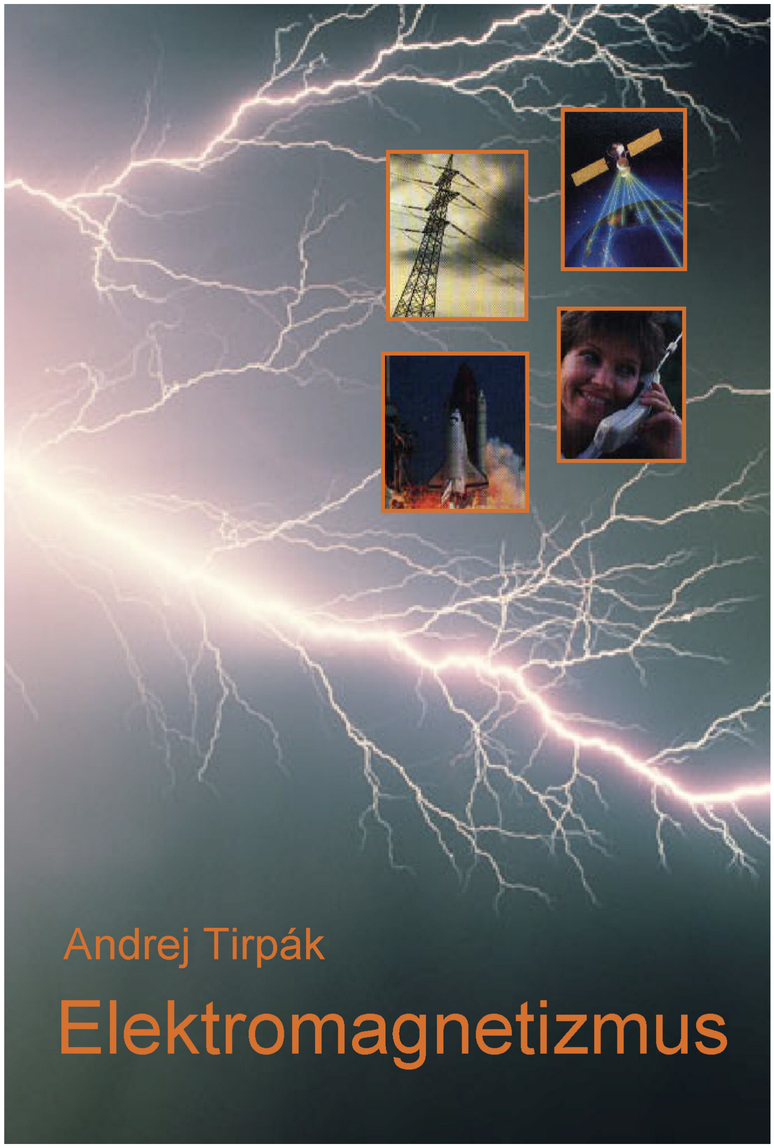

Andrej Tirpák
Elektromagnetizmus

ELEKTROMAGNETIZMUS

Doc. RNDr. Andrej TIRPÁK, CSc.

Katedra rádiofyziky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Bratislava

2. opravená verzia

Bratislava 2004

Kniha bola odmenená prémiou Literárneho fondu SR za rok 1999

This textbook is a comprehensive introduction to the study of electromagnetic phenomena at the undergraduate level. The book is suitable to students of physics and electrical engineering at the universities, technological institutes, partly to students in non-technical branches of universities like the biology, medicine, agriculture, etc. It can also be useful to the postgraduate students, scientists and to all interested in modern approaches to the electromagnetic theory.

Besides the classical parts of electromagnetism like the electrostatics, magnetostatics and electrodynamics the book deals with such modern subjects of electromagnetism like the superconductivity, Josephson effect, quantum Hall-effect, electron-spin resonance (ESR), nuclear magnetic resonance (NMR) as a modern tool of medical diagnostics. Various older and recent methods of the measurements of the velocity of the light are described. Special attention is paid to the magnetism of matter, modern magnetic materials and their applications. In the chapter dealing with electromagnetic waves the transfer of electromagnetic signals by transmission lines is described in some detail.

The textbook involves the fundamentals of vector algebra and some differential operations on scalar and vector fields. Detailed explanation of concept of gradient, divergence and curl are also given. The essential mathematical prerequisites for the subjects discussed in this book are integral calculus, linear real and complex algebra. Some acquaintance with differential equations would be helpful, but not strictly essential.

The textbook includes 326 selected and solved problems.

Recenzenti: Prof. RNDr. Viktor Bezák, DrSc.
Prof. Ing. Matej Rákoš, DrSc.

Prvé knižné vydanie 1999

ISBN 80-88780-26-8

Obálku navrhol Doc. RNDr. Andrej Tirpák, CSc. a RNDr. František Kundracik, CSc.

Všetkým mojim študentom, minulým aj súčasným,
ktorí dávali mojej práci zmysel a robili z nej potešenie

Učebnica "Elektromagnetizmus" vznikla z dvoch príčin. Prvou je neustály nedostatok univerzitných učebníc základného kurzu fyziky, druhou príčinou je môj snáď nie neskromný názor, že v priebehu viac ako dvadsať rokov prednášky z elektromagnetizmu som nadobudol istý pohľad na didaktické problémy predmetu. Tento pohľad považujem za pôvodný, a na jeho základe predkladám pojednanie o elektromagnetizme snáď trochu netradičné. Názov "Elektromagnetizmus" uprednostňujem pred doteraz používaným názvom "Elektrina a magnetizmus" ktorý je zastaralý a neodráža dnešné chápanie elektromagnetických javov v svojej vnútornej nedeliteľnej jednote. Členenie textu je takmer klasické, teda také, ktoré sa rokmi z hľadiska náväznosti výkladu, a tým aj zrozumiteľnosti dokonale osvedčilo. Rozsah je limitovaný množstvom informácií, ktoré učiteľ dokáže analyzovať a študent absorbovať v rámci základného kurzu fyziky prednášaného na matematicko-fyzikálnych, prírodovedeckých a technických fakultách našich univerzít. Do textu z toho dôvodu neboli zahrnuté napr. elektrické meracie prístroje a meracie metódy (s výnimkou merania magnetických polí), technológia výroby elektrotechnických a elektronických súčiastok a pod. S nimi sa študent oboznámi v praktických cvičeniach. Teórie elektrickej vodivosti tuhých látok, kvapalín a plynov sú dnes samostatné vedné oblasti. Moderná obvodová elektronika sa stala disciplínou silne poznačenou technologickými problémami výroby integrovaných obvodov a jej výklad na niekoľkých stranách by bol nemožný. Na druhej strane, do textu boli zahrnuté niektoré moderné fyzikálne javy, ktoré posunuli naše poznanie sveta dopredu a zásadne ovplyvnili technický rozvoj. Takými javmi sú napr. jadrová magnetická rezonancia, supravodivosť, kvantový Hallov jav, Josephsonov jav a iné. Učebnica obsahuje 326 riešených úloh.

Jazyk učebnice nie je strohým rigidným jazykom vedeckých traktátov a odborných publikácií, ale skôr jazykom fyzika v laboratóriu, na seminároch alebo prednáškach. Chcem tým demonštrovať, že fyzika je humánna a pekná vedecká disciplína, a domnievam sa, že aj čitateľom-študentom bude tento jazyk viac vyhovovať. Či sa mi to podarilo – to nech už posúdia používatelia učebnice! Aj pri voľnejších jazykových prístupoch som sa však snažil o maximálnu presnosť formulácií pri využití tých matematických prostriedkov, ktorými možno tvoriť základnú učebnicu elektromagnetizmu.

Učebnica by nebola vznikla bez podpory a pomoci mojich spolupracovníkov a priateľov. RNDr. Peter Kohaut celý text počas jeho vzniku priebežne čítal, upozorňoval ma na jeho odborné a jazykové nedostatky a pomohol mi pri kreslení obrázkov. Patrí mu za to moja najsrdečnejšia vďaka. Ďakujem i kolegom z Katedry rádiofyziky MFF UK doc. RNDr. Andrejovi Jaroševičovi, CSc., RNDr. Františkovi Kundracikovi, CSc., a kolegovi doc. RNDr. Teodorovi Obertovi, CSc. z Katedry chemickej fyziky ChTF STU za ich ochotu k diskusiám. Osobitné poďakovanie patrí recenzentom Prof. Ing. Matejovi Rákošovi, DrSc. a Prof. RNDr. Viktorovi Bezákovi, DrSc., ktorých pripomienky k textu pomohli podstatne zvýšiť kvalitu mojej práce.

*****

V elektronickej verzii tejto učebnice sú predovšetkým odstránené zistené chyby, spresnené niektoré formulácie, upresnené fyzikálne konštanty podľa najnovších údajov, rozšírený zoznam použitých symbolov veličín a ich jednotky v SI-sústave. Ďakujem všetkým kolegom, ale predovšetkým doc. RNDr. Františkovi Kundracikovi, PhD. a Mgr. Mikulášovi Praščákovi za pomoc pri objavovaní chýb v nádeji, že ich počet bude postupne konvergovať k nule.

Máj 2004

Obsah

TABUĽKY

Zoznam symbolov veličín a ich jednotky v SI-sústave

(Vektorové a komplexné veličiny sú tlačené tučnou kurzívou)

Symbol	Veličina	Jednotka v SI-sústave
$\boldsymbol{A}$	vektorový potenciál	Wb/m = T.m
A	práca	J
$\boldsymbol{B}$	vektor magnetickej indukcie	T
B	susceptancia, imaginárna časť admitancie	S
bei u	Besselova (funkcia) imaginárna argumentu u	—
ber u	Besselova (funkcia) reálna argumentu u	—
C	kapacita	F
	kapacita na jednotku dĺžky	F/m
c	rýchlosť svetla vo voľnom priestore (vo vákuu)	m/s
$\boldsymbol{D}$	vektor elektrickej indukcie	$C/m^2 = A.s/m^2$
d	dĺžka vedenia	m
$\boldsymbol{E}$	vektor intenzity elektrického poľa	V/m
$\mathscr{E}$	elektromotorické napätie zdroja	V
e	elementárny náboj	C = A.s
e	základ prirodzených logaritmov	—
$\boldsymbol{F}$	vektor sily	N
f	frekvencia	Hz
G	vodivosť, reálna časť admitancie	S
	vodivosť na jednotku dĺžky dvojvodičového vedenia	S/m
$\boldsymbol{H}$	vektor intenzity magnetického poľa	A/m
I	stály elektrický prúd, amplitúda prúdu	A
I_{ef}	efektívna hodnota prúdu	
I^+, I^-	amplitúda postupujúcej a odrazenej prúdovej vlny	A
i	okamžitá hodnota prúdu	A
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	jednotkové vektory pravouhlého súradnicového systému	
$\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{j}$	prúdová hustota, amplitúda objemovej prúdovej hustoty	A/m^2
$\boldsymbol{J}_s$	amplitúda plošnej prúdovej hustoty	A/m
j	imaginárna jednotka	—
$\boldsymbol{K}$	koeficient šírenia vlny	m^{-1}
L	indukčnosť	H
	indukčnosť na jednotku dĺžky dvojvodičového vedenia	H/m
l	dĺžka	m
ln	prirodzený logaritmus	—
log	dekadický logaritmus	—
$\boldsymbol{M}$	vektor magnetizácie	A/m
	moment dvojice síl	N.m
M	vzájomná indukčnosť	H
$\mathscr{M}$	magnetomotorické napätie	A, Az
$\boldsymbol{m}$	magnetický moment	$A.m^2$
Np	neper* – jednotka útlmu	*Np nie je SI jednotkou
n	počet	—
	koncentrácia	m^{-3}
$\boldsymbol{n}_0$	jednotkový vektor normály	—
$\boldsymbol{P}$	vektor elektrickej polarizácie	$C.m^{-2}$

Symbol	Veličina	Jednotka v SI-sústave
$\boldsymbol{p}$	elektrický dipólový moment	C.m
P	elektrický výkon	W
$\boldsymbol{P}_{kompl}$	komplexný výkon	W
p	objemová hustota výkonu	$W.m^{-3}$
	okamžitý výkon	W
PSV	pomer stojatej vlny	—
Q	integrálny elektrický náboj	C = A.s
	kvalita rezonančného obvodu (faktor kvality)	—
q	elektrický náboj	C = A.s
R	elektrický odpor (rezistancia), reálna časť impedancie	Ω
	odpor na jednotku dĺžky dvojvodičového vedenia	Ω/m
r	pomer stojatej vlny	—
	polomer	m
r, φ, z	cylindrické (valcové) súradnice	m, rad (°), m
r, ϑ, φ	sférické (guľové) súradnice	m, rad (°), rad (°)
$\boldsymbol{S}$	Poyntingov vektor	W/m^2
S	plocha	m^2
T	perióda	s
	absolútna teplota	K
t	čas	s
tg δ	činiteľ strát, tangens stratového uhla dielektrika	—
U, U_0	stále napätie, amplitúda napätia	V
U_{ef}	efektívna hodnota napätia	V
U^+, U^-	amplitúda postupujúcej a odrazenej napäťovej vlny	V
V_m	skalárny magnetický potenciál pre vektor $\boldsymbol{B}$	Wb/m = T.m
$\boldsymbol{v}$	vektor rýchlosti	m/s
v_f	fázová rýchlosť vĺn	m/s
v_g	grupová (skupinová) rýchlosť	m/s
W	elektromagnetická energia	J = W.s
w_{elmag}	hustota energie elektromagnetického poľa	J/m^3
X	reaktancia, imaginárna časť impedancie	Ω
x, y, z	pravouhlé (kartézske) súradnice	m
$\boldsymbol{Y}$	komplexná admitancia	S
	komplexná admitancia na jednotku dĺžky	S/m
Y_v	charakteristická admitancia vedenia	S
$\boldsymbol{y}$	komplexná konduktivita	S/m
$\boldsymbol{Z}$	komplexná impedancia	Ω
	komplexná impedancia na jednotku dĺžky	Ω/m
$\boldsymbol{Z}_v$, Z_v	charakteristické (vlnové) impedancie TEM-vĺn	Ω
Z_0	charakteristická impedancia neohraničeného bezstratového dielektrika	Ω
Z_{00}	charakteristická impedancia voľného priestoru	Ω
z_{min}	vzdialenosť (kladná alebo záporná) uvažovanej roviny od minima stojatej vlny	m
α	koeficient útlmu (tlmenia)	m^{-1}, dB/m
β	fázový koeficient (fázová konštanta)	rad/m, °/m
β_0	fázový koeficient (fázová konštanta) v neohraničenom dielektriku	rad/m, °/m
$\boldsymbol{\gamma}$	koeficient šírenia	m^{-1}, dB/m

Symbol	Veličina	Jednotka v SI-sústave
$\boldsymbol{\gamma}$	konduktivita	S/m
	magnetomechanický (gyromagnetický) pomer	Hz/T = C/kg
δ	hĺbka vniku (skinová hĺbka)	m
	stratový uhol dielektrika	rad, °
ε_0	elektrická konštanta	F/m
ε	permitivita	F/m
$\boldsymbol{\varepsilon}^*$	komplexná permitivita	F/m
$\boldsymbol{\varepsilon_r}$	relatívna permitivita	—
η	účinnosť	—
ϑ	uhol	rad, °
	teplota v Celsiovej stupnici	°C
κ	elektrická susceptibilita	—
λ	vlnová dĺžka	m
λ_{kr}	kritická (medzná) vlnová dĺžka	m
λ_v	dĺžka vlny vo vlnovode	m
λ_0	dĺžka vlny vo voľnom priestore (vo vákuu)	m
$\boldsymbol{\mu}$	magnetický moment	$A.m^2$
μ	permeabilita	H/m
μ_0	magnetická konštanta (permeabilita voľného priestoru)	H/m
μ_r	relatívna permeabilita	—
π	kruhová konštanta, Ludolfovo číslo	—
$\boldsymbol{\rho}$	koeficient odrazu	—
$\boldsymbol{\rho}_U$, $\boldsymbol{\rho}_I$	koeficient odrazu napäťovej alebo prúdovej vlny	—
ρ	rezistivita	Ω.m
	objemová hustota náboja	$C/m^3 = A.s/m^3$
σ	konduktivita	S/m
	plošná hustota náboja	$C/m^2 = A.s/m^2$
τ	časová konštanta	s
	objem	m^3
Φ	magnetický indukčný tok	Wb
φ	uhol, fázový uhol	rad, °
φ_m	skalárny magnetický potenciál pre vektor ***H***	A
χ	magnetická susceptibilita	—, m^3/kg, $m^3/kmol$
Ψ	tok vektora ***E*** alebo ***D***	V.m, C
Ω	priestorový uhol	rad
ω	uhlová frekvencia	rad/s

Tabuľka fyzikálnych konštánt[1]

Veličina	**Hodnota v SI sústave**
Rýchlosť svetla vo voľnom priestore (vo vákuu) c	299 792 458 m.s^{-1} (presne)
Magnetická konštanta (permeabilita vákua) μ_0	$4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} (z definície)
Elektrická konštanta (permitivita vákua) $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	8,854 187 817.10^{-12} F.m^{-1}
Charakteristická impedancia voľného priestoru $Z_{00} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = \mu_0 c$	376,73 Ω
Elementárny náboj e	1,602 176 462.10^{-19} C (A.s)
Elektrónvolt eV	1,602 176 462.10^{-19} J
Pokojová hmotnosť elektrónu m_e	9,109 381 88.10^{-31} kg
Pokojová hmotnosť protónu m_p	1,672 621 58.10^{-27} kg
Pokojová energia elektrónu $m_e c^2$	8,187 104.10^{-14} J = 0,511.10^{6} eV
Pokojová energia protónu $m_p c^2$	1,503 277.10^{-10} J = 0,938.10^{9} eV
Planckova konštanta $h = 2\pi\hbar$	6,626 068 76.10^{-34} J.s
Bohrov polomer $a_0 = h^2/(\pi\mu_0 c^2 e^2 m_e)$	5,291 768 909.10^{-11} m
Bohrov magnetón $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$	9,274 008 992.10^{-24} A.m^2 (J.T^{-1})
Jadrový magnetón $\mu_J = e\hbar/(2m_p)$	5,050 783 182.10^{-27} A.m^2 (J.T^{-1})
Kvantum elektrickej vodivosti $\mathscr{G}_0 = 2e^2/h$	7,748 091 694.10^{-5} S
von Klitzingova konštanta $\mathscr{R}_0 = h/e^2$	2,581 280 758.10^{4} Ω
Kvantum indukčného toku $\Phi_0 = h/(2e)$	2,067 833 637.10^{-15} Wb
Josephsonova konštanta $K_J = 2e/h$	4,835 978 979.10^{14} Hz.V^{-1}
Gravitačná konštanta κ	6,673.10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}
Avogadrova konštanta N_A	6,022 141 99.10^{26} kmol^{-1}
Faradayova konštanta F	9,648 534 15.10^{7} C.kmol^{-1}
Boltzmannova konštanta k	1,380 650 3.10^{-23} J.K^{-1}

[1] Konštanty boli aktualizované podľa CODATA Internationally recommended values of the Fundamental Physical Constants (1998) – www.physics.nist.gov/constants

James Clerk MAXWELL
(1831 Edinburgh – 1879 Cambridge)

Úvod

"Pravda je to, čo obstojí v skúške skúsenosti"
Albert Einstein: Ako vidím svet

Predmet "Elektromagnetizmus" sa zaoberá štúdiom súboru javov, ktoré vznikajú ako dôsledok špecifického silového pôsobenia medzi tým, čo sme sa rozhodli nazvať elektrické náboje. Silové pôsobenie elektrických nábojov má dve stránky – elektrické a magnetické. Vzhľadom na neodmysliteľnú spätosť elektrických a magnetických javov a ich spoločnú podstatu je vhodnejšie tento súbor javov nazývať **elektromagnetizmus**, ako oddelene – – elektrina a magnetizmus.

V kontexte fyziky zaujíma elektromagnetizmus výrazne popredné postavenie, jednak pre svoje obrovské praktické dôsledky, ale tiež preto, že predstavuje jednu z dôležitých stránok poznania sveta, v ktorom žijeme. Moderná, technicky vyspelá spoločnosť tvorí a využíva technické prostriedky, ktorých podstata spočíva v zákonoch elektromagnetizmu. Predovšetkým je to elektrická energetika. Dnes najrozšírenejšia a najčistejšia forma energie je elektrická energia, aj keď spôsoby jej produkcie nie sú vždy ekologicky najčistejšie. Na princípoch elektromagnetizmu je založená činnosť takých médií, ako je telefón, rádio, televízia, záznam obrazu a zvuku a ich drôtový alebo bezdrôtový, prakticky okamžitý prenos na ľubovoľné miesto na zemeguli alebo do blízkeho kozmického priestoru. Pozemná, námorná a vesmírna navigácia sú nemysliteľné bez existencie elektromagnetizmu. V dvadsiatom storočí bolo vymyslené, skonštruované a do nepredstaviteľnej dokonalosti dovedené zariadenie, ktoré spôsobilo revolúciu vo vede, v technike a v ekonomike – elektronický počítač. Mobilné telefóny a internet poskytujú nebývalé možnosti poskytovania a získavania informácií, čo sa týka rýchlosti aj objemu. Možno len konštatovať, že pokrok civilizácie spoločnosti je determinovaný mierou využitia javov elektromagnetického pôvodu.Možno len konštatovať, že pokrok civilizácie spoločnosti je determinovaný mierou využitia javov elektromagnetického pôvodu.

Elektrické silové pôsobenia majú však principiálnejší význam, pretože na nich je založená existencia nášho materiálneho sveta. Vieme, že látky sa skladajú z atómov, a z molekúl. Naskytá sa otázka, čo drží atómy pohromade tak, že látka je v konečnom dôsledku tuhá alebo kvapalná? Chemici hovoria, že atómy v látke sú viazané chemickými väzbami. Áno, ale tieto väzby sú elektrického pôvodu. Medzi atómami látky pôsobia aj príťažlivé gravitačné sily (**gravitačné interakcie**), tie sú však v porovnaní s elektrickými silami (**elektromagnetické interakcie**) veľmi slabé, a tak ich pri interakcii častíc možno v prvom priblížení zanedbať. Gravitačné interakcie sú zodpovedné za sily v makrosvete, sú určujúce pre vznik a existenciu hviezdnych systémov a galaxií.

A nakoniec, aj na našej biologickej existencii sú podpísané zákony elektromagnetizmu. Nervové vlákna sú cestami, po ktorých sa šíria elektrické signály od receptorov do mozgu, kde sa vyhodnocujú a sú podnetom pre našu biologickú a psychickú aktivitu. V istom zmysle je ľudská bytosť ten najdômyselnejší a najveľkolepejší elektronický mechanizmus pozostávajúci z dokonalého informačného a počítačového systému, ktorý sa sotva niekedy podarí umelo realizovať.

Veda o elektromagnetizme sa začala rozvíjať asi pred 250-timi rokmi a dnes možno povedať, že je najucelenejšou a najlepšie prepracovanou oblasťou fyziky. Bola budovaná fenomenologicky bez toho, aby jej tvorcovia poznali atomárnu štruktúru látok. Dnes sme fascinovaní skutočnosťou, že táto teória je konzistentná s modernými oblasťami fyziky, ako je kvantová mechanika, kvantová teória tuhých látok, a hlavne teória relativity, po zrodení ktorej začiatkom dvadsiateho storočia nebolo potrebné na stavbe elektromagnetizmu nič zásadného opravovať.

Na budovaní teórie elektromagnetizmu sa podieľalo mnoho vynikajúcich učencov. Spomenieme len niekoľkých, ktorých mená sú nezmazateľne spojené so základnými zákonmi elektromagnetizmu: Charles Augustin de COULOMB (1736 – 1806) – objavil a matematicky formuloval zákon o silovom pôsobení elektrických nábojov; André Marie AMPÈRE (1775 – 1836) – vykonal rozsiahle štúdie o silových účinkoch elektrického prúdu; Hans Christian OERSTED (1777 – 1851) – objavil silové pôsobenia elektrického prúdu na magnetku, čím sa potvrdila jednota elektrických a magnetických javov; Michael FARADAY (1791 – 1867) – objavil slávny zákon o elektromagnetickej indukcii; Karl Friedrich GAUSS (1777 – 1855) – vykonal a publikoval priekopnícke práce o vlastnostiach potenciálových polí (Gaussov zákon); Georg Simon OHM (1789 – 1854) – objavil vzťah medzi prúdom a napätím v lineárnych vodičoch; James Clerk MAXWELL (1831 – 1879) – vytvoril unifikovaná teória elektromagnetizmu aj s ohľadom na optické javy, formuloval štyri základné zákony elektromagnetizmu – Maxwellove rovnice; Hendrik Antoon LORENTZ (1853 – 1928) – prispel podstatnou mierou k objasneniu Maxwellovej teórie, k teórii elektrónu a k teórii relativity; Gustav Robert KIRCHHOFF (1824 – 1887) – formuloval zákony o elektrických sieťach popri principiálnejších zákonoch žiarenia čierneho telesa; Heinrich HERTZ (1857 – 1894) – experimentálne dokázal existenciu elektromagnetických vĺn; Albert EINSTEIN (1879 – 1955) – vypracoval špeciálnu a všeobecnú teóriu relativity.

1 ELEKTRICKÉ NÁBOJE

1.1 ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI ELEKTRICKÝCH NÁBOJOV

Základným objektom a pojmom elektromagnetizmu, pôvodcom všetkých elektromagnetických silových pôsobení, je elektrický náboj. Nemá zmysel klásť otázku čo náboj je, pretože na ňu nevieme odpoveď rovnako, ako na otázku čo je hmota. Tieto pojmy sú natoľko principiálne, že ich nemôžeme vyjadriť pomocou iných, menej základných pojmov, preto môžeme hovoriť iba o vlastnostiach elektrických nábojov. Základné vlastnosti elektrických nábojov boli stanovené zo skúseností a z fyzikálnych meraní, a na základe stavu súčasných poznatkov sme presvedčení, že sú pravdivé. Tieto základné vlastnosti možno zhrnúť do nasledovných výpovedí:

1. **V prírode existujú dva druhy elektrického náboja – náboje kladné, označujeme ich znamienkom "+", a náboje záporné, označujeme ich znamienkom "–".** Ak sa telesá v našom okolí javia ako elektricky neutrálne, neznamená to, že na nich nie sú elektrické náboje, ale iba to, že náboje na nich sú úzkostlivo vykompenzované, t. j. že je na nich rovnaké množstvo kladného aj záporného náboja. Nevykompenzovanosť čo i len zlomkov percenta by viedla k nepredstaviteľným silám v telesách alebo medzi telesami. Pripísanie druhu znamienka elektrickým nábojom bolo historicky náhodné. Dnes vieme, že nositeľom kladného naboja je protón a nositeľom záporného náboja je elektrón.

2. **Náboje pôsobia na seba silovo – náboje rovnakého znamienka (súhlasné) sa odpudzujú, náboje rôzneho znamienka (nesúhlasné) sa priťahujú**. Táto skutočnosť bola známa už starým Grékom. Silové pôsobenie medzi nábojmi bolo kvantitatívne skúmané až v 18. storočí lordom Henrym Cavendishom, ktorý však svoje pozorovania nepublikoval. O 13 rokov neskôr v roku 1785 silové pôsobenie medzi nábojmi vo forme známeho zákona zverejnil Ch. A. Coulomb.

3. **Elektrické náboje sú kvantované. Existuje najmenšie, nedeliteľné kvantum elektrického náboja s absolútnou hodnotou**

$$e = 1{,}602\,176\,462.10^{-19}\ \mathrm{C\ (A.s)}$$

Toto kvantum sa nazýva elementárny náboj. Nositeľmi tohoto náboja sú elementárne častice, pričom protón má náboj $+e$ a elektrón $-e$. Voľné zlomky alebo neceločíselné násobky tohoto náboja neboli v prírode pozorované.

4. **Elektrické náboje sa zachovávajú**. Zákon zachovania elektrického náboja patrí medzi základné prírodné zákony. Príležitostné zdanlivé vymiznutie elektrického náboja je zapríčinené kompenzáciou náboja jedného znamienka nábojom opačného znamienka. Celkový (kladný a záporný) náboj vesmíru zostáva konštantný a s najväčšou pravdepodobnosťou nulový. Elektrické náboje sú invariantné voči Lorentzovým transformáciám, t. j. veľkosť

elektrického náboja nezávisí od pohybového stavu náboja. Táto dôležitá vlastnosť elektrických nábojov bola potvrdená mnohými experimentmi.

5. **Elektrické náboje sú viazané na materiálne objekty – elementárne častice**. Aj keď v našich úvahách budeme často hovoriť o správaní sa elektrických nábojov, nesmieme strácať zo zreteľa, že v skutočnosti hovoríme o správaní sa elementárnych častíc, molekúl, alebo zložitejších hmotných agregátov. O elementárnych časticiach ako nosičoch elektrických nábojov je pojednané v nasledujúcom odseku.

1.2 MIKROSKOPICKÉ NOSIČE ELEKTRICKÝCH NÁBOJOV

Mikroskopickými nosičmi elektrických nábojov sú nabité elementárne častice a ióny, na ktorých môže byť kladný alebo záporný náboj. Tento náboj môže byť iba celočíselným násobkom elementárneho náboja. Napriek veľkému experimentálnemu úsiliu sa doteraz nepodarilo objaviť voľné častice s neceločíselným nábojom.

Dnes je známych asi 200 elementárnych častíc a veľké množstvo iónov, atómov a molekúl. Väčšina častíc po vzniku existuje istý, nie príliš dlhý čas, po uplynutí ktorého sa rozpadajú na iné častice, t. j. častice majú konečnú dobu života. Vo väčšine prípadov je táto doba veľmi krátka a predstavuje iba nepatrné zlomky sekundy. Niekoľko častíc má však nekonečnú dobu života – sú to elektrón, protón a ich antičastice pozitrón a antiprotón. Protóny sa podieľajú na stavbe atómových jadier, elektróny tvoria elektrónový obal atómu. Možno povedať, že práve tieto častice sú pôvodcami skoro všetkých elektromagnetických javov. Na tvorbe atómových jadier sa podieľajú okrem protónov aj neutróny. Elektricky sú neutrálne a ich doba života v atómovom jadre je nekonečná. Mimo jadra žijú asi 17 minút, potom sa rozpadnú na protóny, elektróny a antineutríno.

Elektrický náboj iónov je podmienený nedostatkom jedného alebo viac elektrónov v atóme (kladný ión – katión), alebo naopak, prebytkom elektrónov (záporný ión – anión). Ióny vznikajú obyčajne rozpadom molekúl alebo ionizáciou atómu, t. j. stratou jedného alebo viac z jeho elektrónov.

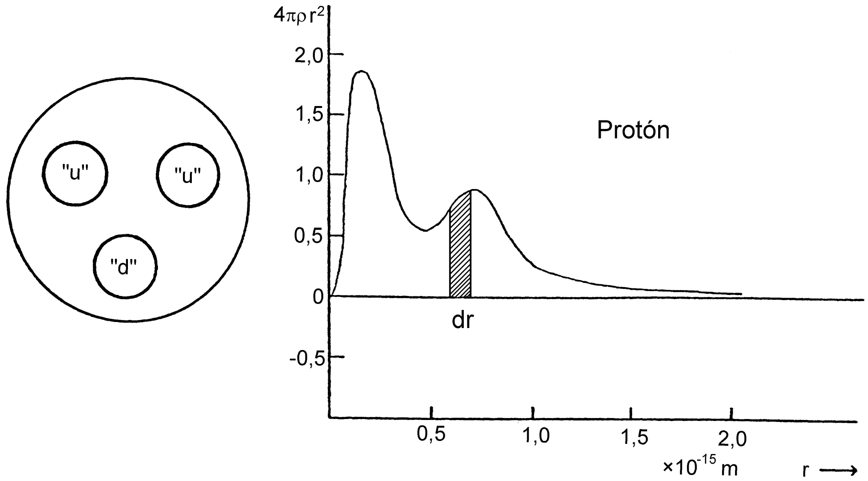
Elektrón. Elektrón je materiálnym nosičom záporného elementárneho náboja. Podľa súčasných názorov je elektrón bodovou bezštruktúrnou časticou, t. j. celý náboj elektrónu je sústredený v bode. Takáto predstava je vnútorne protirečivá, pretože energia elektrického poľa budeného bodovým nábojom je nekonečná, a teda mala by byť nekonečná aj zotrvačná hmota (hmotnosť) bodového elektrónu. To však odporuje skúsenosti, pretože hmotnosť elektrónu bola experimentom stanovená na hodnotu

$$m_e = 9{,}109\ 381\ 88.10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

S touto protirečivosťou sa však musíme zmieriť, pretože neexistuje lepšia a menej rozporná predstava o štruktúre (alebo o bezštruktúrnosti) elektrónu. Pri výpočtoch sa nekonečná energia elektrónu uvažuje ako aditívna konštanta, ktorú pri interakciách častíc možno v konečnom dôsledku ignorovať.

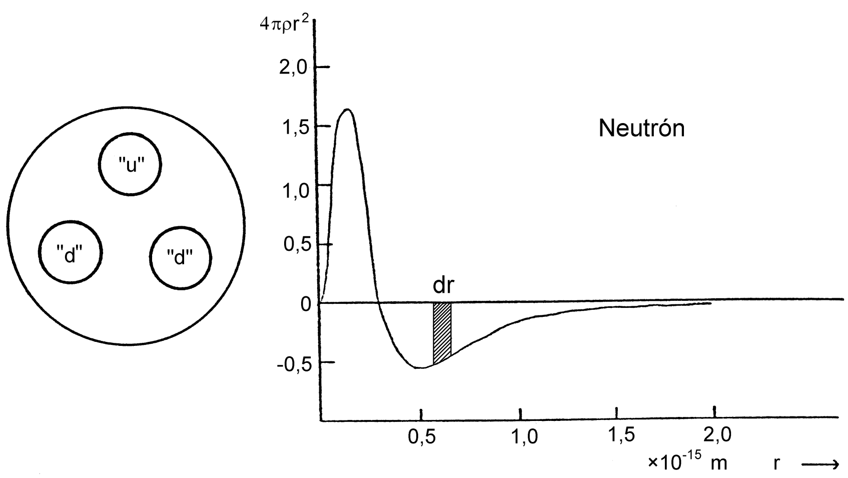
Protón. Nositeľom kladného elementárneho náboja je protón – častica približne 1836-krát hmotnejšia ako elektrón. Hmotnosť protónu

$$m_p = 1{,}672\ 621\ 58.10^{-27}\ \mathrm{kg}$$



Obr. 1.1

Merania potvrdzujú, že na rozdiel od elektrónu, protón nie je bodová častica, ale že má efektívny priemer rádovo 10^{-15} m. Taktiež sa ukazuje, že elektrický náboj vo vnútri protónu má svoju štruktúru. Experimentálne je dobre preskúmané rozloženie elektrického náboja vo vnútri protónu metódou, ktorú na začiatku dvadsiateho storočia použil anglický fyzik Ernest Rutherford (1871 – 1937) na preskúmanie štruktúry atómov. Metóda spočíva v ostreľovaní protónov elektrónmi s veľmi veľkou energiou (niekoľko GeV) a v pozorovaní rozptylu elektrónov na protónoch. Výsledok týchto experimentov je prekvapivý a je zobrazený na *obr. 1.1.* Graf znázorňuje závislosť sumárneho náboja protónu $4\pi\rho r^2$ v guľovej vrstve jednotkovej hrúbky polomeru r od stredu protónu. Z uvedeného grafu vidno, že prakticky celý náboj protónu je sústredený v guli s polomerom $r_0 < 10^{-15}$ m. Po prvom maxime $4\pi\rho r^2$ neklesá so vzdialenosťou r monotónne, ale vykazuje ešte jedno maximum.



Obr. 1.2

Neutrón. Podobné experimenty ako s protónmi boli urobené aj s rozptylom elektrónov na neutrónoch. Merania ukázali, že neutrón má tiež svoju elektromagnetickú štruktúru, a nie je bodovou, elektricky neutrálnou časticou.

Rozloženie elektrického náboja vo vnútri neutrónu je graficky znázornené na *obr. 1.2*. Ukazuje sa, že neutrón, podobne ako protón, je objemovo nabitý – blízko jeho stredu je rozložený kladný elektrický náboj a ďalej od stredu náboj záporný. Plochy ohraničené nad a pod osou r sú rovnaké, a teda množstvo kladného náboja v neutróne sa rovná množstvu záporného náboja. Objem, v ktorom sú kladné a záporné náboje neutrónu uzavreté, je prakticky rovnaký ako u protónu.

Je otázkou, ako sa má interpretovať spojité rozloženie elektrického náboja vo vnútri protónu ak jeho náboj je elementárny. Plocha ohraničená čiarou a osou r na *obr. 1.1* sa číselne rovná náboju protónu a zašrafovaná plocha predstavuje náboj, ktorý je uzavretý vo vnútri protónu v guľovej vrstve s polomerom r a hrúbkou dr. Je jasné, že tento náboj predstavuje iba malú časť elementárneho náboja. Teda je namieste otázka, aký význam má tvrdenie, že v danom objeme $4\pi r^2 \mathrm{d}r$ sa nachádza náboj menší ako elementárny?

Podľa súčasných predstáv teórie elementárnych častíc pozostávajú protóny a neutróny z dvoch rôznych bodových objektov, ktoré nesú spoločný názov **kvarky**. Jeden z týchto kvarkov s nábojom $+2e/3$ sa nazýva "up" (u), a druhý s nábojom $-e/3$ je "down" (d). Protón pozostáva z dvoch kvarkov u a jedného kvarku d, takže celkový náboj protónu je $+e$. Kvarky sa v objeme protónu pohybujú a hustota náboja v protóne je takto úmerná dobe, za ktorú kvarky v danom mieste zotrvávajú. Neutrón pozostáva z dvoch kvarkov d a jedného kvarku u, takže celkový náboj neutrónu sa rovná nule. Vysvetlenie spojitého rozloženia náboja v neutróne je analogické ako v protóne.

Voľné kvarky neboli v prírode pozorované, ich existencia však bola potvrdená experimentmi na urýchľovačoch protibežných zväzkov protónov a antiprotónov s energiami do 0,9 TeV. Experimentálne sa dokázalo, že kvark u má pokojovú energiu $m_q c^2$ rádovo ~5 MeV a kvark d pokojovú energiu ~10 MeV. Existencia kvarkov umožňuje vysvetliť mnohé javy fyziky elementárnych častíc.[1]

Dôležitou charakteristikou elementárnych častíc je ich moment hybnosti, alebo spin. Spin nemožno vysvetľovať ako dôsledok rotácie častíc, pretože pri rozumných predpokladoch o rozmeroch častíc by sa museli pripúšťať obežné rýchlosti častíc vyššie ako rýchlosť svetla. Preto sa spin uvažuje ako vnútorná vlastnosť častice. So spinom častice je spojený jej magnetický moment, ktorý tiež nemožno vysvetliť ako dôsledok pohybu náboja a treba ho uvažovať ako principiálnu vlastnosť častice.

[1] Okrem uvedených kvarkov u a d boli po roku 1964 predpovedané a postupne objavené ďalšie štyri kvarky: "strange" (s) s nábojom –e/3 a s energiou ~200 MeV; "charm" (c) [+2e/3, 1 500 MeV]; "bottom" (b) [–e/3, ~5 000 MeV]; "top" (t) [+2e/3, >100 000 MeV]. Posledný, t kvark, bol objavený v marci 1995. Tieto kvarky sa podieľajú na stavbe exotickejších elementárnych častíc ako napr. mezónov. Myšlienku o existencii kvarkov prvý vyslovil americký teoretický fyzik Murray Gell-Mann, ktorý v roku 1969 dostal za práce v teórii elementárnych častíc Nobelovu cenu.

1.3 POJEM BODOVÉHO NÁBOJA A HUSTOTY NÁBOJA V KLASICKEJ ELEKTRODYNAMIKE

Pri výpočte silových pôsobení medzi elektrickými nábojmi sa často pracuje s pojmami "bodový náboj" alebo "hustota náboja". Pojem bodového náboja bol v klasickej elektrodynamike zavedený v čase, keď kvantovanie náboja ešte nebolo známe. Pod bodovým nábojom sa rozumel konečný náboj lokalizovaný v matematickom bode (teda náboj s nekonečnou hustotou). Bodový náboj sa považoval za užitočnú fikciu, ktorá umožňuje analýzu interakcie objemnejších nábojových rozložení umiestnených v relatívne veľkých vzájomných vzdialenostiach. Podľa dnešných predstáv bodové náboje v prírode existujú, je to už spomínaný elektrón a jeho antičastica – pozitrón. V našom texte budeme bodové náboje označovať symbolmi q alebo Q.

Popri bodových nábojoch sa často uvádza pojem hustoty elektrického náboja, pričom sa predpokladá, že náboj je v priestore rozložený spojito ako funkcia polohového vektora $\boldsymbol{r}$. Pre opis takého rozloženia zavádzame matematickú funkciu $\rho(\boldsymbol{r})$ nazývanú objemová hustota náboja danú limitným pomerom náboja Δq v objeme $\Delta\tau$, ak $\Delta\tau$ sa blíži k nule, teda

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta\tau} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau} \tag{1.1}$$

Pri tejto matematickej definícii objemovej hustoty náboja sa samozrejme nevylučuje, že v objeme $\Delta\tau$ sa môže nachádzať ľubovoľne malý náboj, teda aj náboj menší ako je elementárny. Náboje sú však kvantované, a preto matematický pojem "nekonečne malý náboj dq" musí fyzik interpretovať ako veľmi malý náboj, ktorý však ešte stále predstavuje veľké množstvo elementárnych nábojov tak, aby akékoľvek malé zmeny počtu nábojov bolo možné považovať za takmer spojité. Prísne vzaté, reálna objemová hustota náboja nemôže byť matematicky spojitou funkciou polohy, v skutočnosti je to funkcia, ktorá od miesta k miestu vykonáva jemné skoky. Obrazne povedané, nábojové rozloženie predstavuje veľmi jemnú kašu.

Okrem objemovej hustoty nábojov sa často uvádza tiež plošná hustota náboja

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S} \tag{1.2}$$

kde dS je nekonečne malý plošný element uvažovanej plochy, na ktorom sa nachádza nekonečne malý náboj dq, a nakoniec tiež dĺžková hustota náboja na čiare

$$\lambda(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l} \tag{1.3}$$

pričom dl je nekonečne krátky úsek čiary, na ktorom sa nachádza nekonečne malý náboj dq. Ak je v objeme τ, na ploche S, resp. na čiare l dané rozloženie náboja ako funkcie polohy $\rho(\boldsymbol{r})$, $\sigma(\boldsymbol{r})$, resp. $\lambda(\boldsymbol{r})$, potom celkový náboj v objeme, na ploche, resp. na čiare je daný integráciou príslušných hustôt náboja v danej oblasti, teda v objeme τ celkový náboj je

$$Q = \int_{\tau} \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau \tag{1.4}$$

na ploche S

$$Q = \int_{S} \sigma(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{1.5}$$

a na čiare l

$$Q = \int_{l} \lambda(\boldsymbol{r})\mathrm{d}l \tag{1.6}$$

Zavedenie pojmu hustoty elektrického náboja súvisí so všeobecne platným a vo fyzike široko používaným princípom, podľa ktorého výsledné fyzikálne pôsobenie niekoľkých zdrojov nejakého systému sa rovná súčtu (integrálu) pôsobení jednotlivých zdrojov. Tento princíp sa nazýva **princípom superpozície**. Tak napr. výsledná sila pôsobiaca od niekoľkých nábojov sa rovná súčtu jednotlivých síl.

2 ELEKTROSTATIKA NÁBOJOV VO VÁKUU

2.1 SILOVÉ PÔSOBENIE NÁBOJOV. COULOMBOV ZÁKON

Pri štúdiu elektromagnetických javov je otázkou zásadného významu silové pôsobenie medzi elektrickými nábojmi. Toto silové pôsobenie je v skutočnosti veľmi zložité, pretože závisí od množstva a pohybového stavu nábojov, ktoré sú v interakcii, a aj od rozloženia nábojov v priestore. Jednoduchý je iba prípad silového pôsobenia dvoch bodových nábojov (napr. nabitých elementárnych častíc), ktoré sú vo zvolenom súradnicovom systéme v pokoji a sú umiestnené v istej vzájomnej vzdialenosti. Takýto systém nezodpovedá reálnej situácii, pretože náboje v pokoji sa v prírode nevyskytujú. Ak hovoríme o nábojoch v pokoji, obyčajne máme na mysli veľký štatistický súbor elementárnych nábojov, ktoré síce v nejakom objeme môžu vykonávať fluktuačný tepelný pohyb, ale ich počet v danom objeme sa nemení (napr. náboj na nabitej guľôčke).

Silové pôsobenie medzi dvoma bodovými nábojmi skúmal v polovici 18. storočia francúzsky učenec Charles Augustin de Coulomb. Coulomb vykonal množstvo experimentov na zariadení nazývanom torzné váhy, na ktorých bodové náboje boli modelované kovovými nabitými guľôčkami. Z jeho meraní vyplynula skutočnosť, že bodové náboje (nabité guľôčky) pôsobia na seba silou, ktorá je úmerná súčinu nábojov a nepriamo úmerná štvorcu ich vzdialenosti. Sila je odpudivá, ak sú náboje rovnakého znamienka a príťažlivá, ak sú znamienka opačného, a pôsobí pozdĺž spojnice nábojov. Silové pôsobenie spĺňa tretí Newtonov zákon, t. j. pôsobiace sily na jednotlivé náboje sú v absolútnej hodnote rovnaké bez ohľadu na veľkosť jednotlivých nábojov. Tieto experimentálne zistené skutočnosti možno vyjadriť v nasledovnej matematickej formulácii

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{2.1}$$

kde F je sila pôsobiaca medzi nábojmi, q_1 a q_2 sú veľkosti nábojov, r je vzdialenosť nábojov a k je rozmerová konštanta, ktorá závisí od výberu sústavy jednotiek. V sústave fyzikálnych jednotiek SI (Systéme International d´Unités) je jej číselná hodnota

$$k = 8{,}987551786.10^9\ \mathrm{kg.m^3.s^{-4}.A^{-2}} \tag{2.2}$$

Hodnota konštanty k vyplynie z ďalších našich úvah. Z dôvodov racionalizácie vzťahov v elektrodynamike je vhodnejšie konštantu k písať v tvare

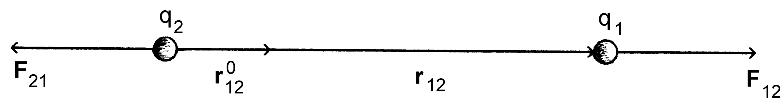
$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{2.3}$$

kde ε_0 je univerzálna prírodná konštanta súvisiaca s rýchlosťou svetla vo vákuu a nazýva sa **elektrická konštanta** (starší názov **permitivita vákua**). Jej číselná hodnota je

$$\varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,818.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}} \tag{2.4}$$

Sila je ale vektorová veličina, a preto výraz pre ňu musí obsahovať aj informáciu o smere jej pôsobenia. Ak je náboj q_1 vo vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}_{12}$ od náboja q_2 (pozri *obr. 2.1*), potom sila $\boldsymbol{F}_{12}$ pôsobiaca na náboj q_1 od náboja q_2 (náboje sú zadané s príslušným znamienkom) je určená vektorovým vzťahom

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}} \tag{2.5}$$



Obr. 2.1

kde r_{12} je absolútna vzdialenosť nábojov. Ak zavedieme jednotkový vektor $\boldsymbol{r}_{12}^0 = \boldsymbol{r}_{12} / r_{12}$, potom výraz pre silu možno napísať v tvare

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{r}_{12}^0 \tag{2.6a}$$

Existuje ešte jeden spôsob zápisu Coulombovho zákona, pri ktorom sa polohy nábojov q_1 a q_2 zadajú polohovými vektormi $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ vzhľadom na nejaký referenčný bod 0 ako na *obr. 2.2.* V takom prípade

$$\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \qquad r_{12} = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|,$$

a

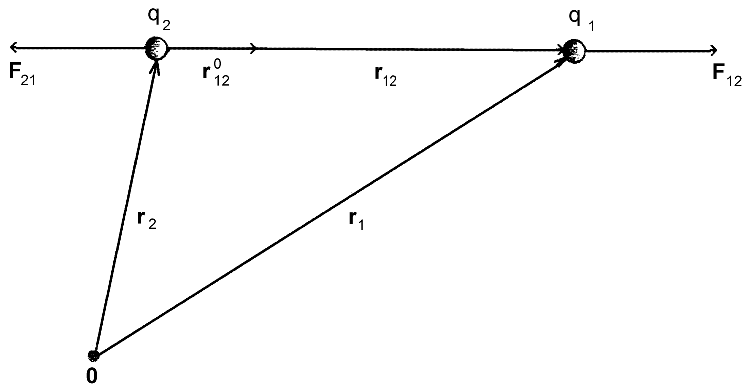
$$\boldsymbol{r}_{12}^0 = \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$$

takže výraz (2.6a) možno prepísať na tvar

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \tag{2.6b}$$

Posledný výraz je najvšeobecnejším matematickým vyjadrením Coulombovho zákona, ale aj najzložitejším, a preto ho budeme využívať iba výnimočne.

Platnosť zákona o silovom pôsobení bodových nábojov overoval Coulomb prostriedkami, ktoré mal v jeho dobe k dispozícii. Naša dôvera k silovému zákonu sa však nemôže zakladať na experimentoch, pri ktorých je ťažko merať sily s presnosťou väčšou ako niekoľko percent. Takéto merania nás nemôžu presvedčiť, že závislosť sily od vzdialenosti je skutočne kvadratická, teda že mocniteľ je 2 a nie napr. 2,001. Neskôr uvidíme, že platnosť Coulombovho zákona možno dokázať nepriamo experimentmi, podľa ktorých mocniteľ r sa rovná 2 s presnosťou lepšou ako $\pm 2.10^{-9}$.



Obr. 2.2

Coulombov zákon ako základný experimentálny zákon elektrostatiky sa ukazuje ako mimoriadne vhodným na stanovenie jednotkového množstva elektrického náboja. Skutočne, ak vo vzťahu (2.1) položíme $k = 1$, potom za jednotkové môžeme vyhlásiť také dve množstvá elektrického náboja, ktoré v jednotkovej vzdialenosti pôsobia na seba jednotkovou silou. Tak bola určená jednotka množstva elektrického náboja v sústave jednotiek cgs (Gaussovej sústave), ktorá sa dnes v praxi nepoužíva, v ktorej jednotka náboja, a následne jednotka elektrického prúdu, nie je základnou, ale odvodenou jednotkou. Keďže meranie sily medzi nábojmi (guľôčkami) je obtiažne a zaťažené značnou chybou, je v sústave fyzikálnych jednotiek SI jednotka náboja určená iným spôsobom. V SI sústave je základnou elektrickou jednotkou jednotka elektrického prúdu **ampér** (A), ktorý dokážeme pohodlne merať zo silových účinkov medzi prúdmi. Keďže elektrický prúd I je definovaný ako množstvo elektrického náboja q, ktoré prejde prierezom vodiča za jednotku času t, teda $I = q/t$, možno jednotkový náboj definovať ako množstvo náboja, ktoré pri prúde 1 A pretečie prierezom vodiča za jednu sekundu (s). Toto jednotkové množstvo náboja sa nazýva **coulomb** (C). Teda 1 C = 1 A × 1s = 1 A.s. Teraz je jasný pôvod hodnoty konštanty k (2.2) vo vzťahu (2.1). Dva bodové náboje, každý veľkosti 1 C, umiestnené vo vzájomnej vzdialenosti 1 m pôsobia na seba obrovskou silou, ktorá sa číselne (v newtonoch) rovná hodnote konštanty k, danej vyjadrením (2.2).

Číselná hodnota konštanty k alebo ε_0 sa však stanovuje iným spôsobom. V elektromagnetizme sa popri konštante ε_0 zavádza ešte jedna univerzálna konštanta poľa, a to **magnetická konštanta** μ_0 (starší názov **permeabilita vákua**). Jej hodnota

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \text{H/m} \tag{2.7}$$

je daná definitoricky. Obidve konštanty poľa súvisia s rýchlosťou c svetla vo vákuu vzťahom

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \tag{2.8}$$

ktorý plynie z vlnových rovníc elektromagnetického poľa. Z toho elektrická konštanta

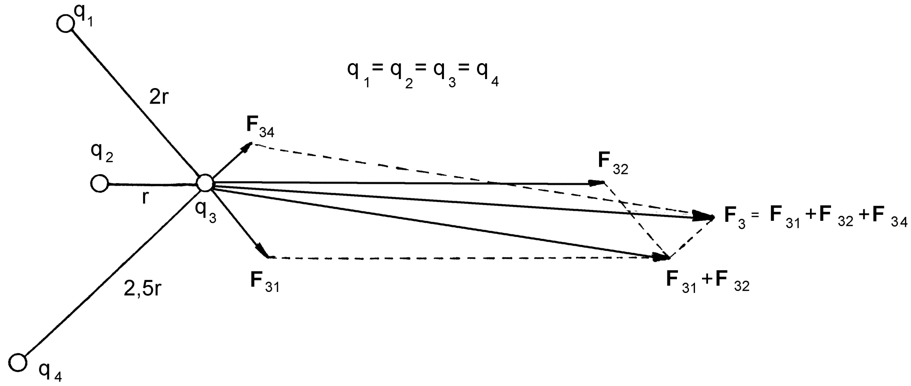
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \tag{2.9}$$

s číselnou hodnotou danou vyjadrením (2.4). Presnosť určenia ε_0 je daná presnosťou, s ktorou je v súčasnosti známa rýchlosť svetla vo vákuu (pozri odsek 11.7).

Ak je vo vzájomnom silovom pôsobení n nábojov, potom sila $\boldsymbol{F}_i$ pôsobiaca na vybraný i-tý náboj podľa princípu superpozície je daná výrazom

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_{i1} + \boldsymbol{F}_{i2} + \ldots + \boldsymbol{F}_{ii\text{-}1} + \boldsymbol{F}_{ii+1} + \ldots + \boldsymbol{F}_{in} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij} \qquad (j \neq i)$$

Skladanie síl od niekoľkých nábojov rovnakého znamienka a rovnakej absolútnej hodnoty je v proporcionálnej mierke znázornené na *obr. 2.3*.



