2. Maxwellovo kyvadlo

Z nameraných charakteristických hodnôt Maxwellovho kyvadla a jeho pohybu určte moment zotrvačnosti zotrvačníka tohto kyvadla voči jeho rotačnej osi.

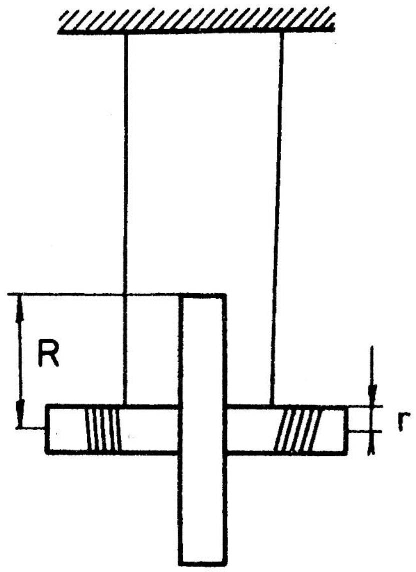
TEORETICKÝ ÚVOD

Ak tuhé teleso za účinku vonkajšej sily rotuje okolo okamžitej osi rotácie o, platí preň pohybová rovnica

$$\vec{M}_0 = I\vec{\varepsilon} \tag{2.1}$$

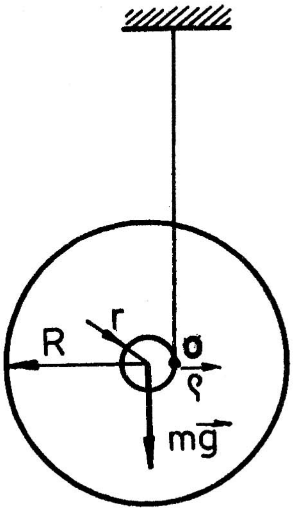
kde I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os rotácie o, $\vec{\varepsilon}$ je uhlové zrýchlenie telesa, $\vec{M}_0$ je moment vonkajších síl vzhľadom na os o.

Nech teleso má tvar homogénnej kruhovej dosky s polomerom R a je zavesené na dvoch rovnobežných vláknach navinutých na súosej valcovej tyčinke s polomerom r (obr.2.1). Hmotnosť tohto telesa (doska + tyčinka) je m.



Obr. 2.1
Maxwellovo kyvadlo

V tiažovom poli Zeme sa vlákna odvíjajú a teleso klesá zvisle nadol. Okamžitý pohyb telesa je jeho rotačný pohyb okolo osi o, ktorá je vodorovnou povrchovou priamkou valcovej tyčinky, na ktorej sú vlákna navinuté (obr. 2.2). Vonkajšou silou pôsobiacou na teleso je jeho tiaž mg, a tiež reakcie na sily, ktorými sú napínané závesné vlákna. Tieto reakcie však v pohybovej rovnici nemusíme uvažovať, pretože majú svoje pôsobiská na okamžitej osi rotácie telesa a v dôsledku toho sú ich momenty vzhľadom na túto os rovné nule.



Obr. 2.2.
Bočný pohľad na kyvadlo

Pri pohybe v prostredí, ktoré kladie pohybu odpor, musíme medzi vonkajšie sily uvažovať aj odporové sily.

Maxwellovo kyvadlo je vlastne zotrvačník opísaný vyššie a realizovaný v laboratóriu tak, že os zotrvačníka sa môže pohybovať vo zvislom vedení - drážke.

Po uvoľnení zotrvačníka z jeho zvýšenej polohy h_0 zotrvačník klesá, závesné nite sa odvíjajú a jeho polohová energia sa postupne mení na kinetickú. Pri prechode spodnou úvraťou nastáva okamžitá zmena smeru translačného pohybu zotrvačníka - nite sa odvinuli a v dôsledku rotačného pohybu zotrvačníka sa začnú na tyčinku navíjať. Zotrvačník však teraz nevystúpi do pôvodnej výšky h_0, pretože počas jeho pohybu dochádza k energetickým stratám najmä trením a pri deformácii navíjajúcich, resp. odvíjajúcich sa nití. V prvom priblížení môžeme predpokladať, že energetické straty sú úmerné dráhe, ktorú zotrvačník prešiel.

