3. Rozhodnite, v ktorom z nasledujúcich prípadov bude meranie doby kmitu presnejšie: čas odčítame pri maximálnej amplitúde (vtedy $\frac{d\varphi}{dt} = 0$), alebo pri prechode kyvadla cez rovnovážnu polohu ($\frac{d\varphi}{dt}$ je maximálna)!
4. Ktorú z potrebných veličín na určenie momentu zotrvačnosti musíme merať čo najpresnejšie?
5. Čo tvrdí Steinerova veta?