Obr. 2.3

Jedna z už uvedených vlastností elektrických nábojov hovorí o ich väzbe na materiálne objekty, t. j. že náboje sú vždy viazané na isté elementárne častice. Medzi časticami ako nositeľmi elementárnych nábojov pôsobia okrem elektrických aj gravitačné sily. Je otázka, akou mierou sa podieľajú gravitačné sily v porovnaní s elektrickými silami na vzájomnom silovom pôsobení dvoch elementárnych častíc. Ako príklad možno posúdiť silové pôsobenie medzi protónom a elektrónom v danej vzdialenosti, napríklad v klasickom atóme vodíka. Medzi uvedenými časticami pôsobí príťažlivá sila, ktorá je výsledkom superpozície príťažlivej elektrickej sily medzi dvoma nesúhlasnými elementárnymi nábojmi a gravitačnej príťažlivej sily medzi hmotnosťami protónu a elektrónu. Ak uvážime, že hmotnosť protónu m_p = 1,67.10^{-27} kg, hmotnosť elektrónu m_e = 9,11.10^{-31} kg, elementárny náboj e = 1,602.10^{-19} C, gravitačná konštanta κ = 6,67.10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}

a elektrická konštanta poľa $\varepsilon_0 =$ 8,854.10^{-12} F.m^{-1}, potom pomer elektrickej sily F_e a gravitačnej F_g je

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \kappa m_p m_e} \approx 2{,}27.10^{39} \text{ !!!}$$

Tento príklad svedčí o tom, že elektrická sila medzi nabitými elementárnymi časticami je mnohokrát väčšia ako príťažlivá sila medzi hmotnosťami častíc, a preto gravitačné pôsobenie medzi elementárnymi časticami možno vždy zanedbať. Uvedený príklad potvrdzuje ešte jednu skutočnosť, že sily, ktoré držia atómy pohromade, sú sily elektrického pôvodu. V tejto súvislosti je namieste otázka, čo drží pohromade atómové jadrá? Tie pozostávajú z neutrónov a protónov a medzi protónmi pôsobia silné elektrické odpudivé sily. Je zrejmé, že ak sa pod účinkom takejto sily atómové jadrá nerozletia, musia medzi ich stavebnými kameňmi pôsobiť ešte iné príťažlivé sily, ktoré musia byť silnejšie než odpudivé sily protónov. Týmito silami sú jadrové sily, sily krátkeho dosahu, oveľa väčšie ako gravitačné a elektrické sily, ktoré so vzdialenosťou veľmi rýchlo klesajú. Jadrové sily sú zodpovedné za konzistenciu a stabilitu atómových jadier. Ľahké jadrá, ktoré obsahujú rovnaký počet protónov a neutrónov, sú relatívne stabilné. U ťažkých jadier je stabilita zaistená väčším počtom neutrónov, ktoré zmenšujú odpudivú silu protónov tým, že "zrieďujú" protóny v jadre. Stabilita ťažkých jadier je však vratká. Veľmi ťažké jadrá s atómovým číslom väčším ako 83 sú nestabilné a pri sebemenšej excitácii sa rozpadajú. Sily medzi nukleónmi (protónmi a neutrónmi) v jadrách atómov sú **silné interakcie,** zatiaľ čo sily medzi jadrom a elektrónmi v atóme, prípadne sily medzi atómami v molekulách a v kryštáloch patria medzi **elektromagnetické interakcie**.

Vo svete, ktorý nás obklopuje, je elektrické silové pôsobenie podľa Coulombovho zákona jedno z najdôležitejších. Je zodpovedné za existenciu atómov, ale aj molekúl, teda za existenciu látok tak, ako ich v prírode poznáme, so všetkými ich mechanickými vlastnosťami. Tieto mechanické vlastnosti sú v skutočnosti odrazom pôsobenia elektrických síl medzi základnými stavebnými kameňmi látky. Platnosť Coulombovho zákona bola experimentálne overovaná a potvrdená v širokom rozsahu vzdialeností od rozmerov atómového jadra (rádovo 10^{-15} m) až do vzdialenosti rádovo 10^3 m a niet dôvodov pochybovať, že platí aj pre väčšie vzdialenosti.

Na základe uvedených skutočností možno Coulombov zákon považovať za jeden zo základných experimentálnych zákonov elektromagnetizmu.

2.2 ELEKTRICKÉ POLE. INTENZITA ELEKTRICKÉHO POĽA

Výpočet silového pôsobenia medzi bodovými nábojmi je jednoduchý, ak ide o interakciu dvoch nábojov. V systéme viacerých nábojov potom možno využiť princíp superpozície, ale úloha sa stáva zložitejšou. Ešte zložitejšou je úloha, ak na bodový náboj pôsobí rozloženie nábojov, ktoré môžeme považovať za spojité. Je zrejmé, že priamy výpočet je značne sťažený, alebo aj nemožný. Uvažujme ešte raz systém n bodových nábojov q_1, q_2, …, q_n, ktoré silovo pôsobia na vybraný náboj q_j. Sila $\boldsymbol{F}_j$ pôsobiaca na náboj q_j je podľa Coulombovho zákona a princípu superpozície

$$\boldsymbol{F}_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} \qquad (j \neq i) \tag{2.10}$$

kde

$$\boldsymbol{F}_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j q_i}{r_{ji}^3} \boldsymbol{r}_{ji} = q_j \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_{ji}^3} \boldsymbol{r}_{ji} \right] \qquad (j \neq i) \tag{2.11}$$

je sila, ktorou i-tý náboj pôsobí na j-tý náboj. Výsledná sila pôsobiaca na j-tý náboj je teda

$$\boldsymbol{F}_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} = q_j \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_{ji}^3} \boldsymbol{r}_{ji} \right] \qquad (j \neq i) \tag{2.12}$$

a je daná súčinom náboja q_j a súčiniteľa v hranatej zátvorke, ktorý závisí iba od nábojov q_1 až q_n a ich vektorových vzdialeností k náboju q_j. Výraz v zátvorke je matematicky vektorová funkcia polohy (ako uvidíme neskôr v elektrodynamike, aj funkcia času) a fyzikálne predstavuje vektorovú veličinu, ktorá sa číselne a smerom rovná sile pôsobiacej na jednotkový kladný náboj q_j veľký 1 C. Túto vektorovú veličinu nazývame **intenzita elektrického poľa** a označujeme ju symbolom $\boldsymbol{E}$. Priestorové rozloženie veličiny $\boldsymbol{E}$ nazývame **elektrické pole**. Podľa uvedených úvah je formálne intenzita elektrického poľa daná podielom sily a náboja, na ktorý sila pôsobí, teda

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}} \tag{2.13}$$

Intenzita elektrického poľa je dôležitá fyzikálna veličina, pre meranie ktorej treba určiť jednotku, najvhodnejšie priamo zo vzťahu (2.13). Vidíme, že takou jednotkou je 1 N/C. Častejšie sa však intenzita elektrického poľa určuje v ekvivalentných jednotkách 1 V/m = 1 N/C, kde V (volt) je jednotka elektrického potenciálu, alebo elektrického napätia. Rozmer jednotky intenzity elektrického poľa v sústave SI jednotiek je

$$1 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \ 1 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \ 1 \ \mathrm{m.kg.s^{-3}.A^{-1}}$$

Ak v nejakom bode priestoru intenzitu elektrického poľa poznáme, potom sila pôsobiaca na náboj q v danom bode je vyjadrená jednoduchým výrazom

$$\boxed{\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}} \tag{2.14}$$

Tento vzťah medzi intenzitou elektrického poľa a silou, ktorá v danom bode pôsobí na elektrický náboj, je jedným zo základných vzťahov elektrostatiky.

Prv, než pristúpime k výpočtu elektrostatických polí rôznych nábojových rozložení, odpovieme na jednu kardinálnu otázku: Čo je vlastne elektrické pole? Je to fyzikálna realita alebo iba bezobsažný pomocný pojem na popis silových interakcií medzi elektrickými nábojmi. Podľa spôsobu jeho zavedenia sa totiž možno domnievať, že elektrické pole je iba pomocná matematická funkcia, iba fikcia, ktorá neodráža nijakú objektívnu realitu. Ak by to bola pravda, to by znamenalo, že elektrické silové pôsobenie je okamžité pôsobenie nábojov na diaľku, bez akejkoľvek účasti priestoru a času. Takýto názor na problém sa všeobecne považoval za správny alebo aspoň logický až do vybudovania elektromagnetickej teórie, a v konečnom dôsledku až do vybudovania teórie relativity.[1] Silové interakcie elektrických nábojov sa však uskutočňujú v priestore a v čase, z čoho plynie, že elektrické pole je nositeľom energie. O tom sa možno presvedčiť nasledovným myšlienkovým experimentom:

Dva bodové náboje sa nachádzajú vo veľkej vzájomnej vzdialenosti. Predstavme si, že jeden z nábojov v istom okamihu zmenil polohu, "uskočil". Pýtame sa: za akú dobu to pocíti druhý náboj? Ak by sa informácia o zmene polohy náboja šírila okamžite s nekonečnou rýchlosťou, vtedy by sme mohli vyhlásiť, že vzájomné interakcie nábojov sú okamžité v čase, a teda sa dejú bezprostredne, bez účasti sprostredkovateľa, ktorým je priestor a čas. Dnes však vieme, že spomínaná informácia o zmene polohy náboja sa šíri konečnou rýchlosťou, konkrétne vo vákuu rýchlosťou svetla c. Teda prenos informácie sa uskutoční v priebehu doby $\Delta t = \Delta l/c$, kde Δl je vzdialenosť medzi nábojmi. Počas tejto doby informácia o "uskočení" náboja musí byť v niečom zakódovaná, a tým niečím je realita, ktorú nazývame elektrické pole.

Na zdôvodnenie existencie elektrického poľa netreba nám však robiť nijaké myšlienkové experimenty. Dnes nikto nepochybuje o reálnej existencii elektromagnetických vĺn, ktoré sa široko využívajú na prenos informácií a o ktorých vieme, že sa šíria konečnou rýchlosťou, vo vákuu rýchlosťou c. Prenos informácií je možný iba prenosom energie, teda elektromagnetické vlny predstavujú toky energie. Elektromagnetickým a tým aj elektrickým poliam teda musíme pripísať energiu, hybnosť a dokonca aj moment hybnosti a považovať ich za objektívnu realitu, pre ktoré sú splnené aj zákony zachovania. Treba si uvedomiť, že ak by pôsobenie nábojov bolo bez účasti priestoru a času, neexistovali by elektromagnetické vlny. Interakcia elektrických nábojov teda nie je bezprostredná, nie je to pôsobenie na diaľku, ale pôsobenie prostredníctvom reálneho elektrického poľa, ktoré je energetickým prejavom náboja.

Intenzita elektrického poľa *n* bodových nábojov. V tomto odseku uvedieme niekoľko príkladov na výpočet elektrostatických polí rôznych nábojových zoskupení. Jednoduchý je výpočet intenzity elektrického poľa skupiny bodových nábojov, alebo špeciálne jedného bodového náboja v bode, v ktorom neleží žiadny iný náboj. Intenzita systému bodových nábojov je daná výrazom v zátvorke vzťahu (2.12), teda

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i \tag{2.15}$$

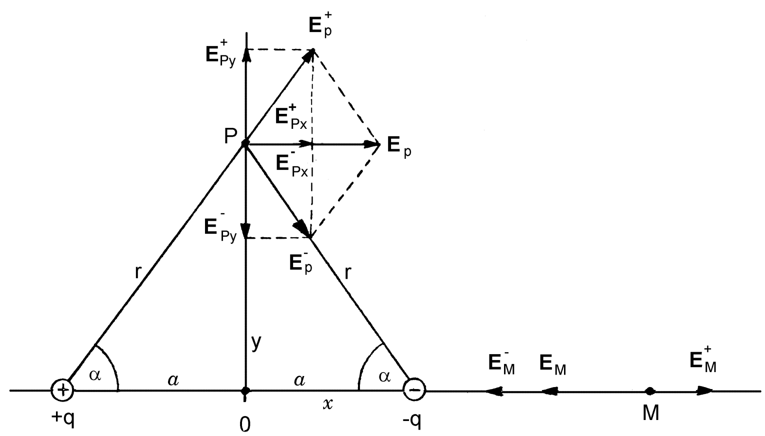
Intenzita elektrického poľa bodového náboja. Intenzita elektrického poľa od jediného bodového náboja q vo vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{2.16}$$

[1] Predstavu o bezprostrednom pôsobení nábojov na diaľku zastával aj významný nemecký fyzik Wilhelm Eduard Weber (1804 – 1855)

Z posledných dvoch vzťahov vidíme, že pre intenzitu elektrického poľa, podobne ako pre elektrické sily, platí princíp superpozície, totiž, že intenzita poľa súboru bodových nábojov sa rovná vektorovému súčtu intenzít jednotlivých bodových nábojov. O elektrickom poli bodového náboja zatiaľ môžeme povedať iba to, že je to vektorové pole, ktoré je radiálne so stredom symetrie v mieste náboja, je priamo úmerné veľkosti náboja a nepriamo úmerné druhej mocnine vzdialenosti od náboja, teda je funkciou $1/r^2$. V mieste náboja má pole singularitu, intenzita poľa v absolútnej hodnote tam rastie nad všetky medze, a naopak, v nekonečne veľkých vzdialenostiach od náboja intenzita klesá k nule. Takúto informáciu nám poskytuje výraz (2.16).

Intenzita elektrického poľa dvojice bodových nábojov. Druhým dôležitým systémom nábojov je dvojica bodových nábojov q_1 a q_2 uložených v istej vzájomnej vzdialenosti d. Intenzita poľa v ľubovoľnom bode priestoru je daná superpozíciou polí dvoch nábojov a matematicky súčtom dvoch výrazov typu (2.16). Ak sú náboje ľubovoľné, bližšie neurčené, môže byť pole veľmi zložité. Polia rôznych dvojíc majú však niektoré spoločné črty; v miestach nábojov polia vykazujú singularity (nekonečne veľké absolútne hodnoty), v nekonečne pole zaniká, pole má valcovú (osovú) symetriu okolo osi prechádzajúcej nábojmi. Najjednoduchšie pole vytvárajú dvojice v absolútnej hodnote rovnako veľkých nábojov, pričom obzvlášť dôležitá je dvojica rovnako veľkých nábojov opačného znamienka, ktorú nazývame **elektrický dipól**. Pole elektrického dipólu je vhodnejšie analyzovať s využitím pojmu elektrického potenciálu, preto na tomto mieste posúdime iba niektoré základné črty tohto poľa.



Obr. 2.4

Na *obr. 2.4* je dvojica nábojov $+q$ a $-q$ vo vzájomnej vzdialenosti $d = 2a$. Os x pravouhlého súradnicového systému je totožná s osou dvojice nábojov a os y prechádza symetricky medzi nábojmi. Určíme intenzitu elektrického poľa na dvoch miestach – v bode $M(x;\ 0)$ na osi x vo vzdialenosti $x > a$ a vo zvolenom bode $P(0;\ y)$ na osi y. Treba si všimnúť, že pole je osovo symetrické, teda rovnaké pole ako v bode P je v každom bode na kružnici s polomerom y ležiacej v rovine kolmej na os x a so stredom na osi x. V bode M je intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}_M$ daná vektorovým súčtom polí $\boldsymbol{E}_M^+$ a $\boldsymbol{E}_M^-$ od jednotlivých bodových nábojov, teda

$$\boldsymbol{E}_M = \boldsymbol{E}_M^+ + \boldsymbol{E}_M^-$$

kde $\quad \boldsymbol{E}_M^+ = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{(x+a)^2}\boldsymbol{i} \quad$ a $\quad \boldsymbol{E}_M^- = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{(x-a)^2}\boldsymbol{i}$

takže
$$\boldsymbol{E}_M = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x-a)^2}\right]\boldsymbol{i} =$$

$$= -\frac{4axq}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2-a^2\right)^2}\boldsymbol{i} = -\frac{2qd}{4\pi\varepsilon_0 x^3\left(1-\dfrac{a^2}{x^2}\right)^2}\boldsymbol{i} \tag{2.17}$$

Intenzita poľa v bode M smeruje proti jednotkovému vektoru $\boldsymbol{i}$ (do stredu súradnej sústavy). V symetrickom bode vo vzdialenosti $-x$ má intenzita elektrického poľa rovnakú absolútnu hodnotu a smeruje v zápornom smere osi x. So zväčšovaním absolútnej vzdialenosti x klesá intenzita v absolútnej hodnote k nule. V bodoch, kde sídlia náboje, intenzita v absolútnej hodnote rastie nad všetky medze (singulárne body).

V bodoch na osi x pre $|x| < a$ má intenzita smer kladnej osi x a jej veľkosť je daná výrazom

$$E_x = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x^2+a^2}{\left(a^2-x^2\right)^2} \tag{2.18}$$

o čom sa čitateľ môže ľahko presvedčiť. V strede súradnicovej sústavy ($x = 0$, $y = 0$), symetricky medzi nábojmi

$$E_x = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2} \tag{2.19}$$

teda intenzita predstavuje dvojnásobok intenzity poľa bodového náboja, čo sa dalo očakávať.

Všimnime si teraz vlastnosti intenzity poľa v bode P na osi y. Aj tam je intenzita poľa $\boldsymbol{E}_P$ daná superpozíciou dvoch vektorov $\boldsymbol{E}_P^+$ a $\boldsymbol{E}_P^-$, t. j.

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_P^+ + \boldsymbol{E}_P^-$$

kde

$$E_P^+ = E_P^- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

a zložky týchto vektorov v smeroch osí x a y v bode P sú dané výrazmi

$$E_{Px}^{+} = E_{Px}^{-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\alpha$$

$$E_{Py}^{+} = -E_{Py}^{-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\sin\alpha$$

Výsledná intenzita v bode P je daná vektorom

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_P^{+} + \boldsymbol{E}_P^{-} = (E_{Px}^{+} + E_{Px}^{-})\boldsymbol{i} + (E_{Py}^{+} + E_{Py}^{-})\boldsymbol{j} = 2E_{Px}^{+}\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$$

kde $\boldsymbol{j}$ je jednotkový vektor v smere osi y. Ako vidíme z posledného výrazu, pole v bode P má tiež iba zložku x

$$E_{Px} = 2E_{Px}^{+} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{r^3} =$$

$$= \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0\left(y^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 y^3\left(1 + \dfrac{a^2}{y^2}\right)^{3/2}}$$

kde sme pri úprave využili skutočnosť, že $a/r = \cos\alpha$ a

$$r = \sqrt{y^2 + a^2}$$

Intenzita elektrického poľa v bode P je teda daná vektorom

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 y^3\left(1 + \dfrac{a^2}{y^2}\right)^{3/2}}\boldsymbol{i} \tag{2.20}$$

a pre rastúce y klesá k nule. Pre $y = 0$, teda v strede symetrie (v začiatku súradnicového systému)

$$\boldsymbol{E}_P = E_x\boldsymbol{i} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{i}$$

čo je taký istý výsledok, aký sme dostali pri analýze poľa na osi dvojice nábojov [na osi dipólu – pozri vzťah (2.19)].

Obzvlášť dôležité je pole vo veľkej vzdialenosti od dvojice nábojov, teda vo vzdialenostiach oveľa väčších ako je vzdialenosť nábojov $d = 2a$. Takáto dvojica nábojov pozorovaná z veľmi veľkej vzdialenosti sa nazýva **bodový dipól**. Intenzitu poľa bodového dipólu na osiach x a y dostaneme tak, že vo vzťahoch (2.17) a (2.20) sa považuje x, $y \gg a$, takže veličiny $a^2/x^2 \ll 1$ a $a^2/y^2 \ll 1$ môžeme zanedbať. Označíme $p = qd$, potom

$$\boldsymbol{E}_M = \frac{-2p}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\boldsymbol{i} \tag{2.21a}$$

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 y^3}\boldsymbol{i} \tag{2.21b}$$

Veličina p je absolútna hodnota dipólového momentu. Vidíme, že intenzita poľa vo veľkej vzdialenosti na osi dipólu (osi x) je v absolútnej hodnote dvakrát väčšia ako intenzita v rovnako veľkej vzdialenosti kolmo na os dipólu (na osi y).

Vzhľadom na veľkú dôležitosť dipólového poľa vrátime sa k nemu podrobne po zavedení pojmu elektrického potenciálu. Zatiaľ si všimnime iba to, že dipólové pole v porovnaní s poľom bodového náboja je slabé a klesá s treťou mocninou vzdialenosti na rozdiel od poľa bodového náboja, ktoré, ako vieme, klesá s druhou mocninou vzdialenosti.

V ľubovoľných iných bodoch priestoru v okolí dvojice nábojov je pole dané vektorovým súčtom polí jednotlivých nábojov. Jeho matematické vyjadrenie môže byť zložité a obyčajne neposkytuje názornú predstavu o priestorovom priebehu poľa.

Názornú predstavu o poli možno získať, ak ho nejakým spôsobom graficky zobrazíme. Podľa už uvedených matematických vyjadrení je elektrické pole spojitá vektorová funkcia polohy v priestore, v blízkosti bodového náboja rastie nad všetky medze a smerom do nekonečna klesá k nule. Túto funkciu by teda bolo možné znázorniť pomocou nejakých čiar. Existuje viacero spôsobov ako graficky zobraziť elektrické pole. Najrozšírenejší spôsob zobrazenia poľa je pomocou siločiar. Siločiary v priestore, kde existuje elektrické pole, sú myslené orientované čiary, ktoré majú nasledovné vlastnosti:

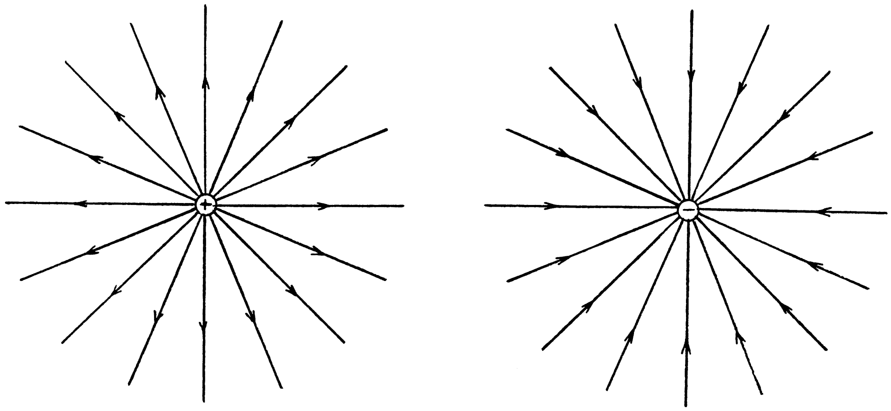
1. V každom bode poľa má vektor intenzity smer dotyčnice k siločiare. Táto vlastnosť implikuje skutočnosť, že siločiary sa nemôžu pretínať.

2. Siločiary začínajú na kladných a končia na záporných nábojoch alebo v nekonečne.

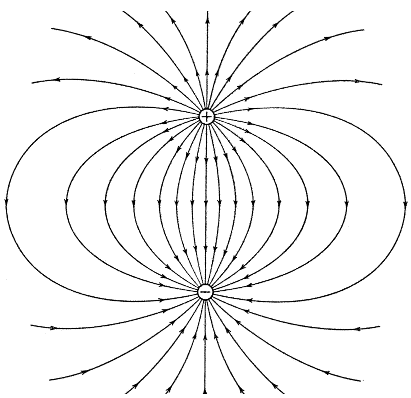
3. Siločiary znázorňujeme tak, že ich počet prenikajúci jednotkovú plochu je úmerný intenzite poľa v danom bode. Tam, kde sú siločiary hustejšie, je intenzita poľa väčšia, a tam kde sú redšie, je intenzita menšia.

Nie je celkom triviálne, že existuje súbor siločiar, ktoré majú uvedené vlastnosti. Možno sa presvedčiť, že ak by neplatil Coulombov zákon, takýto súbor siločiar by neexistoval. Netreba však zabúdať, že elektrické siločiary sú iba pomocný prostriedok na zobrazenie poľa, že nijaké reálne čiary v priestore neexistujú.

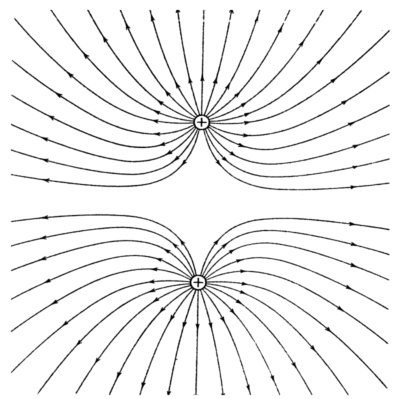
Na *obr. 2.5* sú znázornené siločiary kladného a záporného bodového náboja. Z kladného náboja siločiary radiálne vychádzajú a strácajú sa v nekonečne. Na zápornom náboji majú siločiary opačný smer. Na *obr. 2.6* sú siločiary dvojice opačných rovnako veľkých nábojov, na *obr. 2.7* sú siločiary dvojice rovnakých kladných nábojov a napokon na *obr. 2.8* siločiary dvojice opačných nábojov rôznej veľkosti. Vidíme, že najmä posledné siločiary sú elegantné a zobrazujú relatívne zložité, v priestore osovo symetrické pole.



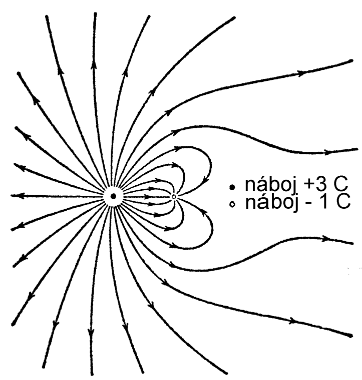
Obr. 2.5



Obr. 2.6



Obr. 2.7



Obr. 2.8

2.3 INTENZITA ELEKTRICKÉHO POĽA NÁBOJOV SPOJITE ROZLOŽENÝCH NA ČIARACH, PLOCHÁCH A V OBJEME

V praxi je elektrický náboj často spojito rozložený na telesách rôznych geometrických foriem, pričom spojitosť musíme chápať v uvedenom zmysle rozloženia veľkého množstva elementárnych nábojov na objektoch konečných rozmerov. Pod pojmom rozložený náboj tu rozumieme dodatočný náboj, ktorý bol na teleso privedený alebo z neho odvedený vo forme napr. istého počtu elektrónov. Bez tohoto dodatočného náboja sa teleso javí ako elektricky nenabité, t. j. účinok náboja všetkých protónov je kompenzovaný účinkom náboja presne rovnakého počtu elektrónov. Je samozrejmé, že túto kompenzáciu treba chápať v relatívne veľkom objeme, v ktorom veľký počet kladných a záporných nábojov je rovnaký. V blízkosti jednotlivých elementárnych nábojov v telese existujú silné lokálne polia, ktoré v dôsledku chaotického tepelného pohybu majú fluktuačný charakter a ich priestorová a časová stredná hodnota sa rovná nule. Ak teda privedieme na teleso dodatočný náboj – ináč povedané, elektricky ho nabijeme – zaujmú tieto náboje na telese isté polohy závislé od štruktúry a elektrických vlastností telesa.

Na tomto mieste treba povedať, že v prírode sa vyskytujúce látky delíme z hľadiska ich základných elektrických vlastností na:

a) látky elektricky nevodivé, nazývané **nevodiče**, izolanty, prípadne **dielektriká**,

b) látky elektricky vodivé, alebo jednoducho **vodiče**.

Pojem "vodivosť látok" zavedieme neskôr ako fyzikálnu veličinu, na tomto mieste definujeme vodivosť ako mieru voľnosti pohybu nábojov v látke. V nevodičoch, dielektrikách, sa privedené náboje nemôžu pohybovať, teda zotrvávajú na tých miestach, na ktoré boli vonkajšími silami prinesené. Vo vodičoch sa náboje môžu pohybovať, takže privedený náboj si na vodivom telese nájde sám miesto, na ktorom je ochotný stabilne zotrvať. Toto rozmiestnenie nábojov na vodivom telese je "kolektívne", po dohode s ostatnými nábojmi. Dá sa ukázať, že rozloženie nábojov na vodivom telese zodpovedá princípu najmenšieho účinku – náboje sa na vodivom telese rozložia tak, že energia ich elektrického poľa je minimálna (Thomsonova veta).

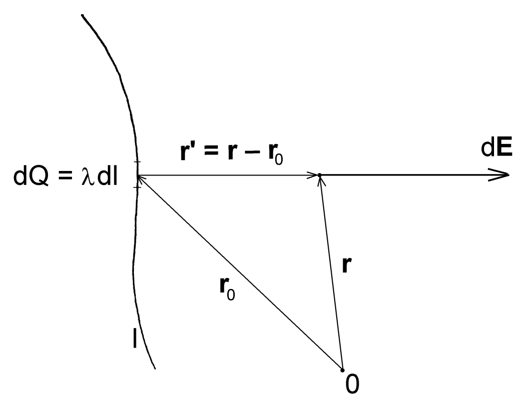
Uvedené triedenie látok na vodivé a nevodivé je veľmi hrubé, pretože v prírode v skutočnosti neexistujú ideálne látky, ktoré by patrili do jednej alebo druhej skupiny. Všetky tuhé látky sú viac-menej vodivé alebo nevodivé. Naviac, popri tuhých látkach existujú aj látky kvapalné a plynné, ktoré majú svoje špecifické zvláštnosti, najmä plyny, ktoré keď sú ionizované, predstavujú osobitné skupenstvo hmoty nazývané **fyzikálna plazma**. Keďže sa na tomto mieste nemienime zaoberať vnútornou štruktúrou látok, uspokojíme sa s týmto hrubým triedením, ktoré potrebám elektrostatiky dostatočne vyhovuje. Látkové nabité prostredie samo vplýva na intenzitu elektrického poľa. Predbežne si však tento vplyv nebudeme všímať a výsledné elektrické pole budeme považovať iba za pole dodatočných, prinesených nábojov.

Venujme sa teda spôsobom výpočtu intenzity poľa od rôznych nábojových rozložení. Všetky tieto výpočty sú založené na platnosti princípu superpozície a vedú na integráciu príspevkov k intenzite od jednotlivých elementov nábojového rozdelenia. Ako prvé preskúmame elektrické pole budené nábojom rozloženým na geometrickom útvare, podobnom matematickej čiare, ktorá môže modelovať napr. tenký vodivý nabitý drôt alebo nabité vlákno z umelej hmoty. Dĺžka nosiča náboja (čiary) nech je l a môže byť konečná alebo nekonečná. Na čiare je rozložený náboj s dĺžkovou hustotou λ, pričom λ môže byť konštanta (kladná alebo záporná), ak je náboj na čiare rozložený rovnomerne, alebo veličina závislá od polohy na čiare. V takom prípade je λ matematickou funkciou polohy, pričom poloha môže byť daná rôznym spôsobom; najčastejšie ako priebežný bod v pravouhlých súradniciach (x_0, y_0, z_0), teda vzdialenosťou uvažovaného bodu na čiare od vhodne zvoleného začiatku 0, pozri *obr. 2.9*, teda $\lambda(\boldsymbol{r}_0)$. V tomto bode na čiare zvolíme nekonečne krátky úsek dl, na ktorom je celkový nekonečne malý náboj $\mathrm{d}Q(\boldsymbol{r}_0) = \lambda(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}l$. Tento náboj má vo veľkej vzdialenosti $\boldsymbol{r}'$ vlastnosti bodového náboja, teda budí nekonečne malé pole $\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ úmerné dQ a klesajúce ako funkcia $1/r'^2$ so smerom pozdĺž vektora $\boldsymbol{r}'$. Pole $\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ možno vyjadriť matematickými vzťahmi

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\,Q(\boldsymbol{r}_0)}{r'^3}\boldsymbol{r}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}'}{r'^3}\mathrm{d}\,l = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\mathrm{d}\,l \tag{2.22}$$

kde $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ (pozri *obr. 2.9*). Výsledná intenzita poľa od celej nabitej čiary je daná vektorovým súčtom nekonečne malých príspevkov d$\boldsymbol{E}$ od jednotlivých nábojových elementov pozdĺž celej čiary l. Matematicky je tento súčet daný integrálom príspevkov (2.22), teda

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}'}{r'^3}\mathrm{d}\,l \tag{2.23}$$



Obr. 2.9

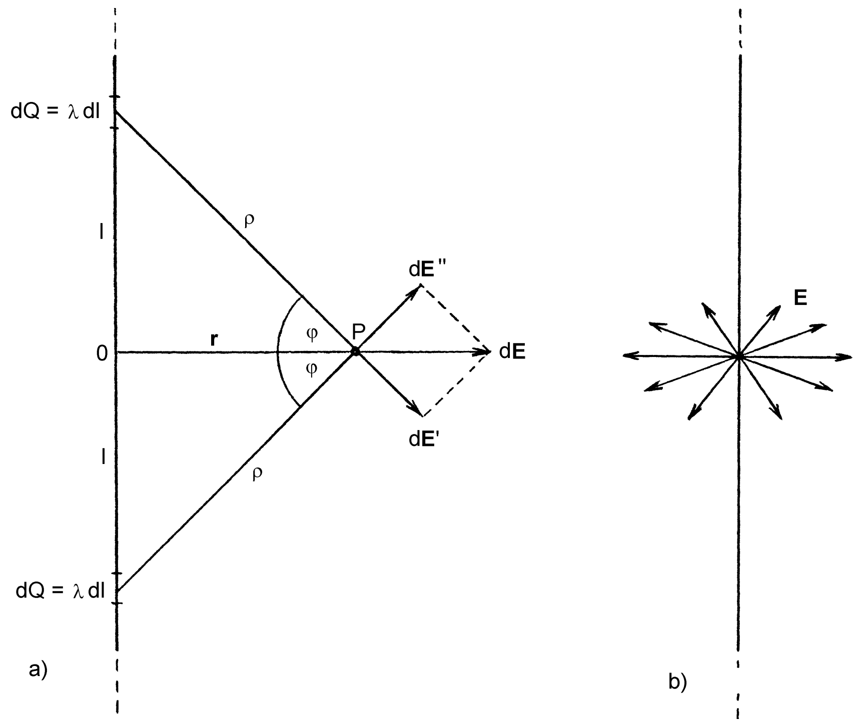
Vzťah (2.23) pre intenzitu elektrického poľa od nabitej priamky má iba formálny význam, pretože nevieme priamo počítať integrály z vektorových funkcií. Ak máme šťastie, že polia od všetkých elementov majú rovnaký smer, v takom prípade ide o obyčajnú integráciu, ale to je zriedkavosť. Vo všeobecnosti treba príspevky typu (2.22) rozložiť na vektorové zložky a tieto jednotlivo integrovať. Výsledok dostaneme v tvare troch zložiek vektora intenzity elektrického poľa. Čiastočne sa výpočet zjednoduší aj v prípade, keď je nábojová hustota konštantná.

Intenzita elektrického poľa v okolí nabitej priamky. Ako užitočný príklad uvedieme výpočet intenzity elektrického poľa v okolí nekonečne dlhej priamky nabitej nábojom s konštantnou hustotou λ. Na *obr. 2.10a* je znázornená časť nekonečnej nabitej priamky. V kolmej vzdialenosti r od priamky (bod 0 je vzťažný bod) v bode P je intenzita elektrického poľa od každého z dvoch zvolených elementov $\lambda \mathrm{d}l$ daná výrazom

$$\mathrm{d}\,E' = \mathrm{d}\,E'' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}\,l}{\rho^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}\,\varphi \tag{2.24}$$

kde sme využili skutočnosť, že

$$l = r\,\mathrm{tg}\,\varphi \qquad \mathrm{d}\,l = \frac{r}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \qquad \rho = \frac{r}{\cos\varphi}$$



Obr. 2.10

Tieto elementárne príspevky majú smery spojníc ρ a v bode P sa vektorovo sčítajú na výslednú intenzitu dvojice v absolútnej hodnote

$$\mathrm{d}\,E_r = 2\,\mathrm{d}\,E'\cos\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi \tag{2.25}$$

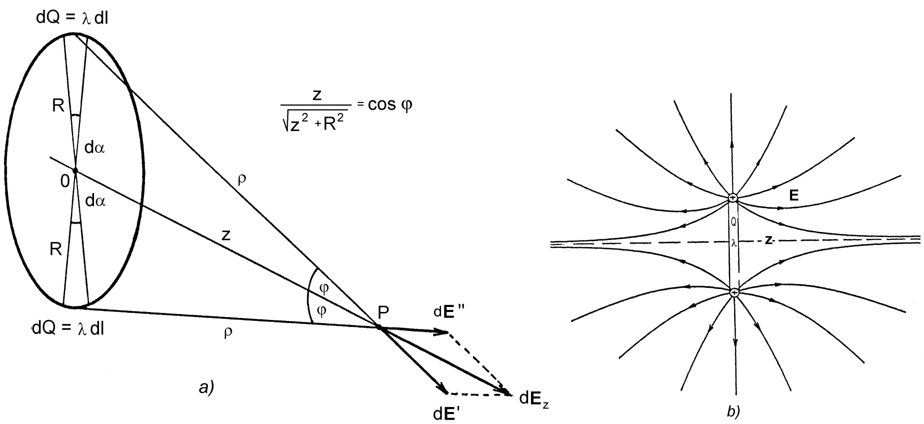
Smer tohoto príspevku je pozdĺž spojnice r. Teraz môžeme integrovať všetky takéto dvojice pozdĺž nekonečnej priamky, teda

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.26}$$

Vidíme, že pole nábojov rozložených rovnomerne na nekonečnej priamke je radiálne okolo priamky a intenzita poľa klesá ako funkcia $1/r$. Na *obr. 2.10b* sú znázornené siločiary poľa v okolí nabitej priamky.

Intenzita elektrického poľa od náboja na kružnici. Poučným príkladom je výpočet intenzity elektrického poľa na osi kružnice polomeru R s nábojom Q rovnomerne rozloženým pozdĺž nej s dĺžkovou hustotou $\lambda = Q/(2\pi R)$, pozri *obr. 2.11a*. Intenzitu poľa vypočítame vo vzdialenosti z od stredu kružnice. Na kružnici zvolíme dva proti sebe ležiace nábojové elementy $\lambda \mathrm{d}l$, ktoré dávajú dva rovnako veľké príspevky intenzity

$$\mathrm{d}E' = \mathrm{d}E'' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \,\mathrm{d}l}{\rho^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R \,\mathrm{d}\alpha}{z^2}\cos^2\varphi$$



Obr. 2.11

kde $\rho = z/\cos\varphi$ a $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\alpha$. Tieto dva príspevky sa v bode P vektorovo skladajú a vytvárajú pozdĺž osi z element intenzity

$$\mathrm{d}E_z = 2\,\mathrm{d}E'\cos\varphi = \frac{\lambda R}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos^3\varphi}{z^2}\mathrm{d}\alpha$$

Po jednoduchej integrácii elementov $\mathrm{d}\alpha$ od 0 po π dostaneme pre intenzitu poľa na osi kruhu vo vzdialenosti z v mieste, odkiaľ oblúky kruhu vidieť pod uhlom φ, výraz v tvare

$$E_z = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{\cos^3\varphi}{z^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} \tag{2.27}$$

Z tohoto výrazu môžeme urobiť niektoré výpovede o priebehu poľa pozdĺž osi z. Predovšetkým v začiatku, v strede kružnice (z = 0), je intenzita nulová. To síce priamo z posledného výrazu nevyplýva, pretože by tam mohli okrem zložky v smere z existovať i nejaké priečne zložky, ale aj tie by sa v dôsledku osovej symetrie rozloženia náboja v strede kružnice museli rušiť. Pre záporné hodnoty z je intenzita poľa na osi záporná, čo znamená, že tam intenzita poľa smeruje proti smeru osi z, a v nekonečne veľkých vzdialenostiach napravo a naľavo od stredu 0 sa intenzita poľa rovná nule. Posledný výraz môžeme písať aj v tvare

$$E_z(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{3/2}} \tag{2.28}$$

odkiaľ vidíme, že vo vzdialenosti $z \gg R$ je pole dané približným výrazom

$$E_z(z) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

Vo veľkej vzdialenosti od kružnice nielen na osi, ale v ľubovoľnom bode priestoru je pole dané posledným výrazom, inak povedané, z veľkej vzdialenosti pozorujeme nabitú kružnicu ako bodový náboj.

Zistili sme, že intenzita poľa v začiatku a v nekonečne sa rovná nule, musí teda na osi z existovať miesto, kde intenzita poľa má maximum. Možno sa ľahko presvedčiť, keď sa vypočíta extrém funkčnej závislosti (2.27), že intenzita nadobúda absolútne maximá vo vzdialenostiach $\pm R/\sqrt{2}$ od stredu kružnice, kde dosahuje hodnoty

$$E_{max} = \frac{Q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Pole siločiar v bezprostrednom okolí kružnice je pomerne zložité. O jeho priebehu si možno urobiť predstavu z *obr. 2.11b*. Náš výpočet sa týka iba bodov na osi kružnice, vo všetkých iných bodoch výpočty sú zložité a vedú na eliptické integrály.

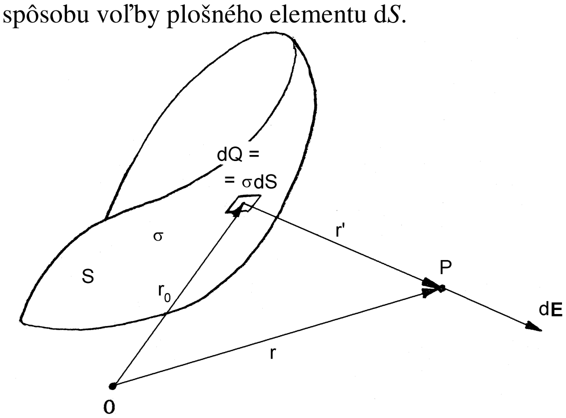
Druhým, v praxi sa často vyskytujúcim nábojovým rozložením, je spojité rozloženie náboja na ploche. Na *obr. 2.12* je znázornená plocha S, ktorá tiež môže byť konečná alebo nekonečná, na ktorej je rozložený náboj s plošnou hustotou σ. Vo vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}_0$ od vzťažného bodu 0 je na ploche zvolená elementárna plocha dS, na ktorej sídli nekonečne malý náboj $\mathrm{d}Q = \sigma \mathrm{d}S$. Tento náboj produkuje vo vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}'$ elementárne malú intenzitu elektrického poľa

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}\,S}{r'^3} \tag{2.29}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je vektorová vzdialenosť bodu P, v ktorom počítame intenzitu. Výsledná intenzita poľa v bode P je daná integrálom výrazu (2.29), teda

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}'}{r'^3} \mathrm{d}\, S \tag{2.30}$$

Integrál v poslednom výraze je vo všeobecnosti dvojným integrálom a spôsob jeho výpočtu závisí od spôsobu voľby plošného elementu dS.



Obr. 2.12

Intenzita elektrického poľa od náboja na kruhovej ploche. Ako príklad uvedieme výpočet intenzity elektrického poľa na osi kruhu s polomerom R vo vzdialenosti z od náboja Q rovnomerne rozloženého s plošnou hustotou $\sigma = Q/(\pi R^2)$ na kruhu, pozri *obr. 2.13a*. Na kruhu si zvolíme koncentrické medzikružie s polomerom r, s prírastkom dr a na ňom vyberieme dva proti sebe ležiace plošné elementy $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha$, na ktorých sú nekonečne malé náboje dQ = $\sigma r \mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha$. Tieto náboje vytvoria v bode P intenzity elektrického poľa s absolútnymi hodnotami

$$\mathrm{d}\, E' = \mathrm{d}\, E'' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma r \mathrm{d}\, r \mathrm{d}\, \alpha}{\rho^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \mathrm{tg}\, \varphi \mathrm{d}\, \varphi \mathrm{d}\, \alpha$$

kde sme pri zápise využili rovnosti

$$\rho = \frac{z}{\cos\varphi} \qquad r = z\, \mathrm{tg}\, \varphi \qquad \mathrm{d}\, r = \frac{z}{\cos^2 \varphi} \mathrm{d}\, \varphi$$

Tieto dva príspevky sa v bode P vektorovo skladajú a vytvoria elementárne pole

$$\mathrm{d}\, E''' = 2\, \mathrm{d}\, E' \cos\varphi = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \mathrm{tg}\, \varphi \cos\varphi \mathrm{d}\, \varphi \mathrm{d}\, \alpha = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \sin\varphi \mathrm{d}\, \varphi \mathrm{d}\, \alpha$$

Po prvej integrácii tohto výrazu cez elementy dα od 0 po π dostaneme elementárnu intenzitu od celého medzikružia

$$\mathrm{d}\, E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sin\varphi \mathrm{d}\, \varphi$$

a ak tú integrujeme cez uhol φ od 0 po φ_0, dostaneme

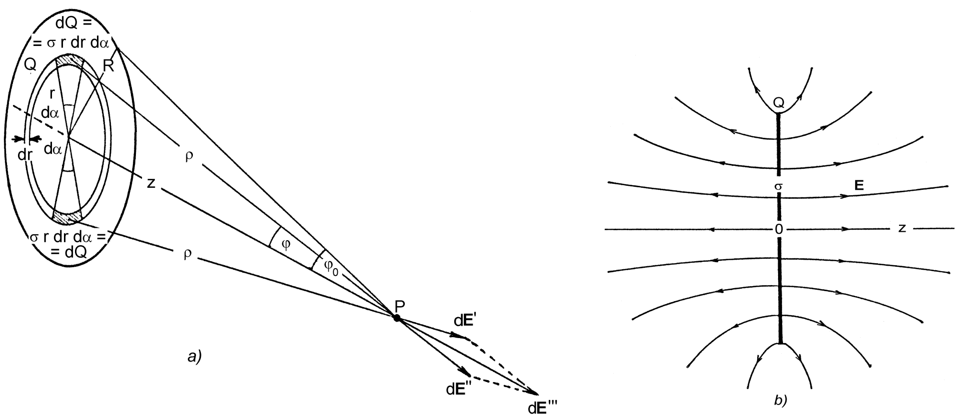
$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\varphi_0) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(1-\cos\varphi_0) \tag{2.31}$$

Pre funkciu $\cos\varphi_0$ platí

$$\cos\varphi_0 = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

takže

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{R^2}{z^2}}}\right) \tag{2.32}$$



Obr. 2.13

Z výrazov (2.31) a (2.32) môžeme získať zaujímavé informácie o poli. Predovšetkým vidíme, že v nekonečne veľkej vzdialenosti (pre $\varphi_0 = 0$ alebo $z \to \infty$) pole vymizne a v strede kruhu (pre $\varphi_0 = \pi/2$, alebo $z = 0$) má konečnú hodnotu

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \tag{2.33}$$

Vo veľkej vzdialenosti od kruhu pre $z \gg R$, môžeme prevrátenú hodnotu odmocniny vo výraze (2.32) rozvinúť do mocninového radu a obmedziť sa na prvé dva členy rozvoja, teda

$$\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{R^2}{z^2}}} \approx 1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}$$

a uvedený výraz nadobudne tvar

$$E_z \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

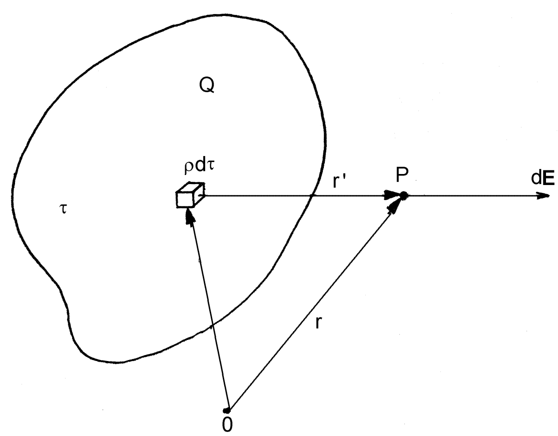
Vidíme, že vo veľkých vzdialenostiach od kruhu je jeho pole podobné ako pole bodového náboja.

Na plošný náboj rozložený na kruhovej ploche je možný ešte iný dôležitý pohľad. Predpokladajme, že polomer plochy R budeme zväčšovať do nekonečna. Kruhová plocha prejde na nekonečnú rovinu. Ak vo výraze (2.31) $\varphi_0 \to \pi/2$ alebo vo výraze (2.32) $R \to \infty$, dávajú tieto výrazy intenzitu elektrického poľa pred nekonečnou rovinou v tvare

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{2.34}$$

Keďže nekonečná rovina nemá os symetrie, intenzita daná posledným výrazom je rovnako veľká v každom bode pred a za rovinou. Ak je σ kladné, potom pole má smer od roviny na každú stranu. Ide o homogénne polia.

Samozrejme nekonečne rozľahlé roviny v praxi nemáme, ale naše úvahy sú platné pre každý prípad, v ktorom $z \ll R$, kde R je najmenší lineárny rozmer rovinnej plochy. Pole v dostatočne malej blízkosti od stredu nabitej roviny môžeme považovať za viac alebo menej homogénne s hodnotou intenzity $\sigma/(2\varepsilon_0)$ podľa výrazu (2.34). Siločiary v okolí rovnomerne nabitého kruhu sú znázornené na *obr. 2.13b*.



Obr. 2.14

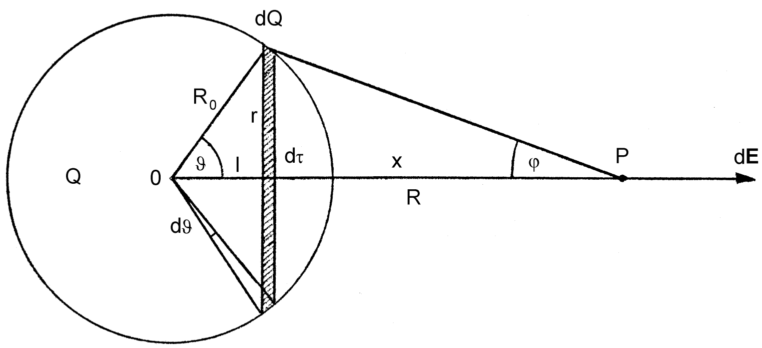
Podobne ako v prípade nabitej čiary a roviny môžeme vypočítať intenzitu elektrického poľa aj v prípade náboja rozloženého v objeme s objemovou hustotou ρ v objeme τ podľa *obr. 2.14.* Intenzita elektrického poľa v ľubovoľnom bode P danom polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ je daná výrazom

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}\,\tau}{r'^3} \tag{2.35}$$

kde $\boldsymbol{r}_0$ je polohový vektor nábojového elementu dQ = $\sigma(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\tau$ a $\boldsymbol{r}'$ je vektorová vzdialenosť bodu P. Bod P pritom môže ležať mimo objemu τ, ale môže ležať aj v tomto objeme alebo na hraničnej ploche objemu. Je zaujímavé, že pole zostane konečné aj v týchto vnútorných bodoch objemu. Takisto pole na ploche s plošnou hustotou náboja je konečné, avšak ak sú náboje rozložené na čiarach, pole na samotnej čiare má singularitu, čo si možno všimnúť napríklad v prípade nekonečne dlhého priamkového náboja [výraz (2.26)].

Intenzita elektrického poľa od náboja v guli. Uvedieme príklad výpočtu intenzity elektrického poľa pre náboje rozložené s objemovou hustotou. Ako uvidíte, takéto výpočty začínajú byť nepríjemne zložité. Relatívne jednoduchý je výpočet intenzity v okolí gule s polomerom R_0 nabitej rovnomerne v objeme celkovým nábojom Q, teda s konštantnou hustotou náboja $\rho = 3Q/(4\pi R_0^3)$. Vypočítame intenzitu vo vzdialenosti $R > R_0$ od stredu gule. Na guli zvolíme element objemu dτ v tvare nekonečne tenkého rezu tvaru disku podľa *obr. 2.15*, ktorého obsah

$$\mathrm{d}\,\tau = \pi R_0^3 \sin^3 \vartheta \mathrm{d}\,\vartheta$$



Obr. 2.15

Význam symbolov je zrejmý z obrázku, z ktorého takisto vidíme, že

$$r = R_0 \sin\vartheta \qquad l = R_0 \cos\vartheta \qquad x = R - l = R - R_0 \cos\vartheta$$

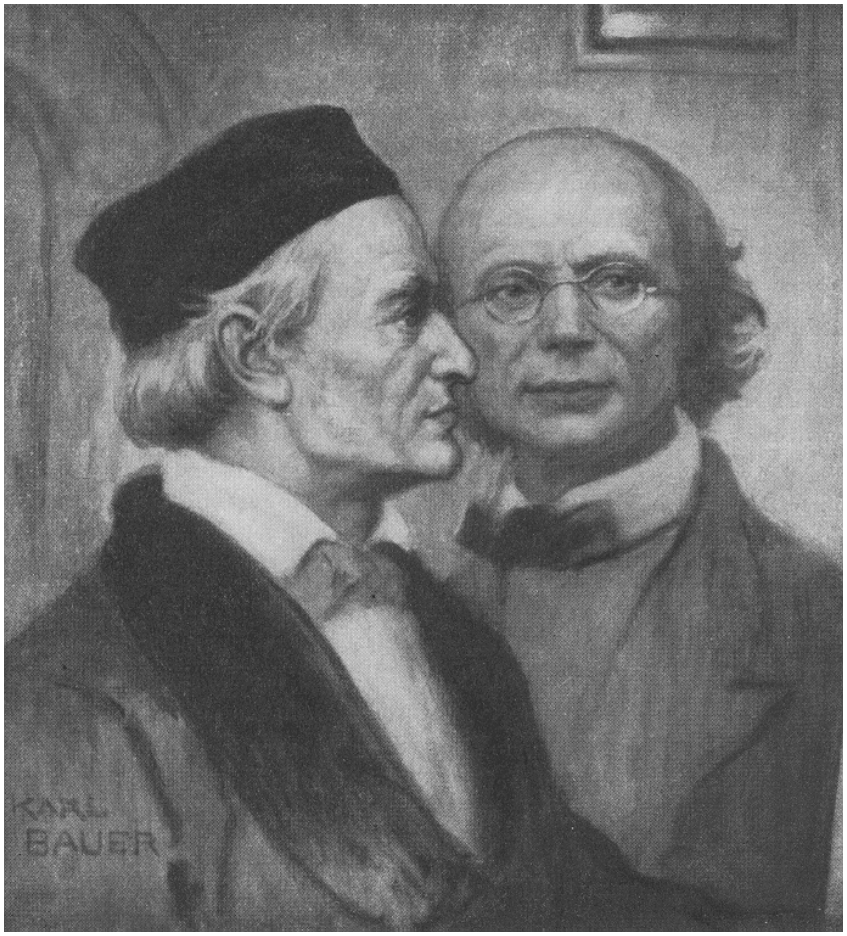
$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \cos\varphi$$

Na objemovom elementárnom disku je náboj

$$\mathrm{d}\,Q = \rho \mathrm{d}\,\tau = \frac{3}{4} Q \sin^3 \vartheta \mathrm{d}\,\vartheta$$

ktorý v bode P vo vzdialenosti x od neho vytvorí osovú intenzitu poľa veľkosti

$$\mathrm{d}\,E = \frac{\mathrm{d}\,Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}(1 - \cos\varphi) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R_0^2}\left[\sin\vartheta - \frac{(R - R_0\cos\vartheta)\sin\vartheta}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\vartheta}}\right]\mathrm{d}\,\vartheta$$



Karl Friedrich GAUSS
(1777 Braunschweig – 1855 Göttingen)

Wilhelm Eduard WEBER
(1804 Wittenberg – 1855 Göttingen)

Tento výraz sme získali ako analógiu k výrazu pre intenzitu poľa plošného rovinného disku [pozri vzťah (2.31)]. Výsledné pole dostaneme integráciou cez všetky elementárne objemové disky, teda v danom vyjadrení podľa uhla ϑ od 0 po π, takže

$$E = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R_0^2} \int_0^{\pi} \left[\sin\vartheta - \frac{(R - R_0 \cos\vartheta)\sin\vartheta}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos\vartheta}} \right] \mathrm{d}\,\vartheta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Pri výpočte integrálu možno s výhodou využiť substitúciu

$$R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos\vartheta = t$$

S prekvapením zisťujeme, že výsledok integrácie je neobyčajne jednoduchý. Pole mimo objemu gule je také isté radiálne pole, ako pole rovnako veľkého bodového náboja umiestneného v strede gule, teda

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.36}$$

pre všetky $r > R_0$. Vo vnútri guľového rozloženia je tiež nenulové pole, je takisto jednoduché, ale jeho výpočet je zložitý, a preto ho na tomto mieste neuvádzame.

Uvedené ilustrácie svedčia o tom, že výpočet poľa zložitejších rozložení nábojov priamou integráciou je možný, ale je prinajmenšom nepohodlný. Našťastie existuje metóda, ktorá, aj keď nie je univerzálna, umožňuje v niektorých prípadoch určiť intenzity polí takmer spamäti a ušetrí čitateľa od úmorných výpočtov. Metóda spočíva na jednom zo základných zákonov elektromagnetizmu, ktorý dostal názov podľa jeho objaviteľa – volá sa Gaussov zákon.