Uvažujme, že zotrvačník po uvoľnení klesne o výšku h. Jeho polohová energia sa zmenšila o mgh, zväčšila sa kinetická energia zotrvačníka a energetické straty.

Platí:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\,\omega^2 + Fh = mgh \qquad (2.2)$$

kde v a ω sú okamžité hodnoty rýchlosti ťažiska a uhlovej rýchlosti, I_0 je moment zotrvačnosti zotrvačníka vzhľadom na os rovnobežnú s okamžitou osou otáčania a prechádzajúcou ťažiskom, F je celková odporová sila pôsobiaca na pohybujúci sa zotrvačník.

Pri určovaní charakteristických veličín pohyb zotrvačníka (v, a, s,...) môžeme vychádzať z rovnice (2.1) alebo (2.2). Rozhodli sme sa, že použijeme rovnicu (2.2). Jej úpravou dostaneme

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\,\omega^2 = (mg - F)h$$

Platí

$$\omega = \frac{v}{r}$$

a teda

$$\left(m + \frac{I_0}{r^2}\right)v^2 = 2(mg - F)h$$

Derivovaním poslednej rovnice podľa času dostaneme

$$\left(m + \frac{I_0}{r^2}\right)2v\,\frac{dv}{dt} = 2(mg - F)\,\frac{dh}{dt}$$

Ak dosadíme

$$\frac{dh}{dt} = v \qquad a \qquad \frac{dv}{dt} = a_k$$

kde a_k je zrýchlenie ťažiska pri klesaní, dostaneme

$$\left(m + \frac{I_0}{r^2}\right) a_k = mg - F$$

odkiaľ

$$a_k = \frac{r^2(mg - F)}{I_0 + mr^2} \tag{2.3}$$

Rovnaký výsledok dostaneme, ak vychádzame z pohybovej rovnice (2.1). Pri určení momentu vonkajších síl $\vec{M}_0$ musíme pochopiteľne, okrem momentu tiažovej sily vzhľadom na os o, počítať aj s momentom, ktorý vyvolá sila F. Vychádza

$$I\,\vec{\varepsilon} = rmg\,\vec{\varrho} - Fr\,\vec{\varrho} = r(mg - F)\vec{\varrho}$$

kde $\vec{\varrho}$ je jednotkový vektor určujúci kladný smer rotačnej osi orientovaný pred nákresnú rovinu (obr. 2.2). Ďalší výpočet prenecháme čitateľovi.

Zo vzťahu (2.3) vyplýva, že zrýchlenie ťažiska za predpokladu nemennosti sily F je konštantné a za čas t_k zotrvačník prejde pri klesaní dráhu

$$s = \frac{a_k t_k^2}{2} = \frac{(mg - F)\,r^2}{2(I_0 + mr^2)}\,t_k^2$$

odkiaľ

$$I_0 = \frac{(mg - F)r^2}{2}\,\frac{t_k^2}{s} - mr^2 \tag{2.4a}$$

Vyšetrovaním pohybu zotrvačníka pri jeho stúpaní by sme analogickým spôsobom našli vzťah

$$I_0 = \frac{(mg + F)r^2}{2}\,\frac{t_v^2}{s} - mr^2 \tag{2.4b}$$

kde t_v je čas potrebný na výstup zotrvačníka po dráhe s.

Po odmeraní všetkých potrebných hodnôt môžeme moment zotrvačnosti vypočítať zo vzťahov (2.4a) a (2.4b).

METÓDA MERANIA

Ak Maxwellovo kyvadlo spustíme z výšky h_0, začne klesať smerom nadol, dosiahne najnižšiu polohu h_z a znovu začne vystupovať nahor. V dôsledku energetických strát vystúpi postupne do výšok $h_1, h_2, \ldots, h_i$. V prvom priblížení môžeme predpokladať, že energetické straty sú úmerné celkovej dráhe, ktorú zotrvačník prešiel. Ak sa zotrvačník pri svojom prvom stúpaní zastaví vo výške h_1, platí

$$mg(h_0 - h_1) = F(s_0 + s_1) \qquad (2.5)$$

kde

$$s_0 = h_0 - h_z \quad , \qquad s_1 = h_1 - h_z$$

a všeobecne

$$s_i = h_i - h_z$$

V zásade moment zotrvačnosti I_0 a silu F môžeme určiť zo vzťahov (2.4) a (2.5) pomocou nameraných charakteristických hodnôt prislúchajúcich jedinému cyklu klesanie - výstup.