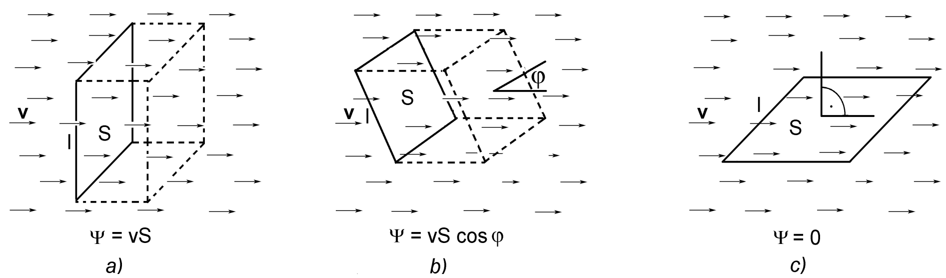
2.4 GAUSSOV ZÁKON. TOK VEKTORA PLOCHOU

Pojem toku vektora je jedným zo základných pojmov teórie vektorového poľa. Vo fyzike sa s ním stretávame často, napríklad v hydrodynamike. Staviteľov hydrocentrál samozrejme veľmi zaujíma, aké množstvo vody pretečie za jednotku času prívodným potrubím k turbíne. Množstvo pretečenej vody, napr. v m^3/s, závisí predovšetkým od prierezovej plochy potrubia, ale aj od charakteru prúdenia a od rýchlosti molekúl vody v jednotlivých bodoch prierezovej plochy. Ak by prúdenie bolo laminárne, v tom prípade úloha o množstve pretečenej vody alebo fyzikálne povedané – úloha o toku vektora rýchlosti – by bola veľmi jednoduchá. Ak však podmienka laminárnosti prúdenia nie je splnená, úloha sa môže ukázať náročná na výpočet.

Druhý príklad toku vektorovej veličiny je tok energie elektromagnetického poľa, ak chcete, tak napr. žiarivej elektromagnetickej energie Slnka, ktorá preniká cez okno do Vašej izby. Neskôr zavedieme vektorovú veličinu, ktorá sa nazýva Poyntingov vektor a fyzikálne udáva množstvo elektromagnetickej energie prenikajúcej kolmo jednotkovou plochou za jednotku času alebo výkon prechádzajúci kolmo jednotkovou plochou. Ak

Poyntingov vektor vhodne integrujeme, dostaneme celkový slnečný výkon cez Vaše okno alebo inak povedané – tok Poyntingovho vektora danou plochou.

V uvedených dvoch príkladoch ide o skutočný tok reálnej fyzikálnej veličiny (hmotnosť, energia). Ukazuje sa však, že niekedy je vhodné zaviesť aj tok vektorovej veličiny, pri ktorej v známom zmysle nič netečie. Takýmto abstraktným tokom je napr. tok intenzity elektrického poľa alebo tok magnetickej indukcie. Ich zavedenie nám umožňuje elegantne sformulovať niektoré základné zákony elektromagnetizmu. Pokúsme sa naše úvahy o toku vyjadriť matematicky.



Obr. 2.16

Predstavme si, že v nejakej časti priestoru je dané nejaké vektorové pole. Pre jednoznačnosť predpokladajme, že je to pole vektora rýchlosti $\boldsymbol{v}$ prúdiacej kvapaliny ako funkcie priestorových súradníc. Pre začiatok tiež predpokladajme, že ide o pole homogénne. Vložme do tejto prúdiacej kvapaliny myslený rovinný rámček s obvodom l, napr. štvoruholník ako na *obr. 2.16a* tak, že vektor $\boldsymbol{v}$ je kolmý na rovinnú plochu S ohraničenú rámčekom. Potom množstvo kvapaliny, ktoré pri rýchlosti v pretečie plochou S za jednotku času je vS. Toto množstvo vyjadrené napríklad v m^3/s nazveme tokom kvapaliny alebo tokom vektora $\boldsymbol{v}$ plochou S a označíme ho

$$\Psi = vS$$

Ak by plocha rámčeka nebola kolmá na smer vektora $\boldsymbol{v}$, ale kolmica k ploche by zvierala s plochou uhol φ ako na *obr. 2.16b*, potom tok rámčekom by bol

$$\Psi = vS\cos\varphi \tag{2.37}$$

Špeciálne v prípade, ak kolmica zviera s vektorom $\boldsymbol{v}$ uhol $\varphi = 90°$ ako na *obr. 2.16c*, potom tok $\Psi = 0$.

Vo všetkých predošlých prípadoch sme predpokladali, že vektor rýchlosti je konštantný vektor, teda jeho pole je homogénne. Ak sa rýchlosť kvapaliny od miesta k miestu mení, v tom prípade výsledný tok cez rovinnú plochu bude daný integrálnym súčtom nekonečne malých tokov $\mathrm{d}\Psi$ cez nekonečne malé plôšky $\mathrm{d}S$, na ktoré musíme plochu S rozložiť. Podobne ako vo vzťahu (2.37) dostaneme

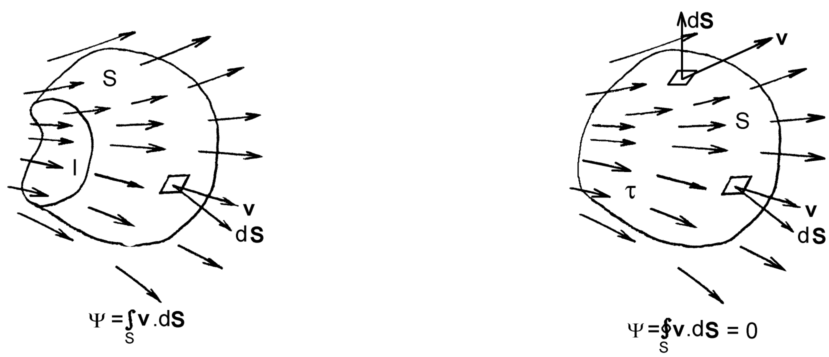
$$\mathrm{d}\Psi = v\mathrm{d}S\cos\varphi \tag{2.38}$$

kde φ je uhol medzi vektorom $\boldsymbol{v}$ a kolmicou na príslušnú plôšku dS. Vzniká tu však jedna ťažkosť, že na jednotlivých plôškach je smer vektora $\boldsymbol{v}$ rôzny, a teda φ je funkciou polohy. Pri zápise posledného výrazu možno s výhodou využiť pojem plošného vektora – je to vektor, ktorého modul sa rovná veľkosti rovinnej plochy a smer je daný smerom kolmice na plochu. Plocha má však dve strany, preto v konkrétnom prípade treba nejakým pravidlom tento smer vybrať. V danom prípade je to smer reálneho toku. Náš plošný element dS budeme teda stotožňovať s vektorom d$\boldsymbol{S}$ a keďže rýchlosť je tiež vektor, výraz (2.38) pre dΨ môžeme napísať ako skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{v}$ a d$\boldsymbol{S}$, teda

$$\mathrm{d}\Psi = \boldsymbol{v}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.39}$$

Celkový tok udáva integrál jednotlivých príspevkov (2.39) po celej ploche S

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{v}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.40}$$



Obr. 2.17

Zovšeobecníme teraz naše úvahy o toku kvapaliny. Plocha S nemusí byť rovinná, ale ľubovoľná, a dokonca aj rámček – hraničná čiara l, nemusí ležať v rovine, pozri *obr. 2.17a*. Aj v takomto prípade tok kvapaliny je daný integrálom (2.40), hoci jeho praktický zmysel sa stráca, nie však v prípade iných, abstraktných vektorových polí. V abstrakcii môžeme pokračovať tak, že hraničnú čiaru l budeme skracovať na nulu, až z plochy s hraničnou čiarou vznikne uzavretá plocha S ako na *obr. 2.17b*, ktorá uzatvára nejaký objem τ. Vypočítajme tok kvapaliny takouto uzavretou plochou. Bezpochyby takýto integrál po uzavretej ploche z rýchlosti prúdiacej nestlačiteľnej kvapaliny sa rovná nule, čo môžeme matematicky napísať

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{v}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{2.41}$$

Integrál, teda tok vektora $\boldsymbol{v}$, sa rovná nule, pretože koľko kvapaliny do objemu τ plochou zľava na obr. *2.17b* vtečie, toľko jej plochou vpravo z objemu vytečie – kvapalina sa totiž vo vnútri plochy nehromadí.

Existuje veľa vektorových polí, ktorých integrál toku cez ľubovoľnú uzavretú plochu sa rovná nule, ale aj veľa takých, ktorých tok sa nule nerovná. Nulovým je tok práve diskutovanej nestlačiteľnej kvapaliny charakterizovanej jej rýchlostným poľom, ďalej tok vektora magnetickej indukcie, na druhej strane, nenulovým je napr. tok intenzity elektrického poľa, tok intenzity gravitačného poľa a i.

Venujme sa teda toku intenzity elektrického poľa, ktorý bude teraz stredobodom nášho záujmu. Analogický postup a argumentáciu, aké sme aplikovali pri zavedení toku rýchlosti, môžeme aplikovať aj pri zavedení toku vektora intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$. Ak v elektrickom poli intenzity $\boldsymbol{E}$ zvolíme uzavretú plochu S, formálne je tok vektora $\boldsymbol{E}$ daný integráciou príspevkov $\mathrm{d}\Psi = \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ po uzavretej ploche S, teda

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} \tag{2.42}$$

Položme si teraz zásadnú otázku – čomu sa takýto integrál vo všeobecnosti rovná, čomu sa rovná tok intenzity elektrického poľa uzavretou plochou, ak zoberieme do úvahy, že v priestore, kde existujú polia, sa nachádzajú aj ich zdroje – bodové alebo nejako rozložené náboje. Predovšetkým si treba všimnúť, že tok akéhokoľvek vektorového poľa je skalárna veličina. Ďalej, intuitívne cítime, že hodnota integrálu bude principiálne iná cez také plochy, ktoré vo svojom vnútri obsahujú náboje, a iná v prípade, ak vo vnútri plochy náboje neexistujú. Otázku o toku nemožno zodpovedať na základe žiadnych poznatkov z elektromagnetizmu, to musel niekto prísť so spásnou myšlienkou hodnou génia. Taký génius sa objavil na konci 18. storočia v Nemecku a volal sa Karl Friedrich Gauss, ktorý vyslovil **Zákon**. Slávny zákon o toku však Gauss nesformuloval pre elektrické, ale pre gravitačné pole, ktoré je rovnakého fyzikálneho druhu, a ktoré v jeho dobe bolo študované intenzívnejšie ako vtedy takmer neznáme elektrické pole. Gauss vo svojom zákone predovšetkým stanovil, že tok vektora intenzity elektrického poľa je vo všeobecnosti nenulový. Zákon v jeho dnešnej formulácii znie:

Gaussov zákon

Tok intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ *uzavretou plochou* S *sa rovná náboju* Q *uzavretému plochou a delenému elektrickou konštantou poľa (permitivitou vákua)* ε_0*. V matematickej formulácii:*

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2.43}$$

Treba zdôrazniť, že náboj Q je celkový náboj v objeme τ uzavretom plochou S bez ohľadu na to, ako je tam rozložený; môže to byť jeden bodový náboj q, teda $Q = q$, alebo súbor n bodových nábojov q_i, teda

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

alebo náboj rozložený spojito v objeme τ s objemovou hustotou ρ, t. j.

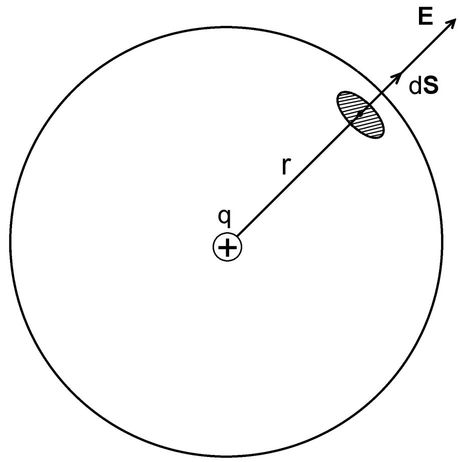
$$Q = \int_{\tau} \rho \, \mathrm{d}\, \tau$$

Ak v objeme uzavretom plochou nie sú žiadne náboje, vtedy sa tok uzavretou plochou rovná nule, teda

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = 0$$

Uvedená formulácia Gaussovho zákona (2.43) je známa ako integrálny tvar Gaussovho zákona, pretože udáva vlastnosti poľa vo veľkom objeme. Neskôr sformulujeme diferenciálny tvar, ktorý opisuje vlastnosti poľa v bode priestoru.

Všimnime si teraz niektoré základné vlastnosti elektrického poľa tak, ako plynú z Gaussovho zákona. Skutočnosť, že tok je nenulový, ak plocha obsahuje náboje, a naopak, je nulový, ak tam náboje nie sú, je znakom, že pole je žriedlové a žriedlami sú elektrické náboje – elektrické siločiary vystupujú z kladných nábojov a vstupujú do záporných. Takúto vlastnosť nemá napr. magnetické pole, ktorého tok ľubovoľnou uzavretou plochou je vždy nulový. Magnetické pole je preto poľom nežriedlovým, poľom vírovým.



Obr. 2.18

Druhá závažná skutočnosť, ktorá plynie z Gaussovho zákona, je intenzita poľa bodového náboja. Ak okolo bodového náboja q zvolíme Gaussovu plochu v tvare koncentrickej guľovej plochy s polomerom r (*obr. 2.18*) a ak urobíme jediný predpoklad o poli, že je radiálne, potom vo výraze (2.43) skalárne súčiny $\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ sú súčiny absolútnych hodnôt $E\mathrm{d}S$, pretože vektory $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ sú všade na uvažovanej guľovej ploche paralelné. Ďalej, E je všade na ploche konštantné, teda ho možno spod integrálu vybrať, a nakoniec, $\int_S \mathrm{d}\,S$ = obsahu guľovej plochy, teda

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S E\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

z čoho
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

To je nám už známy výraz pre intenzitu elektrického poľa v okolí bodového náboja. Ak na plochu S umiestnime ďalší naboj q_0, potom sila F_0 pôsobiaca na tento náboj

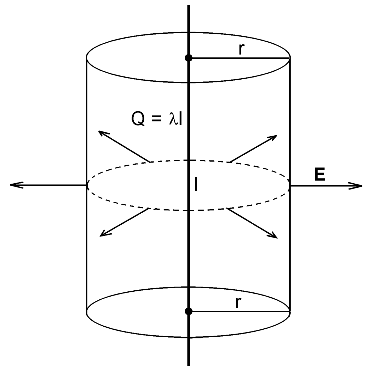
$$F_0 = q_0 E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}$$

čo je Coulombov zákon, ku ktorému sme takto dospeli čisto teoretickými úvahami z Gaussovho zákona. Mohli by sme však naše úvahy aj obrátiť a z Coulombovho zákona dokázať platnosť Gaussovho zákona. Vzniká tak bludný kruh – circulus vitiosus in probando! Ak sa mu chceme vyhnúť, musíme si ujasniť otázku priority a rozhodnúť, ktorý z týchto dvoch zákonov je prvotný. Prvotný je taký zákon, ktorý logicky nevyplýva z iných zákonov, má neobmedzenú platnosť a pritom neodporuje žiadnemu javu pozorovanému v prírode. Takéto atribúty má Gaussov zákon, a preto ho považujeme za prvotný zákon elektrostatiky. Coulombov zákon, ktorý platí pre bodové náboje vo vákuu ho experimentálne potvrdzuje.

2.5 VÝPOČET INTENZÍT ELEKTRICKÝCH POLÍ S VYUŽITÍM GAUSSOVHO ZÁKONA

Gaussov zákon nám v niektorých prípadoch umožňuje neobyčajne jednoducho a elegantne vypočítať intenzitu poľa. Jeden takýto výpočet sme urobili v predchádzajúcom odstavci pre bodový náboj. Ak chceme využiť Gaussov zákon na výpočet intenzity polí, potrebujeme iba dve veci. Mať predstavu o priestorovom rozložení poľa, t. j. mať predstavu napr. o priebehu siločiar, a na jej základe nájsť Gaussovu plochu tak, aby v každom jej bode bola intenzita poľa rovnaká a bola kolmá na plochu. V takom prípade integrál $\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}$ prejde na súčin plochy S a veľkosti intenzity E, teda $\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = ES$. Je zrejmé, že nie vždy vieme nájsť vhodnú plochu, a preto počet takto riešiteľných úloh je obmedzený. Umenie vhodne zvoliť Gaussovu plochu je mierou úspešnosti riešenia.

Intenzita elektrického poľa v okolí nabitej priamky. Vráťme sa teraz znovu k nekonečne dlhej priamke nabitej nábojom s konštantnou hustotou λ a vypočítajme intenzitu elektrického poľa v jej okolí ešte raz, teraz s využitím Gaussovho zákona. Pole je radiálne, lebo je valcovo symetrické s osou symetrie na nabitej priamke. Ak zvolíme ako Gaussovu plochu koaxiálny valec s polomerom r a dĺžkou l ako na *obr. 2.19*, bude mať pole na plášti valca všade rovnakú hodnotu a bude smerovať kolmo na valcovú plochu. Celkový náboj uzavretý plochou $Q = \lambda l$ a tok valcovou plochou je daný iba tokom cez plášť valca, pretože tok základňami je nulový (vektory intenzity ležia v rovine základní). S využitím Gaussovho zákona (2.43) dostaneme



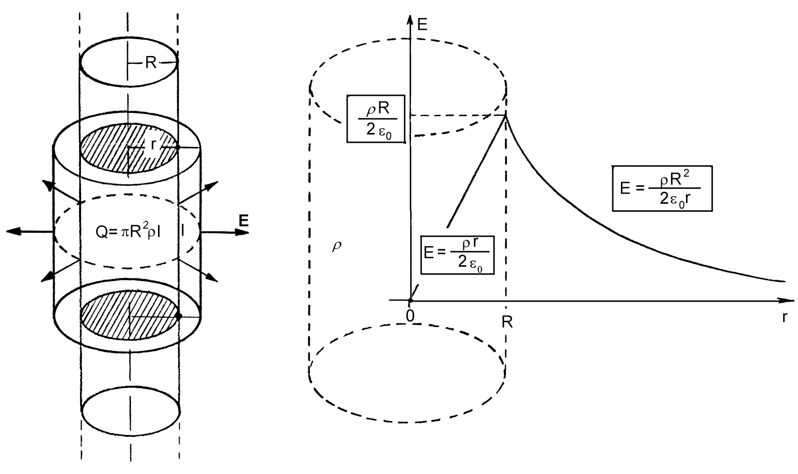
Obr. 2.19

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

a odtiaľ
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

čo je ten istý výsledok ako (2.26), ktorý sme dostali integráciou. Porovnajte a posúďte, ktorý postup je jednoduchší.

Intenzita elektrického poľa od náboja rozloženého v nekonečne dlhom valci. Predpokladajme teraz, že náboj je rozložený nie na priamke, ale s nejakou konštantnou objemovou hustotou ρ v nekonečne dlhom valci s polomerom R (*obr. 2.20a*). Aj v takom prípade výpočet intenzity poľa je možný priamou integráciou, avšak je zložitý. Využime k výpočtu Gaussov zákon. Preskúmame zvlášť pole mimo objemu valca ($r > R$) a vo valci ($r < R$). Zavedieme si dĺžkovú hustotu náboja (náboj na meter dĺžky valca) $\lambda = \pi R^2 \rho$.



Obr. 2.20

V bodoch $r > R$ môžeme aj teraz očakávať radiálne pole, takže Gaussovou plochou môže byť zase koaxiálny valec ako v prípade priamkového náboja. Rovnakými úvahami dostaneme pre intenzitu poľa výraz

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\pi R^2 \rho}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \tag{2.44}$$

teda priebeh poľa ako funkciu $1/r$, podobne ako u priamkového náboja.

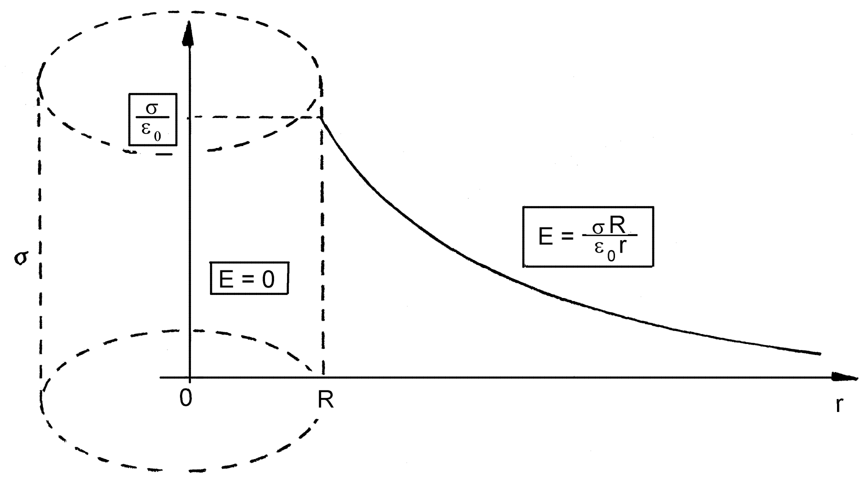
Ak vo vnútri valca (pre body $r < R$) existuje pole, tak z dôvodov symetrie musí byť tiež radiálne a vyhovujúcou Gaussovou plochou je zase koaxiálny valec s polomerom r a dĺžkou l. Celkový uzavretý náboj $Q = \pi r^2 \rho l$, a teda podľa Gaussovho zákona (2.43) platí

$$2\pi l E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\pi r^2 \rho l}{\varepsilon_0}$$

z čoho

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \tag{2.45}$$

Vidíme, že vo vnútri valca existuje radiálne pole s nulovou hodnotou intenzity na osi valca, veľkosť intenzity poľa lineárne narastá až na hodnotu $\rho R/(2\varepsilon_0)$ a z tejto hodnoty klesá ako funkcia $1/r$ podľa výrazu (2.44). Na *obr. 2.20b* je graficky znázornená závislosť absolútnej hodnoty intenzity poľa ako funkcie r (vzdialenosti od osi valca).



Obr. 2.21

Intenzita elektrického poľa od náboja na valcovej ploche. Ak je náboj rozložený s konštantnou plošnou hustotou σ po povrchu valca, môžeme tiež očakávať, že vo vonkajšom priestore ($r > R$) bude intenzita smerovať radiálne od osi valca, a teda vhodnou Gaussovou plochou je valec dĺžky l s polomerom r. Vo vnútri valca je uzavretý celkový náboj $Q = 2\pi R l \sigma$. S využitím Gaussovho zákona pre intenzitu poľa dostaneme

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \tag{2.46}$$

Ako vidíme, pole je také isté, ako pole nabitej priamky s dĺžkovou hustotou $\lambda = 2\pi R\sigma$.

Zaujímavá je otázka o poli vo vnútri valcovej plochy, pre $r < R$. Ak vo vnútri valca zvolíme akúkoľvek uzavretú plochu S, nebude obsahovať žiadny náboj, pretože náboj je uložený s plošnou hustotou po povrchu valca. To ale znamená, že $\oint \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ po ľubovoľnej ploche vo vnútri valca sa rovná nule, teda že samotná integrovaná funkcia sa musí rovnať nule. Vo vnútri valca $E = 0$, o čom sa ľahko môžeme presvedčiť aj priamou integráciou. Grafický priebeh absolútnej hodnoty E v závislosti od r pre nekonečne dlhý valec nabitý povrchovo nábojom s hustotou σ je na *obr. 2.21*.

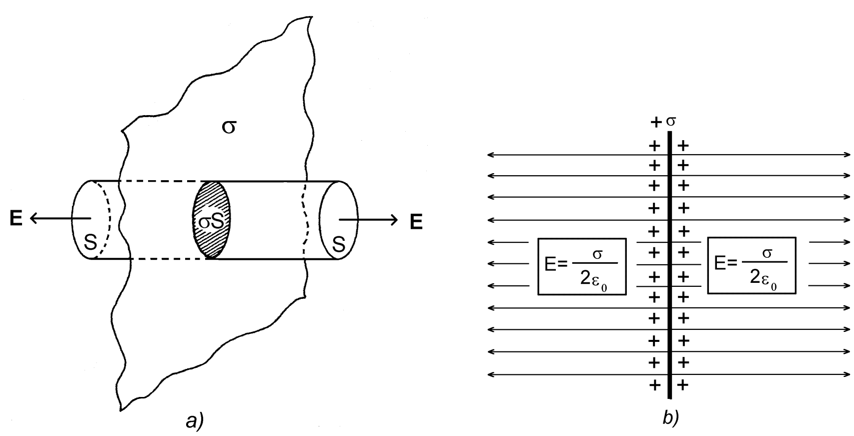
Intenzita elektrického poľa od náboja na nekonečnej rovine. Dôležitý je prípad poľa nekonečnej roviny nabitej nábojom s konštantnou hustotou σ. Je logické predpokladať, že na obidvoch stranách roviny je homogénne elektrické pole E kolmé k rovine. Vhodnou Gaussovou plochou je valec s plochou základne S preložený cez nabitú rovinu v jeho polovičnej dĺžke podľa *obr. 2.22a*. Tok intenzity plášťom valca je nulový, pretože vektor poľa leží na ploche plášťa, takže celkový tok valcom je súčtom tokov cez dve jeho základne, t. j. $2SE$. Celkový náboj obklopený valcom je σS, a teda v súhlase so vzťahom (2.43)

$$2SE = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

z čoho

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{2.47}$$

Rovnaký výraz sme už dostali pri limitnom prechode kruhovej plochy na nekonečnú rovinu [pozri výraz (2.34)]. Pole siločiar v okolí nekonečnej roviny je na *obr. 2.22b*.

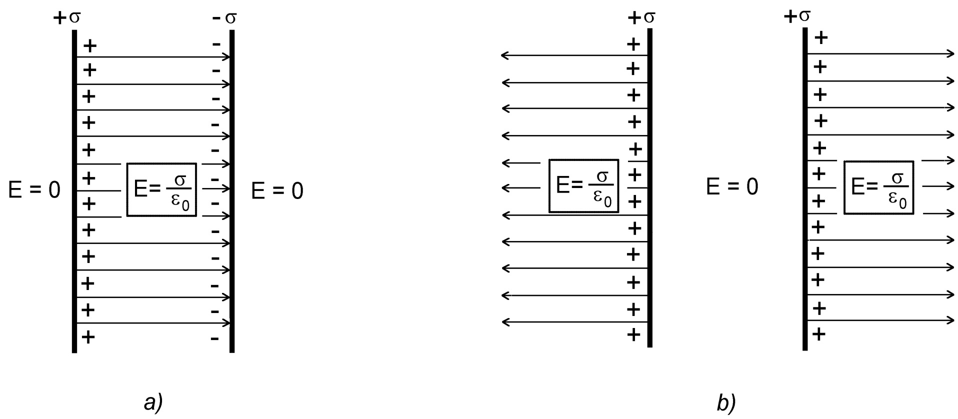


Obr. 2.22

Elektrické pole nábojov na dvoch paralelných rovinách. Dve paralelné nekonečné roviny nabité opačnými plošnými nábojmi $\pm\sigma$ vytvoria pole, ktoré je superpozíciou poli každého z nábojov. Medzi rovinami sa intenzity od obidvoch rovín sčítavajú na hodnotu

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.48}$$

so smerom vektora $\boldsymbol{E}$ od kladnej roviny k zápornej. Z vonkajšej strany rovín sa intenzita poľa rovná nule, polia sa tam navzájom kompenzujú. Ak sú roviny nabite nábojmi rovnakého znamienka, medzi rovinami sa intenzita rovná nule a z vonkajšej strany rovín má hodnotu σ/ε_0. Polia obidvoch párov rovín sú zobrazené siločiarami na *obr. 2.23a,b*.



Obr. 2.23

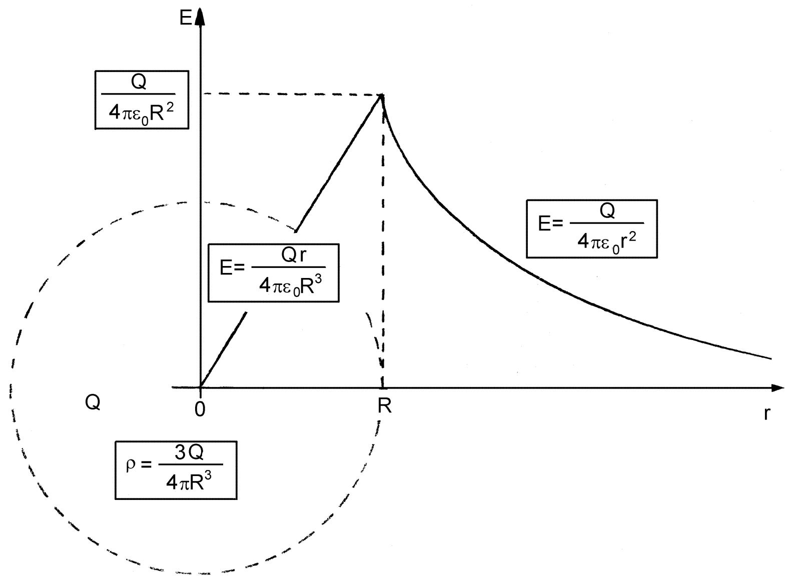
Intenzita elektrického poľa náboja rozloženého v objeme gule. Dôležitým prípadom objemovo rozloženého náboja je náboj Q rozložený s konštantnou hustotou $\rho = 3Q/(4\pi R^3)$ v objeme gule s polomerom R. Pole v okolí gule sme už získali pomerne zložitou integráciou. Skúsme to s Gaussovým zákonom! Rovnomerne rozložený náboj bude produkovať radiálne elektrické pole ako v okolí, tak aj vo vnútri gule. Označme vzdialenosť od stredu gule r. Pre body mimo objemu gule ($r > R$) je vhodnou Gaussovou plochou koncentrická guľová plocha s polomerom r. V každom bode tejto plochy je intenzita E rovnaká a kolmá na plochu, teda tok intenzity sa rovná $4\pi R^2 E$ a podľa vzťahu (2.43)

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

z čoho

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.49}$$

Teda známy výsledok [pozri výraz (2.36)], teraz získaný neobyčajne jednoducho – pole v okolí gule je také isté, ako pole rovnako veľkého bodového náboja umiestneného v strede gule. Akýkoľvek iný bodový náboj q_0 opačného znamienka ako Q nachádzajúci sa v okolí nabitej gule bude priťahovaný do stredu gule podobne, ako sú priťahované predmety na povrchu Zeme, alebo Mesiac, smerom do stredu Zeme. Táto vlastnosť silového pôsobenia Zeme alebo guľového náboja, dnes pre nás takmer triviálna, nebola triviálna pre Newtona, ktorý sa takmer dvadsať rokov zdráhal skutočnosť o centrálnom silovom pôsobení Zeme a Mesiaca publikovať, pretože mu chýbal matematický dôkaz.



Obr. 2.24

Vo vnútri gule pre $r < R$ je Gaussova plocha tiež guľová plocha s polomerom r, avšak náboj, ktorý uzatvára je $Q' = (4/3)\pi r^3\rho = (r^3/R^3)Q$. Tok plochou je $4\pi r^2 E$, takže

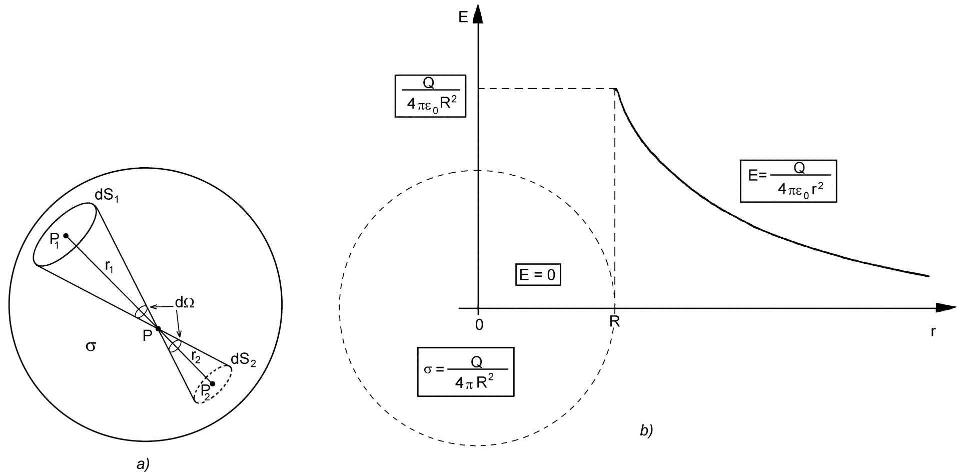
$$4\pi r^2 E = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{r^3}{R^3}Q}{\varepsilon_0}$$

z toho

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \tag{2.50}$$

Vo vnútri gule je teda radiálne elektrické pole, ktorého veľkosť intenzity závisí lineárne od vzdialenosti r a na povrchu gule má hodnotu $Q/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$. Na *obr. 2.24* je znázornená závislosť absolútnej hodnoty intenzity elektrického poľa E od vzdialenosti r od stredu gule.

Intenzita elektrického poľa náboja rozloženého na guľovej ploche. Ak je náboj Q rozložený na guľovej ploche s polomerom R, pole v okolí plochy ($r > R$) je také isté ako v prípade bodového náboja, teda je dané výrazom (2.49). Vo vnútri guľovej plochy sa intenzita poľa rovná nule z tých istých dôvodov ako v prípade nekonečne dlhého dutého valca. Ak vo vnútri dutej gule vytvoríme akúkoľvek uzavretú plochu, nebude obsahovať žiadne náboje, tok každou takou plochou je nulový, a teda intenzita je nulová.



Obr. 2.25

Pokiaľ je takáto úvaha nepresvedčivá, môžeme intenzitu poľa vo vnútri dutej gule počítať priamou integráciou. Vo vnútri guľovej plochy nabitej rovnomerne nábojom s plošnou hustotou σ zvoľme bod P a preložme ním priamku, ktorá pretne guľovú plochu v bodoch P_1 a P_2 vo vzdialenostiach r_1 a r_2 od bodu P podľa *obr. 2.25a*. Vytvorme okolo priamky úzky kužeľ s vrcholom v bode P s priestorovým uhlom $\mathrm{d}\Omega$, ktorý na guľovej ploche vytne dve elementárne plôšky $\mathrm{d}S_1$ a $\mathrm{d}S_2$, na ktorých sú elementárne nábojové množstvá $\sigma \mathrm{d}S_1$ a $\sigma \mathrm{d}S_2$. Nabité plôšky vytvoria v bode P elementárne intenzity poľa

$$\mathrm{d}E_1 = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S_1}{r_1^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$

a

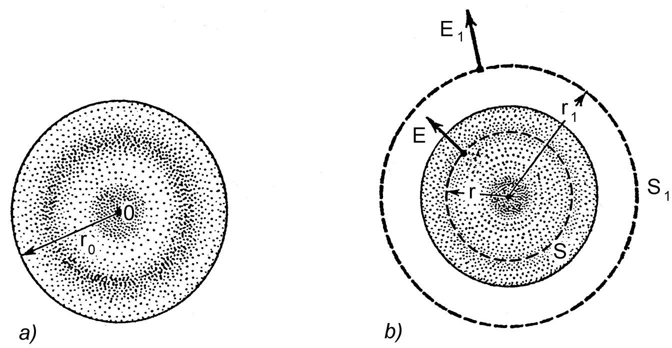
$$\mathrm{d}E_2 = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S_2}{r_2^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$

Intenzity sú čo do veľkosti rovnaké, pretože $\mathrm{d}S_1/r_1^2 = \mathrm{d}S_2/r_2^2 = \mathrm{d}\Omega$ a ich smery v bode P sú opačné. Intenzita poľa od vybranej dvojice nábojových elementov v bode P sa teda rovná nule a nulový bude aj príspevok od všetkých ostatných dvojíc na guľovej ploche. Skutočnosť, že vo vnútri guľovej rovnomerne nabitej plochy je intenzita poľa nulová, je dôsledkom toho, že pole bodového náboja klesá ako funkcia $1/r^2$, ako to vidieť aj z posledných dvoch výrazov. To súčasne potvrdzuje aj platnosť Gaussovho zákona.

Grafická závislosť intenzity poľa náboja rozloženého rovnomerne po guľovej ploche v závislosti od vzdialenosti r od stredu guľovej plochy je na *obr. 2.25b.*

Intenzita elektrického poľa náboja rozloženého s guľovou symetriou. Gaussov zákon umožňuje vypočítať intenzitu elektrického poľa nielen náboja rovnomerne rozloženého na guli, ale aj akéhokoľvek guľovo symetrického rozloženia náboja $\rho(r)$ s hustotou závislou iba od vzdialenosti r od stredu symetrie 0. Na *obr. 2.26a* je znázornený príklad guľovo symetrického rozloženia náboja. Hustota smerom od stredu najprv klesá, potom narastá, potom znovu klesá a pre vzdialenosti väčšie ako r_0 je nulová. Guľovo symetrické rozloženie náboja musí budiť radiálne pole so stredom v strede symetrie náboja, teda Gaussovou plochou je každá koncentrická guľová plocha so stredom v strede 0, teda napr. plocha *S* na *obr. 2.26b*. Náboj uzavretý každou plochou *S* s polomerom *r* sa rovná integrálnemu súčtu elementárnych nábojov

$$\mathrm{d}\,Q = \rho(r')\,\mathrm{d}\,\tau = 4\pi\rho(r')r'^2\,\mathrm{d}\,r'$$



Obr. 2.26

kde $\mathrm{d}\tau = 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'$ je elementárny objem nekonečne tenkej guľovej vrstvy s polomerom r' hrúbkou $\mathrm{d}r'$. Integrovaním od 0 po *r* dostaneme

$$Q(r) = \int_S \mathrm{d}\,Q = 4\pi\int_0^r \rho(r')r'^2\,\mathrm{d}\,r'$$

Tok intenzity $E(r)$ plochou *S* je $4\pi r^2 E$, takže

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi\int_0^r \rho(r')r'^2\,\mathrm{d}\,r'}{\varepsilon_0}$$

z čoho

$$E(r) = \frac{\int_0^r \rho(r')r'^2\mathrm{d}r'}{\varepsilon_0 r^2} \qquad (2.51)$$

Treba si všimnúť, že pre všetky vzdialenosti $r < r_0$ je pole dané iba tými nábojmi, ktoré sú uzavreté v guli s polomerom *r*; náboje vo vzdialenosti väčšej ako *r* nemajú vplyv na pole vo vzdialenosti *r*.

Ak $r > r_0$, napr. $r = r_1$ na *obr. 2.26b*, v tom prípade Gaussova S_1 plocha obopína celý náboj rozloženia

$$Q = 4\pi \int_0^{r_0} \rho(r')r'^2 \, \mathrm{d}\, r'$$

a vo vonkajšom priestore je intenzita daná výrazom

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\int_0^{r_0} \rho(r')r'^2 \, \mathrm{d}\, r'}{\varepsilon_0 r^2} \tag{2.52}$$

teda je taká, ako keby celý náboj bol sústredený v strede guľovej symetrie.

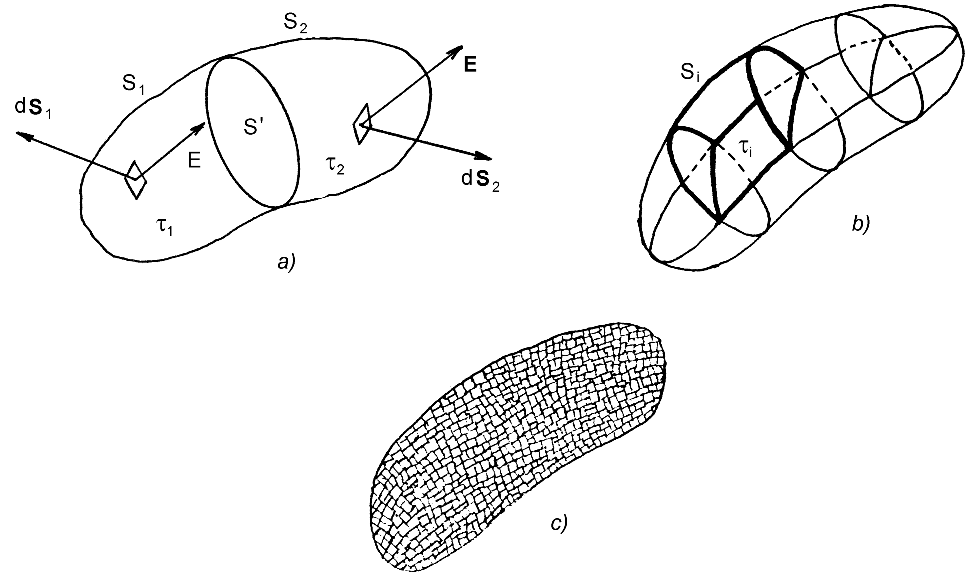
2.6 DIVERGENCIA ELEKTRICKÉHO POĽA

Gaussova veta

Gaussov zákon v integrálnom tvare je prostriedkom, ktorý z priestorového rozloženia nábojov a z priestorovej predstavy o priebehu siločiar umožňuje prakticky "uhádnuť" štruktúru poľa. Vo výrazoch pre intenzitu poľa vystupuje integrálny náboj uzavretý Gaussovou plochou a hodnoty poľa sa určujú na tejto ploche. Pole vo zvolenom bode je dané nábojmi, ktoré sa nachádzajú v iných bodoch priestoru, teda vo vnútri plochy. To je jeden pohľad na súvis nábojov a polí z hľadiska Gaussovho zákona v integrálnom tvare.

Druhý pohľad poskytuje tento zákon sformulovaný v diferenciálnom tvare. Predpokladajme, že náboje sú rozložené v priestore s objemovou hustotou ρ, ktorá je funkciou polohy. Položíme si otázku: "V akom vzťahu je intenzita elektrického poľa k objemovej hustote náboja v danom bode?" Aký je vzájomný vzťah $\boldsymbol{E}$ a ρ? Je nepochybné, že nejakým spôsobom tieto dve veličiny súvisia. Uvažujme takto! V okolí zvoleného bodu v priestore, v ktorom je nenulová hustota náboja, zvolíme uzavretú plochu, ktorú budeme postupne zmenšovať. So zmenšovaním plochy sa bude zmenšovať aj uzavretý objem τ a s ním aj celkový uzavretý náboj. V limite objem klesá k nule, teda k bodu, a k nule bude klesať aj tok Ψ vektora $\boldsymbol{E}$ z daného bodu. Tok Ψ z bodu v priestore teda nie je tou veličina, ktorá by charakterizovala pole vo vzťahu k hustote náboja v uvažovanom bode, pretože tok v bode je vždy nulový. K čomu ale bude konvergovať pomer toku Ψ k objemu τ, keď obidve tieto veličiny konvergujú k nule? Tento pomer môže za istých okolností klesať k nule, ale môže konvergovať aj k nejakej nenulovej hodnote. Veličina – limitný pomer toku Ψ vektora k objemu τ – vyjadruje teda akúsi vlastnosť poľa, ktorá súvisí s hustotou náboja v danom bode a ako sa ukáže, je to vlastnosť veľmi cenná a dôležitá. Môžeme ju zaviesť nielen pre elektrické, ale pre akékoľvek vektorové pole.

Pokúsme sa sformulovať vyslovené myšlienky matematicky. Predpokladajme, že v časti priestoru, v objeme τ uzavretom plochou S, je náboj rozložený s objemovou hustotou ρ závislou od polohy. Tok vektora $\boldsymbol{E}$ z objemu τ plochou S možno formálne zapísať ako



Obr. 2.27

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Rozdeľme objem τ na dve časti τ_1 a τ_2 hraničnou plochou (priehradkou) S' ako na *obr. 2.27a*. Jednotlivé objemy sú uzavreté plochami S_1 a S_2, hraničná plocha S' je spoločná obidvom. Pôvodný tok plochou S sa rovná súčtu tokov plochami S_1 a S_2 (tok hraničnou plochou S' jedným a druhým smerom je rovnako veľký, ale má opačné znamienko), teda môžeme napísať

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{S_1} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 + \oint_{S_2} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \Psi_1 + \Psi_2$$

V tomto súčte je každý z tokov menší ako pôvodný a takisto sú menšie aj odpovedajúce objemy τ_1 a τ_2, pretože tok Ψ zostáva rovnaký. V delení objemu τ môžeme pokračovať ďalšími priehradkami a po n-tom delení máme $2n$ objemov uzavretých $2n$ plochami ako na *obr. 2.27b*. Celkový tok n plochami

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} \oint_{S_i} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}_i = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i \tag{2.53}$$

je daný konvergujúcim radom príspevkov $\oint_{s_i} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}_i$, ktorých veľkosť so zväčšovaním $n \to \infty$ klesá k nule. Na tejto úrovni vydeľme a vynásobme pravú stranu posledného výrazu postupne objemami τ_i, takže vyjadrenie toku dostaneme v tvare

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\oint_{S_i} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}_i}{\tau_\mathrm{i}} \tau_i \qquad (2.54)$$

Ak teraz vo výraze (2.54) urobíme limitu pre $\tau_i \to 0$, po nekonečnom počte delení objemu ako na *obr. 2.27c*, prejdú τ_i na nekonečne malé objemy $\mathrm{d}\tau$ a suma prejde na objemový integrál cez celý objem τ. Nuž teda

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\tau \lim_{\tau \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\tau} \mathrm{d}\tau \qquad (2.55)$$

Pod objemovým integrálom sme dostali nejakú novú skalárnu funkciu polohy v priestore, ktorú označíme symbolicky ako "div $\boldsymbol{E}$" a nazveme **divergencia intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$**:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\tau} \qquad (2.56)$$

Význam slova "divergencia" je "výtok"; div $\boldsymbol{E}$ je teda výtok vektora $\boldsymbol{E}$ z nejakého bodu v priestore. Pojem divergencie môžeme tiež vyjadriť nasledovnou definíciou:

Divergencia vektora $\boldsymbol{E}$ (div$\boldsymbol{E}$) *v nejakom bode priestoru je skalár daný limitným pomerom výtoku* $\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ *vektora* $\boldsymbol{E}$ *uzavretou plochou S okolo uvažovaného bodu a objemu* τ *uzavretému plochou S, pre* $\tau \to 0$*, teda*

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\tau} \qquad (2.56)$$

Za pomoci výrazu (2.56) pre divergenciu možno pre tok intenzity elektrostatického poľa písať výraz

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\tau \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau \qquad (2.57)$$

Z výrazu (2.57) vidíme, že nekonečným delením pôvodnej uzavretej plochy a následnými matematickými operáciami na výraze pre Ψ, sme premenili integrál príspevkov $\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ po uzavretej ploche S, na integrál príspevkov div $\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau$ v objeme τ uzavretom plochou S. Z (2.57) plynie identita

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\tau \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau} \qquad (2.58)$$

ktorá patrí skôr do matematiky, pretože platí pre ľubovoľné vektorové pole a na jej odvodenie sme zatiaľ nič "elektrického" nevyužili. Je to jedna z integrálnych viet teórie vektorového poľa. Na počesť K. F. Gaussa, ktorý bol rovnako veľkým matematikom ako fyzikom, nazýva sa identita (2.58) **Gaussova veta**.

Podľa Gaussovej vety existujú dva rovnocenné spôsoby výpočtu toku intenzity elektrického poľa uzavretou plochou S z objemu τ:

1. vychádzajúc z hodnôt $\boldsymbol{E}$ na ploche S;
2. vychádzajúc z div $\boldsymbol{E}$ v objeme τ.

V tomto zmysle môžeme div $\boldsymbol{E}$ považovať za žriedlo poľa $\boldsymbol{E}$, za jeho zdroj. O Gaussovej vete môžeme tiež vyhlásiť, že dovoľuje premeniť plošný integrál vektorového poľa na integrál objemový, a naopak.

Pozrime sa teraz, čo nám Gaussova veta poskytuje v súvislosti s nábojmi rozloženými v objeme. Celkový náboj rozložený v objeme τ je

$$Q = \int_{\tau} \rho \mathrm{d}\, \tau$$

a podľa Gaussovho zákona

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2.59}$$

Ak porovnáme výrazy (2.58) a (2.59) vidíme, že

$$\int_{\tau} \mathrm{div}\boldsymbol{E}\ \mathrm{d}\,\tau = \int_{\tau} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \mathrm{d}\,\tau \tag{2.60}$$

alebo že objemový integrál z divergencie intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ sa rovná integrálu cez ten istý objem z veličiny ρ/ε_0. Keďže výraz (2.60) platí pre ľubovoľný objem, potom v každom bode priestoru je splnený vzťah

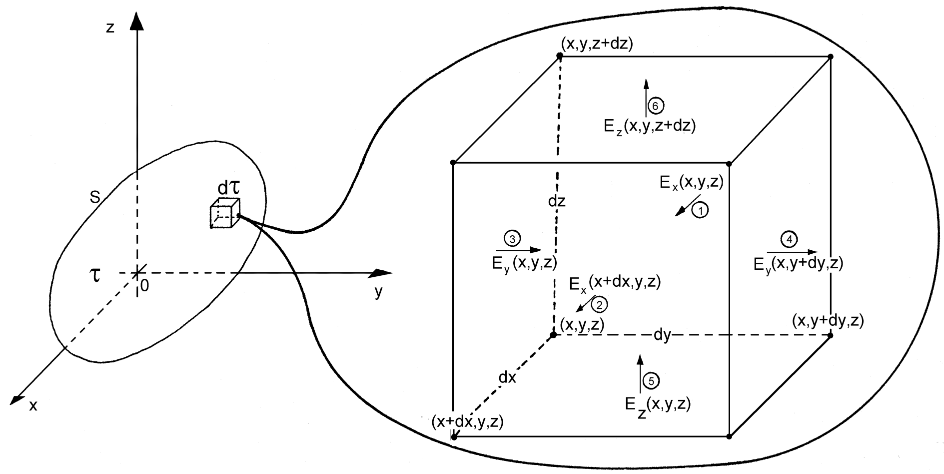
$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \tag{2.61}$$

Vzťah (2.61) je **Gaussov zákon v diferenciálnom tvare** – je to hľadaný lokálny vzťah medzi intenzitou elektrického poľa a objemovou hustotou náboja. V každom bode priestoru je divergencia, výtok vektora $\boldsymbol{E}$, úmerný hustote náboja. V miestach, kde sa hustota náboja rovná nule, rovná sa nule aj divergencia intenzity elektrického poľa.

Vzťah (2.61) dáva aj presnejší zmysel nášmu tvrdeniu o zdrojoch alebo žriedlach vektorového poľa. Zdrojmi či žriedlami elektrického poľa sú objemové náboje. Elektrické pole je poľom žriedlovým, má nenulovú divergenciu. Existujú polia, ktorých divergencia v každom bode priestoru sa rovná nule. Takým poľom je napr. pole prúdiacej nestlačiteľnej kvapaliny alebo magnetické pole. Je pochopiteľné, že prúdiaca nestlačiteľná kvapalina nemá žriedla, pretože by to vyžadovalo vznik nových molekúl v prúdovom poli.

Nakoniec možno položiť ešte jednu otázku: "Ako a kedy možno vzťah (2.61) využiť?" Za predpokladu, že je známa intenzita elektrického poľa ako funkcia polohy, možno pomocou vzťahu teoreticky určiť objemovú hustotu náboja ako funkciu polohy, samozrejme za predpokladu, že dokážeme prakticky vypočítať divergenciu poľa. Teda zo známeho priebehu poľa by sme určili náboje, opak toho, čo sme robili z integrálneho tvaru Gaussovho zákona. Zatiaľ však divergenciu vypočítať nevieme, pretože vzťah (2.56) je iba definičným vzťahom a možnosť výpočtu div $\boldsymbol{E}$ neposkytuje. Ak chceme získať vzťah, ktorý umožní divergenciu vypočítať, musíme zvoliť vhodný systém súradníc a uvedenú procedúru zopakovať.

Vzťah (2.61) má však aj hlbší teoretický význam, pretože vyjadruje principiálnu vlastnosť elektrického poľa – jeho žriedlovosť. Rovnica (2.61) alebo (2.43) je jedna zo štyroch základných rovníc elektromagnetizmu vo vákuu, ktoré v rokoch 1864 až 1873 sformuloval anglicky fyzik James Clerk Maxwell. Na jeho počesť sa nazývajú **Maxwellove rovnice**.



Obr. 2.28

2.7 DIVERGENCIA VEKTOROVÉHO POĽA V PRAVOUHLÝCH SÚRADNICIACH

Teraz odvodíme výraz pre divergenciu vektora v najčastejšie používanom systéme pravouhlých súradníc x, y, z. V tomto systéme zvolíme objem τ uzavretý plochou S ako na *obr. 2.28*. Predpokladajme, že v uvažovanom priestore existuje nenulová intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}(x,y,z)$. Toto pole rozložíme na jeho zložky v smere súradnicových osí $E_x(x,y,z)$, $E_y(x,y,z)$ a $E_z(x,y,z)$. Objem τ rozdelíme na elementárne objemy $\mathrm{d}\tau =$ $= \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, jeden z nich je zväčšený a zobrazený na *obr. 2.28*. Každý takýto pravouhlý objem je ohraničený troma dvojicami plôch $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na obrázku očíslovaných ako 1 až 6. Tok $\mathrm{d}\Psi$ cez túto uzavretú plochu je daný súčtom troch tokov $\mathrm{d}\Psi_x$, $\mathrm{d}\Psi_y$, $\mathrm{d}\Psi_z$ v smere súradnicových osí, teda

$$\mathrm{d}\,\Psi = \mathrm{d}\,\Psi_x + \mathrm{d}\,\Psi_y + \mathrm{d}\,\Psi_z$$

Tok $d\Psi$ nekonečne malou plochou sa podľa Gaussovej vety (2.58) rovná div $\boldsymbol{E}\,d\tau$, alebo div $\boldsymbol{E}\,dxdydz$, teda

$$d\Psi = \text{div}\,\boldsymbol{E}\,dxdydz \tag{2.62}$$

Jednotlivé čiastkové toky sa rovnajú súčinom zložky intenzity a príslušnej nekonečne malej plochy pri rešpektovaní znamienka toku. Tak napr. $d\Psi_x$ je daný rozdielom toku $E_x(x + dx, y, z)dydz$ cez stenu 2 von z objemu a toku $E_x(x, y, z)dydz$ cez stenu 1 dovnútra objemu. Prvý príspevok je kladný – tok z objemu $d\tau$ vyteká, druhý je záporný – tok do objemu vteká. Tento rozdiel predstavuje nekonečne malý prírastok $(\partial E_x/\partial x)dxdydz$ toku v smere osi x. Vyjadrené matematicky

$$d\Psi_x = E_x(x+dx, y, z)dydz - E_x(x, y, z)dydz =$$
$$= \left[E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)\right]dydz = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x}dx\right]dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x}dxdydz$$

Podobne tok v smere osi y

$$d\Psi_y = \left[E_y(x, y+dy, z) - E_y(x, y, z)\right]dxdz = \frac{\partial E_y}{\partial y}dxdydz$$

a v smere osi z

$$d\Psi_z = \left[E_z(x, y, z+dz) - E_z(x, y, z)\right]dxdy = \frac{\partial E_z}{\partial z}dxdydz$$

Sčítaním týchto príspevkov a s využitím (2.62) dostaneme divergenciu vektora $\boldsymbol{E}$ vyjadrenú v pravouhlých súradniciach

$$\boxed{\text{div}\,\boldsymbol{E}(x, y, z) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}} \tag{2.63}$$

S ohľadom na výraz (2.61) Gaussov zákon v diferenciálnom tvare v pravouhlých súradniciach nadobudne tvar

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}} \tag{2.64}$$

Z matematického hľadiska je posledná rovnica parciálnou diferenciálnou rovnicou pre zložky intenzity elektrického poľa. Pri známych funkčných závislostiach zložiek poľa od súradníc možno z nej vypočítať objemovú hustotu ako funkciu pravouhlých súradníc. Žiaľ, rovnica vo všeobecnosti neumožňuje vypočítať intenzitu poľa. To vyžaduje zadať nejaký ďalší vzťah. Intenzitu poľa možno určiť iba v jednorozmernom prípade, ak ρ je funkciou iba jednej premennej. Takýto prípad má však nanajvýš akademický význam.

2.8 ELEKTRICKÝ POTENCIÁL

2.8.1 Práca v elektrostatickom poli

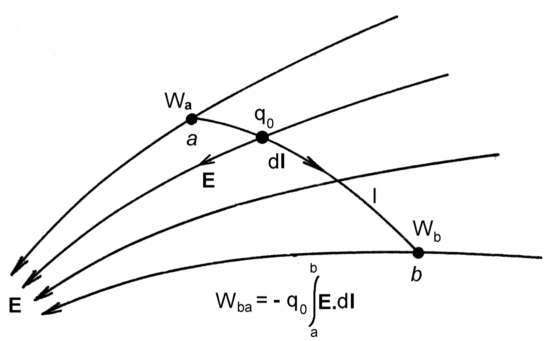
Intenzita elektrického poľa má z hľadiska výpočtov jednu veľkú nevýhodu, že je to vektorová veličina, a na jej určenie v každom bode treba zadať tri čísla, tri zložky vektora. Ani priame silové meranie intenzity poľa nie je jednoduché, a preto je namieste otázka: "Nemožno elektrické pole opísať skalárnou veličinou, ktorá by pole rovnako dobre a jednoznačne charakterizovala, a ktorá by naviac bola ľahko merateľná?" Taká veličina sa skutočne dá zaviesť a nazýva sa elektrický potenciál, alebo jednoducho potenciál, či potenciálová funkcia.

S pojmom potenciál ste sa stretli v mechanike pri štúdiu gravitačného poľa. Gravitačný potenciál bol zavedený ako skalárna funkcia polohy v gravitačnom poli, číselne sa rovná práci potrebnej na prenesenie jednotkového bodového množstva hmotnosti z referenčného do daného bodu. Pretože gravitačné pole aj elektrické pole sú polia rovnakého fyzikálneho druhu (konzervatívne polia), zavedieme podobnú potenciálovú funkciu aj pre elektrické pole.

Predpokladajme, že v elektrickom poli intenzity $\boldsymbol{E}$ sa nachádza kladný náboj q_0, ktorý chceme premiestniť z bodu a do bodu b (*obr. 2.29*). Takýto prenos sa musí uskutočniť po nejakej dráhe l a musí sa pritom vykonať istá práca W_{ba}. Na náboj v každom bode dráhy pôsobí sila $\boldsymbol{F} = q_0\boldsymbol{E}$. Pri prenose náboja q_0 po dráhe l vykonajú vonkajšie sily prácu

$$W_{ba} = -\int_{a(l)}^{b} \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -q_0 \int_{a(l)}^{b} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.65}$$

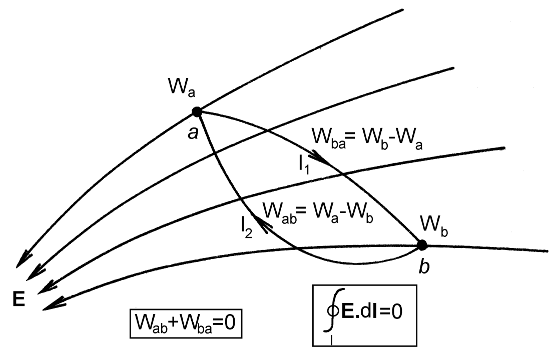
Záporné znamienko dokumentuje fakt, že práca sa koná proti silám poľa.



Obr. 2.29

Z matematického hľadiska sa výraz (2.65) nazýva dráhový integrál sily medzi bodmi a a b. Hodnota takého integrálu sa získa tak, že v každom bode integračnej dráhy vypočítame skalárne súčiny $-\ \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ alebo $-\ q_0\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, a tie po dráhe sčítame. Lenže po ktorej dráhe? Body a a b možno predsa spojiť nekonečným množstvom dráh. Na prvý pohľad sa zdá, že hodnota dráhového integrálu závisí od dráhy, po ktorej prácu konáme.

Elektrostatické pole má však tú pozoruhodnú vlastnosť, že práca vykonaná prenosom náboja medzi dvoma bodmi nezávisí od dráhy, po ktorej náboj prenášame, ale iba od začiatočnej a konečnej polohy prenášaného náboja. Je to práve taká dôležitá vlastnosť elektrostatického poľa, ako fakt, že toto pole je žriedlové. Skutočnosť, že hodnota dráhového integrálu nezávisí od dráhy, nie je triviálna, a neplatí pre ľubovoľné silové pole (neplatí napr. pre sily trenia). Pre elektrostatické pole plynie zo zákona zachovania energie: Ak je pole vytvorené daným súborom statických nábojov, museli byť tieto náboje "dopravené" do svojich polôh (napr. z nekonečna), a na to sa musela vykonať určitá práca závislá od konečného rozmiestnenia nábojov. Teda systém nábojov spolu s nábojom q_0 v bode a má určitú potenciálnu energiu W_a. Ak náboj q_0 prenesieme do bodu b a všetky ostatné náboje zostanú v pôvodných polohách a pri prenose sa prekonáva iba elektrická sila, zmení sa potenciálna energia na hodnotu W_b, ktorá závisí iba od konečného rozloženia nábojov bez ohľadu na spôsob, akým sa náboj q_0 do bodu b dostal. Práca W_{ba} vykonaná pri prenose náboja q_0 z bodu a do bodu b je daná rozdielom potenciálnych energií $W_b - W_a$, a skutočne nezávisí od dráhy po ktorej bol náboj prenesený. Z toho pre elektrostatické pole plynú dva dôležité závery:



Obr. 2.30

1) **Pri prenose náboja v elektrostatickom poli po uzavretej dráhe sa celková vykonaná práca rovná nule**. Ak prenesieme náboj q_0 z bodu a do bodu b po dráhe l_1, ako na *obr. 2.30*, vykonáme prácu

$$W_{ba} = -q_0 \int_{a(l_1)}^{b} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

a ak teraz náboj q_0 z bodu b prenesieme znovu do bodu a po inej dráhe l_2, potom sa vykoná práca

$$W_{ab} = -q_0 \int_{b(l_2)}^{a} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

Vykonaná práca je v prvom prípade $W_{ba} = W_b - W_a$ a v druhom prípade $W_{ab} = W_a - W_b = -W_{ba}$, a teda skutočne práca po uzavretej dráhe v elektrostatickom poli sa rovná nule, a to po ľubovoľnej dráhe, pretože naša úvaha platí pre ľubovoľnú dvojicu bodov v priestore. Matematicky túto skutočnosť zapisujeme

$$W_{ba} + W_{ab} = -q_0 \left(\int_{a(l_1)}^{b} \boldsymbol{E} . \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{b(l_2)}^{a} \boldsymbol{E} . \mathrm{d}\boldsymbol{l} \right) = -q_0 \oint_{l} \boldsymbol{E} . \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

Pre nenulové q_0 plynie, že pre ľubovoľnú uzavretú dráhu $l = l_1 + l_2$ v elektrostatickom poli je

$$\boxed{\oint_{l} \boldsymbol{E} . \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0} \tag{2.66}$$

Vzťah (2.66) je popri Gaussovom zákone jeden z dvoch základných vzťahov elektrostatiky. Vyjadruje skutočnosť, že elektrostatické pole nemá uzavreté siločiary, po ktorých by integrál intenzity mohol mať nenulovú hodnotu. Inak povedané, elektrostatické pole je nevírové, a teda je žriedlové. Často sa pole s takými vlastnosťami nazýva konzervatívne pole. Výraz (2.66) by si zaslúžil pomenovanie, podobne ako Gaussov zákon, nemá ho však. Ešte sa k nemu vrátime, keď budeme posudzovať jeho lokálny význam v elektrostatickom poli.

2) **Práca vykonaná prenosom náboja v elektrostatickom poli medzi dvoma bodmi (z bodu *a* do bodu *b*) je daná rozdielom potenciálnych energií konečného a začiatočného stavu**. S využitím vzťahu (2.65) môžeme teda napísať

$$W_{ba} = W_b - W_a = -q_0 \int_{a}^{b} \boldsymbol{E} . \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.67}$$

Pravá strana výrazu (2.67) je súčinom náboja q_0 a veličiny

$$-\int_{a}^{b} \boldsymbol{E} . \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

ktorá závisí iba od intenzity poľa $\boldsymbol{E}$ a od dvoch zvolených bodov a a b v priestore a je daná rozdielom dvoch čísel. Je to skalárna veličina a ak je jeden z bodov (napr. bod a) pevný, referenčný, potom je to bodová funkcia v priestore, v ktorom je pole $\boldsymbol{E}$ definované. Ak výraz (2.67) vydelíme s q_0, dostaneme

$$\frac{W_{ba}}{q_0} = \frac{W_b}{q_0} - \frac{W_a}{q_0} = -\int_{a}^{b} \boldsymbol{E} . \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.68}$$

Podiely W_a/q_0 a W_b/q_0 nazývame potenciály elektrostatického poľa v bodoch a a b a budeme ich označovať V_a a V_b. Podiel práce W_{ba} vykonanej pri prenesení náboja q_0 z bodu a do bodu b a tohto náboja nazývame rozdiel potenciálov $V_b - V_a$ alebo elektrické napätie U_{ba} bodu b oproti bodu a. Výraz (2.68) môžeme prepísať do tvaru

$$U_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.69}$$

Hodnota elektrického napätia $U_{ba} = V_b - V_a$ môže byť kladná alebo záporná podľa toho, či sa práca na náboji q_0 pri jeho prenose koná (zvyšuje sa jeho potenciálna energia), alebo náboj prácu koná (znižuje sa jeho potenciálna energia). Z výrazu (2.69) plynie, že potenciál v bode b je

$$V_b = V_a - \int_a^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.70}$$

Ak a je pevný referenčný bod, v ktorom je daná hodnota potenciálu $V(a)$, potom výraz (2.70) je bodová funkcia polohy (funkcia bodu b) v elektrostatickom poli, ktorú nazývame potenciálovou funkciou.

Študenti často prijímajú vzťah (2.70) s rozpakmi, pretože evidentne predstavuje nejednoznačnú funkciu, ktorej hodnota závisí od voľby referenčného bodu a. Hovoríme, že potenciálová funkcia je určená s presnosťou na aditívnu konštantu, a teda ako taká, nemá priamy fyzikálny význam. V praxi sa najčastejšie pracuje s potenciálovou funkciou s referenčným bodom v nekonečne, teda $a \to \infty$ a potenciál v nekonečne sa považuje za nulový, $V(\infty) = 0$. Takýto postup je možný, ak sa všetky náboje, ktoré sa podieľajú na tvorbe poľa, nachádzajú v konečne, čo je prakticky vždy splnené. V takom prípade výraz (2.70) dostane tvar

$$V_b = -\int_\infty^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.71}$$

Pomocou tohto vzťahu obyčajne určujeme potenciálovú funkciu zo známeho poľa $\boldsymbol{E}$.

Aký má teda potenciálová funkcia vôbec zmysel? Predovšetkým ten, že rozdiel jej hodnôt v dvoch bodoch udáva elektrické napätie medzi týmito bodmi, a napätie je jedna z najčastejšie meraných veličín v elektromagnetizme. Skutočne, ak urobíme rozdiel hodnôt funkcie (2.71) v bodoch b a a, dostaneme vzťah (2.69).

Druhý, teoretický význam potenciálovej funkcie je ten, že istými matematickými operáciami možno z nej určiť intenzitu elektrického poľa, ako sme to na začiatku tohoto odstavca sľúbili, a čo aj dokážeme.

Jednotkou potenciálu, alebo vhodnejšie – rozdielu potenciálov, či elektrického napätia – je jeden volt (1 V). K jeho definícii možno využiť vzťah (2.68), podľa ktorého:

Medzi dvoma bodmi v priestore je rozdiel potenciálov jeden volt (1 V) vtedy, keď pri prenesení náboja jedného coulomba (1 C) medzi týmito bodmi treba vykonať prácu alebo sa získa kinetická energia jeden joule (1 J). Rozmer jednotky volt plynie z rozmerového výrazu

$$[\mathrm{V}] = \frac{[\mathrm{J}]}{[\mathrm{C}]} = \mathrm{m}^2.\mathrm{kg.s}^{-3}.\mathrm{A}^{-1}$$

Uvedená definícia voltu je statická, a nie je pre praktické účely vhodná. Existuje druhá, dynamická definícia, ktorá vychádza z elektrického prúdu a z odporu vodiča, alebo z elektrického výkonu.

Všimnime si ešte jeden dôležitý význam elektrického napätia pri urýchľovaní elementárnych častíc. Ak nejaký náboj q (napr. nabitá častica) prejde v elektrickom poli z bodu a do bodu b pod účinkom tohto poľa, bude na svojej dráhe urýchľovaný a prírastok kinetickej energie ΔW podľa vzťahu (2.68) je daný jednoducho súčinom náboja a prejdeného rozdielu potenciálov alebo napätia, teda

$$\Delta W_k = q(V_b - V_a) = qU_{ba} \tag{2.72}$$

kde súčin qU_{ba} je kladný. Ak je súčin qU_{ba} záporný, bude častica na svojej dráhe brzdená. Ak časticou je elektrón s nábojom $q = -e = -1{,}602.10^{-19}$ C, a ak prejde rozdiel potenciálov 1 V v smere nárastu potenciálu, zvýši sa jeho kinetická energia o hodnotu $\Delta W = 1{,}602.10^{-19}$ C . 1 V = $1{,}602.10^{-19}$ J. Toto množstvo energie sa nazýva **elektrónvolt** (eV), a teda

$$1 \text{ eV} = 1{,}602.10^{-19} \text{ J}$$

Elektrónvolt je jednotka energie používaná v atómovej fyzike a fyzike elementárnych častíc.

2.8.2 Výpočet potenciálových funkcií rôznych nábojových rozložení

Ak si zrekapitulujeme postup našich úvah zistíme, že vlastne doteraz nevieme vypočítať potenciálovú funkciu či rozdiel potenciálov, pretože vzťahy (2.69) až (2.71) môžu poslúžiť iba na výpočet potenciálu zo známej intenzity poľa. My by sme však potrebovali nájsť spôsob výpočtu potenciálovej funkcie z rozloženia nábojov. Začnime najjednoduchším prípadom a vypočítajme potenciál budený jediným bodovým nábojom.

Potenciál od bodového náboja. Vo vzdialenosti r_0 od bodového náboja q zvoľme bod b, v ktorom chceme vypočítať hodnotu potenciálovej funkcie (pozri *obr. 2.31*). Intenzita elektrického poľa bodového náboja ako funkcia vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}$ od náboja je daná výrazom

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Dosadením za $\boldsymbol{E}$ vo výraze (2.71) dostaneme pre potenciál vzťah

$$V(r_0) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r_0}\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

Integračná dráha l prebieha z nekonečna do bodu b napr. tak, ako na *obr. 2.31*. V nejakom bode vo vzdialenosti r od náboja, na dráhe l, sa skalárny súčin $\boldsymbol{r}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ dá v súhlase s *obr. 2.31* vyjadriť takto:

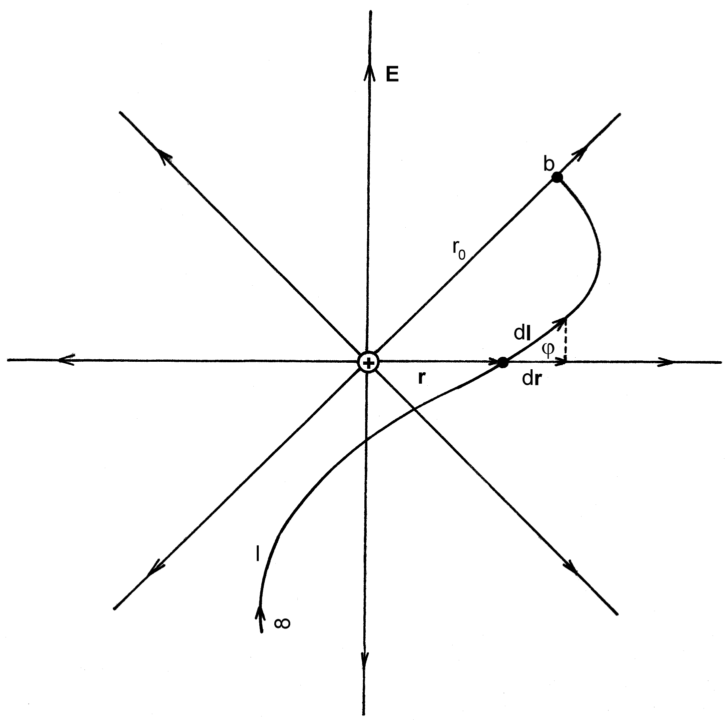
$$\boldsymbol{r}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = r\,\mathrm{d}l \cos\varphi = r\mathrm{d}l_r = r\mathrm{d}r$$

Po dosadení do výrazu pre potenciál dostaneme

$$V(r_0) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\bigg|_{\infty}^{r_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

Takto sme dostali potenciál vo vzdialenosti r_0 od bodového náboja q. Potenciálová funkcia v okolí bodového náboja má tvar

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{2.73}$$

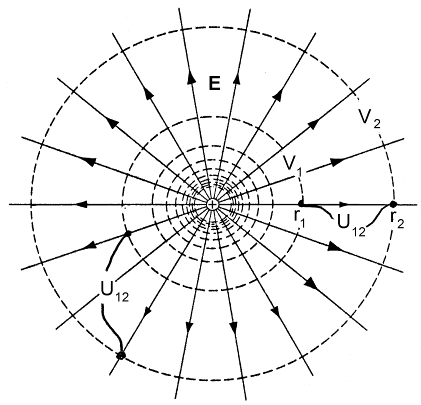


Obr. 2.31

Všimnime si vlastnosti tejto funkcie. Je to jednoduchá, guľovo symetrická, skalárna funkcia, taká, že jej hodnota je konštantná na guľovej ploche a mení sa s prevrátenou hodnotou vzdialenosti r od náboja. K potenciálu (2.73) môžeme pripočítať ľubovoľný konštantný potenciál – výraz bude opisovať to isté elektrostatické pole. Plochy konštantného potenciálu nazývame ekvipotenciálne plochy a pre bodový náboj sú znázornené na *obr. 2.32*. Ekvipotenciálne plochy majú zaujímavú a dôležitú vlastnosť, že vektory intenzity poľa sú na ne kolmé. To znamená, že pri akomkoľvek pohybe nejakého iného náboja po ekvipotenciálnej ploche sa nekoná žiadna práca, pretože náboj sa pohybuje kolmo na intenzitu elektrického poľa, teda kolmo na pôsobiacu silu. Rozdiel potenciálov medzi dvoma bodmi danými polomermi r_1 a r_2 dvoch ekvipotenciálnych plôch (*obr. 2.32*) dostaneme ako rozdiel hodnôt vzťahu (2.73)

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{2.74}$$

Je zrejmé, že rozdiel potenciálov alebo napätie je rovnaké medzi ľubovoľnou dvojicou bodov na dvoch ekvipotenciálnych plochách.



Obr. 2.32

Potenciál od *n* bodových nábojov. Ak sa v priestore nachádza n bodových nábojov, potom potenciál v nejakom bode danom polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ je daný superpozíciou jednotlivých potenciálov príslušných bodových nábojov, teda

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} V_i(\boldsymbol{r})$$

kde $V_i(\boldsymbol{r})$ je potenciál i-tého náboja q_i, ktorého poloha je daná polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_i$, teda

$$V_i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|}$$

Výsledný potenciál je daný výrazom

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i'} \tag{2.75}$$

kde $r_i' = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|$ je vzdialenosť náboja od bodu, v ktorom sa potenciál počíta. Predpokladá sa, že v bode, v ktorom sa potenciál určuje, nie je žiadny náboj, teda že $\boldsymbol{r}_i \neq \boldsymbol{r}$.

V prípade, ak je náboj rozložený s nejakou hustotou, možno tiež využiť princíp superpozície tak, ako vo výraze (2.75) s tým, že sa náboj q_i nahradí nábojovým elementom dq, jeho vzdialenosť od bodu, v ktorom sa potenciál počíta, označíme r' a diskrétna suma prejde na integrál cez oblasť, v ktorej je náboj rozložený.

Ak je náboj rozložený na čiare dĺžky l ako na *obr. 2.9* s dĺžkovou hustotou $\lambda(\boldsymbol{r}_0)$, bude potenciál v ľubovoľnom bode mimo čiary daný výrazom

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\mathrm{d}q}{r'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda(\boldsymbol{r}_0)}{r'}\mathrm{d}l \tag{2.76}$$

V prípade plošného rozloženia nábojov podľa *obr. 2.12* bude potenciál v bode P

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}_0)}{r'}\mathrm{d}S \tag{2.77}$$

a ak sú náboje rozložené priestorovo ako na *obr. 2.14*, potom v bode P je potenciál

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(\boldsymbol{r}_0)}{r'}\mathrm{d}\tau \tag{2.78}$$

Treba upozorniť, že výrazy (2.76) až (2.78) sa nedajú použiť pre výpočet potenciálu vo všetkých prípadoch, menovite nie vtedy, ak nábojové rozloženie siaha do nekonečna. Musíme si uvedomiť, že uvedené výrazy majú pôvod v potenciáli bodového náboja, ktorého potenciál v nekonečne sme zvolili rovný nule. Tak napríklad, ak by sme chceli využiť vzťah (2.76) na výpočet potenciálovej funkcie náboja rovnomerne rozloženého na nekonečne dlhej priamke a použili pritom rutinu podobnú tej, ako pri výpočte zodpovedajúcej intenzity poľa [pozri *obr. 2.10a* a výrazy (2.24) až (2.26)], zistili by sme, že príslušný integrál diverguje. Je to z toho fyzikálneho dôvodu, že v nekonečne, kde už potenciál má byť nulový, sa ešte nachádzajú náboje.

Potenciál nábojov na nekonečne dlhej priamke. Potenciál od nekonečne dlhej nabitej priamky však môžeme určiť z výrazu (2.71) s využitím vzťahu (2.26) pre intenzitu elektrického poľa v tvare

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = \frac{\lambda \boldsymbol{r}'}{2\pi\varepsilon_0 r'^2}$$

Dosadením $\boldsymbol{E}$ do výrazu (2.71) máme

$$V(r) = -\int_\infty^r \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}').\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{\boldsymbol{r}'.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r'^2} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{\mathrm{d}r'}{r'} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r'\Big|_\infty^r =$$
$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C(\infty)$$

Pri integrácii sme využili skutočnosť, že

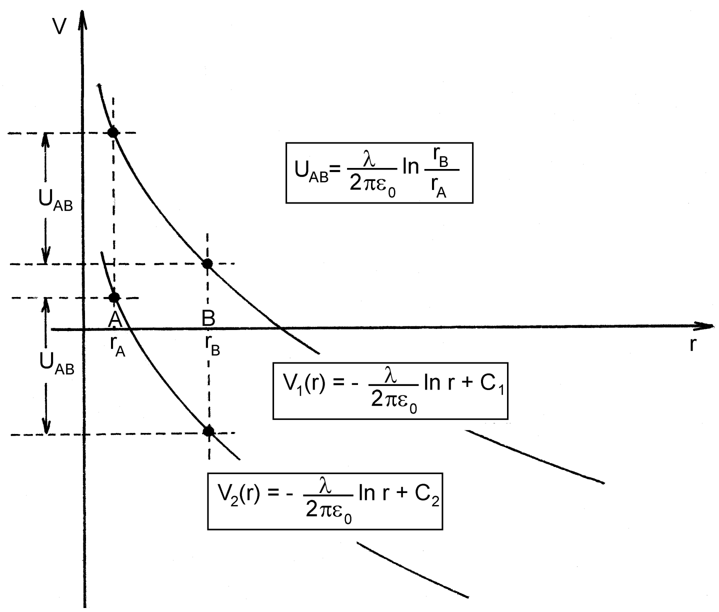
$$\boldsymbol{r}'.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -r'\mathrm{d}l = r'\mathrm{d}r'$$

pretože vektory $\boldsymbol{r}'$ a d$\boldsymbol{l}$ smerujú opačne a dr' = – dl (prírastok dl znamená úbytok dr' – nezabúdajme, že postupujeme z bodu ∞ do bodu $\boldsymbol{r}$).

Potenciálová funkcia obsahuje nekonečne veľkú konštantu $C(\infty)$, ktorej hodnota je nepodstatná, pretože pri výpočte rozdielov potenciálov vypadne. Tak teda potenciálová funkcia nekonečne dlhej, rovnomerne nabitej priamky ako funkcia kolmej vzdialenosti r od priamky má tvar

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C \tag{2.79}$$

Je to valcovo symetrická funkcia, takže ekvipotenciálne plochy sú valcové plochy koaxiálne s nabitou priamkou.



Obr. 2.33

Rozdiel potenciálov (napätie) U_{AB} medzi bodmi A a B na dvoch ekvipotenciálnych plochách s polomermi r_A a r_B vypočítame ako rozdiel dvoch hodnôt výrazu (2.79), teda

$$U_{AB} = V(r_A) - V(r_B) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r_A} \tag{2.80}$$

Ak je λ kladné a $r_A < r_B$, rozdiel potenciálov je kladný, teda potenciál so vzdialenosťou r klesá. Na *obr. 2.33* sú grafické závislosti dvoch potenciálových funkcií s rôznymi konštantami C. Z obrázka vidieť, že obidve funkcie poskytujú rovnaké napätie U_{AB} pre pevné hodnoty r_A a r_B.

Potenciál od nábojov na nekonečnej valcovej ploche. Aká potenciálová funkcia opisuje pole náboja rozloženého plošne a rovnomerne s konštantnou hustotou σ na ploche nekonečne dlhého valca polomeru r_0? Spomeňme si, že elektrické pole v okolí nabitej valcovej plochy ($r > r_0$) je rovnaké ako v prípade priamky nabitej dĺžkovým nábojom $\lambda = 2\pi r_0\sigma$, teda aj potenciál vo vonkajších bodoch v okolí valca bude daný priebehom (2.79), t. j.

$$V(r) = -\frac{r_0\sigma}{\varepsilon_0}\ln r + C \tag{2.81}$$

Otázkou je, aký bude potenciál v dutine valca, kde nie je žiadny náboj? Z našej doterajšej skúsenosti vyplýva, že v dutinách nábojových rozložení sa intenzita elektrického poľa rovná nule. Dráhový integrál nulovej intenzity medzi dvoma bodmi sa rovná nule, a teda podľa výrazu (2.70) potenciál v oblasti s nulovou intenzitou poľa je konštantný. A ako zvoliť túto konštantu? Neskôr uvidíme, že potenciálová funkcia musí byť z fyzikálnych dôvodov spojitá. Ak by v nejakom bode bola nespojitá, potom by tam intenzita elektrického poľa musela byť nekonečná (formálne by prenos náboja na nulovej vzdialenosti musel byť spojený s nenulovou prácou). Teda v dutine valca pre $r < r_0$ je potenciál taký istý, ako na jeho nabitom povrchu, t. j.

$$V(r) = -\frac{r_0\sigma}{\varepsilon_0}\ln r_0 + C = \text{konšt.} \tag{2.82}$$

Potenciálová funkcia nekonečne dlhej valcovej nábojovej plochy je dôležitá pre výpočet elektrického poľa v koaxiálnom kábli.

Potenciál nábojov na kružnici. Vráťme sa však k možnostiam výpočtu ďalších potenciálových funkcií podľa vzťahov (2.76) až (2.78). Výraz (2.76) možno napr. využiť pri výpočte potenciálu náboja Q rovnomerne rozloženého na kružnici s polomerom R ako na *obr. 2.11a*. Na osi kružnice vo vzdialenosti z od jej stredu je potenciál

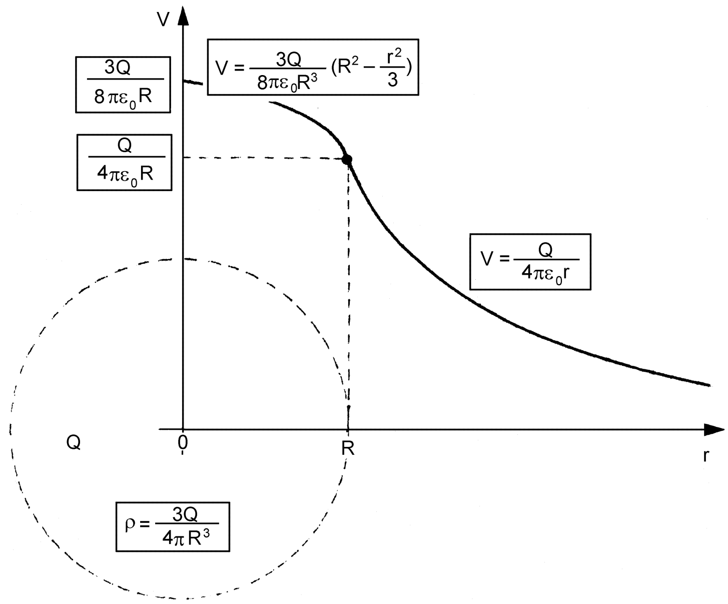
$$V(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \tag{2.83}$$

ktorý získame jednoduchou integráciou elementárnych príspevkov spôsobom podobným ako pri výpočte intenzity.

Potenciál od nábojov na kruhovej ploche. Ďalším príkladom je potenciál na osi kruhovej plochy s polomerom R rovnomerne nabitej plošným nábojom $\sigma = Q/(\pi R^2)$ podľa *obr. 2.13a*. S využitím výrazu (2.77) dostaneme

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right) \tag{2.84}$$

Potenciál od nábojov rozložených v objeme gule. Dôležitým prípadom je potenciál náboja Q rovnomerne rozloženého v objeme gule polomeru R, s objemovou hustotou $\rho = 3Q/(4\pi R^3)$. Fyzikálna intuícia nám napovedá, že tento potenciál vo vzdialenostiach $r > R$ od stredu je taký istý, ako potenciál bodového náboja Q uloženého v strede symetrie, teda



Obr. 2.34

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.85}$$

o čom sa môžeme presvedčiť priamou, ale nepríjemnou integráciou podľa výrazu (2.78) s použitím podobného postupu ako pri výpočte intenzity poľa ilustrovaného na *obr. 2.15.* Podobnou nepríjemnou integráciou možno dôjsť k výrazu pre potenciál vo vnútri guľového rozloženia

$$V(r) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) \qquad (r < R) \tag{2.86}$$

Na *obr. 2.34* je graficky znázornená závislosť potenciálu guľového rozloženia náboja v závislosti od r.

Potenciál od nábojov rozložených na guľovej ploche. Ak je náboj Q rozložený rovnomerne plošne na guľovej ploche s polomerom R, potom potenciál pre $r > R$ je daný tiež výrazom (2.85). Vo vnútri guľovej plochy je konštantný a z dôvodov spojitosti rovnaký ako na povrchu gule, teda

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (r < R) \tag{2.87}$$

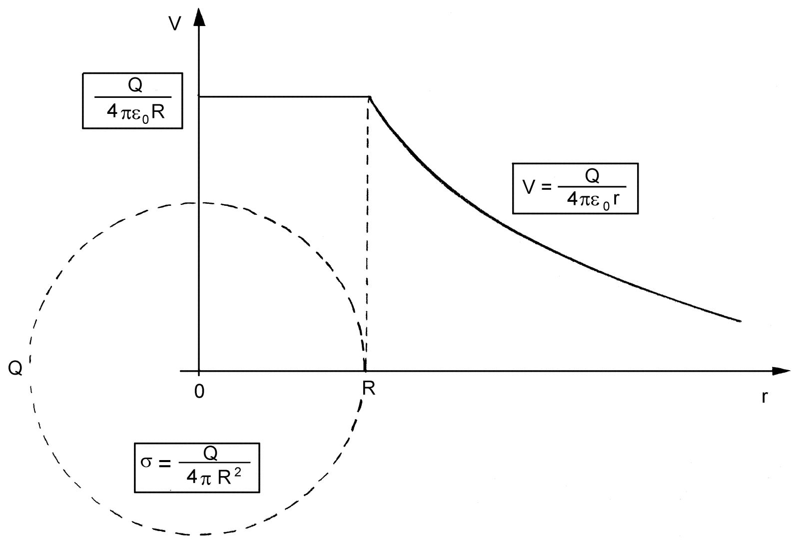
Na *obr. 2.35* je grafická závislosť potenciálu plošne rozloženého guľového náboja.

Potenciál od nábojov rozložených s guľovou symetriou. Nakoniec, ak je náboj rozložený v priestore s guľovou symetriou s objemovou hustotou $\rho(r')$ závislou iba od vzdialenosti r' od stredu symetrie (pozri *obr. 2.26*), potom potenciál vo vzdialenosti r je daný súčtom potenciálu $V_1(r)$, ktorý vo vzdialenosti r produkujú náboje uzavreté v guli s polomerom r a potenciálom $V_2(r)$, ktorý produkujú ostatné náboje mimo objemu gule s polomerom r, teda náboje vo vzdialenosti väčšej ako r, prípadne až do nekonečna. Celkový náboj uzavretý v guli je

$$Q_1(r) = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2 \mathrm{d}r' = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 \mathrm{d}r'$$

takže potenciál V_1 je

$$V_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1(r)}{r} = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\int_0^r \rho(r')r'^2 \mathrm{d}r'$$



Obr. 2.35

Na výpočet potenciálu V_2 treba zvoliť nekonečne tenké guľové vrstvy s polomerom $r' > r$ a hrúbkou dr'. Celkový náboj na vrstve

$$\mathrm{d}Q_2(r') = 4\pi\rho(r')r'^2 \mathrm{d}r'$$

budí na vrstve a v jej vnútri potenciál

$$\mathrm{d}V_2(r') = \frac{\mathrm{d}Q_2(r')}{4\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{\rho(r')r'\mathrm{d}r'}{\varepsilon_0}$$

Celkový potenciál nábojov mimo zvolenej gule dostaneme integráciou týchto príspevkov od r po ∞, teda

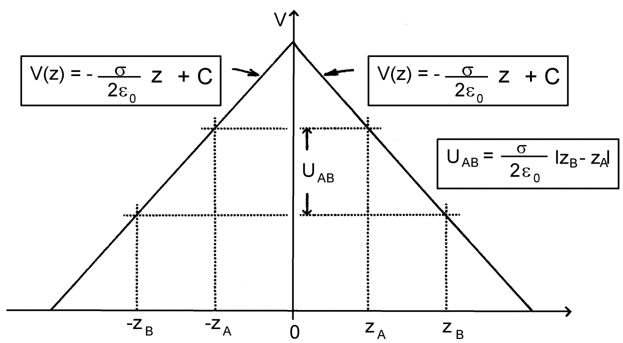
$$V_2(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \rho(r') r' \mathrm{d}r'$$

Výsledný potenciál vo vzdialenosti r je potom

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r} \int_0^r \rho(r') r'^2 \mathrm{d}r' + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \rho(r') r' \mathrm{d}r' \tag{2.88}$$

Ekvipotenciálne plochy uvažovaných guľových rozložení nábojov sú guľové plochy koncentrické so stredom symetrie. V prípade, ak nábojové rozloženie nesiaha do nekonečna, ale končí pri nejakom polomere r_0, treba nekonečno nahradiť týmto polomerom.

Samozrejme, že všetky tu uvedené potenciály možno vypočítať aj pomocou vzťahu (2.71) zo známych intenzít elektrostatického poľa.



Obr. 2.36

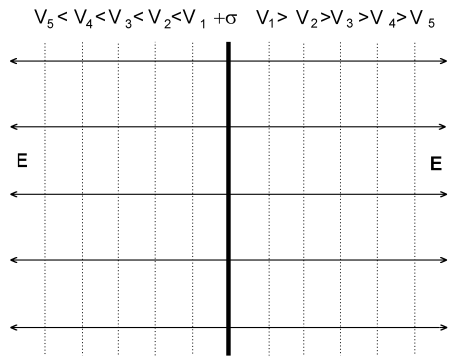
Potenciál od náboja na nekonečnej rovine. Pre naše ďalšie úvahy bude obzvlášť dôležitá potenciálová funkcia v okolí nekonečnej rovnomerne nabitej roviny s konštantnou nábojovou hustotou σ. Túto potenciálovú funkciu dostaneme zväčšovaním polomeru R kruhovej plochy a limitným prechodom vo výraze (2.84) pre $R \longrightarrow \infty$. Takto dostaneme potenciál v okolí nekonečnej roviny v tvare

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |z| + C_{\infty} \tag{2.89}$$

Konštanta C_{∞}, získaná limitným prechodom, je síce nekonečne veľká, ale možno ju nahradiť ľubovoľnou konečnou konštantou. Vidíme, že potenciál je lineárna klesajúca funkcia na obidve strany od roviny (pozri *obr. 2.36*). Ekvipotenciálne plochy sú všetky roviny planparalelné s nábojovou rovinou. Napätie U_{BA} medzi dvoma ekvipotenciálnymi plochami vo vzdialenostiach z_B a z_A je dané rozdielom príslušných hodnôt (2.89), teda

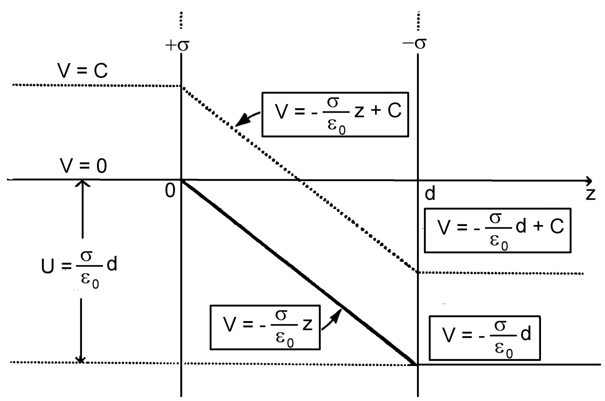
$$U_{AB} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(|z_B| - |z_A| \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d \tag{2.90}$$

kde $d = |z_B| - |z_A|$ je absolútna vzdialenosť potenciálnych rovín. Napätie medzi dvoma ekvipotenciálnymi rovinami je úmerné vzdialenosti rovín. Na *obr. 2.37* je znázornená sieť siločiar a ekvipotenciálnych plôch nekonečnej nabitej roviny.



Obr. 2.37

Potenciál nábojov na dvoch planparalelných rovinách. Dôležitejší ako potenciál osamotenej nabitej roviny je priebeh potenciálu v priestore dvoch nekonečne veľkých planparalelných rovín nabitých plošnými nábojmi $\pm\sigma$, uložených vo vzájomnej vzdialenosti d (*obr. 2.23a*). Potenciál získame ako superpozíciu potenciálov každej z rovín. Ak os z je kolmá na roviny, a ak rovina s kladným nábojom je v začiatku $z = 0$ (pozri *obr. 2.38*), potom potenciál medzi rovinami ($0 \le z \le d$) je daný výrazom



Obr. 2.38

$$V(z) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + C \qquad (2.91)$$

Mimo rovín je potenciál konštantný a rovnaký ako potenciál priľahlej roviny. Ak zvolíme potenciál kladnej roviny nulový $V(0) = 0$, potom nulový bude všade vľavo od nej (pozri *obr. 2.38*). Potenciál medzi rovinami, pre $0 \le z \le d$

$$V(z) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z \tag{2.92}$$

Potenciál zápornej roviny a priestoru vpravo od nej je konštanta

$$V(z) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

Samozrejme, potenciálovú funkciu možno posunúť nahor o $\sigma d/\varepsilon_0$, takže potenciál kladnej roviny bude $\sigma d/\varepsilon_0$ a potenciál zápornej bude nulový. Rozdiel potenciálov (napätie) U kladnej roviny oproti zápornej je

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \tag{2.93}$$

Medzi rovinami je intenzita elektrického poľa $E = \sigma/\varepsilon_0$ a smeruje doprava, z vonkajšej strany rovín je intenzita nulová.

Nábojové roviny v praxi často predstavujú nabité kovové plochy (kondenzátor – pozri odsek 3.5) na ktorých napätie U a ich vzdialenosť d možno merať. Zo vzťahu (2.93) potom plynie jednoduchý výraz

$$E = \frac{U}{d} \tag{2.94}$$

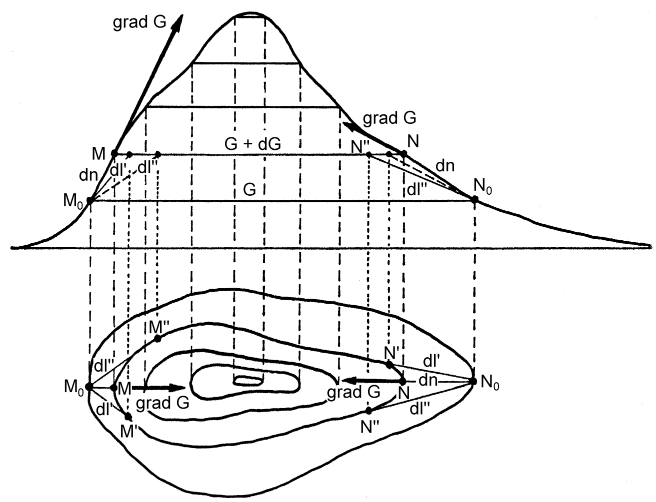
ktorý umožňuje vypočítať intenzitu homogénneho elektrického poľa medzi dvoma kovovými platňami. Z výrazu (2.94) je jasné, prečo v praxi používanou jednotku intenzity elektrického poľa je 1 V/m (= 1 N/C).

2.8.3 Gradient skalárnej funkcie. Vzťah medzi intenzitou a potenciálom elektrostatického poľa

Vo fyzike je veľa skalárnych polí, ktoré z matematického hľadiska predstavujú funkcie priestorových súradníc. Takýto funkčný vzťah môže byť zapísaný ako skalárna funkcia polohového vektora $f(\boldsymbol{r})$ alebo skalárna funkcia pravouhlých súradníc $f(x, y, z)$. Budeme predpokladať, že každá takáto funkcia je spojitá a diferencovateľná v nejakej oblasti alebo v celom priestore, a že je jednoznačná, čo platí o prevažnej väčšine funkcií používaných vo fyzike.

Ako príklad takého skalárneho poľa môžeme uviesť teplotné pole v nejakom telese, ktoré je v istej oblasti ohrievané a v inej chladené, takže po istom čase sa v telese ustáli rovnovážny stav. Jednotlivé body telesa majú istú teplotu $T(\boldsymbol{r})$, ktorá je v čase konštantná a mení sa od miesta k miestu. Ak by sme mali možnosť pohybovať sa v telese s imaginárnym teplomerom, zistili by sme, že v telese existujú plochy, na ktorých je teplota rovnaká. Takéto plochy rovnakej teploty, alebo vo všeobecnosti rovnakej hodnoty skalárnej funkcie, nazývame ekviskalárne plochy.

Inou názornou ilustráciou ekviskalárnych plôch sú vrstevnice na geografických mapách, ktoré udávajú konštantnú nadmorskú výšku v teréne, a tak aj konštantnú hodnotu gravitačného potenciálu G. Na *obr. 2.39* je znázornený profil hory a jej vrstevnice, jedna označená ako G a druhá nekonečne blízka ako $G + \mathrm{d}G$. O vrstevniciach vieme, že v miestach, kde sú husté, je terén strmý a naopak, kde sú riedke, tam je svah mierny. Pre pohodlného turistu môže byť dôležitou veličina, ktorá udáva veľkosť nárastu výšky (gravitačného potenciálu) $\mathrm{d}G$ v pomere k prejdenej dráhe $\mathrm{d}l$ po svahu medzi dvoma vrstevnicami, teda veličina $\mathrm{d}G/\mathrm{d}l$. Prekonať výšku $\mathrm{d}G$ alebo prejsť medzi vrstevnicami možno rôznymi spôsobmi. Možno napr. vyjsť z bodu M_0 na *obr. 2.39* a prejsť po dráhe $\mathrm{d}l'$ do bodu M', alebo po dráhe $\mathrm{d}l''$ do bodu M'', alebo postupovať najkratšie v smere normály k vrstevnici a prejsť dráhu $\mathrm{d}n$ do bodu M. Pri každom z týchto výstupov sa prekonáva rovnaká výška, ale najväčší nárast veličiny $\mathrm{d}G/\mathrm{d}l$, teda najväčšie stúpanie na svahu, je v smere normály k vrstevnici, teda $\mathrm{d}G/\mathrm{d}n$. Táto veličina má všetky vlastnosti vektora – má veľkosť $\mathrm{d}G/\mathrm{d}n$ a má smer. Je to smer maximálnej strmosti funkcie G, ktorý môžeme opísať jednotkovým vektorom $\boldsymbol{n}_0$ v smere normály k ekviskalárnej ploche smerujúcim na tú stranu, na ktorú funkcia G narastá. Takúto vektorovú veličinu nazývame gradient.



Obr. 2.39

Naše úvahy môžeme zovšeobecniť na ľubovoľnú skalárnu funkciu $f(r)$ a definovať gradient nasledovne:

Gradient skalárnej funkcie $f(\boldsymbol{r})$ [grad $f(\boldsymbol{r})$] *je vektor, ktorý v danom bode skalárneho poľa udáva veľkosť a smer maximálneho nárastu funkcie $f(\boldsymbol{r})$, teda*

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n}\boldsymbol{n}_0 \tag{2.95}$$

kde $\mathrm{d}n$ *je prírastok nezávislej premennej pozdĺž normály k ekviskalárnej ploche a $\boldsymbol{n}_0$ je jednotkový vektor v smere normály.*

Pamätajte si, že gradient v každom bode priestoru je kolmý na ekviskalárnu plochu.

Položme si teraz inú, matematickú otázku: "Čomu sa rovná úplný diferenciál df funkcie f?" Úplný diferenciál – ako vieme – je nekonečne malá zmena funkcie pri nekonečne malom náraste všetkých nezávislých premenných. Podľa definície gradientu (2.95) táto nekonečne malá zmena funkcie f musí byť daná súčinom absolútnej hodnoty gradientu a posunutia dn v smere normály k ekviskalárnej ploche, teda

$$\mathrm{d}f = |\mathrm{grad}\, f|\, \mathrm{d}n$$

Ľubovoľnú vzdialenosť dl medzi bodmi na dvoch ekviskalárnych plochách môžeme zaviesť ako vektor d$\boldsymbol{l}$, pričom dn = dl cos φ, kde φ je uhol medzi smerom d$\boldsymbol{l}$ a normálou. Teda

$$\mathrm{d}f = |\mathrm{grad}\, f|\mathrm{d}l\cos\varphi = \mathrm{grad}\, f\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.96}$$

Vráťme sa teraz ku vzťahu (2.69), ktorým sme definovali napätie medzi dvoma bodmi ako rozdiel hodnôt potenciálovej funkcie. Z matematiky je známa skutočnosť, že ak hodnota nejakého integrálu je daná rozdielom dvoch hodnôt potom integrand je úplným diferenciálom. Skutočne, vzťah (2.69) možno prepísať na tvar

$$V_b - V_a = \int_a^b \mathrm{d}V = -\int_a^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

z čoho plynie, že úplný diferenciál potenciálovej funkcie

$$\mathrm{d}V = -\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.97}$$

Potenciálová funkcia je z matematického hľadiska skalárna funkcia, ktorá spĺňa podmienky pre definíciu gradientu, t. j. je spojitá a diferencovateľná. Pre jej úplný diferenciál možno napísať podobný výraz ako (2.96) v tvare

$$\mathrm{d}V = \mathrm{grad}V.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.98}$$

Ak porovnáme výrazy (2.97) a (2.98), dostaneme nový vzťah medzi potenciálom a intenzitou elektrostatického poľa

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}V} \tag{2.99}$$

ktorý je inverzný k výrazu (2.71) a umožňuje zo známeho potenciálu vypočítať intenzitu. Zo vzťahu (2.99) vidíme, že intenzita poľa je vektor, ktorého veľkosť sa rovná prírastku potenciálu na jednotku dĺžky kolmo na ekvipotenciálne plochy a je orientovaný v smere poklesu potenciálu, čo je v súhlase s našou predstavou o elektrickom poli.

Nakoniec treba odpovedať na otázku, ako sa gradienty funkcií počítajú, ak je daná konkrétna funkčná závislosť, pretože definičný vzťah (2.95) takú možnosť priamo neposkytuje. Veľmi často sú potenciály dané ako funkcie pravouhlých súradníc $V(x,y,z)$. V takom prípade vektor posunutia

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k} \tag{2.100}$$

kde $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory v smere súradnicových osi x, y, z. Úplný diferenciál $\mathrm{d}V$ je potom

$$\mathrm{d}V(x,y,z)=\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right).\left(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}\right)$$

Ak porovnáme tento výraz s výrazom (2.98) s uvážením výrazu (2.100), vidíme že výraz vo veľkej zátvorke je gradientom potenciálu, teda

$$\boxed{\mathrm{grad}V(x,y,z)=\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}} \qquad (2.101)$$

a intenzita elektrostatického poľa v pravouhlých súradniciach je daná výrazom

$$\boxed{\boldsymbol{E}(x,y,z)=-\,\mathrm{grad}V(x,y,z)=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)} \qquad (2.102)$$

Druhou skupinou často sa vyskytujúcich potenciálových funkcií sú guľovo a valcovo symetrické potenciály závislé iba od vzdialenosti r od stredu symetrie, teda potenciály $V(r)$, ktorých ekvipotenciálne plochy sú guľové alebo valcové plochy. Gradienty takýchto funkcií sú vektory smerujúce radiálne od alebo do smeru symetrie s nárastom $\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$ a intenzity poľa možno počítať podľa vzťahu

$$\boldsymbol{E}(r)=-\mathrm{grad}V(r)=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{r}_0 \qquad (2.103)$$

kde $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}/r$ je jednotkový vektor v smere nárastu r.

Uvedieme niekoľko často sa vyskytujúcich gradientov guľovo a valcovo symetrických funkcií:

$$\mathrm{grad}\ln r=\frac{1}{r}\boldsymbol{r}_0=\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \qquad \text{(nekonečná nabitá priamka)} \qquad (2.104)$$

$$\mathrm{grad}\,r=\boldsymbol{r}_0=\frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad \text{(nekonečná nabitá rovina)} \qquad (2.105)$$

$$\mathrm{grad}\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}_0=-\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad \text{(bodový náboj)} \qquad (2.106)$$

$$\mathrm{grad}\frac{1}{r^2}=-\frac{2}{r^3}\boldsymbol{r}_0=-\frac{2}{r^4}\boldsymbol{r} \qquad \text{(bodový dipól)} \qquad (2.107)$$

$$\mathrm{grad}\frac{1}{r^3}=-\frac{3}{r^4}\boldsymbol{r}_0=-\frac{3}{r^5}\boldsymbol{r} \qquad \text{(bodový kvadrupól)} \qquad (2.108)$$

atď.

Možno sa presvedčiť, že všetky doteraz vypočítané potenciály a im zodpovedajúce intenzity spĺňajú základný vzťah (2.99), alebo vzťahy (2.102) prípadne (2.103).

2.9 POLE ELEKTROSTATICKÉHO DIPÓLU A VYŠŠÍCH MULTIPÓLOV

2.9.1 Bodový elektrostatický dipól

Elektrostatickým dipólom nazývame dvojicu rovnako veľkých nábojov opačného znamienka $\pm q$ uložených v pevnej vzájomnej vzdialenosti d. Čitateľa môže okamžite napadnúť otázka, čím sa táto dvojica líši od dvojice nábojov na *obr. 2.6* s analýzou poľa podľa *obr. 2.4*. Dvojica sa ničím nelíši, odlišný bude prístup k analýze. Budeme sa zaujímať o jej potenciál a pole iba v relatívne veľkej vzdialenosti r, takej, že $r \gg d$, alebo $d/r \ll 1$. Táto podmienka vysvetľuje, prečo dipól nazývame bodovým. Z veľkej vzdialenosti ho totiž vnímame ako bod. Dôležitou charakteristikou bodového dipólu je jeho *elektrický dipólový moment (vektorová veličina)* $\boldsymbol{p}$, *definovaný ako súčin kladného náboja q a vektorovej vzdialenosti* $\boldsymbol{d}$, *orientovanej od záporného ku kladnému náboju*, teda

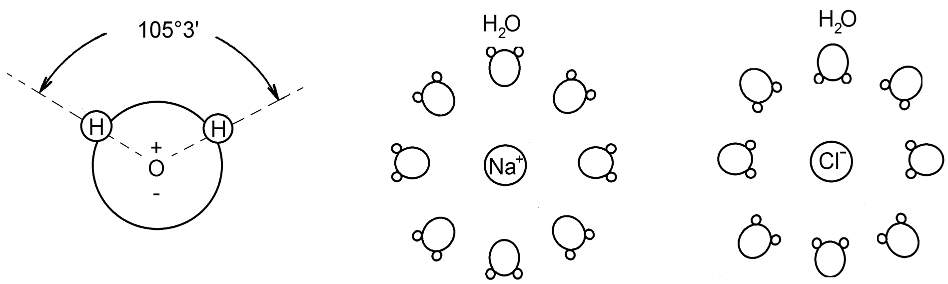
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d} \tag{2.109}$$

Elektrický dipólový moment sa meria v jednotkách coulombmeter (C.m). Z praktického hľadiska je to jednotka veľmi veľká, vo fyzikálnej chémii a v molekulárnej spektroskopii sa ešte stále používa vhodnejšia jednotka 1 debye (D) = $3{,}33.10^{-30}$ C.m, i keď SI-sústava jednotiek ju nepripúšťa.

Po takomto úvode do problematiky je namieste ešte jedna otázka; prečo venujeme až takú veľkú pozornosť elektrickému poľu vo veľkej vzdialenosti od dvojice blízkych rovnako veľkých nábojov opačného znamienka? Veď vo veľkej vzdialenosti dvojicu vidíme ako takmer nulový náboj, ktorého pole je nepatrné. Je to pravda, ale práve toto nepatrné elektrické pole je zodpovedné za silové pôsobenie medzi molekulami látok v prírode. O molekulách vieme, že sú elektricky neutrálne, teda že obsahujú rovnaké množstvo kladného a záporného náboja (protónov a elektrónov). Ak v okolí molekuly predsa len existuje elektrické pole, potom náboj v molekule musí byť rozložený tak, že v nej existujú ťažiská kladného a záporného náboja, ktoré nie sú totožné, ale sú v molekule navzájom posunuté. V molekule môže byť teoreticky ľubovoľný počet párov takýchto ťažísk. Ak má molekula dve takéto ťažiská, hovoríme o elektrickom dipóle, ak ich má štyri (dve kladné a dve záporné) o kvadrupóle, pri ôsmich o oktupóle atď. Každej konfigurácii prislúcha moment rozloženia. V prípade dvoch nábojov je to už spomínaný dipólový moment, v prípade štyroch nábojov kvadrupólový moment atď. Pole vyšších n–pólov posúdime na inom mieste. Najnižší v hierarchii n–pólov je monopól (n = 1), bodový, alebo guľovo rozložený náboj rovnakého znamienka.