Presnosť výsledku môžeme zvýšiť, ak zmeriame charakteristické hodnoty viacerých cyklov, napr. 10-tich. Pre každý pokles a výstup môžeme napísať rovnicu

$$mg(h_i - h_{i+1}) = F(s_i + s_{i+1})$$

teda celkom 10 rovníc.

Ich sčítaním a úpravou dostaneme

$$F = \frac{mg(h_0 - h_{10})}{s_0 + s_{10} + 2\sum_{i=1}^{9} s_i} \qquad (2.6)$$

Podobne, vychádzajúc zo vzťahov (2.4a) a (2.4b) pre moment zotrvačnosti, dostaneme

$$I_0 = \frac{(mg - F)r^2}{20} \sum_{i=0}^{9} \frac{t_{ki}^2}{s_i} - mr^2 \qquad (2.7a)$$

pre klesanie zotrvačníka a

$$I_0 = \frac{(mg + F)r^2}{20} \sum_{i=1}^{10} \frac{t_{vi}^2}{s_i} - mr^2 \qquad (2.7b)$$

pre výstup zotrvačníka.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

Meranie robíme na Maxwellovom kyvadle zhotovenom podľa obr.2.1. Hmotnosť m zotrvačníka určíme vážením, priemer 2r tyčinky odmeriame mikrometrom 10-krát na rôznych miestach po oboch stranách zotrvačníka. Na zvislom dĺžkovom meradle určíme najnižšiu polohu (spodnú úvrať) h_z zotrvačníka. Navíjaním nití na osku zdvihneme zotrvačník do základnej výšky h_0 (pozor na vodorovnú polohu osky!). Po uvoľnení zotrvačník striedavo klesá k dolnej a stúpa k horným úvratiam. Na dĺžkovom meradle odčítame postupne výšky h_1, h_2,..., h_{10} desiatich horných úvratí (pozor na paralaxnú chybu pri odčítaní!).

Zotrvačník potom znovu zdvihneme do výšky h_0 a počas jeho pohybu meriame stopkami medzičasy t_{h_1}, $t_{h_2}, \ldots, t_{h_{10}}$ pri prechode zotrvačníka hornými úvraťami. Analogicky potom meriame medzičasy t_{z_0}, $t_{z_1}, \ldots$, t_{z_9} pri prechode zotrvačníka spodnou úvraťou. Každé z týchto meraní opakujeme 3-krát, do výpočtov dosadíme aritmetické priemery nameraných hodnôt. Namerané hodnoty zapisujeme do tab. 2.1.

Z nameraných hodnôt určíme dráhy s_0, $s_1, \ldots$, s_{10} medzi hornými a dolnými úvraťami zotrvačníka a časy t_{k_0}, $t_{k_1}, \ldots, t_{k_9}$, resp. t_{v_1}, $t_{v_2}, \ldots$, $t_{v_{10}}$ potrebné na klesnutie, resp. výstup zotrvačníka po týchto dráhach a zapíšeme do tab. 2.2.

Moment zotrvačnosti zotrvačníka vypočítame zo vzťahov (2.7a) a (2.7b), konštantu F zo vzťahu (2.6).

Tab. 2.1

h_z =

i	h_i (cm)				t_{hi} (s)				t_{zi} (s)			
				AP				AP				AP
0 1 2 ⋮ 10					0	0	0	0				

Tab. 2.2

i	0	1	2	...	10
s_i(cm)					
t_{ki}(s)					—
t_{vi}(s)	—				

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Odvoďte dôsledne vzťah (2.4b)!
2. Vyjadrite teoreticky pomer $s_i : s_{i+1}$! Overte na experimentálnych výsledkoch!
3. Aké podmienky by museli byť splnené, aby pohyb kyvadla bol periodický?
4. Ukážte, že dráha s_n je exponenciálnou funkciou poradového čísla n !
5. V percentách celkovej kinetickej energie zotrvačníka W_k vyjadrite jej časti pripadajúce na translačný pohyb a rotačný pohyb zotrvačníka okolo ťažiskovej osi (W_{k_t}, W_{k_r}) !