Vhodným príkladom molekuly s vlastnosťami elektrického dipólu je molekula najrozšírenejšej a životne dôležitej tekutiny – molekula vody. Molekula pozostáva z jedného atómu kyslíka O a z dvoch atómov vodíka H, ktoré sú v kovalentnej väzbe a vytvárajú štruktúru zobrazenú na *obr. 2.40a*, v ktorej vodíkové atómy zvierajú uhol 105°3′ vzhľadom k stredu kyslíkového atómu. Takáto konfigurácia atómov nie je vrtochom prírody, je to energeticky najvýhodnejšie zoskupenie, čo však možno dokázať iba prostriedkami kvantovej fyziky. Uvedené rozloženie atómov v molekule H_2O vedie k tomu, že ťažisko kladných nábojov je na *obr. 2.40a* nad stredom O atómu a ťažisko záporných je pod jeho stredom. Molekula vody je teda elektrickým dipólom s dipólovým momentom

6,14.10^{-30} C.m. Medzi bežnými molekulami v prírode je to molekula s najväčším dipólovým momentom a keďže dipólový moment určuje elektrické vlastnosti dipólu, je aj jej elektrické pôsobenie jedno z najsilnejších. Elektrické dipólové momenty niekoľkých molekúl sú uvedené v tabuľke 1.



a) *b)*

Obr. 2.40

Tabuľka 1

Molekula	**Dipólový moment** $\boldsymbol{p.10^{30}}$ **(C.m)**
H_2O	6,14
CH_3OH	5,67
NH_3	4,77
HCl	3,44
CO	0,33

O vode je známe, že je najlepším rozpúšťadlom rôznych solí. Ak do nej nasypeme kuchynskú soľ, dôjde k procesu, ktorý chemici nazývajú **elektrolytická disociácia**. Molekula NaCl sa rozpadne na ióny Na^+ a Cl^-. Stane sa tak pod účinkom intenzívneho chaotického dorážania molekúl vody na molekulu soli, ktorej iónová väzba nakoniec povolí a molekula sa rozpadne. Vzniklé fragmenty sú okamžite obalené molekulami vody (dipólmi) a vzniknú hydráty ako na *obr. 2.40b*. Dipóly sa otočia svojimi kladnými pólmi k iónu Cl^- a zápornými k iónu Na^+.

Lekári vystríhajú pacientov s vysokým krvným tlakom pred príliš slanými jedlami. Soľ v elektrolytoch ľudského tela vyvoláva vznik hydratačných "strapcov" pozostávajúcich z viac ako 30 molekúl vody na jeden ión Na^+, čo zvyšuje prevodnenie organizmu a vedie následne k vysokému krvnému tlaku.

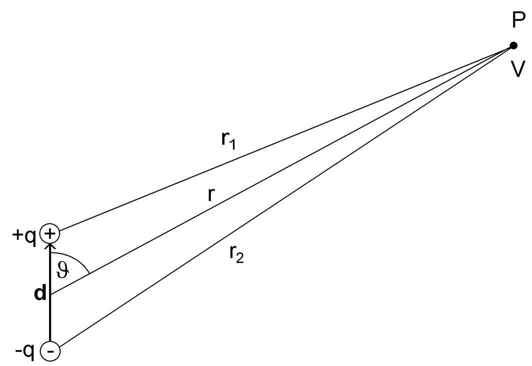
Tento úvod je dostatočným motívom k potrebe analýzy potenciálu a elektrického poľa dipólu. Uvažujme teda elektrický dipól podľa *obr. 2.41*. V bode *P* bude potenciál daný superpozíciou potenciálov jednotlivých nábojov, teda

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (2.110)$$

Pomocou kosínusovej vety môžeme vzdialenosti r_1 a r_2 na *obr. 2.41* vyjadriť výrazmi

$$r_1 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - rd\cos\vartheta} = r\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \frac{d}{r}\cos\vartheta}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + rd\cos\vartheta} = r\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \frac{d}{r}\cos\vartheta}$$



Obr. 2.41

Ak zoberieme do úvahy podmienku veľkej vzdialenosti, teda ak

$$\frac{d}{r} \ll 1$$

potom člen $(d/2r)^2$ pod odmocninami posledných výrazov môžeme oproti jednotke zanedbať a pre recipročné vzdialenosti písať

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\vartheta}} \tag{2.111a}$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{d}{r}\cos\vartheta}} \tag{2.111b}$$

Výrazy (2.111) rozvinieme do mocninového MacLaurinovho radu podľa mocnín $x = (d/r)\cos\vartheta$, t. j.

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \ldots \tag{2.112}$$

a obmedzíme sa na prvé dva členy. Takto dostaneme približné vyjadrenia

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r\sqrt{1-\frac{d}{r}\cos\vartheta}} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{d}{2r}\cos\vartheta\right)$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r\sqrt{1+\frac{d}{r}\cos\vartheta}} \approx \frac{1}{r}\left(1-\frac{d}{2r}\cos\vartheta\right)$$

Dosadením týchto výrazov do (2.110) pre potenciál dostaneme

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{qd\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.113}$$

alebo v tvare

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{2.114}$$

Potenciál dipólu klesá so vzdialenosťou ako funkcia $1/r^2$ a závisí od uhla ϑ na rozdiel od bodového náboja, kde pokles je $1/r$ a samozrejme bez uhlovej závislosti.

Intenzita poľa dipólu podľa vzťahu (2.99) je

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}V(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{grad}\left(\frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \tag{2.115}$$

Gradient z výrazu v zátvorke vypočítame tak, že zlomok napíšeme v tvare súčinu dvoch funkcií $\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}$ a $1/r^3$ a využijeme skutočnosť, že

$$\mathrm{grad}\,(ab) = b\,\mathrm{grad}\,a + a\,\mathrm{grad}\,b$$

teda

$$\mathrm{grad}\,\frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{r^3} = (\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r})\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\,\mathrm{grad}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r})$$

Gradient v prvom člene je daný výrazom (2.108), v druhom, kde je $\boldsymbol{p}$ = konšt. vektor

$$\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}) = p\,\mathrm{grad}\,(r\cos\vartheta) = p\,\mathrm{grad}\,r_p = \boldsymbol{p}$$

a $r_p = r\cos\vartheta$ je priemet vektora $\boldsymbol{r}$ do smeru vektora $\boldsymbol{p}$. Gradient tohto priemetu je jednotkový vektor v smere dipólového momentu. Po dosadení vo vzťahu (2.115) a elementárnych úpravách dostaneme konečný výraz pre intenzitu elektrického poľa dipólu

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] \tag{2.116}$$

Výraz (2.116) je zložitý a neprehľadný, vidieť z neho iba to, že intenzita klesá so vzdialenosťou ako funkcia $1/r^3$, má valcovú symetriu a zložitú uhlovú závislosť. Lepšiu predstavu o poli získame, ak vo zvolenej rovine, v ktorej leží dipól, rozložíme pole pozdĺž dvoch súradníc. Najvhodnejšie sú polárne súradnice *r, ϑ*, ako na *obr. 2.42*. Z obrázka je zrejmé, že

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{p} = p\cos\vartheta\,\boldsymbol{e}_r - p\sin\vartheta\,\boldsymbol{e}_\vartheta$$

$$\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r} = pr\cos\vartheta$$

kde $\boldsymbol{e}_r$ a $\boldsymbol{e}_\vartheta$ sú jednotkové vektory v smeroch polárnych súradníc. Dosadením týchto vyjadrení do výrazu (2.116) a po jeho úprave dostaneme

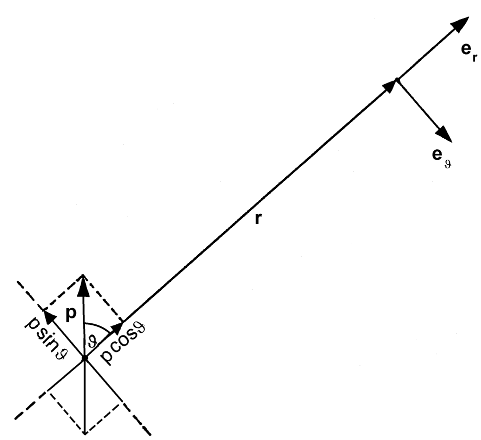
$$\boldsymbol{E}(r,\vartheta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\vartheta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\vartheta\,\boldsymbol{e}_\vartheta) = E_r(r,\vartheta)\boldsymbol{e}_r + E_\vartheta(r,\vartheta)\boldsymbol{e}_\vartheta$$

kde

$$E_r(r,\vartheta) = \frac{2p\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_\vartheta(r,\vartheta) = \frac{p\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{2.117}$$

Absolútna hodnota intenzity

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\vartheta^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1} \tag{2.118}$$



Obr. 2.42

Zo vzťahov (2.117) a (2.118) vidno, že pre danú vzdialenosť je intenzita maximálna na osi dipólu pre $\vartheta = 0, \pi$, má smer dipólového momentu a veľkosť

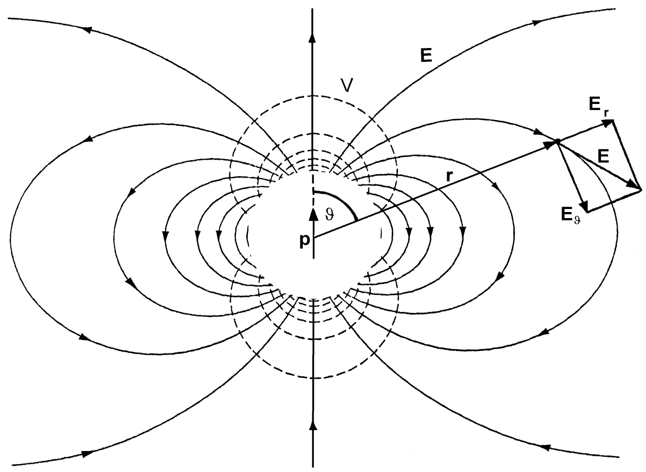
$$E_r = E = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_\vartheta = 0 \tag{2.119a}$$

a v priečnej rovine, pre $\vartheta = \pi/2$

$$E_r = 0 \qquad\qquad E_\vartheta = E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{2.119b}$$

a má smer opačný ako dipólový moment [porovnaj výrazy (2.119) s výrazmi (2.21)]. Pole elektrického dipólu je znázornené siločiarami na *obr. 2.43*. V bezprostrednej blízkosti dipólu vzťahy (2.116) až (2.118) samozrejme neplatia, a preto tam pole nie je zobrazené. V tejto oblasti ho treba počítať ako pole dvojice bodových nábojov tak, ako to bolo urobené v odseku 2.2 a zobrazené na *obr. 2.6*.

Nakoniec treba povedať, že pojem elektrostatický dipól je jedným zo základných pojmov, na ktorých je vybudovaná teória dielektrík.



Obr. 2.43

2.9.2 Energia dipólu v elektrostatickom poli

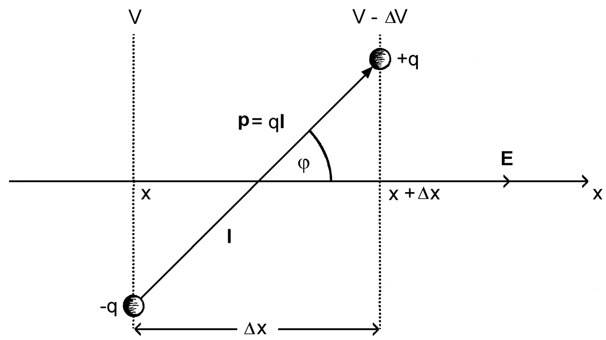
Odhliadnuc od vlastnej energie dipólu, každá zmena jeho orientácie vo vonkajšom elektrickom poli je spojená s vykonanou alebo prijatou prácou. Každej orientácii dipólu v homogénnom elektrostatickom poli prislúcha istá potenciálna energia. Pri všeobecnej orientácii v poli ako na *obr. 2.44* je jeho potenciálna energia

$$W = qV - q(V - \Delta V) = q\Delta V$$

kde $\Delta V = -E\Delta x = -El\cos\varphi$. Z obrázka vidieť, že $q\boldsymbol{l} = \boldsymbol{p}$, teda

$$W = -pE\cos\varphi = -\boldsymbol{p}.\boldsymbol{E} \tag{2.120}$$

Dipól má v poli maximálnu energiu s hodnotou $W_{max} = pE$ ak mieri proti smeru poľa ($\varphi = \pi$). Ak $\varphi = \pi/2$, vtedy $W = 0$, a ak $\varphi = 0$ energia je minimálna a má hodnotu $W_{min} = -pE$. Zo stavu s maximálnou energiou v labilnej polohe sa voľný dipól môže preklopiť do stavu s minimálnou energiou a tento stav je preň stabilný.



Obr. 2.44

2.9.3 Silové účinky elektrostatického poľa na dipól

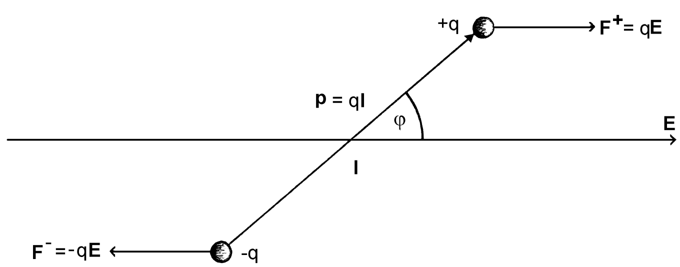
V homogénnom elektrickom poli pôsobí na dipól dvojica síl $F = \pm qE$ na ramene, ktorého dĺžka sa rovná dĺžke dipólu podľa *obr. 2.45*, teda silový točivý moment

$$M = Fl\sin\varphi = qEl\sin\varphi = pE\sin\varphi$$

alebo vo vektorovom tvare

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E} \qquad [\mathrm{N.m}] \tag{2.121}$$

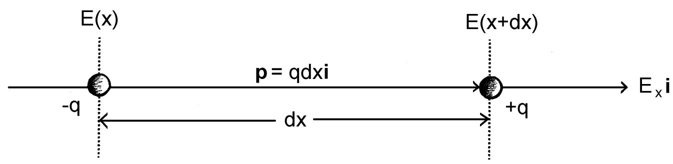
Na dipól orientovaný v smere alebo proti smeru poľa ($\varphi = 0, \pi$) nepôsobí žiadny točivý moment, teda $\boldsymbol{M}_{min} = 0$. V kolmej polohe ($\varphi = \pi/2, 3\pi/2$) na dipól pôsobí maximálny moment $M_{max} = pE$. Voľný dipól sa teda v homogénnom poli otočí do smeru tohto poľa a táto poloha je preň stabilná. V homogénnom poli na dipól nepôsobí žiadna translačná sila.



Obr. 2.45

Ak pole, v ktorom sa dipól nachádza, je nehomogénne, pôsobí naň okrem točivého momentu aj translačná sila, ktorá má tendenciu premiestniť ho do miesta, kde je absolútna hodnota intenzity poľa väčšia. Ak dipól smeruje pozdĺž siločiary v smere x ako na *obr. 2.46*, potom na každý z jeho nábojov pôsobia dve opačné sily, ktoré sa veľkosťou nepatrne líšia, takže výsledná pôsobiaca sila

$$F_x = qE_x(x+\mathrm{d}x) - qE_x(x) = q\left[E_x(x+\mathrm{d}x) - E_x(x)\right] = q\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x}$$



Obr. 2.46

Sila je úmerná súčinu priemetu dipólového momentu $q\mathrm{d}x$ do smeru x a zmene intenzity na jednotku dĺžky $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$, teda gradientu x-ovej zložky poľa. Všeobecne možno napísať

$$F_x = \boldsymbol{p}.\mathrm{grad}\,E_x \tag{2.122}$$

Podobné výrazy platia aj pre F_y a F_z. Vo vektorovom tvare

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}.\mathrm{grad})\boldsymbol{E} \tag{2.123}$$

Ak sa voľný dipól ocitne v nehomogénnom poli, natočí sa do smeru siločiary a bude sa pohybovať pozdĺž nej, až skončí na zdrojoch poľa.

2.10 MULTIPÓLOVÝ ROZKLAD POTENCIÁLU

Predpokladajme, že v nejakom objeme τ je rozložený náboj s objemovou hustotou ρ, celkový integrálny náboj môže byť nenulový, ak počet elektrónov a protónov je rôzny, alebo aj nulový, ak je počet rovnaký. Také zoskupenie nábojov môže predstavovať chemický radikál alebo zložitú molekulu. Budeme sa zaujímať o potenciál takého rozloženia v nejakej vzdialenosti r od zvoleného začiatku 0 v objeme τ, alebo aj mimo objemu. Situácia je ilustrovaná na *obr. 2.47*. Podľa všeobecného vzťahu (2.78) s označením podľa obrázka potenciál v bode P je

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau}{R}$$

kde vzdialenosť R elementu $\mathrm{d}\tau$ od bodu P podľa kosínusovej vety

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta} = r\sqrt{1 + \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{2r'}{r}\cos\vartheta\right]}$$

Vytvorme prevrátenú hodnotu R a výraz rozviňme do mocninového radu podľa mocnín $x = (r'/r)^2 - (2r'/r)\cos\vartheta$ s využitím vzorca (2.112)

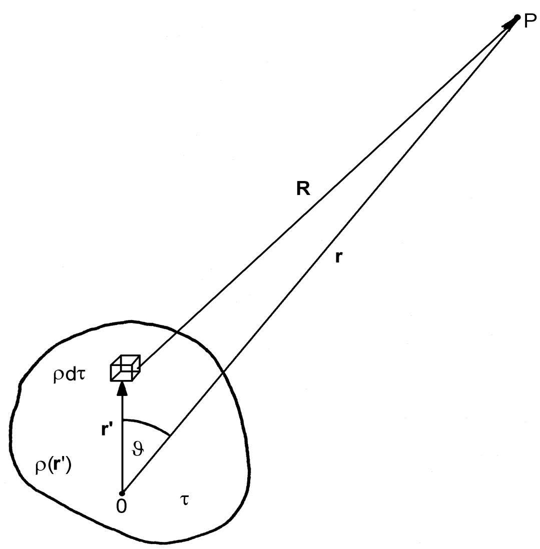
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r\sqrt{1+\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2-\frac{2r'}{r}\cos\vartheta\right]}}=$$

$$=\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2-\frac{2r'}{r}\cos\vartheta\right]+\frac{3}{8}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2-\frac{2r'}{r}\cos\vartheta\right]^2-\ldots\right\}=$$

$$=\frac{1}{r}\left[1+\frac{r'}{r}\cos\vartheta+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2\vartheta-1\right)+\textit{členy vyšších rádov}\right]$$

Ak tento zložitý výraz dosadíme do výrazu pre V_P, po usporiadaní dostaneme

$$V_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_\tau \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_\tau \rho(\boldsymbol{r}')r'\cos\vartheta\mathrm{d}\tau+ \\ +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int_\tau \frac{1}{2}\rho(r')r'^2\left(3\cos^2\vartheta-1\right)\mathrm{d}\tau+\cdots \tag{2.124}$$



Obr. 2.47

Všimnime si zvláštnu štruktúru výrazu (2.124). Je to superpozícia potenciálov, ktoré so vzdialenosťou r klesajú postupne ako $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ atď., teda ako potenciál bodového náboja, potenciál dipólu, potenciál kvadrupólu atď. Integrály vo výraze závisia iba od charakteru rozloženia náboja v objeme a nazývajú sa momenty rozloženia. Ak ich označíme postupne symbolmi K_1, K_2, K_3 atď., možno dať potenciálu jednoduchšiu formu

$$V_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{K_1}{r}+\frac{K_2}{r^2}+\frac{K_3}{r^3}+\cdots\right) \tag{2.125}$$

Prvý koeficient (moment) $$K_1 = \int_\tau \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau = Q$$

je celkový náboj rozloženia, nazývaný tiež monopólový moment.

Druhý koeficient (moment) $$K_2 = \int_\tau \rho(\boldsymbol{r}')r'\cos\vartheta\,\mathrm{d}\tau$$

udáva relatívne posunutie ťažiska kladných a záporných nábojov pozdĺž vzdialenosti r a nazýva sa dipólový moment rozloženia. Ak sa v objeme τ nachádzajú iba dva bodové náboje $\pm q$, kladný v mieste nábojového elementu $\rho\mathrm{d}\tau$ vo vzdialenosti $r' = d/2$ a záporný otočený o 180°, potom koeficient

$$K_2 = q\frac{d}{2}\cos\vartheta + (-q)\frac{d}{2}\cos(\pi + \vartheta) = qd\cos\vartheta = p\cos\vartheta$$

Vidíme, že v prípade dvoch bodových nábojov je K_2 priemet dipólového momentu do smeru r.

Tretí koeficient (moment) $$K_3 = \frac{1}{2}\int_\tau \rho(\boldsymbol{r}')r'^2\left(3\cos^2\vartheta - 1\right)\mathrm{d}\tau$$

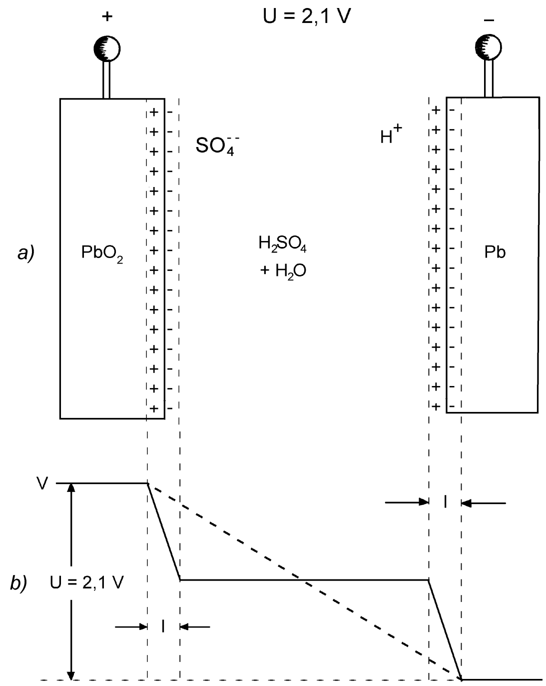
charakterizuje kvadrupólové rozloženie náboja atď.

Ak sa v objeme τ integrálny náboj rovná nule, teda ak ide napr. o neutrálnu molekulu, v tom prípade $K_1 = Q = 0$ a výsledný potenciál bude daný radom bez prvého člena. V prípade, že nás zaujíma iba potenciál vo veľkej vzdialenosti r, možno členy s mocninami vyššími ako $1/r^2$ zanedbať. Pole v tomto priblížení je poľom dipólu. Ak má rozloženie vyšší stupeň symetrie a jeho dipólový moment je nulový, potom nenulový môže byť kvadrupólový moment a vo veľkej vzdialenosti bude potenciál daný závislosťou $1/r^3$ atď. Kvadrupólové rozloženie nábojov je napr. také, že ťažiská štyroch rovnako veľkých zoskupení so striedavými znamienkami sú rozložené vo vrcholoch štvorca. Kvadrupólové pole a jemu zodpovedajúce silové pôsobenie je už veľmi jemné a v mikrosvete ovplyvňuje také efekty, ako je napr. hyperjemná štruktúru spektrálnych čiar – pojem, s ktorým sa čitateľ stretne v atómovej fyzike, prípadne v kvantovej mechanike.

2.11 POTENCIÁL A POLE ELEKTRICKEJ DVOJVRSTVY

V praxi sa vyskytuje ešte jedno rozloženie elektrických nábojov, ktoré si zaslúži našu pozornosť. Sú to dve veľmi blízke nábojové vrstvy s rovnako veľkou, ale opačnou plošnou hustotou náboja $\pm\sigma$. Ako príklad možno uviesť plastovú fóliu, ktorá bola zelektrizovaná tak, že na svojej jednej strane má kladný a na druhej strane záporný náboj. Lepším a prakticky významnejším príkladom je elektrická dvojvrstva, ktorá vzniká pri polarizácii elektród galvanického zdroja, napr. oloveného akumulátora.

Bez toho, aby sme na tomto mieste podrobnejšie skúmali elektrické pochody, ktoré prebiehajú vo vnútri akumulátora, uvedieme iba, že pri povrchu kladnej PbO_2 elektródy nabitého akumulátora sa vo vodnom roztoku H_2SO_4 vytvorí monomolekulárna vrstva aniónov SO_4^{--} a pri zápornej Pb elektróde vrstva katiónov H^+ tak, ako to vidieť na *obr. 2.48a*. Takto vytvorené dvojvrstvy na obidvoch elektródach vytvárajú dva potenciálové skoky, ktoré v súčte určujú elektromotorické napätie jedného článku akumulátora. Na *obr. 2.48b* je plnou čiarou znázornený priebeh potenciálu vo vnútri nabitého článku od jeho kladnej po zápornú elektródu. Hrúbka každej z dvojvrstiev l je veľmi malá, rádovo molekulárnych rozmerov, takže intenzita elektrického poľa $E \sim U/l$ je veľmi vysoká a dosahuje hodnôt $10^5 - 10^6$ V/m. Prerušovanou čiarou na obrázku je znázornený priebeh potenciálu na nenabitom článku v okamihu jeho pripojenia na nabíjací zdroj s napätím ~2,1 V.

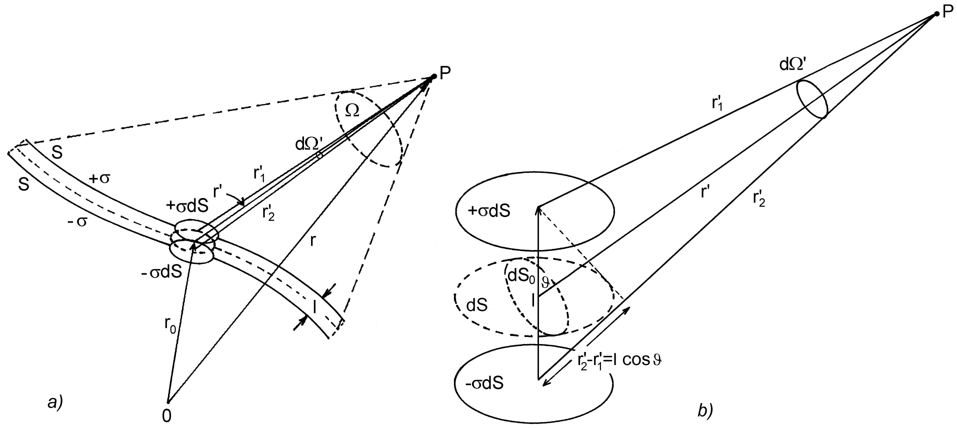


Obr. 2.48

Venujme sa teraz analýze potenciálu dvojvrstvy pozostávajúcej z dvoch rovnakých plôch S, ktoré sú umiestnené blízko seba vo vzdialenosti l oveľa menšej ako lineárne rozmery vrstiev, viď *obr. 2.49a*. Každá z vrstiev nesie plošný náboj $\pm\sigma(\boldsymbol{r}_0)$, kde $\boldsymbol{r}_0$ je polohový vektor miesta na vrstve. Podobne ako sme pre dvojicu bodových nábojov zaviedli dipólový moment, môžeme pre dvojvrstvu zaviesť plošný dipólový moment

$$\boldsymbol{p}'(\boldsymbol{r}_0) = \sigma(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{l}(\boldsymbol{r}_0) \tag{2.126}$$

V praxi máme najčastejšie dočinenia s dvojvrstvami, ktorých absolútna hodnota dipólového momentu p' je konštantná. Takéto dvojvrstvy nazývame homogénne.



Obr. 2.49

Uvažujme element dvojvrstvy s nábojovými elementmi $\pm\sigma \mathrm{d}S$, ktoré sú zväčšene znázornené na *obr. 2.49b*. Elementárny príspevok k potenciálu vo vzdialenosti r' je

$$\mathrm{d}V = \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}\right) = \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2' - r_1'}{r_1' r_2'}$$

S využitím *obr. 2.49b* možno pre $r' \gg l$ písať

$$r_2' - r_1' = l\cos\vartheta \qquad \text{a} \qquad r_1' r_2' \approx r'^2$$

Ak okrem toho uvážime, že $\mathrm{d}S\cos\vartheta = \mathrm{d}S_0$ je priemet plôšky $\mathrm{d}S$ do roviny kolmej na smer r' a že

$$\frac{\mathrm{d}S_0}{r'^2} = \mathrm{d}\Omega'$$

je elementárny priestorový uhol, pod ktorým vidieť plôšku $\mathrm{d}S$, teda uvažovaný element dvojvrstvy, z bodu P vo vzdialenosti r', potom elementárny príspevok k potenciálu

$$\mathrm{d}V = \frac{\sigma l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\vartheta\,\mathrm{d}S}{r'^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p'\frac{\mathrm{d}S_0}{r'^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p'\mathrm{d}\Omega'$$

Výsledok môžeme integrovať cez celý priestorový uhol Ω, pod ktorým vidíme vrstvu z bodu P daného polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ a výsledok vyjadriť v nasledovnom tvare

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega} p'\mathrm{d}\Omega' \tag{2.127}$$

Tento nevinne vyzerajúci integrál môže byť veľmi zložitý, ak si uvedomíme, že dipólový moment p' a následne aj $\mathrm{d}\Omega'$ sú funkciami polohy r na dvojvrstve. Našťastie, v praxi sa vyskytujúce dvojvrstvy sú vo väčšine prípadov homogénne s jednoduchou geometriou (rovina, guľová plocha a pod.). V takých prípadoch možno p' spod integrálu vybrať a dostaneme

$$V = \frac{p'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega'$$

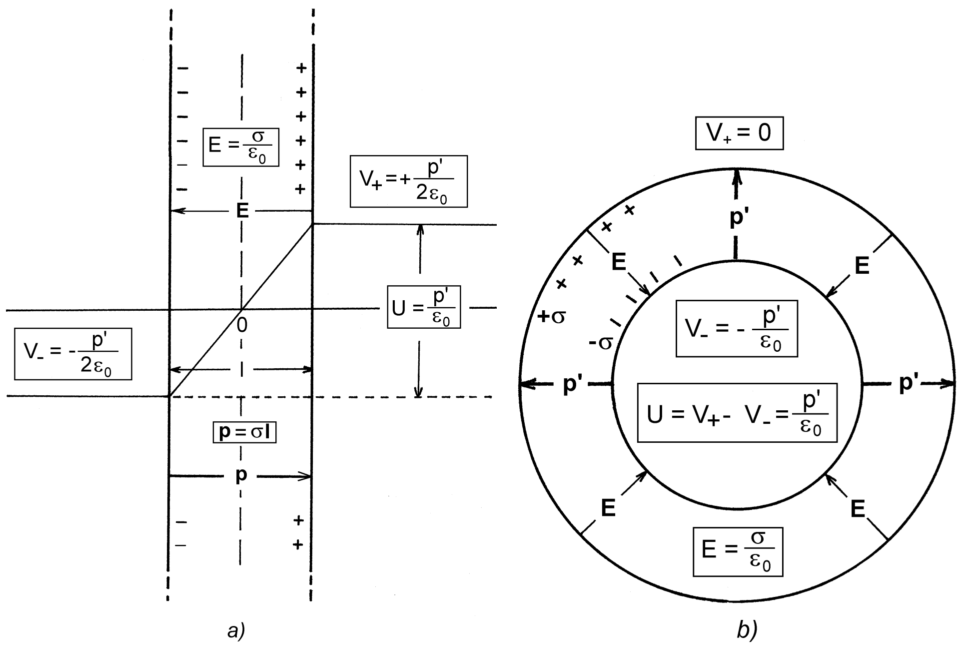
Pre ilustráciu uvedieme dve prakticky dôležité dvojvrstvy: rovinná, nekonečne veľká dvojvrstva a guľová dvojvrstva, v obidvoch prípadoch je $p' = \sigma l$ = konšt.

Pre rovinnú, nekonečne veľkú dvojvrstvu podľa *obr. 2.50a* v ľubovoľnom bode vpravo od nej je potenciál

$$V_+ = \frac{p'}{2\varepsilon_0} \tag{2.128a}$$

a v ľubovoľnom bode vľavo od nej

$$V_- = -\frac{p'}{2\varepsilon_0} \tag{2.128b}$$



Obr. 2.50

pretože dvojvrstvu zo všetkých bodov vpravo vidíme pod uhlom $\Omega_+ = 2\pi$ a z bodov vľavo, pod uhlom $\Omega_- = -2\pi$. Potenciál je teda konštantný vpravo aj vľavo. Rozdiel potenciálov alebo napätie na dvojvrstve

$$U = V_+ - V_- = \frac{p'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l \tag{2.129}$$

To je ale známy výraz pre napätie medzi dvoma nekonečnými rovinami nabitými plošnými nábojmi $\pm\sigma$. Intenzita poľa v dvojvrstve $E = \sigma/\varepsilon_0$. Výrazy (2.128) a (2.129) platia približne aj pre roviny konečných rozmerov, ak sa zaujímame o potenciály bodov blízkych k dvojvrstve. V bodoch bezprostredne na oboch stranách dvojvrstvy výrazy platia presne pre ľubovoľné rozmery a tvar. Pri prechode cez dvojvrstvu sa potenciál vždy mení o hodnotu p'/ε_0.

Guľovú dvojvrstvu na *obr. 2.50b* vidíme zo všetkých vonkajších bodov pod priestorovým uhlom $\Omega = 0$ a zo všetkých vnútorných bodov pod priestorovým uhlom $\Omega = -4\pi$. Potenciál z vonkajšej strany $V_+ = 0$ a vo vnútri $V_- = -p'/\varepsilon_0$. Pri prechode cez dvojvrstvu sa aj v tomto prípade potenciál mení o p'/ε_0, a to je súčasne napätie na vrstve. Takáto dvojvrstva modeluje nabitý guľový kondenzátor, alebo napríklad aj bunečnú membránu biologického tkaniva.

Záverom možno povedať, že pojem dvojvrstvy je užitočný v takých prípadoch, keď pri plošnom rozložení opačných nábojov je dôležitý potenciálový skok medzi plochami, a nie elektrické pole.

2.12 ROTÁCIA VEKTOROVEJ FUNKCIE. DIFERENCIÁLNE OPERÁTORY POLÍ

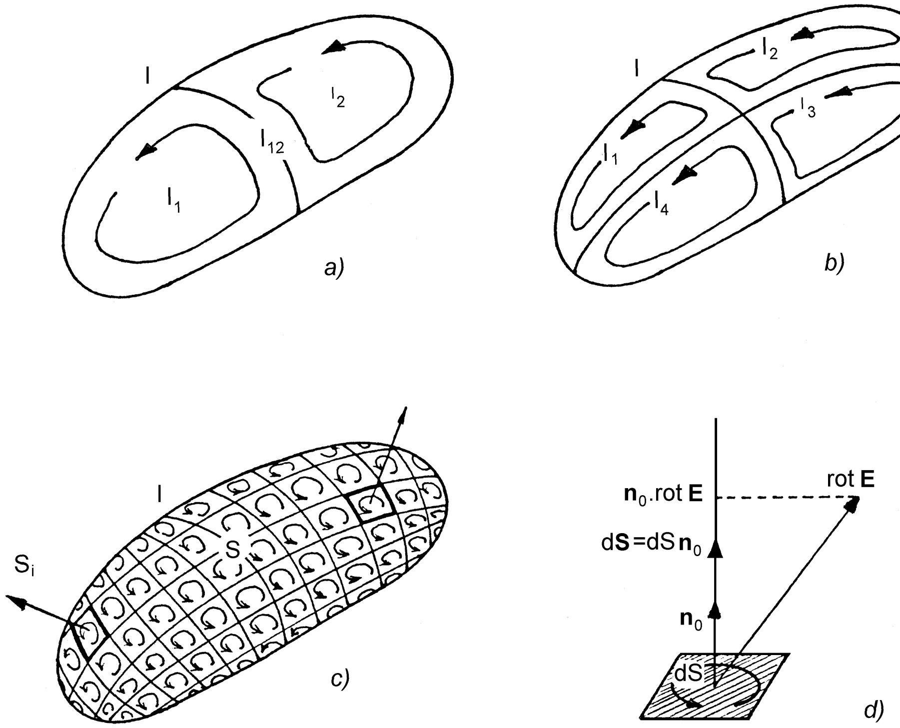
2.12.1 Rotácia elektrostatického poľa. Stokesova veta

Pri definovaní potenciálu elektrostatického poľa sme zistili závažnú vlastnosť elektrostatického poľa, že práca pri prenose náboja po ľubovoľnej uzavretej dráhe l v elektrostatickom poli sa rovná nule, teda že integrál intenzity poľa po tejto dráhe sa rovná nule

$$\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{2.130}$$

O tejto skutočnosti sme vyhlásili, že vyjadruje základnú vlastnosť elektrostatického poľa a jej závažnosť je porovnateľná s Gaussovým zákonom. Môžeme si položiť rovnakú otázku ako pri zavedení divergencie poľa, či výraz (2.130) nevyjadruje nejakú lokálnu vlastnosť poľa v ľubovoľnom jeho bode. Výraz skutočne vyjadruje jednu vlastnosť poľa, ktorá súvisí s jeho rotáciou. Prv než ju sformulujeme, posúdime niektoré dôležité vlastnosti dráhových integrálov typu (2.130), pre ľubovoľné vektorové pole.

Predpokladajme, že v priestore je definovaná nejaká vektorová funkcia $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, pričom tento symbol nemusí vyjadrovať intenzitu elektrostatického poľa, ale ľubovoľnú matematickú funkciu, ktorá spĺňa štandardné podmienky požadované vo fyzike – spojitosť a diferencovateľnosť. Dráhový integrál typu (2.130) sa v matematickej literatúre nazýva cirkuláciou vektora $\boldsymbol{E}$ a budeme ho označovať C, teda



Obr. 2.51

$$C = \oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.131}$$

Hodnotu cirkulácie môžeme vypočítať aj tak, že dráhu l premostíme spojkou l_{12}, ako na *obr. 2.51a*, takže vzniknú dve uzavreté dráhy l_1 a l_2. Treba si uvedomiť, že ani dráha l, ani premostenie nemusia ležať v rovine nákresne. Po každej z takto vzniklých uzavretých dráh môžeme vypočítať cirkuláciu pri zachovaní smeru obehu. Súčet cirkulácií

$$C_1 = \oint_{l_1} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \qquad \text{a} \qquad C_2 = \oint_{l_2} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$$

sa rovná cirkulácii C, teda

$$C = C_1 + C_2 = \oint_{l_1} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 + \oint_{l_2} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$$

Na spoločnom úseku l_{12} integrácie jedným a druhým smerom sa tieto príspevky k jednotlivým integrálom navzájom rušia. V delení môžeme pokračovať ďalším premostením ako na *obr. 2.51b,* čím vzniknú štyri uzavreté dráhy, po ktorých sa súčet cirkulácií tiež rovná C atď. Po dostatočne veľkom množstve (n) delení vznikne sieť ako na *obr. 2.51c* a cirkulácia

$$C = \sum_{i=1}^{n} \oint_{l_i} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i \tag{2.132}$$

Členy tohto radu sa zmenšujú so zvyšovaním n, pretože súčet sa rovná C. Všimnite si, že postupné delenie dráh prebieha na nejakej ploche S, ktorá má tú vlastnosť, že jej hranicu tvorí uzavretá krivka l, ale ináč má plocha v priestore ľubovoľnú formu a veľkosť, pretože vznikla ako dôsledok istého, v podstate ľubovoľného, spôsobu nášho delenia. Každá uzavretá dráha l_i obopína plôšku S_i s nejakou orientáciou v priestore a túto orientáciu môžeme vyjadriť plošným vektorom $\boldsymbol{S}_i$.

Ak budeme v delení pokračovať do nekonečna, jednotlivé dráhy sa skracujú na nulu a obopínajú stále lepšie definovaný bod. Žiaľ, aj zodpovedajúce cirkulácie budú klesať k nule, a teda nepredstavujú tú informáciu, po ktorej pátrame. K nule však klesajú aj plôšky, ktoré dráhy obopínajú, to znamená, že hľadanou veličinou by mohol byť limitný pomer cirkulácie a plochy, pri súčasnom poklese obidvoch veličín k nule. Vynásobme a súčasne vydeľme teda jednotlivé členy radu (2.131) plochami S_i, takže dostaneme

$$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{\oint_{l_i} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i}{S_i} S_i$$

Ak v tomto výraze určíme limitu pre nekonečný počet delení, teda pre $S_i \to 0$, resp. k nekonečne malej veličine dS, prejde suma na plošný integrál po ploche S, teda

$$C = \int_S \lim_{S \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{S} \mathrm{d}S \tag{2.133}$$

Pri interpretácii tohoto výrazu nám môže poslúžiť *obr. 2.51d*, na ktorom je zobrazený vybraný plošný element dS po nekonečnom delení plochy S. Jemu odpovedá vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}_0 \mathrm{d}S$, kde $\boldsymbol{n}_0$ je jednotkový vektor normály k plôške v orientácii pravotočivej skrutky. Zložitá funkcia pod integrálom musí byť v skutočnosti priemetom nejakého vektora do smeru normály $\boldsymbol{n}_0$. Túto vektorovú funkciu nazývame rotáciou vektorovej funkcie $\boldsymbol{E}$, označujeme "rot $\boldsymbol{E}$" a jej definičným výrazom je

$$\boldsymbol{n}_0 . \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{S} \tag{2.134}$$

Na základe uvedených úvah, môžeme vysloviť nasledovnú definíciu rotácie vektorovej funkcie:

Rotácia vektorovej funkcie $\boldsymbol{E}$ (rot $\boldsymbol{E}$) *v nejakom bode priestoru je vektor, ktorého priemet do smeru jednotkového vektora* $\boldsymbol{n}_0$ *je daný limitným pomerom cirkulácie vektora* $\boldsymbol{E}$ *(dráhového integrálu* $\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ *) po obvode l ľubovoľnej plochy S kolmej na* $\boldsymbol{n}_0$ *a veľkosti plochy S, ak* $S \to 0$*, teda*

$$\boldsymbol{n}_0.\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{S} \tag{2.134}$$

Uvedená definícia má nedostatok, pretože neudáva ani smer, ani veľkosť vektora rotácie, iba jeho priemet do smeru normály k zvolenej plôške. Tento priemet je viac-menej ľubovoľný, pretože závisí od našej voľby orientácie plochy. Ak budeme vo výraze (2.134) meniť smer vektora $\boldsymbol{n}_0$, teda v skutočnosti meniť orientáciu plôšky S, a tým aj priestorovú orientáciu jej hraničnej čiary l, bude integrál pod limitou nadobúdať rôzne hodnoty, pričom existuje jedna taká orientácia, že limita výrazu je maximálna. Priemet je najväčší, ak je uhol medzi oboma vektormi na ľavej strane rovnice (2.134) nulový ($\cos 0 = 1$), teda smer vektora rotácie je rovnaký ako $\boldsymbol{n}_0$ ($|\boldsymbol{n}_0| = 1$) a veľkosť jeho priemetu sa rovná veľkosti vektora rotácie.

Ak teraz výraz (2.134) vynásobíme s dS, prejde na tvar

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{S}\mathrm{d}S$$

a po jeho integrácii na ploche S dostaneme

$$C = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \lim_{S\to 0}\frac{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{S}\mathrm{d}S \tag{2.135}$$

Porovnaním posledného výrazu s výrazom (2.131) dostaneme jednu z integrálnych viet teórie vektorového poľa

$$\boxed{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}} \tag{2.136}$$

ktorá sa nazýva **Stokesova veta** [Sir Georg Gabriel Stokes (1819 – 1903) – anglický matematik a fyzik]. Podľa Stokesovej vety existujú dva rovnocenné spôsoby výpočtu cirkulácie vektora $\boldsymbol{E}$ po uzavretej dráhe l:

1. vychádzajúc z hodnôt funkcie $\boldsymbol{E}$ na čiare l;

2. vychádzajúc z "vírovosti" funkcie $\boldsymbol{E}$ (rot$\boldsymbol{E}$) na ľubovoľnej ploche S ohraničenej čiarou l.

Často sa tiež hovorí, že použitím Stokesovej vety možno premeniť dráhový integrál poľa na plošný a naopak.

V priebehu mnohých rokov prednášok som dospel k poznaniu, že študenti majú ťažkosti s chápaním pojmov ako sú rotácia, divergencia a gradient, a nerobím si ilúzie, že po čítaní tohto textu to bude inak, a že všetko bude okamžite jasné. Je však jasné, že vzťah (2.134) nie je vhodný na priamy výpočet rotácie vektorovej funkcie. Na to treba celú úvahu urobiť znovu pre funkciu zadanú v konkrétnom súradnicovom systéme. Žiaľ, nepoznám matematickú príručku, v ktorej by problém diferenciálnych operácií typu divergencie, prípadne rotácie, bol na úrovni základného kurzu fyziky uspokojivo podaný a bolo by zohľadnené fyzikálne chápanie matematiky. Elegantný výklad pojmov divergencia a rotácia možno nájsť v učebnici "Electricity and Magnetism – – Berkeley Physics Course" od nositeľa Nobelovej ceny Edwarda Millsa Purcella citovanej v závere tejto učebnice.

Nuž ale vráťme sa k fyzike! Ak platí vzťah (2.130), potom zo Stokesovej vety plynie, že

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

a to po ľubovoľnej ploche S s jedinou hraničnou čiarou l. To je možné iba vtedy, ak

$$\boxed{\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0} \tag{2.137}$$

v každom bode priestoru, v ktorom je elektrostatické pole definované. Výraz (2.137) je hľadaný lokálny vzťah, ktorý hovorí, že elektrostatické pole má nulovú rotáciu, je to pole gradientové, pole žriedlové, ktoré nemá uzavreté siločiary. Treba povedať, že elektrické pole ktoré vznikne pri elektromagnetickej indukcii opísanej v kapitole 7 už nebude poľom žriedlovým, jeho rotácia je totiž nenulová. Gravitačné pole je poľom s nulovou rotáciou. Naopak, magnetické pole je typickým vírovým poľom, poľom s nenulovou rotáciou. Dráhový integrál takého poľa sa nerovná nule. Viac sa problematike polí s nenulovou rotáciou budeme venovať v kapitole o magnetizme a elektromagnetickej indukcii.

Rovnica (2.137) je tiež jednou z Maxwellových rovníc pre statické elektrické pole.

2.12.2 Rotácia vektorovej funkcie v pravouhlých súradniciach

Predpokladajme, že vektorové pole je určené funkciou $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ a v pravouhlých súradniciach je daná čiara l ohraničujúca nejakú všeobecnú plochu S podľa *obr. 2.52*, na ktorej je definovaná funkcia rot $\boldsymbol{E}$. Rozložme túto funkciu do zložiek

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \operatorname{rot}_x \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{i} + \operatorname{rot}_y \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{j} + \operatorname{rot}_z \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{k}$$

Vektorový plošný element d$\boldsymbol{S}$ rozložme takisto do zložiek

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S_x\, \boldsymbol{i} + \mathrm{d}S_y\, \boldsymbol{j} + \mathrm{d}S_z\, \boldsymbol{k}$$

Vytvoríme skalárny súčin

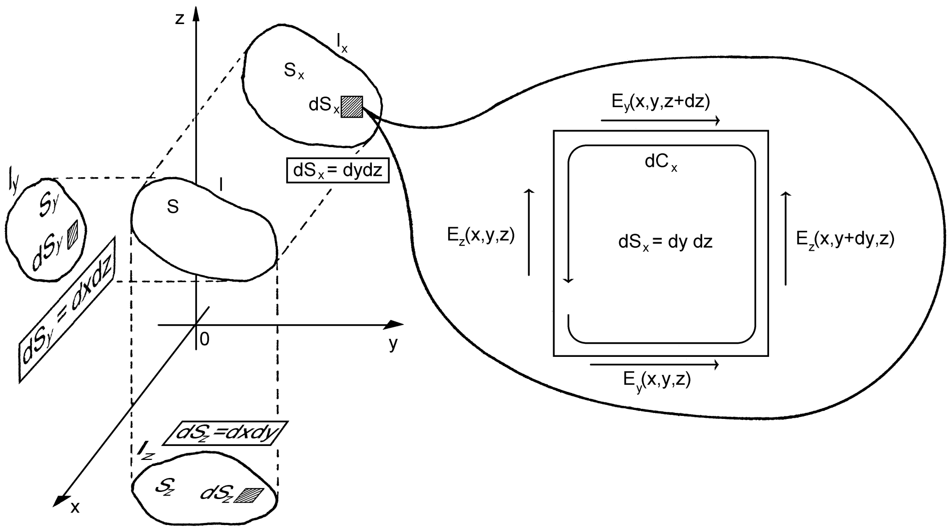
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \operatorname{rot}_x \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}S_x + \operatorname{rot}_y \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}S_y + \operatorname{rot}_z \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}S_z$$

premietneme plochu S do rovín yz, xz a xy, ako na *obr. 2.52* a priemety plochy označme postupne S_x, S_y a S_z. Z obrázka vidíme, že

$$\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad\qquad \mathrm{d}S_y = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \qquad\qquad \mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Cirkuláciu vektora $\boldsymbol{E}$ po dráhe l môžeme na jednej strane vyjadriť ako integrál rotácie vektora $\boldsymbol{E}$ po ploche S, teda

$$C = \int_S \operatorname{rot}\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_x} \operatorname{rot}_x \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S_x + \int_{S_y} \operatorname{rot}_y \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S_y + \int_{S_z} \operatorname{rot}_z \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S_z$$



Obr. 2.52

a na druhej strane ako súčet troch cirkulácií po obvodových čiarach l_x, l_y, l_z jednotlivých priemetov S, t. j.

$$C = \oint_{l_x} \mathrm{d}C_x + \oint_{l_y} \mathrm{d}C_y + \oint_{l_z} \mathrm{d}C_z$$

Elementárne cirkulácie $\mathrm{d}C_x$, $\mathrm{d}C_y$, $\mathrm{d}C_z$ sú cirkulácie po nekonečne malých obdĺžnikoch $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, z ktorých prvá je zväčšene zobrazená na *obr. 2.52*. Porovnaním posledných dvoch výrazov vidíme, že platí

$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}C_x \qquad (2.138\text{a})$$

$$\operatorname{rot}_y \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S_y = \mathrm{d}C_y \qquad (2.138\text{b})$$

$$\operatorname{rot}_z \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}C_z \qquad (2.138\text{c})$$

Vypočítajme elementárnu cirkuláciu $\mathrm{d}C_x$. Z *obr. 2.52* vidíme, že

$$\mathrm{d}C_x = [E_z\,(x, y + \mathrm{d}y, z) - E_z\,(x, y, z)]\mathrm{d}z - [E_y\,(x, y, z + \mathrm{d}z) - E_y\,(x, y, z)]\mathrm{d}y$$

Výrazy v hranatých zátvorkách sú nekonečné malé prírastky z-ovej zložky $\boldsymbol{E}$ v smere y a y-ovej zložky $\boldsymbol{E}$ v smere z, teda

$$\mathrm{d}C_x = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{\partial E_y}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}S_x$$

Ak porovnáme tento výraz s výrazom (2.138a). Vidíme, že x-ová zložka rotácie vektora $\boldsymbol{E}$ má tvar

$$\mathrm{rot}_x\,\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \tag{2.139a}$$

Ak tú istú úvahu urobíme pre cirkulácie vo zvyšných dvoch súradných rovinách alebo cyklickou zámenou súradníc, dostaneme y-ovú a z-ovú zložku rotácie $\boldsymbol{E}$ v tvaroch

$$\mathrm{rot}_y\,\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{2.139b}$$

$$\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{2.139c}$$

Vektor rotácie intenzity elektrického poľa v pravouhlých súradniciach má teda tvar

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(x, y, z) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{2.140}$$

Výraz pre rotáciu sa často zapisuje vo formálnom tvare determinantu

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \tag{2.141}$$

Skutočnosť, že rotácia elektrostatického poľa sa rovná nule, vyjadrená rovnicou (2.137), môže teraz byť pre pole dané v pravouhlých súradniciach vyjadrená výrazom

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0 \tag{2.142}$$

alebo vo formálnom tvare

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0 \tag{2.143}$$

Diferenciálne operácie gradient, divergencia a rotácia v skalárnom a vektorovom poli v pravouhlých, cylindrických a sférických súradniciach sú zhrnuté v tabuľke 22.

2.12.3 Diferenciálne operátory vektorových polí. Poissonova a Laplaceova rovnica

Pri odvodzovaní takých základných vzťahov elektrostatiky, ako je vzťah intenzity elektrického poľa a potenciálu, Gaussov zákon v diferenciálnom tvare a rotácie elektrostatického poľa v pravouhlých súradniciach, sme definovali diferenciálne operácie gradient [pozri vzťah (2.101)], divergenciu [vzťah (2.63)] a rotáciu [vzťahy (2.140), resp. (2.141)]. Všetky tieto operácie majú jeden spoločný rys, že sú vytvorené parciálnymi deriváciami potenciálu, resp. zložiek intenzity poľa podľa súradníc x, y, z. Každú parciálnu deriváciu týchto funkcií (t. j. potenciálu alebo zložky poľa) možno formálne považovať za súčin predpisu o operácii na funkcii (operátora) a samotnej funkcie. V tomto odstavci operátormi sú symboly derivácií podľa súradníc $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ a $\dfrac{\partial}{\partial z}$, ktoré možno "násobiť" skalárnymi funkciami ako sú $V(x, y, z)$ alebo napr. $E_x(x, y, z)$. Operácie násobenia nie sú komutatívne napr. výraz $-\dfrac{\partial V}{\partial x}$ má význam x-ovej zložky intenzity poľa, ale samostatne stojaci výraz $V\dfrac{\partial}{\partial x}$ má význam iba ďalšieho operátora. Zo spomínaných operátorov možno vytvoriť symbolický vektor, ak každý zo symbolov derivácií postupne vynásobíme jednotkovými vektormi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ v smeroch súradnicových osí a výsledky sčítame. Dostaneme tak vektorový operátor

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{2.144}$$

kde symbol ∇ sa číta ako **"operátor nabla"** a bol nazvaný podľa starohebrejského (podľa niektorých autorov fenického) strunového hudobného nástroja podobného tvaru. V literatúre sa tento operátor uvádza aj pod názvom **Hamiltonov operátor**.

Vynásobme teraz operátor nabla potenciálovou funkciou V sprava. Vidíme, že tento súčin je vlastne gradient potenciálu, t. j.

$$\nabla V = \text{grad } V \tag{2.145}$$

Podobne, ak operátor nabla vynásobíme skalárne sprava s intenzitou elektrostatického poľa $\boldsymbol{E}$ a výsledok porovnáme s výrazom (2.63) vidíme, že je to divergencia vektora $\boldsymbol{E}$, teda

$$\nabla\boldsymbol{.}\,\boldsymbol{E} = \operatorname{div}\boldsymbol{E} \tag{2.146}$$

a nakoniec, ak operátor nabla vynásobíme vektorovo sprava s intenzitou poľa $\boldsymbol{E}$, porovnaním výsledku s výrazom (2.140) alebo (2.141) sa presvedčíme, že ide o rotáciu vektora $\boldsymbol{E}$, teda

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \operatorname{rot}\boldsymbol{E} \tag{2.147}$$

Na základe vzťahov (2.145) až (2.147) sa môžu základné zákony elektrostatiky nábojov vo vákuu napísať vo forme

$$\nabla\boldsymbol{.}\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.148}$$

čo je vzťah (2.61) a

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.149}$$

čo je zase výraz (2.137). Vzťah intenzity elektrostatického poľa a potenciálu (2.99) prijme formálny tvar

$$\boldsymbol{E} = -\,\nabla V \tag{2.150}$$

Vráťme sa však ešte raz k výrazom (2.61) a (2.99), z ktorých možno získať dôležitý lokálny vzťah medzi objemovou hustotou náboja ρ a potenciálom V v okolí nejakého bodu. Ak do výrazu pre Gaussov zákon dosadíme za intenzitu poľa jeho vyjadrenie cez potenciál podľa vzťahu (2.99), dostaneme

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Po úprave s využitím vzťahov (2.145) a (2.146) dostaneme výraz

$$(\nabla.\nabla)V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.151}$$

v ktorom sa objavil ďalší diferenciálny operátor

$$\nabla.\nabla = \operatorname{div}\operatorname{grad} = \nabla^2 = \Delta \tag{2.152}$$

vzniknutý skalárnym súčinom operátora nabla samého so sebou, takže

$$\nabla.\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 = \Delta \tag{2.153}$$

Tento skalárny operátor sa nazýva **Laplaceov operátor**. Treba však podotknúť, že operátorová identita (2.152) platí iba pre operátory v pravouhlých súradniciach. Pre funkcie dané v iných súradnicových systémoch treba namiesto operátora $\nabla.\nabla = \Delta$ používať jednoducho postupnú operáciu div(grad). V tabuľke 23 je uvedený Laplaceov operátor aj v cylindrických a sférických súradniciach.

Pomocou Laplaceovho operátora možno rovnicu (2.151) prepísať do tvaru

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.154a}$$

alebo jednoducho

$$\Delta V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.154b}$$

Rovnica (2.154) sa nazýva **Poissonova rovnica**. V oblastiach, v ktorých nie sú makroskopické náboje, teda tam, kde $\rho = 0$, rovnica prejde na tvar

$$\Delta V = 0 \tag{2.155}$$

a nazýva sa **Laplaceova rovnica**.

Poissonovej a Laplaceovej rovnici vzhľadom na ich dôležitosť a komplexnosť je venované veľké množstvo vedeckých prác a monografií a tvorí podstatnú časť matematickej fyziky. Z matematického pohľadu sú to lineárne parciálne diferenciálne rovnice druhého rádu, prvá je nehomogénna a druhá homogénna. Poissonova rovnica pri známej potenciálovej funkcii umožňuje nájsť priestorové rozloženie elektrického náboja. Opačná úloha – nájsť potenciál zo známeho rozloženia nábojov – je na prvý pohľad zložitá. Na naše prekvapenie, my toto riešenie už dávno poznáme. Je to integrálny výraz (2.78) pre výpočet potenciálu náboja rozloženého spojito v priestore. S využitím Greenovej vety sa dá dokázať, že integrál (2.78) je skutočne riešením Poissonovej rovnice.[1]

Poissonova rovnica vystupuje pri riešení mnohých praktických problémov fyzikálnej elektroniky súvisiacich s priestorovým nábojom produkovaným katódou elektrónovákuových zariadení. Využíva sa aj v štatistickej teórii atómu.

Laplaceova rovnica má vo fyzike ešte širšie uplatnenie a neobmedzuje sa iba na elektrické javy. Vystupuje napríklad aj pri štúdiu elastických kmitov, pri stacionárnom prúdení tepla, pri difúzii a i. Vlnová rovnica a Schrödingerova rovnice v kvantovej mechanike sú z matematického hľadiska vlastne iba časovým rozšírením Laplaceovej rovnice.

Na záver tohto odseku uvádzame v tabuľke 2 niekoľko matematických vektorových identít s nabla operátorom, ktoré sa často vyskytujú vo fyzike. Symboly T a V tu predstavujú skalárne a $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ vektorové funkcie súradníc.

Okrem identít uvedených v tabuľke 2, pre ľubovoľné funkcie V a $\boldsymbol{A}$ vždy platí

$$\nabla \times (\nabla V) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad} V) = 0 \tag{2.156}$$

a

$$\nabla.(\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = 0 \tag{2.157}$$

pretože v prvom prípade formálny vektorový súčin $\nabla \times \nabla = 0$, a v druhom prípade skalárny súčin ∇-operátora s vektorom $\nabla \times \boldsymbol{A}$, ktorý je naň kolmý sa tiež rovná nule. Z týchto čisto matematických vzťahov priamo plynú fyzikálne zákony:

[1] Pozri napr. Jackson, J. D.: Classical Electrodynamics, J. Wiley and Sons, Inc. New York – London 1962

1. v elektrostatike rot $\boldsymbol{E} = \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$, pretože $\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\,\mathrm{grad}\, V$

2. v magnetizme div $\boldsymbol{B} = \nabla . \boldsymbol{B} = 0$, za predpokladu, že $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$.

Vektor $\boldsymbol{B}$ je čitateľovi už určite známy vektor magnetickej indukcie a $\boldsymbol{A}$ je vektorový potenciál. K poslednému však ešte vedie dlhá cesta.

Tabuľka 2

(T, V – skalárne funkcie, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ – vektorové funkcie)

$\nabla(TV)$	=	$T\nabla V + V\nabla T$
	=	$T\mathrm{grad}\, V + V\mathrm{grad}\, T$
	=	$\mathrm{grad}(VT)$
$\nabla . (V\boldsymbol{A})$	=	$V(\nabla . \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} . (\nabla V)$
	=	$V\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} . \mathrm{grad}\, V$
	=	$\mathrm{div}(V\boldsymbol{A})$
$\nabla \times (V\boldsymbol{A})$	=	$V(\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \times (\nabla V)$
	=	$V\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \times \mathrm{grad}\, V$
	=	$\mathrm{rot}(V\boldsymbol{A})$
$\nabla . (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$	=	$\boldsymbol{B} . (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}. (\nabla \times \boldsymbol{B})$
	=	$\boldsymbol{B}. \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} . \mathrm{rot}\, \boldsymbol{B}$
	=	$\mathrm{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$
$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$	=	$\boldsymbol{A}(\nabla . \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla . \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}.\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} .\nabla)\boldsymbol{B} =$
	=	$\boldsymbol{A}\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B}.\mathrm{grad})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} . \mathrm{grad})\boldsymbol{B}$
	=	$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$
$\nabla(\boldsymbol{A} . \boldsymbol{B})$	=	$\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}.\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} .\nabla)\boldsymbol{B}$
	=	$\boldsymbol{A} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} .\mathrm{grad})\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} . \mathrm{grad})\boldsymbol{B}$
	=	$\mathrm{grad}(\boldsymbol{A} . \boldsymbol{B})$
$\nabla . (\nabla V)$	=	$(\nabla.\nabla)V$
	=	$(\mathrm{grad} . \mathrm{grad})V$
	=	$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, V)$
	=	$\nabla^2 V$
	=	ΔV
$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$	=	$\nabla(\nabla . \boldsymbol{A}) - (\nabla.\nabla)\boldsymbol{A}$
	=	$\nabla(\nabla . \boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}$
	=	$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$
	=	$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A})$

Úlohy 1 – 37

1. Dva bodové náboje q_1 a q_2 sú umiestnené vo vzájomnej vzdialenosti d. Nájdite miesto na priamke prechádzajúcej nábojmi, v ktorom sila pôsobiaca na tretí naboj q_0 je nulová.

2. Vypočítajte príťažlivú silu medzi jadrom a elektrónom v atóme vodíka! Za polomer atómu považujte hodnotu 5.10^{-11} m! Náboj protónu a elektrónu v absolútnej hodnote je $1{,}6.10^{-19}$ C.

3. Vypočítajte klasickú obežnú rýchlosť elektrónu okolo jadra v atóme vodíka! Hmotnosť elektrónu je $9{,}1.10^{-31}$ kg.

4. Thomsonov model atómu predstavuje rovnomerne rozložený kladný náboj v guľovom objeme s bodovými elektrónmi rozloženými vo vnútri gule. Ukážte, že elektrón vo vnútri takejto gule vykonáva jednoduchý harmonický kmitavý pohyb okolo stredu atómu! Vypočítajte číselne frekvenciu oscilácií elektrónu vo vodíkovom atóme a porovnajte ju s frekvenciami spektrálnych čiar vodíka! Za polomer Thomsonovho vodíkového atómu považujte hodnotu $R = 5.10^{-11}$ m.

5. Považujte atómové jadro za rovnomerne nabitú guľu a nájdite maximálnu hodnotu intenzity elektrického poľa! Polomer jadra $R = 1{,}5.10^{-15}A^{1/3}$ m, náboj $Q = Ze$ (A – atómová hmotnosť, Z – atómové číslo, e – elementárny náboj).

6. Daná je vektorová funkcia so zložkami v pravouhlých súradniciach $E_x = Ky$, $E_y = Kx$, $E_z = 0$, K = konšt.

a) Vypočítajte divergenciu a rotáciu tejto funkcie a rozhodnite, či môže predstavovať elektrostatické pole.

b) Vypočítajte dráhový integrál $\int \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ medzi bodmi (0; 0) a (1; 1) po niekoľkých jednoduchých dráhach! Závisí hodnota integrálu od voľby dráhy?

c) Nájdite potenciálovú funkciu k danému vektorovému poľu.

7. Priestor medzi dvoma koncentrickými guľovými plochami s polomermi R_1 a R_2 ($R_1 > R_2$) je nabitý priestorovým nábojom

$$\rho(r) = \frac{Q}{4\pi(R_1 - R_2)r^2}$$

kde Q je konštanta. Vypočítajte:

a) celkový náboj medzi guľovými plochami,

b) intenzitu elektrického poľa ako funkciu vzdialenosti r od stredu symetrie,

c) potenciál ako funkciu r.

8. Isté guľovo symetrické rozloženie náboja vytvára potenciál

$$V(r) = \frac{q\,\mathrm{e}^{-ar}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

kde q a a sú konštanty. Nájdite rozloženie náboja, ktorému zodpovedá tento potenciál – dôležitý vo fyzike elementárnych častíc a v jadrovej fyzike nazývaný Yukawov potenciál! Hľadané priestorové rozloženie náboja zodpovedá rozloženiu náboja v atóme.

9. Podľa kvantovej mechaniky atóm vodíka v základnom stave má záporný náboj rozložený guľovo symetricky okolo kladného jadra s hustotou

$$\rho(r) = -\frac{e\,\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_0}}}{\pi a_0^3}$$

kde e je elementárny náboj, $a_0 = 5{,}29.10^{-11}$ m je Bohrov polomer a e je základ prirodzených logaritmov. (V skutočnosti $\rho(r)$ predstavuje hustotu pravdepodobnosti výskytu elektrónu vo vzdialenosti r od jadra).

a) Dokážte, že celkový záporný náboj v celom priestore je $-e$.

b) Vypočítajte intenzitu elektrického poľa budenú atómom ako funkciu vzdialenosti r od stredu symetrie za predpokladu, že protón predstavuje bodový náboj v strede symetrie.

c) Vypočítajte potenciál ako funkciu r.

d) Znázornite priebehy intenzity a potenciálu graficky.

10. Molekulu vody možno považovať za elektrický dipól s momentom $p = 6{,}14.10^{-30}$ C.m:

a) Za predpokladu, že takýto dipól je tvorený bodovými nábojmi $\pm e$, nájdite jeho dĺžku.

b) Nájdite intenzitu elektrického poľa takého dipólu vo vzdialenosti 3.10^{-9} m na osi dipólu a kolmo na jeho os.

c) Nájdite maximálnu silu, ktorou dipól pôsobí na vodíkový ión vo vzdialenosti 3.10^{-8} m.

d) Nájdite elektrickú silu medzi dvoma molekulami vody, ktorých elektrické dipólové momenty ležia na priamke spájajúcej stredy molekúl. Vzdialenosť dipólov je 5.10^{-10} m.

11. Tri náboje $-q$ sú umiestnené vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka s dĺžkami strán a a náboj Q je v jeho ťažisku.

a) Odvoďte výraz pre silu, ktorá pôsobí na jeden z nábojov $-q$. Určte smer tejto sily.

b) Odvoďte výraz pre interakčnú energiu tejto sústavy nábojov.

c) Aký musí byť vzťah medzi hodnotami q a Q, aby sila pôsobiaca na náboj $-q$ bola nulová? Je tento systém elektrických nábojov stabilný?

12. Náboj $q = -5.10^{-9}$ C je rovnomerne rozložený na kružnici s polomerom $R = 10$ cm. Vypočítajte vzdialenosť na osi kružnice, v ktorej je intenzita elektrického poľa maximálna. Aká je intenzita v tejto vzdialenosti?

13. Dva bodové náboje Q a $-Q$ sú umiestnené vo vzájomnej vzdialenosti $2a$. Vypočítajte tok intenzity elektrického poľa kruhovou plochou polomeru R, ktorej stred leží na polovičnej vzdialenosti nábojov a plocha je kolmá na spojnicu nábojov.

14. Vypočítajte potenciál v strede štvorcovej dosky so stranou a, nabitej plošným nábojom $\sigma =$ konšt.

15. Potenciál vo sférických súradniciach je daný výrazom

$$V(\rho,\ \varphi,\ \vartheta) = \frac{a\cos\vartheta}{r^2} + \frac{b}{r}$$

nezávisí od súradnice φ, a a b sú konštanty. Nájdite zložky intenzity elektrického poľa.

16. Nekonečná rovinná vrstva hrúbky a je nabitá objemovým nábojom $\rho =$ konšt. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a potenciál v ľubovoľnom bode priestoru. Znázornite priebehy potenciálu a intenzity graficky.

17. Na nekonečnej rovinnej ploche nabitej plošným nábojom $\sigma =$ konšt. je nekonečná vrstva hrúbky a nabitá objemovým nábojom $\rho =$ konšt. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a potenciál v ľubovoľnom bode. Znázornite priebehy potenciálu a intenzity graficky.

18. Plošná hustota náboja na tenkom kruhovom disku s polomerom R je daná funkciou $\sigma = Ar$, kde A je konštanta a r je vzdialenosť od stredu disku. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a potenciál na osi disku.

19. Nájdite potenciál na okraji tenkého dielektrického disku nabitého plošným nábojom $\sigma =$ konšt. Polomer disku je R.

20. Dané je sféricky symetrické rozloženie objemového náboja s hustotou

$$\rho = Ar \qquad \text{pre} \qquad 0 \le r \le R$$

$$\rho = 0 \qquad \text{pre} \qquad r > R$$

Nájdite potenciál a intenzitu elektrického poľa ako funkciu vzdialenosti od stredu symetrie.

21. Daná je potenciálová funkcia

$$V = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0} e^{-\alpha r}$$

kde A a α sú konštanty, r je vzdialenosť od stredu symetrie. Nájdite objemové rozloženie náboja, ktoré budí takýto potenciál.

22. Potenciál elektrického poľa vo vnútri nabitej gule je daný výrazom $V = ar^2 + b$, kde r je vzdialenosť od stredu gule, a, b sú konštanty. Nájdite objemovú hustotu náboja v guli.

23. Potenciál nejakého elektrického poľa je daný výrazom

$$V = \alpha(xy - z^2)$$

Nájdite priemet vektora intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ do smeru vektora $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$ v bode $M(2; 1; -3)$.

24. Dva náboje $-q_1$ a $+q_2$ ($|q_1| < |q_2|$) sú rovnomerne rozložené na koncentrických guľových plochách s polomermi r_1 a r_2 ($r_1 < r_2$). Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a potenciál ako funkcie vzdialenosti od stredu symetrie. Aký bude potenciál vo veľkej vzdialenosti $r \gg r_1, r_2$, ak sa guľa s polomerom r_2 posunie o malú vzdialenosť δx v smere osi x?

25. Dva nekonečne dlhé priamkové náboje sú uložené paralelne vo vzájomnej vzdialenosti d. Hustoty nábojov na priamkach sú $\pm\lambda$. Nájdite potenciál v kolmej vzdialenosti r od osi priamkových nábojov pre $r \gg d$. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa vo vzdialenosti r. Uvedené rozloženie nábojov sa nazýva priamkový dipól.

26. V cylindrických súradniciach je daná priestorová hustota náboja

$$\rho = 0 \qquad \text{pre} \qquad r < a$$

$$\rho(r) = k/r \qquad \text{pre} \qquad r > a$$

kde k a a sú konštanty. Hustota náboja nezávisí od súradníc φ a z. Riešením Poissonovej rovnice určite potenciál ako funkciu r.

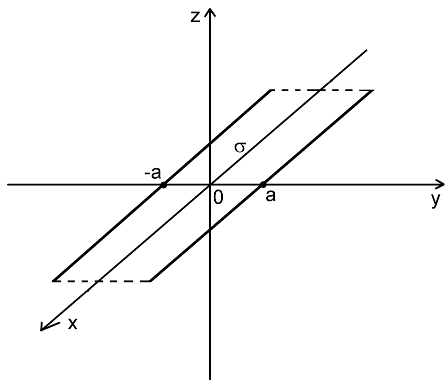
27. Nekonečne dlhý pásik šírky $2a$ je nabitý plošným nábojom tak, že veľkosť náboja závisí iba od súradnice paralelnej so šírkou pásika (*obr. 27*), teda $\sigma = \sigma(y)$. Nájdite výrazy pre zložky vektora intenzity elektrického poľa v ľubovoľnom bode. Uvažujte dva prípady:

a) $\sigma = \sigma_0 =$ konšt.,

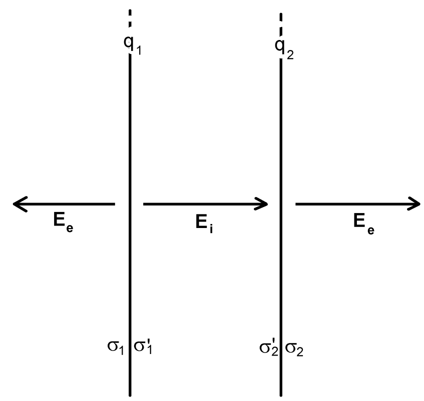
b) $\sigma = \sigma_0 \sin(2\pi/\lambda)y$, kde σ_0 a λ sú konštanty a $a \longrightarrow \infty$.

28. Dve nekonečné kovové roviny sú umiestnené planparalelne. Na rovinách sú náboje q_1 a q_2 na jednotku plochy (*obr. 28*). Nájdite plošné hustoty nábojov a intenzity elektrického poľa.

29. V rovine xy ($z = 0$) je daný potenciál ako periodická obdĺžniková funkcia podľa *obr. 29*. Riešením Laplaceovej rovnice nájdite potenciál ako funkciu súradníc. Hľadaný potenciál nezávisí od z a pre $y \longrightarrow \infty$ klesá k nule.

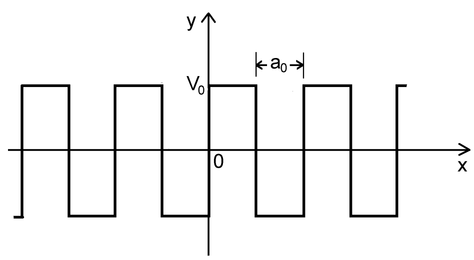


Obr. 27

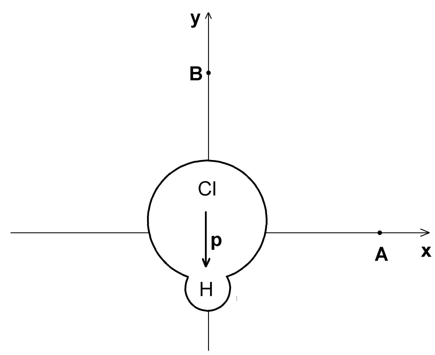


Obr. 28

30. Molekula kyseliny soľnej je umiestnená v začiatku súradníc tak, že os H–Cl je totožná s osou y (*obr. 30*). Aký je smer a veľkosť intenzity elektrického poľa v bode A na osi x vo vzdialenosti 10^{-9} m a v bode B na osi y v tej istej vzdialenosti od začiatku súradníc? Dipólový moment molekuly HCl je $3{,}44.10^{-30}$ C.m a smeruje od Cl k H.

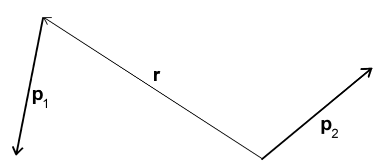


Obr. 29

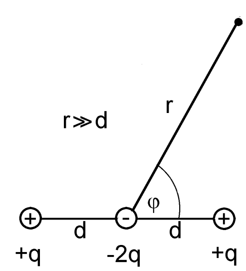


Obr. 30

31. Elektrický dipól s momentom $\boldsymbol{p}_1$ sa nachádza vo vzdialenosti $\boldsymbol{r}$ od dipólu s momentom $\boldsymbol{p}_2$ (*obr. 31*). Vypočítajte vzájomnú (interakčnú) energiu obidvoch dipólov.



Obr. 31



Obr. 33

32. Molekula s dipólovým momentom $\boldsymbol{p}$ je vo vzdialenosti $\boldsymbol{r}$ od nekonečne dlhej priamky nabitej dĺžkovým nábojom λ. Vypočítajte silu a moment sily pôsobiace na dipól, ak:

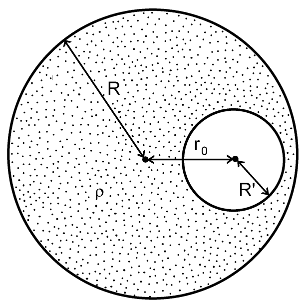
a) vektor $\boldsymbol{p}$ je kolmý na priamku,

b) vektor $\boldsymbol{p}$ je s priamkou paralelný.

33. Daná je konfigurácia nábojov na *obr. 33*, nazvaná lineárny kvadrupól. Nájdite potenciál vo vzdialenosti r od centrálneho náboja v ľubovoľnom smere. Platí: $r \gg d$.

34. Dvojvrstva v tvare kruhu s polomerom R má dipólový moment $\boldsymbol{p}'$ = konšt. vektor v smere rotačnej osi kruhu. Vypočítajte potenciál a intenzitu elektrického poľa na osi kruhu.

35. Polpriamka je nabitá nábojom λ na jednotku dĺžky. Nájdite veľkosť a smer intenzity elektrického poľa v kolmej vzdialenosti d od konca priamky.



Obr. 36

36. V guľovom objeme s polomerom R je rovnomerne rozložený náboj s hustotou ρ, až na guľovú dutinu s polomerom R', v ktorej je $\rho = 0$. Stred dutiny je vo vzdialenosti r od stredu gule (*obr. 36*).

a) Použitím zákona superpozície vypočítajte intenzitu elektrického poľa v dutine. Všimnite si, že pole v dutine je homogénne.

b) Ako treba zvoliť pomer polomerov R'/R, aby pri danom R bol súčin intenzity elektrického poľa v dutine a objemu dutiny maximálny?

37. Dva bodové náboje Q_1 a $-Q_2$ sú umiestnené vo vzájomnej vzdialenosti $2d$. Nájdite plochu nulového potenciálu.

3 ELEKTROSTATICKÉ POLE ZA PRÍTOMNOSTI VODIČOV

3.1 NABITÝ VODIČ A JEHO ELEKTROSTATICKÉ POLE

Naše doterajšie úvahy, napriek ich závažným teoretickým dôsledkom, nezodpovedajú reálnym nábojovým rozloženiam. Ak napríklad hovoríme o náboji rozloženom homogénne v objeme gule, obyčajne máme na mysli nejakú guľu z dielektrického materiálu, ktorú sme priestorovo nabili, t. j. dopravili sme na ňu dodatočné náboje k tým, ktoré predstavujú protóny a elektróny atómov, z ktorých sa guľa skladá, a ktorých je rovnaký počet každého druhu. Bez tohto dielektrického "nosiča" si žiadne ďalšie zoskupenie protónov alebo elektrónov nevieme predstaviť. Musíme teda rozlišovať protóny a elektróny nenabitej látky, ktorých makroskopické pôsobenie sa kompenzuje, pretože je ich rovnaký počet, a náboje, ktoré sme na teleso priviedli, aby sme ho elektricky nabili. V prípade tuhých látok môžeme na teleso preniesť elektróny, a tým ho nabiť záporne, alebo nejaké množstvo elektrónov z nenabitého telesa odviesť, čím ich množstvo z hľadiska rovnováhy bude nedostatočné a teleso bude nabité kladne. Prenos protónov v tuhých látkach je oveľa zložitejší, a preto, ak budeme hovoriť o nabitom tuhom telese, budeme mať obyčajne na mysli prebytok alebo nedostatok elektrónov oproti jeho neutrálnemu stavu. Takýto elektrický stav môžeme dosiahnuť napríklad trením telesa. Pri kvapalinách a plynoch je situácia podstatne zložitejšia, a preto ich ako modelové látky v našich analýzach zatiaľ neuvažujeme.

Interakcia prebytočných nábojov s látkou má celý rad svojich zvláštností, s ktorými sa teraz chceme zaoberať. Najprv sa budeme venovať elektrickým javom, ktoré vznikajú, ak sa náboje nachádzajú na vodičoch alebo v ich okolí. Prísne vzaté, v elektrostatike sa ako vodiče javia všetky látky a líšia sa iba charakteristickou – relaxačnou – dobou, ktorá je mierou času, za ktorý sa v systéme "látka – privedené náboje" ustáli rovnovážny stav. Pre kovy, ako vynikajúce vodiče, je táto doba neobyčajne krátka, pre izolanty (dielektriká) môže byť veľmi dlhá, avšak nie nekonečná. Kovy sú mimoriadne vhodnými modelovými látkami pre naše ďalšie úvahy, pretože obsahujú v svojej kryštalickej mriežke voľné elektróny, ktoré sa pod účinkom vonkajších polí a nábojov môžu v objeme kovového telesa pohybovať.

Po privedení náboja na vodivé teleso sa vytvorí na ňom a v jeho okolí istý elektrický stav, ktorý možno opísať radom zákonitostí, a to:

1. Integrálny náboj privedený na vodivé teleso sa rozloží plošne na jeho povrchu. V jeho vnútri sa stredná štatistická objemová hustota nábojov rovná nule. Táto skutočnosť je vcelku prirodzená, ak si uvedomíme, že privedené náboje rovnakého znamienka sa v objeme telesa budú odpudzovať a vo vodivom prostredí sa môžu pohybovať až na povrchovú plochu telesa. Na únik z tejto povrchovej vrstvy by potrebovali dodatočnú energiu rovnú výstupnej práci, napr. elektrónov, z kovu. Táto problematika však ide za rámec našich úvah, a na tomto mieste iba konštatujeme, že vo vodivom nabitom telese je objemová hustota nábojov $\rho_{int} = 0$ a na jeho povrchu plošná hustota $\sigma \neq 0$.

2. Intenzita elektrostatického poľa vo vnútri nabitého vodivého telesa sa rovná nule. Táto skutočnosť plynie priamo z Gaussovho zákona. Z ľubovoľného objemu vo vnútri telesa sa tok intenzity elektrického poľa rovná nule, pretože v každom z takýchto objemov τ uzavretých plochou S sa celkový integrálny náboj rovná nule

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

z čoho plynie, že vo vnútri telesa stredná štatistická hodnota intenzity poľa sa všade rovná nule ($\boldsymbol{E} = 0$). Na druhej strane, podľa Gaussovho zákona v diferenciálnom tvare, vo vnútri vodivého telesa

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$$

pretože $\rho_{int} = 0$. Z posledného výrazu plynie, že intenzita poľa vo vnútri telesa sa alebo rovná nule, alebo je daná rotáciou nejakého ďalšieho vektora $\boldsymbol{T}$, teda $\boldsymbol{E} = \operatorname{rot} \boldsymbol{T}$. Platí totiž, že divergencia rotácie akéhokoľvek vektora sa rovná nule. To však nie je možné, pretože elektrostatické pole je poľom gradientovým (žriedlovým), z čoho plynie, že $\boldsymbol{E} = 0$ všade vo vnútri objemu telesa.

Na dôkaz uvedeného tvrdenia netreba robiť žiadne zložité teoretické úvahy, ak si uvedomíme, že v prípade nenulového poľa by sa vo vnútri vodiča museli pod jeho účinkom premiestňovať prítomné voľné náboje, teda by musel vodičom stále tiecť elektrický prúd. K tomu by však boli potrebné vonkajšie elektromotorické zdroje, čím by sa statický problém zmenil na dynamický.

3. Vektor intenzity elektrostatického poľa na povrchu vodivého nabitého telesa má v každom bode povrchu smer normály. Ak by to nebola pravda, potom tangenciálna zložka intenzity poľa E_t by na povrchu vyvolávala tangenciálnu silu, ktorá by nútila náboje k pohybu po povrchu, teda po povrchu by tiekol elektrický prúd. Takýto prúd tam tečie iba počas začiatočného preusporiadavania nábojov.

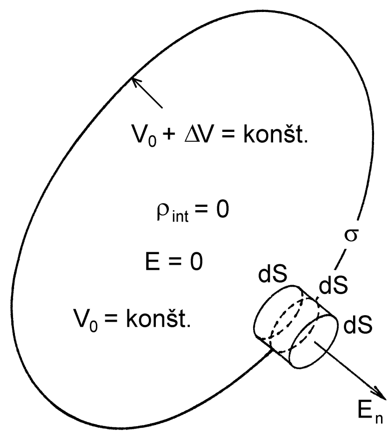
4. Povrch vodivého telesa je ekvipotenciálnou plochou. Tento fakt vyplýva zo skutočnosti, že siločiary sú kolmé na ekvipotenciálne plochy, a teda aj na povrch vodiča v každom jeho bode.

5. V každom bode objemu telesa je potenciál V_0 rovnaký. Konštantný potenciál vo vnútri telesa je spôsobený nulovou intenzitou poľa. Hovoríme, že vodivé teleso je ekvipotenciálnym telesom. Rozdiel potenciálov (napätie) medzi jeho dvoma ľubovoľnými bodmi sa rovná nule. Avšak medzi povrchom a vnútrajškom telesa je malý potenciálový skok ΔV (pozri *obr. 3.1*), ktorý zabráni elektrónom uniknúť z povrchu kovu, a ktorý je v každom bode povrchu rovnaký za predpokladu, že vodič je homogénny. Túto skutočnosť vysvetľuje teória tuhých látok.

6. Normálová intenzita elektrostatického poľa E_n na povrchu vodivého telesa (pri $E_t = 0$) je daná výrazom

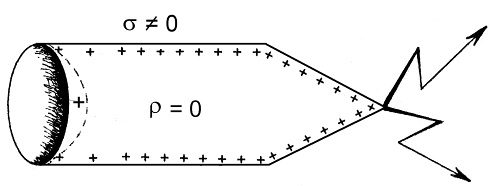
$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{3.1}$$

kde σ je plošná hustota náboja v danom bode povrchu. Vzťah sa nazýva **Coulombova veta** a možno ho jednoducho dokázať s využitím Gaussovho zákona. V okolí vybraného bodu na povrchu telesa, v ktorom je plošný náboj σ, zvolíme nekonečne nízky valček s plochou základne dS ako na *obr. 3.1*. Tok intenzity poľa plochou valčeka je EdS, pretože intenzita vo vnútri telesa sa rovná nule. Náboj uzavretý vo valčeku je dQ = σdS. Podľa Gaussovho zákona EdS = σdS/ε_0, z čoho okamžite plynie vzťah (3.1). Vzťah vyjadruje priamu úmernosť medzi hustotou náboja vo zvolenom bode a intenzitou poľa. Veľké intenzity poľa sú v povrchových miestach vodiča, v ktorých je veľká hustota náboja, a naopak.



Obr. 3.1

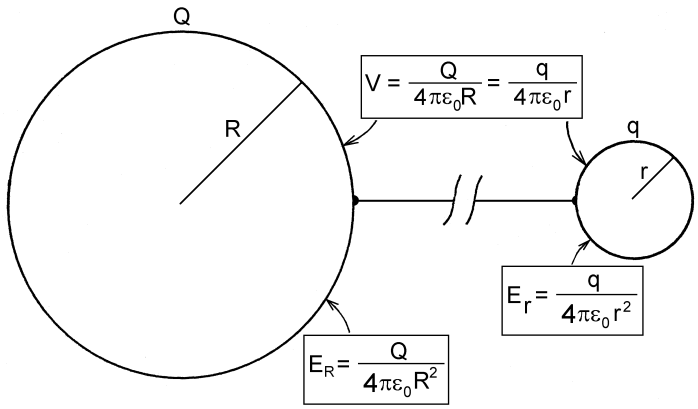
7. Intenzita elektrostatického poľa v danom bode povrchu nabitého vodivého telesa je nepriamo úmerná polomeru krivosti povrchovej plochy. Ak má teleso ostré výčnelky a preliačiny, potom na výčnelkoch (miesto s malým polomerom krivosti) môže intenzita poľa nadobúdať veľmi vysokých hodnôt, takých že dôjde k ionizácii okolitého vzduchu, čo sa prejaví iskrením (pozri *obr. 3.2*). V preliačinách je naopak intenzita poľa nižšia ako napr. na rovných plochách. O tejto vlastnosti zelektrizovaných telies sa môžeme presvedčiť nasledujúcou úvahou.



Obr. 3.2

Nech je vodivé teleso vytvorené dvoma vodivými guľami s polomermi R a r ($R > r$) spojenými tenkým dlhým vodivým drôtom ako na *obr. 3.3*. Ak na takéto teleso privedieme nejaký náboj, rozloží sa na telese prakticky iba na guliach, kde budú náboje Q a q (predpokladáme, že spojovací drôtik má nepatrnú kapacitu). Obidve gule budú na rovnakom potenciáli V, pretože ide o jediné vodivé teleso. Bude teda platiť

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



Obr. 3.3

z čoho plynie, že pomer nábojov na guliach sa rovná pomeru ich polomerov, teda $Q/q = R/r$. Ak sa gule nachádzajú v dostatočne veľkej vzdialenosti od seba, budú intenzity elektrického poľa na každej guli rôzne, s hodnotami

$$E_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Pre pomer intenzít platí

$$\frac{E_R}{E_r} = \frac{Q}{q}\frac{r^2}{R^2} = \frac{r}{R}$$

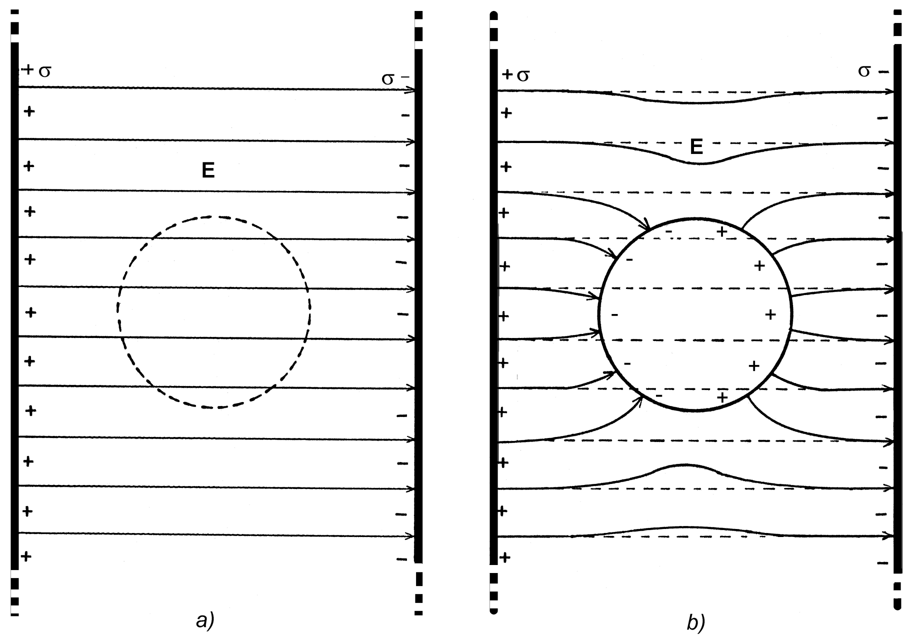
z čoho plynie naše tvrdenie. V ľubovoľnom bode povrchu vodivého nabitého telesa normálová intenzita poľa E_n je nepriamo úmerná polomeru krivosti povrchu r, teda

$$E_n \sim \frac{1}{r} \qquad (3.2)$$

Skutočnosť, že intenzita elektrického poľa je nepriamo úmerná polomeru krivosti povrchovej plochy vodiča, musia mať na pamäti predovšetkým konštruktéri vysokonapäťových elektrických zariadení (elektrostatických generátorov, urýchľovačov, vysokonapäťových rozvodní a pod.). Ak sa treba vyvarovať nebezpečiu elektrického prierazu a sršania na aktívnych častiach zariadení, nesmú mať tieto časti žiadne ostré výčnelky, ale musia byť zaoblené. Naopak, ak treba vytvoriť iskrište, opatrí sa taká aktívna časť vodivým hrotom nasmerovaným proti uzemnenej kovovej platni.

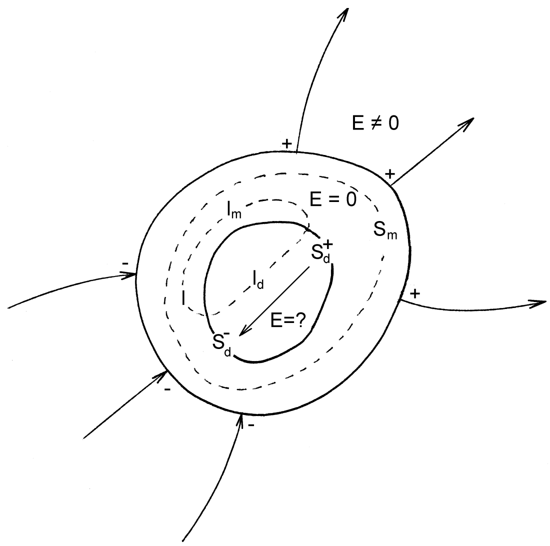
3.2 NENABITÝ VODIČ V ELEKTROSTATICKOM POLI

Ak sa na nenabitý vodič naloží elektrostatické pole, vznikajú zaujímavé efekty, ktoré podliehajú zákonitostiam uvedeným v prechádzajúcom odseku. Bezprostredne po naložení poľa dôjde vo vnútri vodivého telesa k posúvaniu nábojov, obyčajne elektrónov, pod účinkom naloženého poľa takým spôsobom a dovtedy, kým sa pole vo vnútri objemu telesa nestane nulovým. Na povrchu vodiča, ktorý bol pôvodne neutrálny, sa vytvoria kladné a záporné plošné náboje, ktorých integrálny súčet sa rovná nule. Tento jav je známy pod názvom **elektrostatická indukcia**. Vzniklé plošné náboje a ich vonkajšie polia spĺňajú Coulombovu vetu a splnené sú aj všetky ostatné zákonitosti 1 až 7 odseku 3.1. Pri elektrostatickej indukcii vznikajú na vodivom nenabitom telese náboje tým, že sa na ňom pod účinkom vonkajšieho poľa oddelia kladné a záporné náboje, ich súčet však zostane rovný nule.



Obr. 3.4

Ako príklad je na *obr. 3.4b* znázornená vodivá nenabitá guľa vložená do pôvodne homogénneho elektrického poľa, na *obr. 3.4a* vytvoreného veľkými planparalelnými rovinnými plochami s pevnými konštantnými plošnými hustotami nábojov opačného znamienka $\pm\sigma$. Po vložení gule do poľa došlo v nej k elektrostatickej indukcii, pričom na ľavej polovici gule sa naindukoval záporný náboj, na pravej polovici kladný, rovnako veľký náboj. Pôvodne homogénne pole sa zdeformovalo tak, že jeho siločiary vstupujú a vystupujú kolmo na guľovú plochu. Normálová intenzita poľa na guli v každom bode spĺňa Coulombovu vetu. Makroskopický náboj a intenzita poľa vo vnútri gule sa rovnajú nule. Dá sa ukázať (pozri úlohu 75), že výsledné elektrické pole je dané superpozíciou homogénneho elektrického poľa a poľa elektrického dipólu, ktorý modeluje polarizovanú guľu.



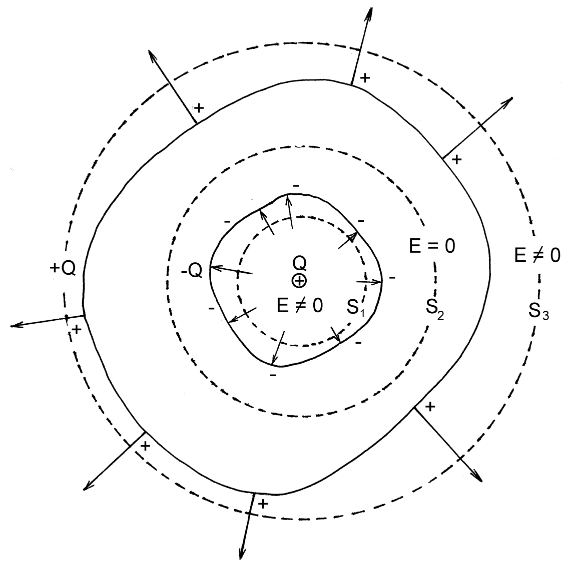
Obr. 3.5

Zaujímavé závery s praktickým dosahom možno urobiť o vodivých telesách s dutinou. Ak sa také teleso nabije, v jeho vonkajšom okolí bude nenulová intenzita elektrostatického poľa. Ak sa nenabité vloží do vonkajšieho poľa, na povrchu telesa sa naindukuje náboj a vonkajšie pole sa zdeformuje z dôvodov, ktoré sme už uviedli. Aká je ale situácia v dutine? Je alebo nie je v nej elektrické pole? Uvažujme teleso podľa *obr. 3.5.* Vložené do poľa alebo nabité má vo vnútri materiálu nulovú intenzitu, a teda integrál z intenzity poľa po ľubovoľnej uzavretej ploche S_m prechádzajúcej materiálom sa rovná nule, z čoho plynie, že makroskopický náboj uzavretý plochou je nulový. To však nevylučuje, že napr. v dvoch plošných oblastiach S_d^+ a S_d^- dutiny sa nachádzajú opačné plošné náboje, ktorých integrálna suma sa rovná nule, ako na *obr. 3.5*, a také náboje by potom produkovali pole v dutine. Takéto pole je však zakázané druhým základným zákonom elektrostatiky, zákonom o dráhovom integrále poľa. Ak zvolíme uzavretú dráhu l pozostávajúcu z časti l_m, ktorá prechádza materiálom a z časti l_d prechádzajúcej dutinou, integrál poľa po tejto dráhe sa musí rovnať nule, t. j.

$$\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{l_m} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{l_d} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

Na dráhe l_m vo vnútri materiálu sa integrál rovná nule, pretože tam sa intenzita rovná nule. Na zvyšku l_d uzavretej dráhy l v dutine sa hodnota integrálu rovná nule bez ohľadu na to, aký má dráha l_d v dutine tvar. Z toho plynie, že v dutine je vždy nulové pole – dutina je od vonkajšieho priestoru elektricky odtienená, dokonca aj v prípade, ak pole vo vonkajšom priestore nie je statické, ale časovo premenné.

Možnosti elektrického tienenia majú veľký praktický význam v elektrickej meracej technike a v káblovej telekomunikácii, ale aj pre účely elektrickej bezpečnosti. Citlivé elektrické snímače a časti elektronických meracích prístrojov sa pre ich normálnu činnosť musia chrániť pred rušivými elektrickými signálmi a poliami tak, že sa uzatvárajú do kovových obalov, či skriniek. Uzavreté plechové klietky dobre chránia pred úrazom vysokým elektrickým napätím (známa **Faradayova klietka**). Klietka pritom nemusí byť vyrobená z celokovového materiálu, ale môže byť napríklad z vodivej kovovej sieťoviny s nepríliš veľkými okami. Kovová karoséria automobila tiež nie je úplne uzavretá, a napriek tomu relatívne dobre chráni cestujúcich pred elektrickým bleskom.



Obr. 3.6

A nakoniec môžeme uviesť ešte jeden teoretický argument o tom, že elektrické pole v kovovej dutine je vždy nulové. Pole v dutine musí byť dané riešením Laplaceovej rovnice (pozri odsek 2.12.3)

$$\Delta V = 0$$

Riešenie tejto rovnice je jednoznačné, ak jeho hodnota je daná v nejakej uzavretej oblasti, napr. na stene dutiny. Potenciál na stene je konštantný s hodnotou V_0. Vhodným riešením vo vnútri dutiny je teda potenciál $V = V_0 =$ konšt. všade (konštanta je riešením Laplaceovej rovnice), a je to súčasne jediný možný potenciál. Z toho plynie, že pole vo vnútri dutiny je nulové, t. j. $\boldsymbol{E} = 0$, pretože $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V$.

A teraz si položme opačnú otázku. Funguje tienenie obojsmerne, t. j. vytvárajú náboje, uložené v dutine, pole z vonkajšej strany vodivého telesa, alebo nie? Napodiv tienenie nefunguje obojstranne. Ak sa v dutine nachádzajú náboje, potom v okolí nenabitého telesa existuje elektrostatické pole. Tento fakt si nevšimol ani profesor Richard P. Feynman,[1] keď vo svojej učebnici (R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: Feyn-

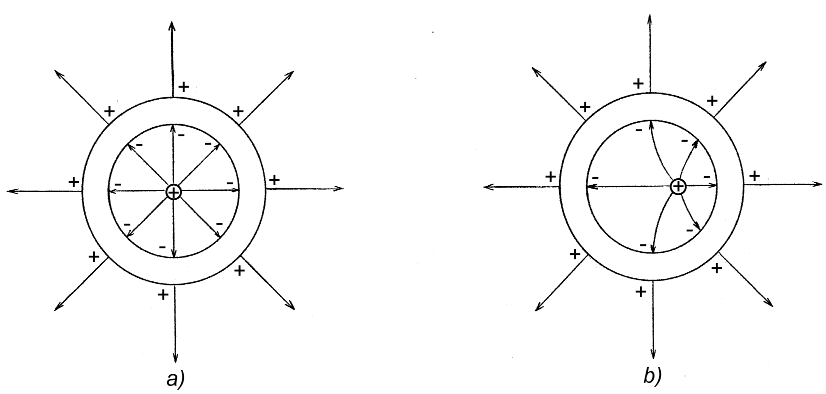
[1] Richard P. Feynman (1918 – 1988) – americký teoretický fyzik – dostal spolu s J. Schwingerom a s S. I. Tomonagom v roku 1965 Nobelovu cenu za rozvoj kvantovej elektrodynamiky

manove prednášky z fyziky 3, Alfa Bratislava 1988, str. 116) tvrdí, že "tienenie funguje v oboch smeroch". Hovorí sa, že aj majster tesár sa občas sekne!

Dôkaz toho, že v okolí neutrálneho telesa s dutinou, v ktorej sa nachádzajú náboje je elektrické pole, je veľmi jednoduchý. Na *obr. 3.6* je nenabité teleso s dutinou, v ktorej sa nachádza celkový náboj $+Q$, bez ohľadu na jeho vnútorné rozloženie. Je zrejmé, že v dutine bude elektrické pole, ktorého siločiary budú končiť kolmo na stenách dutiny a podľa Coulombovej vety končia na nábojoch. Teda na stene dutiny musí byť plošný náboj, ktorý je integrálne rovnako veľký ako $+Q$, ale opačného znamienka, teda $-Q$. Kde sa ale tento náboj na neutrálnom telese zobral? No predsa v samotnom telese, ktoré je vodivé, a v ktorom takéto náboje k dispozícii sú. Na povrch dutiny sa dostanú elektrostatickou indukciou, ale súčasne rovnako veľký náboj opačného znamienka (teda rovnaký ako náboj $+Q$ v dutine) sa kvôli kompenzácii usadí na povrchu telesa. Práve tento náboj vytvorí vonkajšie elektrické pole.

Dôkaz vyplýva bezprostredne aj z Gaussovho zákona aplikovaného v integrálnom tvare. Ak okolo náboja $+Q$ vytvoríme Gaussovu plochu (plocha S_1 na *obr. 3.6*), je zrejmé, že tok intenzity ňou je nenulový, teda v dutine je nenulové pole. Ak Gaussova plocha leží v materiále telesa (plocha S_2), tok intenzity je nulový, pretože intenzita v materiále je nulová. Uzavretý náboj je nulový, teda náboj $+Q$ v dutine musí byť kompenzovaný rovnako veľkým nábojom opačného znamienka indukovaným v stene dutiny. A nakoniec, ak Gaussova plocha obopína celé teleso (plocha S_3), celkový uzavretý náboj je $+Q$ (náboj $+Q$ v dutine plus neutrálne teleso), teda vonkajší tok intenzity je nenulový a v okolí telesa je nenulové pole.

Vnútorné a vonkajšie pole vodivého telesa majú jednu zaujímavú vlastnosť – ak raz vzniknú, potom sú navzájom nezávislé. Ak sa bude meniť pole v dutine premiestňovaním náboja v rámci dutiny (ale pritom jeho celková veľkosť zostane konštantná), pole v okolí telesa zostane rovnaké. Na *obr. 3.7a,b* je zobrazená guľová vodivá vrstva a v dutine je uložený bodový náboj. Vonkajšie pole je radiálne pole bodového náboja bez ohľadu na to, kde sa náboj v dutine nachádza. Vnútorné pole sa pritom môže drasticky meniť, ako to vidíme porovnaním *obr. 3.7a* a *3.7b*.



Obr. 3.7

V súvislosti s elektrickými vodičmi sa často vyskytuje technicky dôležitý pojem **elektrického uzemnenia**. Pod uzemnením rozumieme vodivé spojenie nejakého vodivého (kovového) telesa so Zemou. Masa Zeme aj keď nie je homogénna, môže sa považovať za relatívne dobrý vodič, ktorý má obrovskú rozľahlosť s veľkou povrchovou plochou a veľkú hmotnosť. S veľkými rozmermi Zeme súvisí jej veľká elektrická kapacita, t. j. schopnosť pojať veľký náboj bez toho, aby sa pritom znateľne zmenil jej elektrický potenciál. Ak nejaký vodič uzemníme, tým vyrovnáme jeho potenciál s potenciálom Zeme. Ak sa na uvažovanom telese bude meniť celkový náboj, tento náboj sa rozteká po celej Zemi a prakticky neovplyvní potenciál Zeme ani intenzitu elektrického poľa na nej. Ak Feynman tvrdí, že "tienenie funguje obojsmerne", potom zrejme mal na mysli uzemnené teleso, na ktorom naindukovaný náboj skutočne vytvorí iba zanedbateľnú dodatočnú intenzitu, pretože sa takmer úplne roztečie uzemnením do Zeme.

V praxi má uzemnenie dvojakú funkciu: Ochrannú – so Zemou sa vodivo spájajú všetky vodivé časti (kryty) elektrických zariadení, ktoré by sa mohli ocitnúť pod napätím ohrozujúcim používateľa. V káblovej telekomunikácii plní uzemnenie pracovnú úlohu tým, že umožňuje využiť Zem ako spätný vodič prenosového dvojvodičového vedenia. Táto možnosť sa dnes kvôli možnému rušeniu prakticky nevyužíva.

3.3 EXPERIMENTÁLNY DÔKAZ PLATNOSTI ZÁKONA PREVRÁTENÝCH KVADRÁTOV V ELEKTROSTATIKE

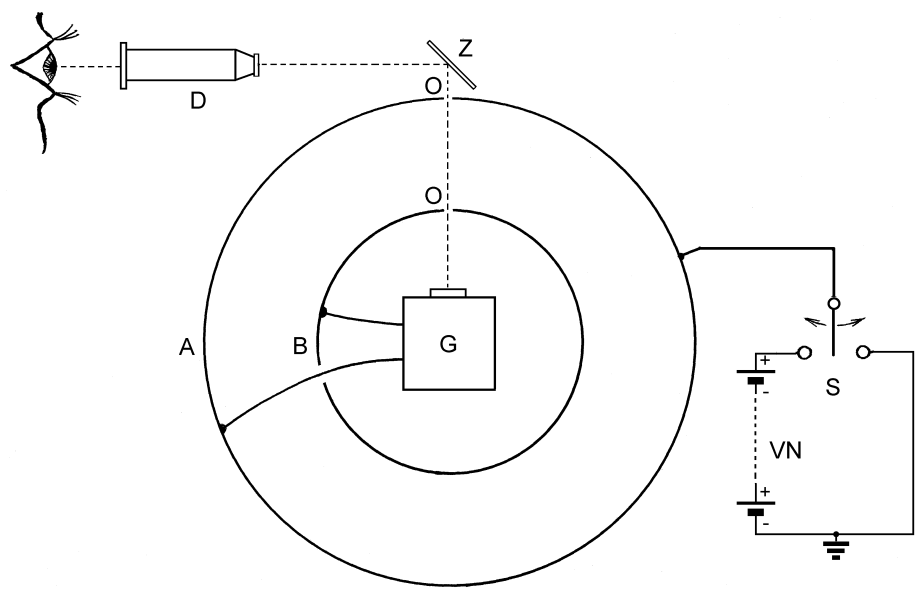
Elektrostatické javy, vznikajúce na vodičoch s dutinami, poskytujú presvedčivé možnosti experimentálneho dôkazu platnosti Coulombovho zákona, menovite skutočnosti, že elektrická sila je nepriamo úmerná druhej mocnine vzdialenosti nábojov. O priamy dôkaz závislosti $1/r^2$ sa pokúsil meraním sily medzi dvoma nabitými guľôčkami H. Cavendish (1731 – 1810). Zistil, že hodnota exponentu leží s najväčšou pravdepodobnosťou v hraniciach od 1,98 do 2,02. Cavendish však svoje pozorovania nepublikoval, takže o tejto skutočnosti okrem niekoľkých jeho súčasníkov takmer nikto nevedel. Neskôr, v druhej polovici 19. storočia, J. C. Maxwell meraním stanovil v zákone prevrátených kvadrátov exponent 2 s presnosťou $\pm 5.10^{-5}$. Avšak ani táto relatívne vysoká presnosť nedáva právo vyhlásiť zákon prevrátených kvadrátov v elektrostatike za jednoznačne platný.

Ukázalo sa, že oveľa väčšiu presnosť experimentálneho dôkazu uvedeného zákona možno dosiahnuť skúmaním intenzity elektrického poľa v dutine vodiča. Podľa teoretických úvah predchádzajúceho odstavca, založených na predpokladoch o platnosti Gaussovho zákona, sa intenzita elektrického poľa v uzavretej dutine vodivého telesa, bez ohľadu na jej geometrický tvar, rovná nule. Naviac, v odseku 2.5 bolo ukázané, že vo vnútri guľovej plochy, na ktorej je rovnomerne rozložený náboj, sa intenzita poľa rovná nule za predpokladu, že intenzita sa riadi zákonom prevrátených kvadrátov. Platnosť zákona prevrátených kvadrátov bude teda experimentálne dokázaná, ak sa pokusmi potvrdí, že v uzavretej dutine ľubovoľného tvaru (napr. v guľovej), sa intenzita poľa rovná nule. Takýto experimentálny dôkaz podali Plimpton a Lawton[1] v roku 1936 preskúmaním intenzity elektrostatického poľa vo vnútri kovovej gule, pripojenej na zdroj vysokého potenciálu.

Usporiadanie experimentu je zrejmé z *obr. 3.8.* V uzavretej kovovej guli *A* s priemerom asi 150 cm je koncentricky na izolačných oporách umiestnená druhá kovová guľa *B* a v nej citlivý galvanometer *G* (prístroj, na meranie veľmi malých prúdových impulzov). Vstup galvanometra je pripojený medzi vonkajšiu a vnútornú guľu, takže môže regist-

[1] Plimpton, S. J., Lawton, W. E.: Phys. Rev. **50**, 1066 (1936)

rovať náboj, ktorý prešiel medzi guľami. Prípadná výchylka galvanometra sa pozoruje opticky pomocou ďalekohľadu *D* a zrkadlá *Z* cez veľmi malé otvory *O* v guľových stenách. Ku guli *A* sa oproti izolovanej vodivej uzemnenej podložke pomocou prepínača *S* striedavo pripája zdroj vysokého napätia *VN* a skrat na zem. Po pripnutí zdroja sa guľa *A* istým nábojom nabije. Ak by časť tohto náboja prešla na guľu *B*, galvanometer by to musel registrovať ako prúdový impulz. Po prepnutí spínača sa guľa *A* cez skrat vybije, a ak by guľa *B* bola nabitá, musela by sa tiež vybiť, čo by galvanometer registroval ako opačný prúdový impulz. Experimentátori však nič podobného nepozorovali! Galvanometer neukázal výchylku ani pri nabíjaní, ani pri vybíjaní systému. Aby zvýšili citlivosť metódy, Plimpton a Lawton použili netlmený galvanometrický systém s frekvenciou vlastných kmitov asi 2 Hz a systém napájali striedavým napätím rovnakej frekvencie. Očakávali rezonančné zvýraznenie efektu ak by bol veľmi slabý, ale ani táto modifikácia neviedla k merateľným prúdovým impulzom. Na základe tohto experimentu Plimpton a Lawton usúdili, že exponent v Coulombovom zákone sa od hodnoty 2 nemôže líšiť o viac ako $\pm 2.10^{-9}$.



Obr. 3.8

3.4 VÝPOČET ELEKTROSTATICKÝCH POLÍ NÁBOJOV NA VODIČOCH

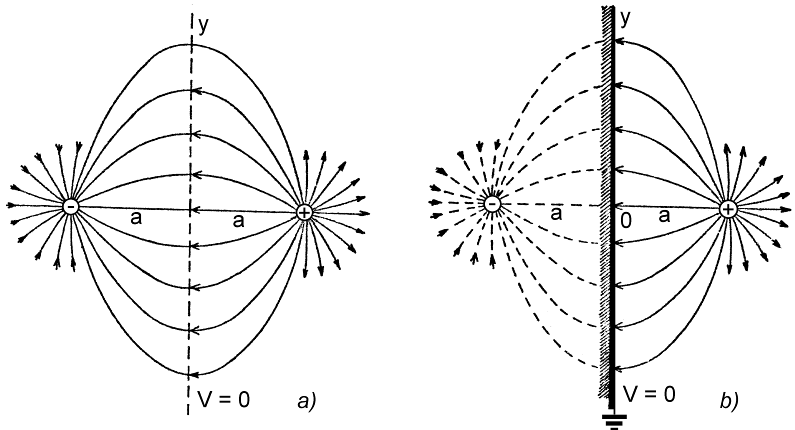
Výpočet elektrostatických polí nábojov rozložených na vodičoch má svoje zvláštnosti a úskalia, ktoré spôsobujú, že úlohy o poliach vodičov sa môžu často veľmi komplikovať. Tieto komplikácie súvisia so špecifickými elektrickými javmi, ktoré odlišujú vodiče od dielektrík. Sú to nasledovné skutočnosti:

Na vodičoch sa náboje môžu pohybovať. To znamená, že ak sa k nabitému izolovanému vodivému telesu priblíži iný nabitý alebo nenabitý vodič, v dôsledku elektrickej indukcie dôjde k premiestneniu nábojov na obidvoch telesách, a tým aj k zmene polí telies oproti poliam, ktoré by produkovali izolovane. Ináč povedané, pri priblížení telies nedochádza k jednoduchej superpozícii pôvodných polí izolovaných telies, ale náboje na telesách sa preskupujú tak, aby systém mal minimálnu elektrostatickú energiu (Thomsonova veta).

Povrch telesa je ekvipotenciálnou plochou, čo naopak môže niekedy situáciu zjednodušiť. Vodivé telesá, nabité alebo nenabité, predstavujú uzavreté plochy konštantného potenciálu. Vo všeobecnosti úlohy, v ktorých sú zadané oblasti konštantného alebo nulového potenciálu, patria do skupiny okrajových úloh, ktorých riešenia vyhovujú Laplaceovej rovnici (2.155). Tieto úlohy sa vo väčšine prípadov nedajú analyticky riešiť. Dnes, v dobe počítačov, ich však možno s ľubovoľnou presnosťou riešiť numericky.

Existuje skupina úloh, pri riešení ktorých sa využíva fakt, že povrch vodivého telesa je ekvipotenciálnou plochou. Metóda riešenia je veľmi poučná a nazýva sa **metódou elektrických zrkadiel**. Spočíva v tom, že k vodivým telesám s danou geometriou, ktorých potenciály sú známe, sa hľadajú také jednoduché rozloženia bodových nábojov, ktorých niektoré ekvipotenciálne plochy sú identické s povrchovými plochami uvedených telies. Na ilustráciu možno uviesť úlohu, z ktorej je zrejmý pôvod názvu metódy:

Pred nekonečnou vodivou uzemnenou rovinou je v kolmej vzdialenosti a umiestnený bodový náboj +q. Aké elektrické pole vytvorí náboj v svojom okolí? Aká sila pôsobí na náboj? Akú prácu treba vykonať pri prenesení náboja +q do nekonečna? Aké je rozloženie plošného indukovaného náboja na rovine? Aký je celkový indukovaný náboj na celej nekonečnej rovine?



Obr. 3.9

Na prvý pohľad sa položené otázky zdajú zložité, až dokiaľ si neuvedomíme nápadnú podobnosť tejto úlohy s úlohou o dvojici bodových nábojov $\pm q$, uložených vo vzájomnej vzdialenosti $d = 2a$, podľa *obr. 3.9a.* Táto úloha bola riešená v odseku 2.2. o elektrickom poli. Pole na osi dvojice a v rovine prechádzajúcej symetricky medzi nábojmi je dané výrazmi (2.17), (2.18) a (2.20). Siločiary poľa sú znázornené na *obr. 3.9a*, plocha nulového potenciálu je nekonečná rovina umiestnená v strede medzi nábojmi. Ak sa do tejto roviny umiestni vodivá rovinná nenabitá plocha, pole dvojice nábojov sa vôbec nezmení, avšak už nebude produktom dvojice bodových nábojov. Vpravo od roviny bude poľom bodového náboja $+q$ a záporného indukovaného náboja na pravom povrchu vodivej roviny. Celkový indukovaný náboj na rovine $Q = -q$, čo vyplýva napríklad zo skutočnosti, že všetky siločiary bodového náboja končia kolmo na rovine, na ktorej naviac platí Coulombova veta. O týchto skutočnostiach sa čitateľ môže presvedčiť jednoduchou integráciou intenzity podľa výrazu (2.20) cez celú nekonečnú rovinu (s voľbou plošných elementov $\mathrm{d}S = 2\pi y \mathrm{d}y$ v tvare medzikruží, v integračných hraniciach y od 0 po ∞), teda $Q = -\varepsilon_0 \int_S E(y)\mathrm{d}S$. Vľavo od roviny je pole bodového náboja $-q$ a celkového indukovaného náboja $+q$ s rovnakými vlastnosťami. Tieto dve polia na každej strane roviny sú navzájom úplne nezávislé. Ak by sa napr. bodový náboj $-q$ odstránil, indukovaný náboj $+q$ na rovine vľavo by zostal, ale by sa na nej rozložil rovnomerne, takže vľavo od roviny by vzniklo homogénne pole. Ak sa rovina nakoniec uzemní, náboj $+q$ bude odvedený do Zeme, náboj $-q$ na rovine zostane, a spolu s $+q$ vytvára pole v pravom polpriestore. Toto pole je ale riešením našej pôvodnej úlohy a celá situácia je znázornená na *obr. 3.9b*.

Na otázky našej úlohy môžeme teda dať tieto odpovede:

Pole náboja a uzemnenej roviny je na strane náboja také isté ako pole reálneho náboja $+q$ a "zrkadlového" náboja $-q$ umiestneného za rovinou (zrkadlom) vo vzdialenosti a. Za rovinou je pole nulové.

Na náboj q pôsobí taká istá príťažlivá sila, ako sila medzi nábojom a jeho obrazom vzdialeným $2a$, teda

$$f = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$$

Na prenesenie náboja $+q$ z nekonečna do vzdialenosti a treba vykonať prácu

$$A = -\int_{\infty}^{a} f\,\mathrm{d}a = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a}$$

Na rovine je rozložený indukovaný náboj s plošnou hustotou

$$\sigma(y) = -\varepsilon_0 E(y) = -\frac{qa}{2\pi\left(y^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

kde $E(y)$ je intenzita poľa na povrchu roviny vo vzdialenosti y od stredu symetrie 0 daná vyjadrením (2.20).

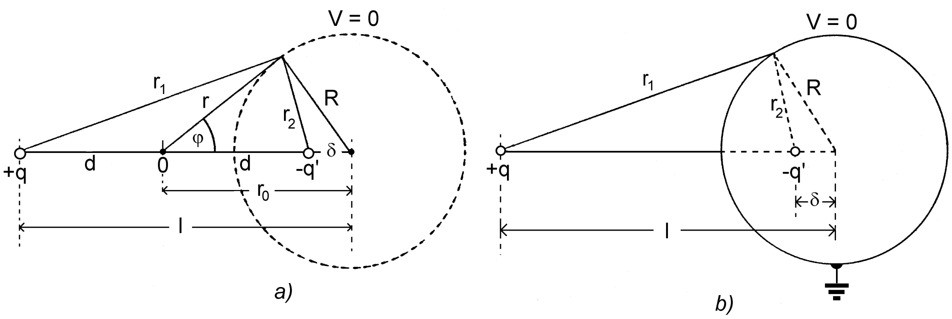
Celkový indukovaný náboj na nekonečnej rovine je $-q$ a možno ho dostať integráciou posledného výrazu po celej rovine už spomínaným spôsobom.

Uvedieme ešte jednu úlohu, v ktorej zrkadlový náboj vystupuje v trochu inom poňatí:

Vo vzdialenosti l od stredu vodivej uzemnenej gule polomeru R ($R < l$) sa nachádza bodový náboj q (obr. 3.10b). Nájdite intenzitu poľa vo vonkajšom priestore gule (vo vnútri gule sa intenzita samozrejme rovná nule).

Čitateľovi predovšetkým prenecháme na dôkaz tvrdenie, že plocha nulového potenciálu dvoch bodových nábojov $+q$ a $-q'$ ($q > q'$), uložených vo vzdialenosti $2d$, je guľová plocha s polomerom

$$R = 2d\frac{qq'}{q^2 - q'^2} \tag{3.3}$$



Obr. 3.10

a so vzdialenosťou jej stredu

$$r_0 = d\frac{q^2 + q'^2}{q^2 - q'^2} \tag{3.4}$$

od stredu symetrie 0 na *obr. 3.10a*. (Odporúčam vyjadriť vzdialenosti r_1, r_2 pomocou kosínusovej vety a využiť skutočnosť, že na guľovej ploche $V = 0$, teda $qr_2 = q'r_1$. Nakoniec napísať rovnicu kružnice v polárnych súradniciach r, φ).

Ak porovnáme *obr. 3.10a* a *3.10b* vidíme, že naša úloha bude v podstate vyriešená, ak v *obr. 3.10b* určíme veľkosť "zrkadlového" náboja q' a jeho polohu, napr. jeho vzdialenosť δ od stredu vodivej gule. Pri takomto označení porovnaním obidvoch obrázkov vidíme, že $2d = l - \delta$ a $r_0 = d + \delta$. Dosadením týchto rovností do výrazov (3.3) a (3.4) dostaneme nové výrazy

$$R = (l - \delta)\frac{qq'}{q^2 - q'^2} \tag{3.5}$$

$$\delta = l\frac{q'^2}{q^2} \tag{3.6}$$

Riešenia týchto rovníc pre q' a δ dávajú hľadané veličiny

$$q' = \frac{R}{l}q \qquad \text{a} \qquad \delta = \frac{R^2}{l} \tag{3.7}$$

A tak môžeme zhrnúť: Pole vo vonkajšom okolí vodivej uzemnenej gule za prítomnosti bodového náboja je také isté, ako pole dvojice nábojov: náboja $+q$ a zrkadlového náboja $-q' = -Rq/l$, uložených vo vzájomnej vzdialenosti $l - \delta = (l^2 - R^2)/l$.

Jednoduchými úvahami sa okrem toho dá ukázať, že celkový reálny indukovaný náboj na uzemnenej guli sa rovná zrkadlovému náboju $-q' = -qR/l$. Náboj je rozložený tak, že jeho hustota v absolútnej hodnote je najväčšia na priľahlom priesečníku spojnice náboja q so stredom gule, a najmenšia je na opačnej strane guľovej plochy.

Ak je guľová plocha neuzemnená a nenabitá, jej vonkajšie pole je dané uvedenou dvojicou nábojov $+q$ a $-q'$, plus pole bodového náboja $+q'$ umiestneného v strede guľovej plochy.

Ak je guľová plocha neuzemnená, a naviac nabitá nábojom q_0, treba k predchádzajúcim nábojom ešte pridať náboj q_0 do stredu guľovej plochy.

Metóda elektrických zrkadiel dovoľuje jednoducho riešiť aj úlohu o elektrickom poli bodového náboja umiestneného necentrálne vo vnútri guľovej plochy (*obr. 3.7b*). Riešenie tejto úlohy prenechávame čitateľovi.[1]

3.5 KAPACITA VODIČOV A KONDENZÁTOROV

Vodiče a sústavy vodičov majú jednu, z praktického hľadiska veľmi dôležitú, elektrickú vlastnosť, a to schopnosť prijať elektrický náboj, čo vedie k zvýšeniu jeho elektrického potenciálu ako celku. Potenciál vodivého telesa pritom lineárne závisí od náboja na ňom. Ak na telese zväčšíme náboj o hodnotu Δq, vzrastie jeho potenciál o zodpovedajúcu hodnotu ΔV, podľa vzťahu

$$\Delta q = C\Delta V \tag{3.8}$$

kde konštanta úmernosti C sa nazýva kapacita vodiča. Kapacita osamoteného vodiča závisí iba od veľkosti povrchovej plochy vodiča a veľmi zložitým spôsobom od jej tvaru. Záležitosť je natoľko komplikovaná, že nakoniec jediným vodivým telesom, pre ktoré vieme jednoducho vypočítať pomer náboja a potenciálu, teda jeho kapacitu, je guľové teleso. Ak na vodivej guli s polomerom R zväčšíme náboj o Δq, zvýši sa jej potenciál o

$$\Delta V = \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

S využitím vzťahu (3.8) dostaneme pre kapacitu vodivej gule výraz

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0 R \tag{3.9}$$

z ktorého vidíme, že kapacita vodivej gule je priamo úmerná jej polomeru R, čo sa vlastne dalo očakávať.

---

[1] Je zaujímavé pripomenúť, že metóda elektrických zrkadiel bola známa už tvorcovi elektromagnetickej teórie J. C. Maxwellovi.

Kapacita je dôležitý elektrotechnický parameter vodičov, ktorý treba počítať, resp. merať. Jednotku kapacity možno stanoviť zo vzťahov (3.8), alebo (3.9). Podľa týchto vzťahov jednotkovú kapacitu má vodič, ktorého potenciál sa zvýši o jeden volt, ak naň privedieme náboj jeden coulomb. Táto jednotka má názov **farad** s označením a rozmerom

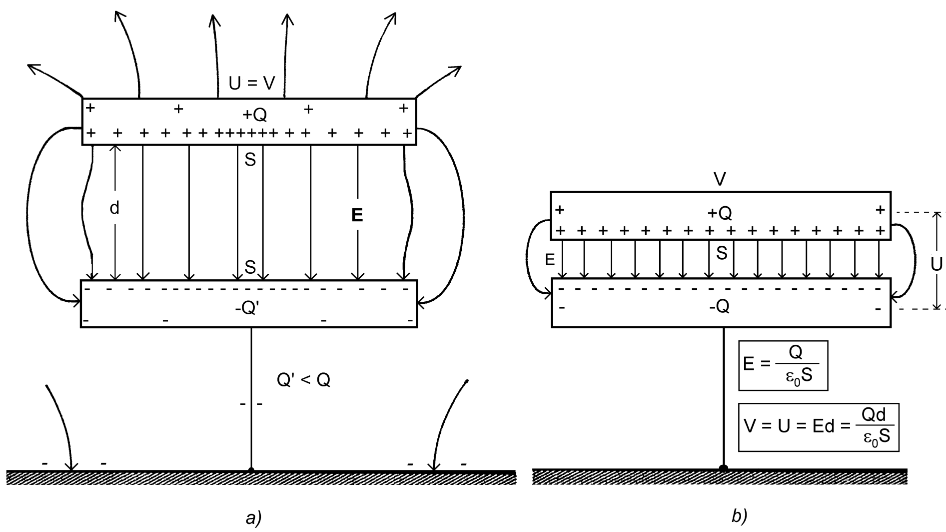
$$1\ \mathrm{F} = \frac{1\mathrm{C}}{1\mathrm{V}} = 1\ \mathrm{m}^{-2}.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{s}^{4}.\mathrm{A}^{2}$$

Z výrazu (3.9) vidno, prečo sa elektrická konštanta poľa ε_0 udáva v jednotkách F/m.

Jednotka 1 F je veľmi veľká. Takúto kapacitu osamotenými vodičmi nemožno prakticky realizovať. Ak by napr. osamotená kovová guľa mala mať kapacitu 1 F, musela by podľa výrazu (3.9) mať polomer

$$R = \frac{1\mathrm{F}}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9.10^9\ \mathrm{m}$$

ktorý je asi 1400-krát väčší ako polomer Zeme. Elektrotechnická prax však vyžaduje kapacity až 10^{-3} F pri rozumne malých rozmeroch, čo vylučuje ich realizáciu osamotenými vodičmi. Avšak z dvoch vodičov možno vytvoriť veľmi veľké kapacity pri takých rozmeroch, že sa pohodlne zmestia do dlane. Sústava dvoch vodičov vhodného tvaru a vhodne usporiadaných sa nazýva **kondenzátor**.



Obr. 3.11

K pojmu kondenzátor sa môžeme dopracovať nasledovnou úvahou. Predpokladajme, že nad veľkou vodivou uzemnenou platňou sa nachádza planparalelne iná vodivá platňa s nábojom Q a s plošným obsahom S na jednej strane, (pozri *obr. 3.11a*). Hrúbka platní je na obrázku kvôli kresleniu prehnane veľká, avšak pre funkčnosť systému nepodstatná; obyčajne ide o tenké kovové fólie. Nábojom Q indukovaný záporný náboj $-Q'$ na uzemnenej platni je v absolútnej hodnote menší ako Q. Sústava nábojov vytvorí elektrostatické pole, ktoré pri veľkej vzdialenosti platní bude pomerne zložité a jeho siločiary budú mať priebeh ako na *obr. 3.11a*. Horná platňa je na istom potenciáli V oproti Zemi, a tento potenciál (alebo napätie medzi rovinami $U = V$) možno teoreticky vypočítať integráciou intenzity od Zeme až po nabitú platňu po ktorejkoľvek siločiare (samozrejme každý takýto integrál $-\int \mathbf{E}.\mathrm{d}\mathbf{l}$ dá rovnakú hodnotu napätia U). Bez ohľadu na to, že výpočet integrálu je v analytickom tvare zložitý alebo nemožný, napätie U závisí iba od veľkosti náboja Q, veľkosti nabitej plochy a jej vzdialenosti d od uzemnenej platne. Pomer náboja a napätia Q/U medzi platňami takto definuje kapacitu C sústavy nabitá platňa a uzemnená platňa spolu so Zemou. Nevýhodou tejto sústavy môžu byť jej ešte stále veľké rozmery, ale hlavne nejednoznačnosť potenciálu V (a teda aj kapacity), ktorý závisí od prípadnej prítomnosti iných vodivých aj nevodivých predmetov v okolí.

Situácia sa stane prehľadnejšou, ak nabitú platňu začneme približovať k uzemnenej. Elektrické pole sa začne sústreďovať medzi platňami a bude stále viac podobné homogénnemu poľu medzi dvoma nekonečnými rovinami, nabitými konštantnou plošnou hustotou náboja, pretože aj náboj Q sa bude stále rovnomernejšie rozkladať na dolnej, privrátenej ploche nabitej platne. Pri istej, dostatočne malej vzdialenosti, je situácia zobrazená na *obr. 3.11b*. Elektrické pole je už relatívne dobre uzavreté medzi platňami až na malé okrajové efekty. Kladný náboj Q a prakticky rovnako veľký opačný náboj $-Q$ sú rozložené rovnomerne s hustotami $\sigma = \pm Q/S$ a medzi rovinami S vytvárajú takmer homogénne pole

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

Napätie medzi rovinami sa pri tomto homogénnom poli rovná súčinu intenzity a vzdialenosti rovín

$$U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

Sústava práve uvažovaných planparalelných vodivých platní, každá s privrátenou plochou S, uložených veľmi blízko seba (malé d), takže pole je dostatočne dobre uzavreté medzi platňami, sa nazýva **platňový** (doskový) alebo **rovinný kondenzátor**. Pre jeho kapacitu danú pomerom Q/U z posledného vzťahu plynie

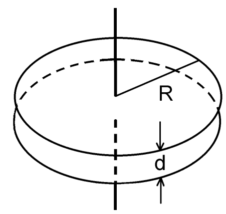
$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{3.10}$$

Kapacita opísaného doskového kondenzátora je teda priamo úmerná ploche S jednej roviny a nepriamo úmerná vzdialenosti rovín d. Roviny môžu predstavovať napr. tenké hliníkové fólie oddelené izolačnou dielektrickou fóliou, ktorá zabezpečuje konštantnú vzdialenosť d, izoluje vodivé fólie a súčasne zvyšuje kapacitu kondenzátora o faktor $\varepsilon_r \geq 1$, ktorý je bezrozmernou materiálovou konštantou izolačnej fólie a nazýva sa **relatívna permitivita** dielektrika. Pôvod a význam pojmu permitivity bude vysvetlený v odseku 4.3 o dielektrikách. Kapacita doskového kondenzátora s dielektrikom je teda daná výrazom

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \tag{3.11}$$

Treba však mať na pamäti, že výraz (3.11) platí približne, pretože sa pri jeho odvodení predpokladalo, že celé náboje $\pm Q$ sú rozložené striktne rovnomerne na privrátených plochách kondenzátora a pole je ideálne homogénne (inak povedané – zanedbali sme okrajové efekty). V skutočnosti kapacita bude vždy väčšia ako tá, ktorú udáva výraz (3.11), pretože celkové náboje v interakcii sú väčšie o tie, ktoré sa nachádzajú na okrajoch a vonkajších stranách dosiek kondenzátora. Ak má kondenzátor kruhové dosky s polomerom R, takže $S = \pi R^2$ (pozri *obr. 3.12*), potom skutočná kapacita takého kondenzátora je daná výrazom

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} f = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \pi R^2}{d} f \tag{3.12}$$



Obr. 3.12

kde f je korekčný faktor závislý od pomeru d/R, získaný numerickým modelovaním reálneho poľa doskového kondenzátora. Pre dostatočne malý pomer d/R je hodnota f blízka jednotke. Niekoľko hodnôt f je uvedených v tabuľke 3.

Tabuľka 3

d/R	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
f	1,286	1,167	1,094	1,042	1,023

Doskový kondenzátor je objemovo podstatne výhodnejší ako osamotená guľa rovnakej kapacity. Ak porovnáme vzťahy (3.9) a (3.11) dostaneme súvis medzi polomerom gule R a pomerom S/d kondenzátora s rovnakými kapacitami v tvare

$$R = \frac{\varepsilon_r S}{4\pi d} \tag{3.13}$$

Ak máme napr. kondenzátor s plochou dosiek 1 m^2 vzdialených 1 mm vo vákuu ($\varepsilon_r = 1$), potom má podľa vzťahu (3.13) rovnakú kapacitu, ako guľa s polomerom $R \approx 80$ m. Tu je každý komentár zbytočný! Kondenzátor daných rozmerov môžeme urobiť z dvoch hliníkových páskových fólií (elektród kondenzátora) oddelených izolačnou fóliou a zvinutých do malého valčeka (aká je asi jeho kapacita?).

Poučný je výpočet kapacity guľového kondenzátora, aj keď sám kondenzátor nemá veľkú praktickú hodnotu. **Guľový kondenzátor** pozostáva z dvoch koncentrických guľových vodivých plôch s polomermi a a b (nech $a < b$). Ak vnútornú guľu nabijeme napr. nábojom $-Q$ (ale ako?), vznikne v guľovej vrstve medzi polomermi a a b radiálne elektrické pole s intenzitou

$$E(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

pre $a < r < b$. Tým istým výrazom bude dané aj pole v okolí kondenzátora, teda pre $b < r < \infty$, pretože na vnútornej ploche väčšej gule je naindukovaný náboj $+Q$ a na jej vonkajšej strane náboj $-Q$. Ak na vonkajšiu guľu privedieme kompenzačný náboj $+Q$ alebo ju uzemníme, kondenzátor ako celok bude nenabitý a v jeho uvažovanej guľovej vrstve bude ideálne uzavreté pole, ktorého intenzita je daná posledným výrazom. Napätie U na kondenzátore dostaneme integráciou intenzity $E(r)$ od a po b, teda

$$U = -\int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

z čoho kapacita Q/U guľového kondenzátora je daná vyjadrením

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \tag{3.14}$$

Kapacita guľového kondenzátora je výrazom (3.14) daná presne, pretože pole kondenzátora je uzavreté. Ak guľová vrstva kondenzátora je tenká, môžeme polomer b vyjadriť ako $b = a + \delta$, kde $\delta \ll a, b$. V takom prípade $b - a = \delta$ a $ab = a^2 + a\delta \approx a^2$, ďalej $4\pi a^2 = S_{ef}$ je efektívna plocha guľového kondenzátora, takže za daných podmienok výraz (3.14) môžeme napísať v tvare

$$C \approx \frac{\varepsilon_0 S_{ef}}{\delta} \tag{3.15}$$

čo je formálne rovnaký výraz ako (3.10) pre doskový kondenzátor. Guľový kondenzátor nemá veľkú praktickú hodnotu, pretože naň nemožno pripojiť kontakty bez porušenia guľovej symetrie a má nepriaznivo nízky pomer kapacita/objem.

Oveľa väčší praktický význam má **valcový kondenzátor** – sústava dvoch koaxiálnych valcových vodivých plôch s polomermi a a b ($a < b$) vyobrazených na *obr. 3.13.* Predpokladajme, že kondenzátor je dostatočne dlhý, takže po jeho nabití okrajové efekty možno zanedbať. Priveďme na vnútorný valec kondenzátora náboj $+Q$ a na vonkajší náboj $-Q$. Vo vnútri kondenzátora (t. j. vo valcovej vrstve $a < r < b$) je osovo radiálne elektrické pole s intenzitou

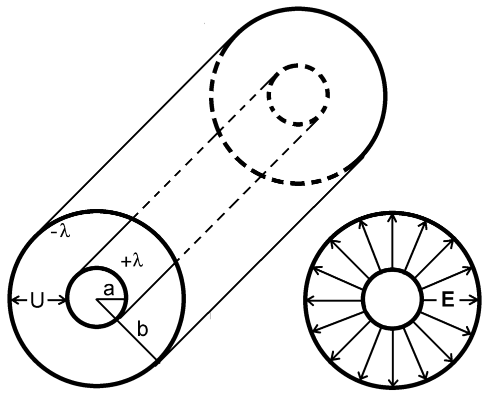
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

kde $\lambda = Q/l$ je dĺžková hustota náboja na kondenzátore. Vo vonkajšom okolí kondenzátora je elektrické pole nulové. Napätie na kondenzátore

$$U = V_a - V_b = -\int_b^a E(r)\mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

a kapacita C' jednotkovej dĺžky kondenzátora daná pomerom λ/U je podľa tohto vzťahu

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{b}{a}} \qquad [\mathrm{F/m}] \tag{3.16}$$



Obr. 3.13

Ak je vnútrajšok kondenzátora vyplnený tuhým dielektrikom, treba posledný výraz vynásobiť jeho relatívnou permitivitou ε_r. Valcové kondenzátory sa dnes vyrábajú zriedkavo, napriek tomu výraz (3.16) má veľký význam. V telekomunikácii sa na prenos signálov na veľké vzdialenosti používajú koaxiálne káble, ktoré možno považovať za veľmi dlhé valcové kondenzátory. Jeden meter ich dĺžky má kapacitu danú posledným výrazom. Kapacita na jednotku dĺžky kábla je jedným s primárnych parametrov koaxiálneho vedenia. Spolu s jeho ďalším primárnym parametrom, a to indukčnosťou na jednotku dĺžky, udáva vlnovú impedanciu (vlnový odpor) kábla, ale o tom pojednáme až neskôr.

V starších učebniciach elektromagnetizmu sa venoval priestor aj technickým otázkam výroby rôznych typov kondenzátorov. Domnievam sa, že pri dnešnom stave rozvoja elektrotechnických technológií by na obmedzenom priestore nebolo možné kvalifikovane popísať výrobu kondenzátorov, čo ani nie je naším cieľom, a preto čitateľov odkazujem na technickú a firemnú literatúru, prípadne katalógy elektrotechnických súčiastok. Spoločná pre všetky typy vyrábaných kondenzátorov je skutočnosť, že sú tvorené systémom dvoch vodivých plôch oddelených dielektrikom (alebo uložených vo vákuu) v takej tesnej vzdialenosti, že elektrické pole nabitého kondenzátore je v ňom úplne uzavreté. Dva typy kondenzátorov môžu poslúžiť ako príklad pozoruhodnej invencie moderných technológov a výrobcov – je to **kapacitná polovodičová dióda** (varikap, alebo varaktor) a **tantalový kondenzátor** s tuhým elektrolytom.

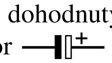
Kapacitná dióda je v podstate polovodičová dióda pripojená na napätie v závernom smere. V takomto zapojení je nevodivá a medzi svojimi prívodmi predstavuje kondenzátor, ktorého kapacita je daná šírkou *PN* prechodu (elektródy kondenzátora). Zmenou napätia možno meniť šírku *PN* prechodu, a tým aj kapacitu diódy. Varikap je teda nízkokapacitný kondenzátor s premennou kapacitou riadenou napätím.

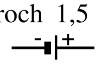
Tantalový kondenzátor je rafinovaným typom vysokokapacitného kondenzátora veľmi malých rozmerov. Má kvapkový tvar priemeru rádu milimetrov pri kapacitách až desiatok mikrofaradov (1 μF = 10^{-6} F). "Kvapku" tvorí vysokoporézny sintrovaný oxid tantalu Ta_2O_5, ktorý má obrovskú efektívnu povrchovú plochu a tvorí jednu elektródu kondenzátora. Druhou elektródou je do štruktúry vbudovaný oxid mangánu MnO_2. Hrúbka oxidovej vrstvy určuje vzdialenosť elektród kondenzátora a je rádu niekoľko desiatok až stoviek nanometrov. Veľký pomer S/d zaručuje vysokú kapacitu kondenzátora.

V technickej praxi sa používajú kondenzátory s kapacitou od jednotiek pikofaradov pF (1 pF = 10^{-12} F), cez nanofarady nF (1 nF = 10^{-9} F) a mikrofarady μF (1 μF = 10^{-6} F), až po milifarady mF (1 mF = 10^{-3} F).

Druhým technickým parametrom kondenzátora, popri jeho kapacite, je pracovné alebo **maximálne prípustné napätie**, ktoré spolu s kapacitou obyčajne býva vyznačené na kondenzátore. Pracovné napätie závisí od použitého dielektrika a jeho hrúbky medzi elektródami kondenzátora. Kondenzátory s vysokou kapacitou určené na vysoké napätie musia mať dostatočne veľkú hrúbku dielektrika pri súčasne veľkej ploche medzi elektródami, čo determinuje jeho veľký objem, teda veľký objem kondenzátora. S tým musia konštruktéri vysokonapäťových elektrických zariadení počítať. Prekročenie maximálneho napätia na kondenzátore môže mať za následok jeho elektrický prieraz a zničenie. Maximálne prípustné intenzity elektrických polí v rôznych dielektrických materiáloch sú uvedené v odseku 4.4 (tabuľka 5).

3.6 ELEKTRICKÉ OBVODY S KONDENZÁTORMI

Kondenzátor je jeden z početných elektrických prvkov, ktorý spolu s ďalšími prvkami, ako sú rezistory, cievky, diódy, tranzistory atď. môže byť súčasťou zložitých elektronických zapojení. Tieto zapojenia graficky znázorňujeme ich schémami. Na kreslenie schém sú dohodnuté symboly, ktorými sa prvky zobrazujú. Pre jednoduchý kondenzátor je takýmto medzinárodne dohodnutým symbolom znak  alebo pre polarizovaný elektrolytický kondenzátor  (nesmie sa v zapojení pripojiť s opačnou polaritou).

Naším ďalším cieľom bude posúdiť elektrické vlastnosti rôznych spojení kondenzátorov, ak sa také spojenie pripojí na jeden alebo viac zdrojov pevných napätí. Takéto zdroje (ako napr. plochá batéria troch 1,5 V suchých článkov) budeme v schémach zobrazovať dohodnutým symbolom  a ich elektromotorické napätia (pozri odsek 5.3) označovať $\mathscr{E}$ (kladná hodnota). Kondenzátory možno účelne spájať, napr. zaradiť za sebou (sériovo) a spolu so zdrojom vytvoriť uzavretú slučku alebo ich spojiť vedľa seba (paralelne), prípadne vytvárať kombinácie oboch predchádzajúcich. Možno tiež vytvárať spojenia vyššej zložitosti, nazývané mostíkové, ktoré nie sú kombináciou predchádzajúcich. Takto môžu vzniknúť zložité siete pozostávajúce z kondenzátorov a zdrojov elektromotorických napätí. Kondenzátory a zdroje vytvárajú v sieťach uzavreté obvody a v uzloch sa tieto súčiastky spájajú. Ak sú v ľubovoľnom takom zapojení známe kapacity kondenzátorov C_j a napätia zdrojov $\mathscr{E}_k$, potom analýzou zapojenia možno určiť náboje Q_j a napätia U_j na jednotlivých kondenzátoroch.

Analýzou elektrických obvodov sa v celej šírke zaoberá teoretická elektrotechnika, jej záber však presahuje rámec našich úvah a potrieb. Celá táto analýza sa však zakladá na dvoch nám už známych princípoch:

1. Integrál intenzity elektrostatického poľa $\boldsymbol{E}$ po uzavretej dráhe l prechádzajúcej prívodnými vodičmi, kondenzátormi a zdrojmi sa rovná nule, t. j.

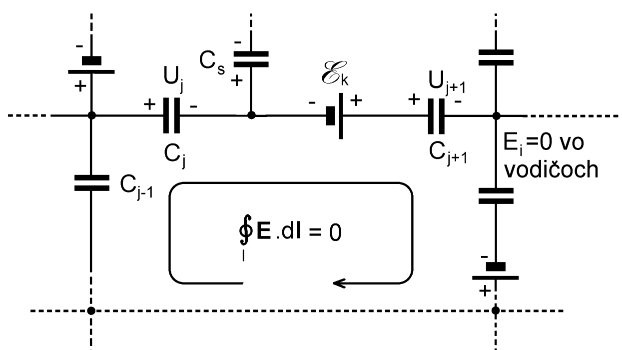
$$\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l \boldsymbol{E}_i.\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \oint_l \boldsymbol{E}_j.\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \oint_l \boldsymbol{E}_k.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{3.17}$$

kde $\boldsymbol{E}_i$, $\boldsymbol{E}_j$ a $\boldsymbol{E}_k$ sú postupne intenzity elektrického poľa vo vodičoch, v kondenzátoroch a v zdrojoch. Dráha l prechádza súčiastkami v nejakej uzavretej slučke uvažovanej elektrickej siete. Orientácia slučky je ľubovoľná (napr. v rovine pravotočivá – pozri *obr. 3.14*). Posúďme teraz príspevky troch integrálov v rovnici (3.17):

a) Integrály intenzity $\boldsymbol{E}_i$ pozdĺž spojovacích vodičov v obvode. Keďže vo vodičoch $\boldsymbol{E}_i = 0$, všetky takéto integrály sú nulové, a teda časti dráhy l pozdĺž spojovacích vodičov k hodnote integrálu (3.17) neprispievajú.

b) Integrály typu $\int \boldsymbol{E}_j.\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j$ počítané cez j-tý kondenzátor v obvode. Vektor $\boldsymbol{E}_j$ je intenzita elektrického poľa v j-tom kondenzátore a $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j$ je vektorový element dráhy v kondenzátore. Posledné dva vektory sú kolineárne, intenzita poľa má konštantnú hodnotu $E_j = U_j / d_j$, kde $U_j = Q_j/C_j$ je napätie na j-tom kondenzátore a d_j je vzdialenosť dosiek kondenzátora. Absolútna hodnota integrálu je teda

$$\int_0^{d_j} \boldsymbol{E}_j.\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j = \frac{U_j}{d_j}\int_0^{d_j} \mathrm{d}r_j = U_j \tag{3.18}$$



Obr. 3.14

Znamienko napätia U_j na kondenzátore v obvode závisí od smeru intenzity poľa v kondenzátore – je kladné ak v kondenzátore vektory $\boldsymbol{E}_j$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j$ majú rovnaký smer a záporné, ak vektory majú opačný smer. Keďže napätia na kondenzátoroch sú pri analýze neznáme, znamienko vyjde ako súčasť výsledku riešenia.

c) Integrály typu $\int \boldsymbol{E}_k.\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k$ cez zdroje napätí, kde $\boldsymbol{E}_k$ je stacionárne pole v zdroji (smerujúce od kladného pólu k zápornému). Fyzikálne procesy v zdrojoch budú predmetom analýzy v elektrodynamike. Pre účely tohto odseku je dôležité, že elektromotorické napätie k-tého zdroja $\mathscr{E}_k$ možno opísať formálnou vnútenou (hnacou) intenzitou $\boldsymbol{E}_{emn} = -\boldsymbol{E}_k$ neelektrického pôvodu v zdroji, ktorá smeruje od záporného pólu zdroja ku kladnému a v zdroji vykonáva prácu. Formálne môžeme napísať

$$\int \boldsymbol{E}_k.\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k = -\int \boldsymbol{E}_{emn}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k = -\mathscr{E}_k \tag{3.19}$$

Ak je zdroj zapojený tak, že integračná dráha prechádza od záporného pólu cez zdroj ku kladnému, teda proti smeru $\boldsymbol{E}_k$, vystupuje $\mathscr{E}_k$ v rovnici (3.17) so záporným znamienkom, v opačnom prípade s kladným.

Ľavá strana rovnice (3.17) je daná súčtom napätí U_j na n kondenzátoroch podľa výrazov (3.18) a elektromotorických napätí $\mathscr{E}_k$ od p zdrojov podľa výrazu (3.19) v uzavretej slučke a s ohľadom na znamienka. Platí teda

$$\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum_{j=1}^{n} U_j - \sum_{k=1}^{p} \mathscr{E}_k = 0$$

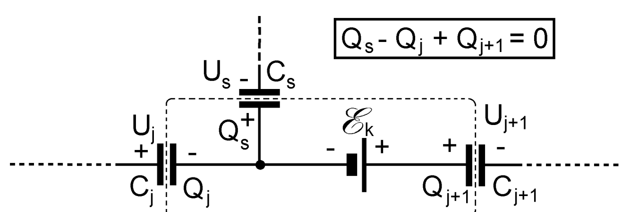
alebo

$$\sum_{k=1}^{p} \mathscr{E}_k = \sum_{j=1}^{n} U_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{C_j} \tag{3.20}$$

pretože $U_j = Q_j/C_j$. Tvrdenie (3.17), že integrál intenzity elektrického poľa po uzavretej dráhe v obvode zloženom z kondenzátorov a zdrojov sa rovná nule, je ekvivalentné tvrdeniam (3.20), že **algebraický súčet elektromotorických napätí zdrojov sa rovná súčtu napätí na kondenzátoroch v uzavretej slučke.**

2. Druhý princíp, ktorý sa využíva pri analýze sietí s kondenzátormi, je v podstate zákon zachovania elektrického náboja, presnejšie skutočnosť, že na nenabitom vodivom telese sa celkový indukovaný náboj rovná nule. "Nenabitým vodičom v obvode" je vodivé spojenie dvoch alebo viac elektród kondenzátora v uzle, pričom v ceste vodivého spojenia môže byť aj zdroj, pretože jeho celkový kladný aj záporný náboj sa rovná nule (pozri *obr. 3.15*). Na jednotlivých elektródach spojených do uzla sa nachádzajú indukované náboje. Ak je takto spojených l elektród, potom súčet všetkých ich nábojov sa rovná nule, teda

$$\sum_{i=1}^{l} Q_i = \sum_{i=1}^{l} U_i C_i = 0 \tag{3.21}$$



Obr. 3.15

kde Q_i je náboj na i-tej elektróde spojenia, U_i je napätie príslušného kondenzátora a C_i je jeho kapacita. Na rovnicu (3.21) existuje ešte jeden zaujímavý pohľad, ktorý potvrdzuje jej principiálnosť. Napätie na i-tom kondenzátore $U_i = E_i d_i$, kde E_i je intenzita elektrického poľa v kondenzátore a d_i je vzdialenosť jeho elektród. Kapacita i-tého kondenzátora $C_i = \varepsilon_0 S_i / d_i$, kde S_i je jeho efektívna plocha. Dosadením týchto vyjadrení do (3.21) dostaneme zaujímavý vzťah

$$\sum_{i=1}^{l} E_i S_i = 0$$

Suma predstavuje súčet parciálnych tokov intenzity poľa cez jednotlivé kondenzátory zapojené v uzle a táto suma sa rovná nule. Je to vlastne Gaussov zákon aplikovaný na l kondenzátorov zapojených v uzle, ktorý hovorí, že celkový náboj spojených elektród kondenzátorov sa rovná nule.

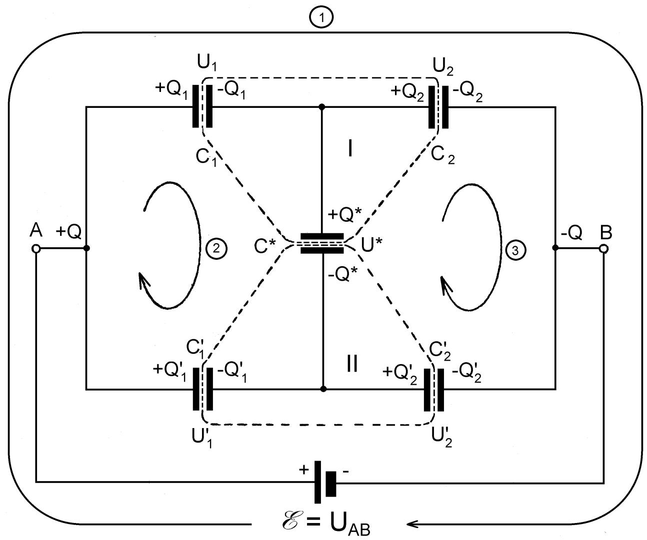
Sústavy rovníc typu (3.20) a (3.21) umožňujú analýzu akéhokoľvek zapojenia kondenzátorov a zdrojov v elektrickej sieti. Každá elektrická sieť pozostáva z vetiev pospájaných v uzloch. Vetvy predstavujú kondenzátory, alebo zdroje, alebo ich sériové spojenia. Pre účely našej analýzy sú uzlami v sieti miesta, v ktorých sú spojené vždy najmenej tri vetvy. Uzol s dvoma vetvami (s dvoma elektródami) je degenerovaný, pretože poskytuje jedinú informáciu, že príslušné spojené elektródy majú rovnako veľký náboj opačného znamienka. Ak sieť s p uzlami obsahuje zdroje so známymi elektromotorickými napätiami a n známych kondenzátorov, potom analýzou siete treba nájsť n napätí U_i, alebo n nábojov $Q_i = C_i U_i$ na jednotlivých kondenzátoroch. K tejto analýze treba zostaviť n lineárne nezávislých rovníc typu (3.20) a (3.21). Spôsob výberu rovníc je nasledovný: V sieti možno nájsť m nezávislých slučiek takých, že žiadna z nich nepozostáva z už vytvorených slučiek (ináč povedané – každá zo slučiek obsahuje jednu vetvu ktorá nie je v žiadnej inej slučke). Pre týchto m slučiek možno napísať m rovníc podľa (3.20), ktoré sú lineárne nezávislé, t. j. také, že žiadna z nich nie je lineárnou kombináciou ostatných. Zostávajúcich $n - m$ rovníc možno napísať pre nezávislé uzly, v ktorých sú spojené elektródy so svojimi nábojmi, teda rovnice podľa (3.21). Takých nezávislých uzlov v sieti je $p - 1$. V teórii elektrických sietí sa dokazuje, že počet rovníc potrebných pre analýzu je práve $m + p - 1 = n$.

Čitatelia, ktorí poznajú formalizmus analýzy odporových alebo impedančných elektrických sietí pomocou Kirchhoffových zákonov, si určite všimli, že tu prezentovaný formalizmus je pozoruhodnou elektrostatickou analógiou Kirchhoffových zákonov.

Z matematického hľadiska daná úloha vedie na riešenie sústavy lineárnych algebraických rovníc pre neznáme U_i alebo $Q_i = C_i U_i$. Ak čitateľovi-študentovi nie je známy spôsob riešenia takýchto úloh, nech sa poradí so svojim učiteľom algebry.

Na ilustráciu analýzy elektrickej siete s kondenzátormi zostavíme sústavu potrebných rovníc pre veľmi zaujímavé a v praxi dôležité zapojenie známe pod názvom kapacitný most. Zapojenie je zrejmé z *obr. 3.16*. Štvorica kondenzátorov $C_1 - C_2$ a $C_1' - C_2'$ je v strede "premostená" kondenzátorom C^* a celý systém zľava i sprava je pripojený k zdroju elektromotorického napätia $\mathscr{E}$. Našou úlohou je pri známom elektromotorickom napätí zdroja $\mathscr{E}$, nájsť napätia U_1, U_2, U_1', U_2' a U^* (alebo im zodpovedajúce náboje) na piatich známych kondenzátoroch. Na riešenie úlohy treba vyššie opísaným spôsobom zostaviť päť lineárne nezávislých rovníc. V zapojení možno zostrojiť tri (ale nie viac) nezávislé uzavreté slučky, napríklad slučky 1, 2 a 3 tak, ako na obrázku. Treba povedať, že to nie je jediný možný spôsob výberu slučiek – v danej úlohe existuje celkove 16 spôsobov výberu. Pre vybrané slučky možno podľa vzťahov (3.20) napísať rovnice

$$\left.\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \mathscr{E} \\ U_1 + U^* - U_1' &= 0 \\ U_2 - U_2' - U^* &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$



Obr. 3.16

Voľba polarity napätí na kondenzátoroch je ponechaná na ľubovôľu riešiteľa. Ak je numerický výsledok riešenia kladný, voľba bola správna, ak výsledok je záporný, polarita napätia je opačná. Systém rovníc je neúplný, treba ho doplniť dvoma rovnicami typu (3.21) pre nezávislé uzly. Podľa našej definície daná sieť má štyri uzly. Napätie medzi uzlami A a B je známe ($U_{AB} = \mathscr{E}$). Z troch zvyšných uzlov dva nezávislé – I a II, sú vyznačené na obrázku. Pre tieto uzly platia rovnice

$$\left.\begin{aligned} -U_1C_1 + U_2C_2 + U^*C^* &= 0 \\ -U_1'C_1' + U_2'C_2' - U^*C^* &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Dvojicu rovníc sme mohli vybrať aj ináč, napr. jedna z uvedených rovníc a k nej rovnica pre zvyšný uzol (vpravo, alebo vľavo). Rovnica pre tento uzol má tvar

$$U_1C_1 + U_1'C_1' - U_2C_2 - U_2'C_2' = 0$$

Túto rovnicu však dostaneme sčítaním rovníc systému (3.23) a vynásobením výsledku s (-1). Rovnica je teda lineárnou kombináciou predchádzajúcich dvoch a do systému (3.23) už nepatrí. Riešenie systému (3.22) a (3.23) poskytuje hľadané napätia. Z fyzikálneho hľadiska je úloha vyriešená a závisí iba od čitateľovej matematickej erudície a trpezlivosti, ako rýchlo sa dopracuje k výrazom pre hľadané napätia.

Vo väčšine prípadov sú zaujímavé iba niektoré napätia, napr. napätie na priečnej vetve mosta, teda na kondenzátore C*. Toto napätie je dané výrazom

$$U^* = \mathscr{E}\,\frac{C_1C_2' - C_1'C_2}{(C_1' + C_2')(C_1 + C_2) + C^*(C_1 + C_2 + C_1' + C_2')} \tag{3.24}$$

Z výsledku vidíme, že napätie na kondenzátore C* môže byť kladné (s polaritou vyznačenou na obrázku) alebo záporné, závislé od numerických hodnôt kapacít ostatných kondenzátorov. Môže byť aj nulové vtedy, ak $C_1C_2' = C_1'C_2$ alebo ak pre pomer kapacít platí

$$\frac{C_1}{C_1'} = \frac{C_2}{C_2'} \tag{3.25}$$

Ak platí podmienka (3.25) hovoríme, že most je v rovnováhe, čo možno dosiahnuť zmenou kapacity jedného z kondenzátorov. Pri známych hodnotách kapacít troch kondenzátorov možno z posledného vzťahu určiť kapacitu štvrtého kondenzátora.

Tieto úvahy majú do istej miery akademický charakter, pretože v praxi sotva niekto vyvažuje kapacitný most pri konštantnom napätí zdroja. Elektrostatické napätia sa totiž dosť obťažne merajú a využitie mosta pre elektrostatické účely je minimálne. Kapacitný most má oveľa väčší význam pri použití striedavých či harmonických napätí. V takom prípade je analýza mostu formálne rovnaká, iba že sa nepracuje s pojmami kapacít, ale kapacitných reaktancií alebo susceptancií (zdanlivých kapacitných odporov alebo vodivostí) a hľadajú sa amplitúdy napätí, resp. prúdov. Takto možno most použiť na meranie kapacít kondenzátorov, alebo napríklad ako posúvač fáze, ak sa do jeho jedného ramena namiesto kapacity zaradí premenný odpor (pozri alternatívnu úlohu 245).

Analýza napätí mostu umožňuje tiež vypočítať jeho kapacitu C_{AB} na svorkách AB pripojeného zdroja. Ako si možno všimnúť, táto kapacita nie je výsledkom jednoduchých sériovo-paralelných radení jednotlivých kapacít, a teda pri jej výpočte nemožno použiť osvedčené pravidlá pre sériové a paralelné spájanie kondenzátorov známe zo strednej školy. Podľa definície je kapacita C_{AB} na svorkách zdroja daná podielom náboja Q privedeného na svorku A zapojenia a napätia U_{AB} medzi svorkami, teda

$$C_{AB} = \frac{Q}{U_{AB}}$$

Keďže $U_{AB} = \mathscr{E}$ a podľa *obr. 3.16* $Q = Q_1 + Q_1' = C_1U_1 + C_1'U_1'$, potom

$$C_{AB} = \frac{C_1U_1 + C_1'U_1'}{\mathscr{E}} \tag{3.26}$$

Ak sú známe napätia U_1 a U_1', posledný výraz poskytne zložité vyjadrenie kapacity mostu v tvare

$$C_{AB} = \frac{C_1C_2(C_1' + C_2') + C_1'C_2'(C_1 + C_2) + C^*(C_1 + C_1')(C_2 + C_2')}{(C_1 + C_2)(C_1' + C_2') + C^*(C_1 + C_2 + C_1' + C_2')} \tag{3.27}$$

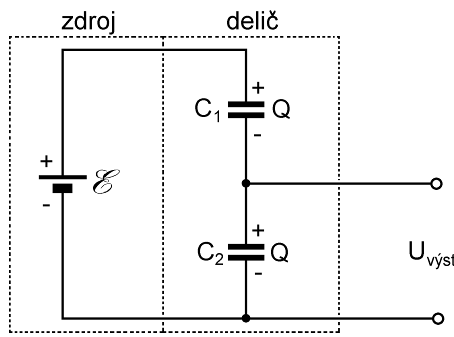
V prípade, že most je vyvážený, napätie na kondenzátore C^* je nulové, kondenzátor možno v zapojení vynechať (alebo ho skratovať) a v poslednom výraze položiť $C^* = 0$ (alebo $C^* = \infty$). Most prejde na jednoduché zapojenie štyroch sériovo-paralelne zapojených kondenzátorov, ktorých kapacita s uvážením podmienky rovnováhy (3.25) sa dá vyjadriť výrazmi

$$C_{AB} = C_1' \frac{C_2 + C_2'}{C_1' + C_2'} = C_2' \frac{C_1 + C_1'}{C_1' + C_2'}$$

Nakoniec uvedieme ešte jeden jednoduchý, ale dôležitý obvod, **kapacitný napäťový delič**. Jeho zapojenie je na *obr. 3.17* a analýza veľmi jednoduchá. Obvod má iba degenerované uzly, t. j. také, ktoré spájajú iba dva prvky. Na obidvoch kondenzátoroch sú rovnaké náboje, takže pre jediný uzavretý obvod (slučku) platí

$$\mathscr{E} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

z čoho
$$Q = \mathscr{E}\,\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$



Obr. 3.17

a výstupné napätie

$$U_{výst} = \frac{Q}{C_2} = \mathscr{E}\frac{C_1}{C_1 + C_2} < \mathscr{E} \tag{3.28}$$

Výstupné napätie deliča, ako vidieť, je vždy menšie ako napätie zdroja a je nepriamo úmerné kapacite C_2 medzi výstupnými svorkami. Ak je kapacita nulová ($C_2 = 0$), výstupné napätie sa rovná elektromotorickému napätiu zdroja ($U_{výst} = \mathscr{E}$), ak je kapacita nekonečná ($C_2 = \infty$), výstupné napätie sa rovná nule ($U_{výst} = 0$). Nulovú kapacitu predstavuje neprítomnosť kondenzátora v obvode, nekonečnú predstavuje galvanický skrat. Obidve extrémne hodnoty kapacít sú v praxi problematické, a preto posledné tvrdenie treba brať ako dobré priblíženie ku skutočnosti. Kapacitný delič sa takisto ako kapacitný most zriedkavo používa so statickými napätiami. Oveľa častejšie je jeho použitie v obvodoch striedavých napätí, v obvodovej elektronike.

3.7 ENERGIA ELEKTROSTATICKÉHO POĽA. ENERGIA NABITÉHO KONDENZÁTORA

3.7.1 Energia sústavy bodových nábojov

Ak sa dva bodové náboje q_1 a q_2 nachádzajú v nejakej vzdialenosti r_{12}, majú istú vzájomnú potenciálnu energiu W, pretože na vytvorenie tejto konfigurácie musela byť vykonaná práca prenesením nábojov z nekonečna, kde ich energia sa konvenčne považuje za nulovú.

Podľa odseku 2.8.1. práca vykonaná pri prenesení náboja q_1 v poli iného náboja q_2 na ich vzájomnú konečnú vzdialenosť r_{12} sa rovná súčinu náboja q_1 a potenciálu V_1 budeného nábojom q_2 v mieste svojho suseda. Táto práca vo vákuu sa rovná nadobudnutej vzájomnej potenciálnej energii W dvojice, pretože je $q_1V_1 = q_2V_2$ možno pre energiu dvojice napísať vzťah

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2)$$

kde V_1 a V_2 sú vzájomné potenciály jednotlivých nábojov v mieste druhého náboja

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{12}} \qquad \text{a} \qquad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{21}}$$

($r_{12} = r_{21}$). Ak je v interakcii n nábojov, potom matematickou indukciou dostaneme výraz pre ich vzájomnú energiu v tvare

$$W = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3 + \ldots + q_nV_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_iV_i \tag{3.29}$$

kde V_i je potenciál v mieste i-tého náboja budený všetkými $n - 1$ nábojmi s výnimkou i-tého, teda

$$V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{r_{ij}} \qquad (j \neq i) \tag{3.30}$$

Pomocou výrazov (3.29) a (3.30) možno vyjadriť vzájomnú potenciálnu elektrostatickú energiu n bodových nábojov v tvare

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad (j \neq i) \tag{3.31}$$

Treba upozorniť, že každý bodový náboj má ešte vlastnú energiu, ktorá je nekonečná (sústrediť náboj do bodu vyžaduje nekonečnú prácu). Táto energia, napríklad v prípade elektrónu, robí veľké problémy teoretickým fyzikom. Pri výpočtoch energií ju možno brať ako aditívnu konštantu, ktorú nakoniec možno ignorovať.

3.7.2 Energia elektrostatického poľa

Vzťah (3.31), ktorý sme odvodili, má skôr teoretický význam, pretože zriedkakedy potrebujeme počítať statickú energiu sústavy bodových nábojov. Môže však poslúžiť na odvodenie dôležitejšieho výrazu pre energiu nábojov rozložených spojito v priestore, a hlavne výrazu pre energiu elektrostatického poľa takéhoto rozloženia.

Predpokladajme teda, že v nejakej časti priestoru sú náboje rozložené spojito s objemovou hustotou ρ, ktorá je funkciou súradníc. V nekonečne malom objeme $\mathrm{d}\tau$ je uložený náboj $\mathrm{d}Q = \rho\mathrm{d}\tau$. Výraz (3.31) využijeme na vyjadrenie energie spojitého rozloženia nábojov tak, že bodový náboj q_i nahradíme nekonečne malým nábojom $\mathrm{d}Q$ a potenciál V_i potenciálom V v objemovom elemente $\mathrm{d}\tau$. Súčiny $V\mathrm{d}Q = \rho V\mathrm{d}\tau$ potom integrujeme cez celý objem τ, v ktorom sa náboje nachádzajú. Tak dostaneme vyjadrenie energie spojitého rozloženia nábojov v tvare

$$W = \frac{1}{2}\int_{\tau} \rho V \mathrm{d}\tau \tag{3.32}$$

Tento spôsob vyjadrenia energie spojitého rozloženia nábojov nie je však výhodný, pretože zriedkakedy poznáme ρ a V, častejšie poznáme intenzitu poľa $\boldsymbol{E}$. Vzťah upravíme tak, že objemovú hustotu náboja vyjadríme diferenciálnym tvarom Gaussovho zákona

$$\rho = \varepsilon_0 \,\mathrm{div}\boldsymbol{E}$$

Výraz (3.32) pre energiu prejde takto na tvar

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\tau\to\infty} V \,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau$$

Všimnite si, že v poslednom výraze sme hranicu integrácie rozšírili na celý nekonečný objem, pretože pokiaľ nie sú iné obmedzenia, pole tých nábojov, ktoré sú v konečne, sa môže rozprestierať do nekonečna. Výraz pod integrálom sa dá upraviť využitím operátorovej identity (pozri tabuľku 2)

$$\mathrm{div}(V\boldsymbol{E}) = V\mathrm{div}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}.\mathrm{grad}V = V\mathrm{div}\boldsymbol{E} - E^2$$

z čoho $$V\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \mathrm{div}(V\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{E}^2$$

kde sme využili skutočnosť, že grad$V = -\boldsymbol{E}$. Dosadením vo výraze pre energiu dostaneme vyjadrenie

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int\limits_{\tau\to\infty} \mathrm{div}(V\boldsymbol{E})\mathrm{d}\tau + \int\limits_{\tau\to\infty} E^2 \mathrm{d}\tau\right] \tag{3.33}$$

Prvý integrál možno pomocou Gaussovej vety vyjadriť ako integrál po uzavretej ploche S v limite idúcej do nekonečna, teda

$$\int\limits_{\tau\to\infty} \mathrm{div}(V\boldsymbol{E})\mathrm{d}\tau = \oint\limits_{S\to\infty} V\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Hodnota tohto integrálu sa rovná nule a plynie to z nasledovnej úvahy: Na veľmi veľkej ploche tvaru gule s polomerom r potenciál nábojov umiestnených okolo stredu gule klesá ako potenciál bodového náboja teda úmerne $\sim 1/r$ a intenzita klesá úmerne $\sim 1/r^2$. Element plochy dS na guli videný zo začiatku pod priestorovým uhlom dΩ naopak, rastie s r úmerne $\sim r^2$, menovite d$S = r^2$ dΩ. Súčin $\boldsymbol{VE}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = VE\mathrm{d}S \sim 1/r$ a pre $r \to \infty$ klesá k nule, teda aj uvažovaný integrál na nekonečnej ploche vymizne. Energiu vyjadrenú výrazom (3.33) treba interpretovať ako energiu elektrostatického poľa v priestore nenulovej hustoty nábojov, ale aj mimo nábojového rozloženia až do nekonečna. Jej hodnota je daná integrálom

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{\tau\to\infty} E^2 \mathrm{d}\tau = \int\limits_{\tau\to\infty} w_{el}\mathrm{d}\tau \tag{3.34}$$

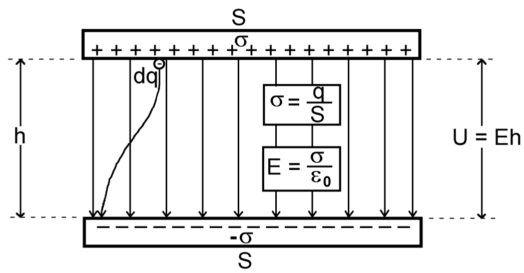
Veličina

$$\boxed{w_{el} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}} \tag{3.35}$$

sa nazýva objemová hustota energie elektrostatického poľa vo vákuu a meria sa v jednotkách J/m^3. Výraz (3.35) patrí medzi základné výrazy teórie elektrostatického poľa. Jeho integráciou cez objem dostaneme celkovú elektrostatickú energiu v danom objeme.

3.7.3 Elektrická energia nabitého kondenzátora

Odvodenie výrazu (3.35) vyžaduje istú teoretickú predstavivosť, a preto ho odvodíme ešte raz a jednoduchšie, hoci menej všeobecne. Ideálny doskový kondenzátor (plocha jednej dosky S, vzdialenosť dosiek h), bez okrajových efektov budeme nabíjať tak, že náboj rovnakého znamienka v nekonečne malých množstvách dq (napr. v dávkach istého počtu elektrónov) budeme prenášať z jednej dosky na druhú, pozri *obr. 3.18*. V istom štádiu je na doskách náboj $\pm q$ a prenesenie každého ďalšieho množstva dq je spojené s vykonaním práce dA proti elektrickému poľu



Obr. 3.18

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

ktoré už v kondenzátore existuje. Elementárna práca, vykonaná vonkajšou silou, je daná výrazom

$$\mathrm{d}A = hE\mathrm{d}q = \frac{h}{\varepsilon_0 S} q\mathrm{d}q \tag{3.36}$$

Ak celkový prenesený náboj je Q, potom práca A, potrebná na jeho transport, je daná integrálom príspevkov (3.36) od nulového, po konečný náboj Q. Teda

$$A = \frac{h}{\varepsilon_0 S}\int_0^Q q\mathrm{d}q = \frac{h}{\varepsilon_0 S}\frac{Q^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 hSE^2 = \frac{1}{2}CU^2$$

kde $C = \varepsilon_0\, S/h$ je kapacita kondenzátora a $U = Eh = Q/C$ je napätie na ňom.

Vykonaná práca na kondenzátore sa premení na jeho potenciálnu energiu

$$W = A = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 \tag{3.37}$$

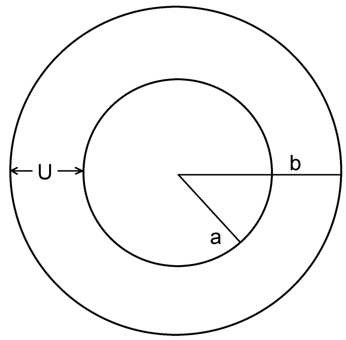
Z tohoto výrazu môžeme vypočítať hustotu elektrostatickej energie v nabitom kondenzátore, v ktorom je intenzita $\boldsymbol{E}$ konštantný vektor. Hustota energie elektrostatického poľa w_{el} je daná podielom energie W a objemu kondenzátora $\tau = hS$, teda

$$w_{el} = \frac{W}{\tau} = \frac{CU^2}{2hS} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

čo je taký istý výsledok ako (3.35).

Úlohy 38 – 64

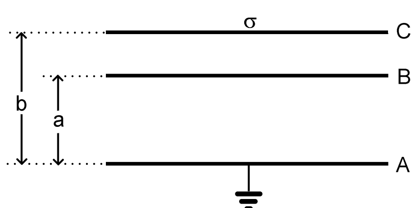
38. Ako zvoliť polomer a vnútornej gule v guľovom kondenzátore s vonkajším polomerom b, aby pri danom potenciálovom rozdiele U bola intenzita elektrického poľa na povrchu vnútornej gule minimálna? Vypočítajte kapacitu takého kondenzátora.



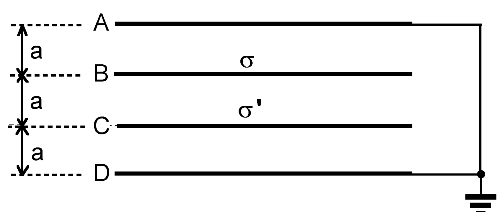
Obr. 39

39. Pri prenose veľkých elektrických výkonov koaxiálnym káblom treba voliť polomery valcových vodičov kábla tak, aby pri danom potenciálovom rozdiele U na kábli bola intenzita elektrického poľa na povrchu vnútorného vodiča minimálna. Aký bude v takom prípade polomer vnútorného vodiča v koaxiálnom kábli na *obr. 39*?

40. Dané sú tri paralelné roviny A, B, C na *obr. 40*. Rovina A je uzemnená, rovina B vo vzdialenosti a od roviny A je nenabitá a rovina C vo vzdialenosti b od roviny A je nabitá plošným nábojom σ. Roviny sú vodivé a ich rozmery sú oveľa väčšie ako vzájomné vzdialenosti. Vypočítajte potenciály rovín B a C.



Obr. 40



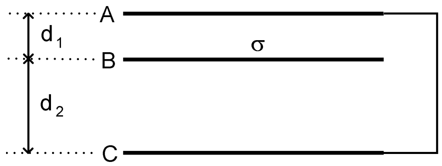
Obr. 41

41. Štyri rovnaké vodivé roviny A, B, C, D, sú umiestnené paralelne v rovnakej vzdialenosti a (*obr. 41*). Roviny A a D sú udržiavané na nulovom potenciáli, rovina B je nabitá plošným nábojom σ a rovina C má plošný náboj σ'. Určite potenciály rovín B a C a intenzity elektrického poľa medzi rovinami. Okrajové efekty možno zanedbať.

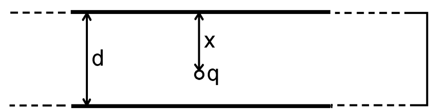
42. Tri paralelné vodivé roviny A, B, C, sú umiestnené podľa *obr. 42*. Na rovine B je plošný náboj σ. Roviny A a C sú vodivo spojené a nenabité. Určite plošné náboje na vnútorných plochách rovín A a C.

43. Dve veľmi veľké paralelné vodivé roviny sú umiestnené blízko seba vo vzdialenosti d. Roviny sú vodivo spojené. Medzi rovinami vo vzdialenosti $x < d$ od jednej z nich je umiestnený náboj q (*obr. 43*). Vypočítajte celkové indukované náboje na vnútorných stranách obidvoch rovín.

Poznámka: Pri riešení možno využiť fakt, že ak v myslenej paralelnej rovine náboja q umiestnime n bodových nábojov, zvýši sa celkový indukovaný náboj na obidvoch rovinách n-krát, a jeho celková hodnota bude $-nq$. Myslenú rovinu teda možno nabiť plošným nábojom nq a pri riešení postupovať ako v úlohe 42, pričom sa využije zákon superpozície. Úlohu možno riešiť aj pomocou nekonečných zrkadlových zobrazení náboja, čo je však oveľa zložitejšie.



Obr. 42



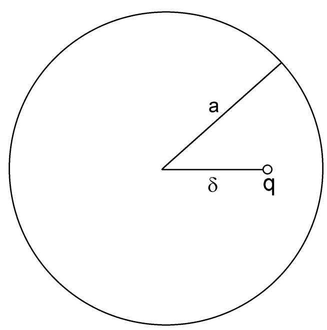
Obr. 43

44. Bodový náboj q sa nachádza medzi dvoma koncentrickými plochami s polomermi a a b vo vzdialenosti r od stredu, pričom je splnená podmienka: $a < r < b$. Vypočítajte indukované náboje q_a a q_b na guľových plochách.

45. Bodový náboj q je umiestnený vo vzdialenosti l od stredu vodivej guľovej plochy s polomerom a ($a < l$). Vypočítajte:

a) potenciál v okolí guľovej plochy, ak je táto uzemnená,
b) potenciál, ak guľová plocha je nenabitá a izolovaná,
c) potenciál, ak guľová plocha je izolovaná a má náboj q_0.

46. V kovovej dutej guli, ktorá je izolovaná a nenabitá, je umiestnený bodový náboj q vo vzdialenosti δ od jej stredu (*obr. 46*). Vypočítajte silu, ktorou guľa pôsobí na náboj. Aká bude táto sila, ak sa guľa uzemní?



Obr. 46

47. Bodový náboj $q = 10^{-9}$ C je umiestnený vo vzdialenosti $l = 20$ cm od stredu vodivej nenabitej gule polomeru $R = 10$ cm. Nájdite intenzitu elektrického poľa na guli v bode najbližšom k náboju a v bode najvzdialenejšom od náboja.

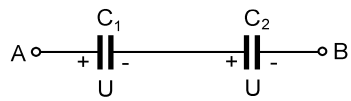
48. Náboj q je umiestnený vo vzdialenosti l od stredu uzemnenej vodivej gule s polomerom a. Nájdite plošnú hustotu indukovaného náboja na guli ako funkciu uhlu φ, ktorý zviera spojnica náboja a stredu gule s ľubovoľným polomerom gule. Aký je celkový náboj na guli? Aký je náboj na časti guľovej plochy, ktorú vidieť z miesta náboja q?

49. Vodivá guľa s polomerom r_1 je umiestnená v strede vodivej guľovej vrstvy s vnútorným polomerom r_2 a vonkajším polomerom r_3 ($r_1 < r_2 < r_3$). Na guli je náboj q a na guľovej vrstve náboj q'. Nájdite intenzitu elektrického poľa a potenciál v celom priestore a rozloženie elektrického náboja.

50. Doskový kondenzátor s vákuom má kapacitu 1 000 pF. Na každej doske je náboj s absolútnou hodnotou 10^{-6} C. Dosky sú vzdialené o d = 1 mm.

a) Aké je napätie medzi doskami?
b) Aká sila pôsobí medzi doskami?
c) Aké bude napätie, ak sa vzdialenosť dosiek zdvojnásobí?
d) Akú prácu treba vykonať pri oddialení dosiek na dvojnásobnú vzdialenosť?

51. Dva kondenzátory, ktorých kapacity sú v pomere $C_1/C_2 = k$, boli spojené do série a nabité na potenciálový rozdiel U. Potom boli spojené paralelne a bolo zistené, že na kondenzátor C_1 prešiel náboj q. Určte hodnoty C_1 a C_2.

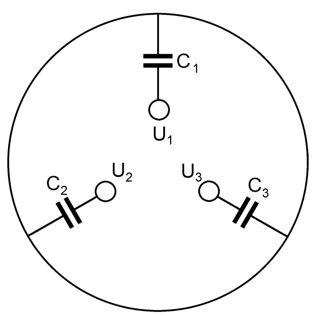


Obr. 52

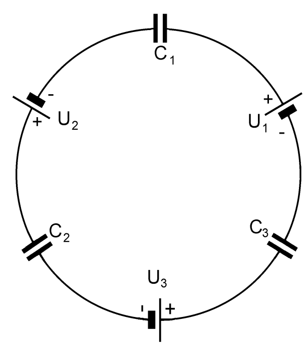
52. Dva kondenzátory C_1 a C_2 sú spojené do série a každý je nabitý na potenciálový rozdiel U (*obr. 52*). Aké napätie bude na paralelnej dvojici, ktorá vznikne spojením svoriek A a B. Aké náboje budú na jednotlivých kondenzátoroch? Ako sa zmení energia kondenzátorov?

53. Dva paralelné valcové vodiče s polomermi a majú osovú vzdialenosť $2d$. Vypočítajte kapacitu na jednotku dĺžky týchto vodičov. Nájdite približný výraz pre kapacitu, ak $a \ll d$.

Poznámka: Najprv dokážte, že ekvipotenciálne plochy dvoch paralelných priamok s dĺžkovými hustotami nábojov $\pm\lambda$ sú valcové plochy a potom použite metódu elektrických zrkadiel.



Obr. 54



Obr. 55

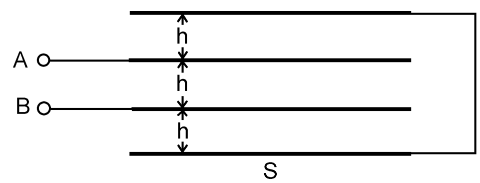
54. Trojvodičový kábel na *obr. 54* má kapacity jednotlivých vodičov oproti plášťu C_1, C_2, C_3. Kapacity medzi vodičmi aj plášťa voči zemi možno zanedbať. Napätia jednotlivých vodičov oproti zemi sú U_1, U_2, U_3 (uzemňovací vodič nie je na obrázku zobrazený). Plášť je neuzemnený. Stanovte potenciál plášťa voči zemi.

55. Stanovte napätia na kondenzátoroch v schéme na *obr. 55*. U_1, U_2, U_3 predstavujú zdroje pevných napätí.

56. Tri rovnaké kovové dosky s plochou S sú uložené planparalelne vo vzájomnej vzdialenosti h. Dosky sú vodivo spojené na svorky A a B podľa *obr. 56*. Vypočítajte kapacitu medzi svorkami A a B.

57. Štyri rovnaké kovové dosky s plochou S sú uložené planparalelne vo vzájomnej vzdialenosti h (*obr. 57*), ktorá je malá vzhľadom na rozmery dosiek. Vonkajšie dosky sú vodivo spojené. Nájdite kapacitu tejto sústavy vzhľadom na svorky A a B.

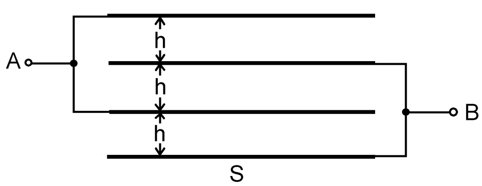
Obr. 56



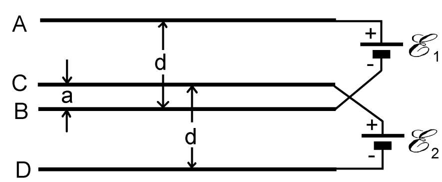
Obr. 57

58. Štyri rovnaké kovové dosky s plochou S sú uložené planparalelne vo vzájomnej vzdialenosti h, ktorá je malá vzhľadom na rozmery dosiek. Dosky sú vodivo prepojené podľa *obr. 58*. Nájdite kapacitu sústavy medzi svorkami A a B.

59. Dve dvojice planparalelných vodivých dosiek AB a CD, každá dvojica vo vzdialenosti d, sú zasunuté medzi seba a pripojené na zdroje pevných napätí $\mathscr{E}_1$ a $\mathscr{E}_2$, podľa *obr. 59*. Nájdite napätie medzi doskami B a C a jeho polaritu. Elektrické pole medzi doskami je homogénne, okrajové efekty možno zanedbať.

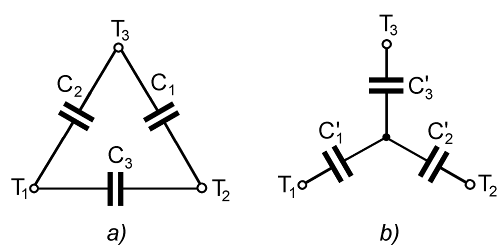


Obr. 58



Obr. 59

60. Tri kondenzátory C_1, C_2 a C_3 zapojené do trojuholníka podľa *obr. 60a*. Nájdite kapacity kondenzátorov C_1', C_2' a C_3' zapojených do hviezdy podľa *obr. 60b* tak, aby výsledné kapacity medzi uzlami T_1, T_2 a T_3 boli v obidvoch prípadoch rovnaké.

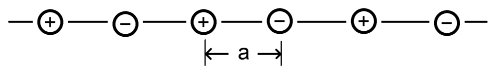


Obr.60

61. Vypočítajte elektrostatickú energiu náboja Q rovnomerne rozloženého v objeme gule s polomerom R.

62. Jadrá ťažkých atómov majú náboj rozložený približne rovnomerne v guľovom objeme s polomerom a (a je polomer jadra) a s objemovou hustotou náboja $\rho = 1{,}33.10^{25}$ C/cm^3. Čomu sa rovná zmena energie jadra uránu s celkovým nábojom $92e$ (e – náboj protónu), ak sa pôvodné jadro rozpadne na dve jadrá s rovnakými polomermi a s rovnakými nábojmi? Po rozpade sa jadrá vzdialia na veľmi veľkú (nekonečnú) vzdialenosť. Toto je energia, ktorá sa uvoľní z jadra U^{235} pri výbuchu atómovej bomby. Odhadnite energiu uvoľnenú na jeden kilogram štiepneho materiálu.

63. Vypočítajte polomer π-mezónu využijúc informáciu, že rozdiel energií nabitého a neutrálneho π-mezónu je $\Delta mc^2 = 4{,}6$ MeV. Tento rozdiel energií predstavuje elektrostatickú energiu nabitého π-mezónu. Predpokladajte, že náboj π–mezónu je rozložený na jeho povrchu a jeho celková hodnota je $1{,}6.10^{-19}$ C.



Obr. 64

64. Lineárna iónová molekula pozostáva z iónov $\pm e$ uložených v rovnakej vzdialenosti a podľa *obr. 64*. Vypočítajte energiu na jeden ión molekuly.

4 ELEKTROSTATICKÉ POLE V DIELEKTRIKU

4.1 POLARIZÁCIA DIELEKTRIKA. VEKTOR POLARIZÁCIE

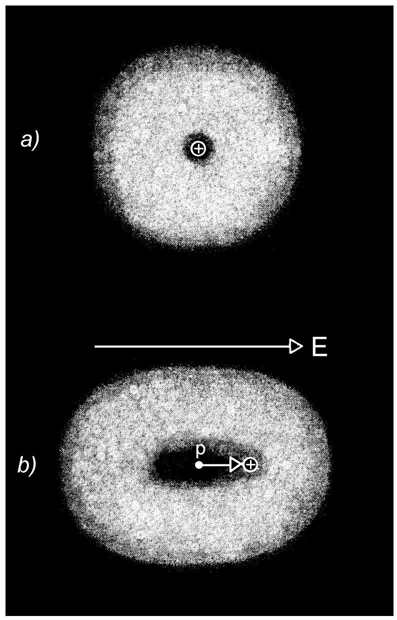
Popri vodivých látkach sa v prírode nachádzajú látky nevodivé, ktoré nazývame **izolanty** alebo **dielektriká**. Sú to látky, v ktorých sa náboje pod účinkom elektrických polí nemôžu pohybovať. Takýmito látkami sú mnohé prírodné materiály, rôzne minerály v kryštalickej aj amorfnej forme, ako napr. kremeň a jantár. Ďalej biologické materiály, ako napr. suché drevo, z plynných látok sú to napríklad inertné plyny a nakoniec látky, ktoré sú cielenými produktmi ľudskej činnosti s dobre definovanou atómovou štruktúrou, ako napr. rozmanité organické aj neorganické umelé hmoty. Najmenej polovica predmetov, ktoré nás obklopujú a tvoria naše životné prostredie, sú nevodivé.

Ak hovoríme o izolantoch, musíme podobne ako pri vodičoch mať na pamäti, že ideálne nevodiče prakticky neexistujú. K veľmi dobrým izolačným prírodným materiálom patria napr. kremeň alebo sľuda, z umelých hmôt napr. teflon a iné polyméry. Ako model pre našu analýzu sú najvhodnejšie práve tuhé polymérne materiály, ktoré sú elektricky homogénne a izotropné (majú rovnaké elektrické vlastnosti v každom bode objemu a vo všetkých smeroch). Okrem takýchto bežných materiálov existuje celá škála veľmi exotických látok, ktoré sa v praxi využívajú na špeciálnejšie než izolačné účely. Sú to napríklad piezoelektriká, feroelektriká, pyroelektriká a i.

Skôr, ako sa začneme hlbšie zaoberať elektrickými pochodmi v dielektrikách, položme si otázku: "Ak do elektrického poľa vložíme dielektrický materiál, ovplyvní pole jeho elektrický stav? A naopak, ovplyvní dielektrikum konfiguráciu elektrického poľa?" Samozrejme, odpoveď je kladná. Dielektrická látka je systémom nábojov, ktoré sú v zložitých atomárnych a molekulárnych väzbách. Elektrické pole bude na tieto väzby pôsobiť silami a bude nejakým spôsobom deformovať rovnovážnu konfiguráciu atómov. Ak je skúmanou dielektrickou látkou napríklad inertný plyn, čo je v podstate súbor navzájom takmer neinteragujúcich guľovo symetrických neutrálnych atómov (*obr. 4.1a*), elektrické pole spôsobí, že sa ťažisko kladného jadra nepatrne posunie v smere poľa a ťažisko záporného elektrónového obalu proti smeru poľa; vzájomné posunutie je δ. Z atómu, ktorý je bez vonkajšieho poľa neutrálny, vznikne takto dipól s nenulovým vonkajším elektrickým poľom (*obr. 4.1b*). Vznik dipólu z neutrálneho guľovosymetrického atómu v elektrickom poli nazývame **elektrónovou polarizáciou atómu**. Tento proces v celom makroskopickom objeme nazývame **elektrónová polarizácia látky**.

Existujú však látky, ktorých stavebné kamene sú z elektrického hľadiska dipóly aj bez prítomnosti elektrického poľa. Takouto látkou je napríklad destilovaná voda. Jej molekuly H_2O, ako sme sa dozvedeli v odseku 2.9.1, sú silné elektrické dipóly. Bez vonkajšieho elektrického poľa jednotlivé dipóly vody vykonávajú intenzívny chaotický tepelný pohyb, takže v každom bode objemu vody a v každom čase sa stredná hodnota elektrického poľa rovná nule a makroskopický objem vody sa javí elektricky neutrálny. Ak ampulku s vodou uložíme do elektrického poľa, jednotlivé dipóly majú tendenciu pod vplyvom točivého účinku poľa natočiť sa do smeru tohto poľa (pozri odsek 2.9.3). Ak by medzi dipólmi nebolo tepelné pôsobenie, každý dipól by sa otočil do smeru vonkajšieho poľa a látka by bola ideálne polarizovaná – všetky dipóly by "pozerali" rovnakým smerom. Takýto stav pri izbovej teplote však zďaleka nenastane a pole vnesie do tepelného chaosu dipólov len veľmi málo poriadku. Stane sa tak len v tej miere, v akej je pomer energie $\boldsymbol{p}.\boldsymbol{E}$ dipólu s momentom $\boldsymbol{p}$ v elektrickom poli intenzity $\boldsymbol{E}$, k energii jeho tepelného pohybu kT, kde k je Boltzmannova konštanta a T je absolútna teplota. Presvedčte sa výpočtom, že pre reálne hodnoty intenzít elektrického poľa pri izbových teplotách je skutočne

$$\frac{pE}{kT} \ll 1$$



Obr. 4.1

V makroskopickom objeme látky sa pod účinkom poľa prejaví istá polarizácia ako výsledok čiastočného pootočenia časti dipólov do smeru elektrického poľa. Tento jav sa nazýva **orientačná polarizácia látky**. Látka je po polarizácii v inom elektrickom stave ako pred ňou, a spätne vplýva aj na elektrické pole v svojom okolí.

Podľa charakteru polarizácie delíme látky na nepolárne a polárne. **Nepolárne látky** sú tie, ktorých stavebné kamene bez vonkajšieho poľa nepredstavujú elektrické dipóly, a naopak, **polárne látky** sú tie, ktoré elektrické dipóly obsahujú aj bez prítomnosti poľa. V prvej skupine látok je polarizácia elektrónová, u druhých predovšetkým orientačná, pričom môže dochádzať aj k elektrónovej, prípadne atómovej polarizácii, čo sa prejaví deformáciou dipólov a zmenou vzájomnej vzdialenosti ich nábojových centier. Všimnite si zásadný rozdiel medzi nenabitým vodičom a nenabitým dielektrikom v elektrickom poli: zatiaľ čo vo vodiči elektróny pod účinkom elektrického poľa opúšťajú svoje miesta v mriežke a usádzajú sa na povrchu vodiča (jav elektrickej indukcie), v dielektriku vznikajú alebo sa orientujú dipóly (jav polarizácie), ale k presunu nábojov v makroskopických objemoch nedochádza, pretože náboje nie sú voľné.

Uvedené polarizačné javy v dielektrikách sú iba kvalitatívnym opisom na takej úrovni, ktorá umožní zaviesť niektoré makroskopické elektrické charakteristiky dielektrických materiálov. Podrobnejšie sa k nim vrátime v časti 4.8 pojednávajúcej o mikrofyzikálnej podstate polarizácie dielektrík. Venujme sa teda najprv makroskopickému pohľadu na elektrické pole v dielektriku.

Polarizačný stav látky, spôsobený účinkom elektrického poľa, treba najprv kvantitatívne opísať. Na tento opis sa zavádza vektorová veličina, ktorú nazývame **vektor elektrickej polarizácie** a budeme ho označovať symbolom $\boldsymbol{P}$. Vektor elektrickej polarizácie je definovaný ako dipólový moment jednotky objemu polarizovanej látky a matematicky ho možno vyjadriť výrazom

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{\Delta\tau} \qquad [\mathrm{C.m^{-2}}] \qquad (4.1)$$

kde $\sum_i \boldsymbol{p}_i$ je celkový dipólový moment objemu $\Delta\tau$ a objem sa v limite blíži k nule. Vektor polarizácie $\boldsymbol{P}$ je teda funkcia súradníc v objeme dielektrika. Ak $\sum_i \boldsymbol{p}_i = 0$, čo môže byť spôsobené tým, že dielektrikum nie je pod vplyvom elektrického poľa, potom vektor polarizácie $\boldsymbol{P} = 0$, t. j. dielektrikum je nepolarizované. U bežných látok podmienkou ich polarizácie je teda prítomnosť elektrického poľa a vektor $\boldsymbol{P}$ je tomu poľu úmerný. Existujú však látky, v ktorých sa polarizácia udrží aj bez prítomnosti elektrického poľa. Sú to napr. feroelektrické, vysoko nelineárne látky s permanentnými dipólovými momentami, ktoré sa našej lineárnej analýze vymykajú.

Existujú aj iné spôsoby matematického vyjadrenia vektora polarizácie. Ak látka obsahuje identické dipólové momenty $\boldsymbol{p}$ a ich objemová koncentrácia je n, potom vektor polarizácie

$$\boldsymbol{P} = n\boldsymbol{p} \qquad (4.2)$$

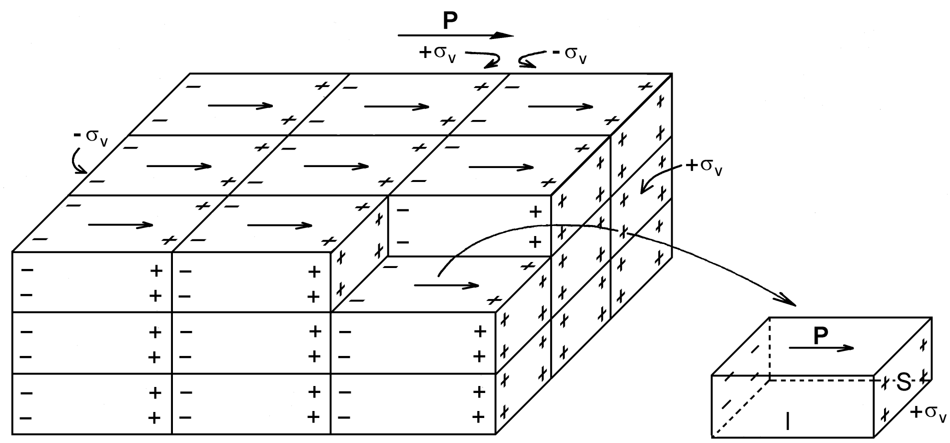
alebo v diferenciálnom tvare

$$\boldsymbol{P} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\tau} \qquad (4.3)$$

Všimnime si, že všetky tri vyjadrenia vektora polarizácie skutočne udávajú objemovú hustotu elektrických dipólových momentov v látke.

Vektor polarizácie je veličina, ktorá nie je priamo prístupná meraniu, a preto sa pokúsime o jej vyjadrenie pomocou ďalších veličín. Prvou z nich je pojem viazaného náboja. Pod viazanými nábojmi budeme rozumieť tie náboje, ktoré sú súčasťami atómov alebo molekúl dielektrika, ktoré sa podieľajú na tvorbe jeho dipólov, a ktoré bez potrhania atómových alebo molekulárnych väzieb nemožno z dielektrika odviesť. Uvažované náboje vo vnútri dielektrika sú rozložené s nejakou objemovou hustotou ρ_v a na ľubovoľnej vnútornej, ale hlavne povrchovej ploche dielektrika s plošnou hustotou σ_v. Plošná hustota σ_v je v jednoduchom vzťahu s vektorom polarizácie.

Pre posúdenie súvisu $\boldsymbol{P}$ a σ_v uvažujme najprv dielektrikum tvaru kvádra na *obr. 4.2* homogénne polarizované pozdĺž jednej z jeho hrán napr. tak, že vektor $\boldsymbol{P}$ smeruje zľava doprava. Objem spolarizovaného dielektrika je plný rovnomerne rozložených rovnakých dipólov, pričom kladné špičky dipólov na pravej povrchovej ploche vytvoria na nej kladný plošný náboj s hustotou $+\sigma_v$. Záporný náboj "chvostíkov" dipólov vo vnútri objemu bude kompenzovaný inými kladnými špičkami vo vnútri, takže homogénne polarizované dielektrikum vo vnútri nevykazuje nijaký viazaný objemový náboj. Na protiľahlej ploche vľavo, kde končia chvostíky rovnakého množstva dipólov ako vpravo, sa vytvorí záporný viazaný plošný náboj $-\sigma_v$. Polarizácia materiálu sa teda prejaví vznikom plošných nábojov na povrchu telesa. Sú to celkom reálne náboje so známymi silovými účinkami, avšak také, že ich nemožno z telesa "sňať". Kváder by svojimi koncami priťahoval "kúsky papyrusu, alebo ebonitovú tyč". Tak sa skutočne správa reálny dielektrický materiál nazývaný **elektret,** ak sa v ňom vytvorí a "zmrazí" permanentný elektrický dipólový moment, teda elektrická polarizácia. Taká polarizácia je, žiaľ, veľmi rýchlo zamaskovaná nachytanou "iónovou špinou" z ovzdušia. Nás ale na našom skúšobnom dielektriku zaujímajú iné veci.

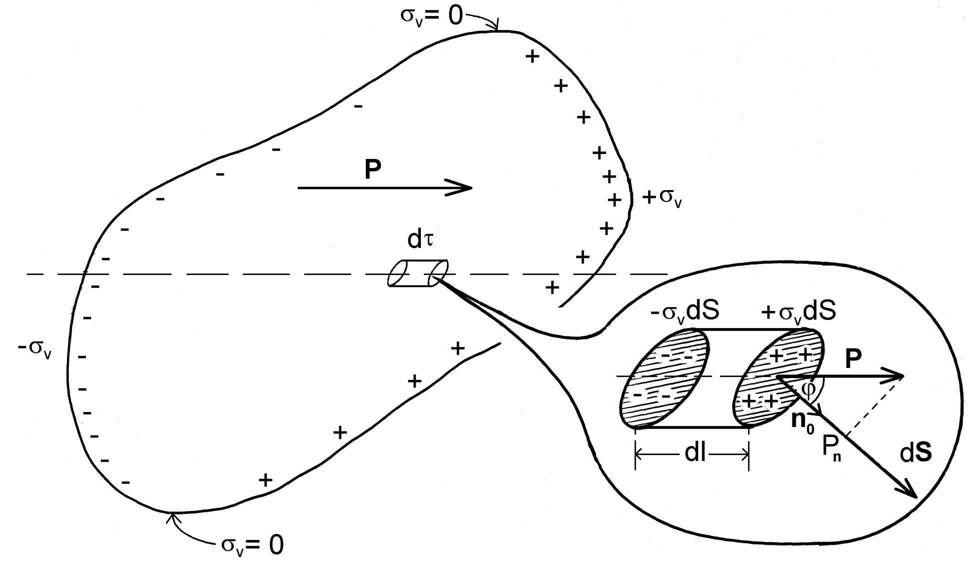


Obr. 4.2

Vo vnútri dielektrika sa polarizáciou na prvý pohľad nič nestalo. Ak ale myslenými ortogonálnymi rovinami dielektrikum rozrežeme, vzniknú väčšie alebo menšie kvádriky, ktoré sú tiež polarizované a na ich protiľahlých plochách sú plošné náboje $\pm\sigma_v$. Pri pohľade na jeden takýto vybraný kvádrik na *obr. 4.2* vidíme, že z elektrického hľadiska je to vlastne dipól smerujúci zľava doprava (v smere polarizácie), s dipólovým momentom veľkosti $p = lS\sigma_v$. Vektor polarizácie v danom kvádriku objemu $\tau = lS$ má veľkosť

$$P = \frac{p}{\tau} = \sigma_v \tag{4.4}$$

Keďže kváder môžeme deliť na ľubovoľne malé kúsky, vektor polarizácie v ľubovoľnom bode objemu má veľkosť $P = \sigma_v$ a má taký smer, že vystupuje z objemu na tej strane, kde je náboj kladný a vstupuje tam, kde je náboj záporný.



Obr. 4.3

Ak by uvažované polarizované teleso malo nepravidelný tvar, treba urobiť všeobecnejšiu úvahu. Nech nepravidelné teleso na *obr. 4.3* je polarizované (nie nutne homogénne) horizontálne smerom doprava. Vyrežme v tomto telese nekonečne malý objem tvaru skoseného nekonečne malého valčeka objemu $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}l\mathrm{d}S\,\cos\varphi$, kde φ je uhol medzi smerom polarizácie (a súčasne osou valčeka) a smerom vonkajšej normály k plôške dS. Na čelných plôškach vyrezaného valčeka sú plošné náboje $\pm\sigma_v$. Valček je tiež "elektrický dipól" smerujúci doprava s dipólovým momentom veľkosti $\mathrm{d}p = \mathrm{d}l\mathrm{d}S\sigma_v$. V mieste elementárneho objemu je teda polarizácia veľkosti

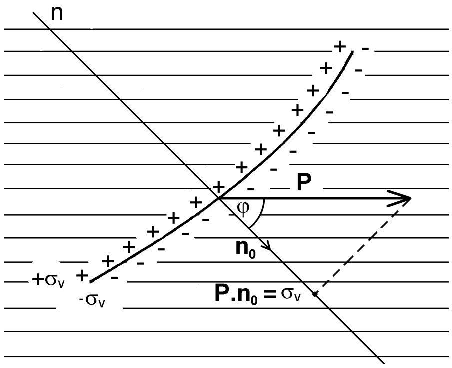
$$P = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\sigma_v}{\cos\varphi} \tag{4.5}$$

Rovnicu (4.5) je výhodnejšie prepísať na tvar

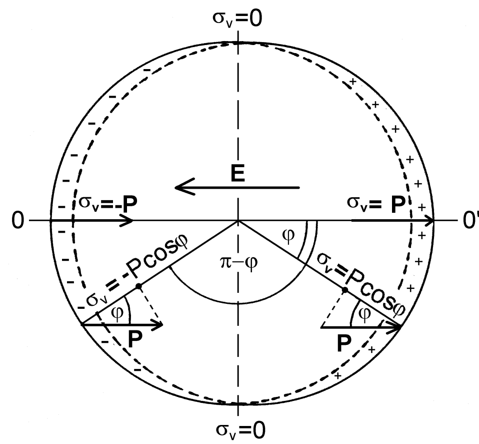
$$\sigma_v = P\cos\varphi = P_n = \boldsymbol{P}.\boldsymbol{n}_0 \tag{4.6}$$

kde P_n je priemet vektora $\boldsymbol{P}$ do smeru normály k plôške dS, presnejšie do smeru vektora d$\boldsymbol{S}$, alebo jednotkového vektora normály $\boldsymbol{n}_0$.

Čo však rovnica (4.6) vyjadruje a aký má zmysel? Rovnica hovorí, že v každom bode dielektrika, ktorým preložíme nejakú rovinnú plochu, sa plošná hustota viazaného náboja rovná normálovej zložke vektora polarizácie. Lenže normála k rovine má dva smery a na jednej strane myslenej plochy, ktorá je reznou plochou dielektrika je náboj kladný a na druhej náboj záporný. Podľa *obr. 4.4* vektor normály $\boldsymbol{n}_0$ smeruje od kladne nabitej strany k zápornej. Na povrchu polarizovaného telesa normála vystupuje z telesa tam, kde je viazaný náboj kladný a vstupuje do neho tam, kde je záporný. Na *obr. 4.5* je znázornená homogénne polarizovaná guľa s vektorom polarizácie $\boldsymbol{P}$, s osou polarizácie OO'. Viazaný náboj na povrchu gule je daný funkčnou závislosťou $\sigma_v = P\cos\varphi$, pre hodnoty φ od 0 až po π. Na póloch gule sú plošné náboje $\sigma_v = \pm P$, na rovníku gule nie je žiadny náboj. Čitateľovi odporúčam vypočítať elektrické pole takejto homogénne polarizovanej gule v jej okolí a vo vnútri (pozri úlohu 73). Bude možno prekvapený, že pole v okolí gule je poľom elektrického dipólu a úloha sa prakticky redukuje na výpočet ekvivalentného dipólového momentu. Vo vnútri gule, podľa očakávania, je pole homogénne a smeruje sprava doľava (proti smeru vektora $\boldsymbol{P}$).



Obr. 4.4



Obr. 4.5

Rovnica (4.6) nemá veľký praktický význam, pretože tak, ako vektor polarizácie, ani viazané náboje nie sú merateľné. Má však teoretický význam, pretože umožňuje sformulovať základný zákon elektrostatiky pre dielektriká. Týmto zákonom je Gaussov zovšeobecnený zákon.

4.2 GAUSSOV ZÁKON V DIELEKTRIKU

Teraz sme konečne pripravení odpovedať na otázku, ako dielektrikum ovplyvní elektrické pole, ktoré ním preniká. Predpokladajme, že nejaké teleso je nabité nábojom $+Q$ (zdôrazňujeme, že ide o voľný náboj) a ponorené do dielektrika. Pod účinkom elektrického poľa sa dielektrikum polarizuje tak, že všetky jeho dipóly budú mieriť od nabitého telesa. Najprehľadnejšia je situácia bezprostredne v okolí telesa v prvej dipólovej vrstve, ktorá je schematicky zobrazená na *obr. 4.6*. Ak okolo telesa zvolíme Gaussovu plochu S tak, že bude pretínať každý vzpriamený dipól v polovici, celkový uzavretý náboj bude: voľný náboj Q plus celkový viazaný náboj Q_v záporných dipólových koncov obopnutých plochou S. Tieto zvyšky dipólov vytvárajú na ploche nábojovú hustotu $-\sigma_v$. Tok intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ plochou S je viazaný podľa vzťahu (2.43) s celkový nábojom voľným aj viazaným, teda

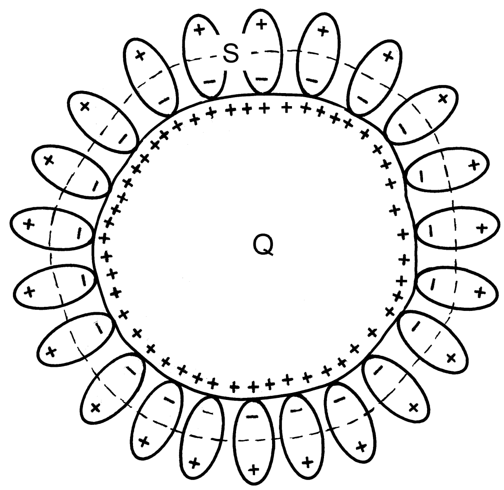
$$\oint_S \boldsymbol{E}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q + Q_v}{\varepsilon_0} \tag{4.7}$$

kde

$$Q_v = -\oint_S \sigma_v \mathrm{d}S \tag{4.8}$$

je celkový viazaný náboj daný integráciou $-\sigma_v$ po ploche S. Celkový náboj uzavretý plochou S je menší ako náboj Q a má veľkosť

$$\mathrm{Q}_{celk} = Q + \left(-\oint_S \sigma_v \mathrm{d}S \right) < Q$$



Obr. 4.6

Tok intenzity elektrického poľa plochou S z náboja Q_{celk} podľa výrazu (4.7) je v dielektriku menší, ako by bol z voľného náboja Q rovnakou plochou S vo vákuu. **Intenzita elektrického poľa v dielektriku za inak rovnakých podmienok je menšia ako vo vákuu**. Rovnicu (4.7) môžeme prepísať v tvare

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q - \oint_S \sigma_v \mathrm{d}S}{\varepsilon_0}$$

alebo s ohľadom na (4.6) a (4.8) do tvaru

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q - \oint_S \boldsymbol{P}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\varepsilon_0}$$

Vzhľadom na to, že obidva integrály v poslednom výraze sú cez rovnaký integračný obor, možno túto rovnicu upraviť na tvar

$$\oint_S (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}).\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \tag{4.9}$$

4.2.1 Vektor D

Rovnica (4.9) je zjednodušeným zápisom predchádzajúcich dvoch výrazov, teda aj výrazu (4.7), a v tom je vlastne jej najväčší význam. Vektor pod integrálom sa označuje symbolom $\boldsymbol{D}$ a v našej literatúre sa nazýva **vektor elektrickej indukcie *D***, v anglickej "electric displacement $\boldsymbol{D}$" a v nemeckej "der elektrische Verschiebungsvektor $\boldsymbol{D}$", teda

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad [\mathrm{C.m^{-2}}] \tag{4.10}$$

Rozpaky, ktoré uvedené názvy vyvolávajú, sú úplne oprávnené. Vektor $\boldsymbol{D}$ je súčtom vektora polarizácie $\boldsymbol{P}$ a vektora intenzity poľa $\boldsymbol{E}$ vynásobeného elektrickou konštantou poľa ε_0. Aj skúsenému fyzikovi spôsobuje ťažkosti si pod týmto vektorom niečo konkrétneho predstaviť. Anglický názov, ktorý zaviedol ešte Maxwell, a podobne aj nemecký, vyjadrujú skutočnosť, že pri polarizácii dielektrika dochádza k "posunu" nábojov v rámci jedného atómu alebo molekuly v smere pôsobiaceho poľa. V starších učebniciach nájdete úporné snahy autorov vysvetľovať fyzikálny zmysel $\boldsymbol{D}$ pomocou rôznych "ihlových" a "diskových" dutín v dielektriku, avšak bez presvedčivého úspechu. Jedno však tomuto vektoru nemožno uprieť, a to fakt, že pomocou neho sa dá napísať jednoduchá rovnica

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{D}.\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = Q} \tag{4.11}$$

ktorá hovorí, že tok vektora elektrickej indukcie $\boldsymbol{D}$ uzavretou plochou S sa rovná jednoducho tomu voľnému náboju, ktorý plocha uzatvára. Rovnica (4.11) je **zovšeobecnený Gaussov zákon pre dielektrikum v integrálnom tvare**. Vo vákuu, kde sa nemá čo posúvať, ani polarizovať, $\boldsymbol{P} = 0$ a

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{4.12}$$

Tam prejde výraz (4.11) a odpovedajúce predchádzajúce výrazy na Gaussov zákon vo vákuu. Čoskoro tiež ukážeme, že v jednoduchých bežných dielektrikách sa vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{D}$ líšia iba konštantným rozmerovým súčiniteľom. Rozmer vektora $\boldsymbol{D}$ je $\mathrm{C.m^{-2} = A.m^{-2}.s}$ a súčasne je to jeho meracia jednotka. Vidíme, že je to rozmer plošnej hustoty nábojov.

Na margo užitočnosti vektora $\boldsymbol{D}$ treba povedať, že on iba umožňuje opísať základné zákony elektromagnetizmu jednoduchými rovnicami, a preto mu netreba pripisovať väčší fyzikálny význam, než si zaslúži.

Rovnica (4.11) spolu s Gaussovou matematickou vetou nám ponúka možnosť vyjadrenia lokálnej vlastnosti poľa vektora $\boldsymbol{D}$, teda jeho divergenciu. Ak pripustíme, že náboj Q môže byť v objeme τ uzavretom plochou S (teda aj v dielektriku) rozložený s nejakou priestorovou hustotou ρ, takže $Q = \int_\tau \rho \, \mathrm{d}\tau$, potom užitím Gaussovej vety dostaneme hľadaný lokálny vzťah

$$\boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho} \tag{4.13}$$

Je to **zovšeobecnený Gaussov zákon** v dielektriku, jeho diferenciálna forma. Spolu s rovnicou (4.11) predstavuje jeden zo štyroch základných zákonov elektromagnetizmu, je to jedna z Maxwellových rovníc v najvšeobecnejšom tvare.

Dosaďme teraz spätne do posledného výrazu vyjadrenie vektora $\boldsymbol{D}$ podľa (4.10) a vypočítajme z neho divergenciu vektora $\boldsymbol{E}$. Po úprave dostaneme

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho - \operatorname{div} \boldsymbol{P}}{\varepsilon_0}$$

Podľa rozmeru čitateľa na pravej strane vidíme, že popri objemovej hustote voľného náboja tu vystupuje nejaká objemová hustota nábojov $-\operatorname{div} \boldsymbol{P}$. Nenulovú divergenciu vektora polarizácie môžu vyvolať iba viazané objemové náboje v nehomogénnom dielektriku (pozri úlohu 68), teda uvažovaný člen musí predstavovať objemovú hustotu viazaného náboja ρ_v, takže

$$\rho_v = -\operatorname{div} \boldsymbol{P} \tag{4.14}$$

V bežných dielektrikách sa objemová hustota viazaného náboja rovná nule, o čom sa čitateľ môže presvedčiť napr. vyriešením úloh 69 alebo 72.

4.3 PERMITIVITA A ELEKTRICKÁ SUSCEPTIBILITA DIELEKTRIKA

V predchádzajúcich odsekoch sme zaviedli dve nové vektorové veličiny pre opis elektrických vlastností dielektrík – vektor $\boldsymbol{P}$ a vektor $\boldsymbol{D}$. Našou ďalšou úlohou je nájsť vzájomný súvis medzi troma veličinami $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{E}$. Pre tento účel preskúmame elektrické pole v doskovom kondenzátore, do ktorého je zasunutá doska dielektrika so symetrickými vákuovými, prípadne vzduchovými štrbinami, ako na *obr. 4.7*. Predpokladajme, že kondenzátor bol nabitý a na jeho doskách je plošná hustota nábojov $\pm\sigma$. Ak zanedbáme okrajové efekty, potom v kondenzátore sú tri homogénne elektrické polia kolmé na roviny dosiek. Predovšetkým je to pole E_0 v štrbine, ktoré budia náboje $\pm\sigma$ rozložené na kovových doskách kondenzátora. Smeruje na obrázku dole a jeho veľkosť

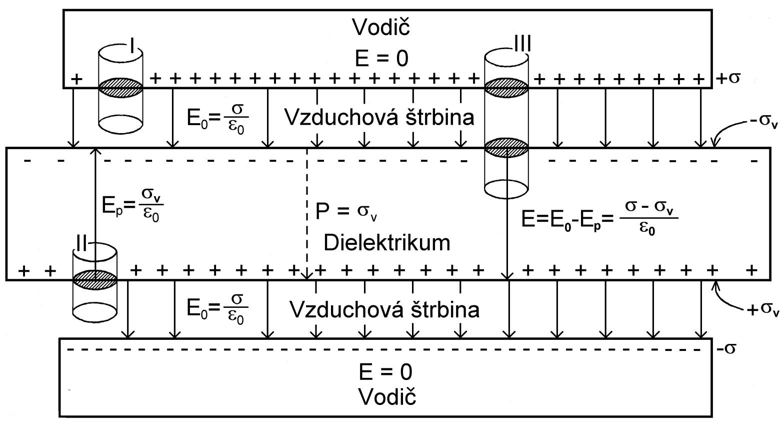
$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{4.15}$$

plynie z aplikácie Gaussovho zákona na valcovú uzavretú plochu I. Také isté pole by bolo aj v prázdnom kondenzátore. Pod účinkom tohto poľa sa dielektrikum spolarizuje, vektor polarizácie $\boldsymbol{P}$ v dielektriku smeruje dole (v štrbine $\boldsymbol{P} = 0$), a na povrchu dielektrickej dosky vzniknú viazané náboje $\pm\sigma_v$. Viazané náboje vytvoria v dielektriku polarizačné pole E_p, ktorého veľkosť plynie z aplikácie Gaussovho zákona na valcovú uzavretú plochu II, smeruje nahor a má hodnotu

$$E_p = \frac{\sigma_v}{\varepsilon_0} \tag{4.16}$$

Výsledné elektrické pole E v dielektriku je dané superpozíciou polí podľa výrazov (4.15) a (4.16). Aplikáciou Gaussovho zákona na uzavretú plochu III dostaneme

$$E = E_0 - E_p = \frac{\sigma - \sigma_v}{\varepsilon_0} < E_0 \tag{4.17}$$



Obr. 4.7

Vidíme, že **intenzita elektrického poľa v dielektriku je skutočne menšia ako vo vákuu**, v súhlase s naším tvrdením v predchádzajúcom odseku. Túto skutočnosť zistil už M. Faraday v roku 1837, pri meraní napätia na kondenzátore s dielektrikom a bez neho. Pomer intenzity poľa vo vákuu a v dielektriku

$$\varepsilon_r = \frac{E_0}{E} = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_v} > 1 \tag{4.18}$$

je pre obyčajné lineárne homogénne a izotropné dielektriká bezrozmerná makroskopická "konštanta" závislá od mnohých faktorov, ako je teplota, frekvencia poľa, tlak atď. a nazýva sa **relatívna permitivita** dielektrika. Zavedením relatívnej permitivity, ako materiálovej konštanty dielektrík, sa analýza polí v látkach neobyčajne zjednodušuje. Pole v dielektriku

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \tag{4.19}$$

ako vidíme, možno vyjadriť iba pomocou voľných nábojov, ak elektrickú konštantu poľa ε_0 nahradíme konštantou

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \qquad [\mathrm{F.m^{-1}}] \tag{4.20}$$

ktorú nazývame **permitivita dielektrika**. Teda

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{4.21}$$

čo je vzťah formálne podobný vzťahu (4.15). Pomocou permitivity konečne možno vyjadriť aj vektor polarizácie prostredníctvom intenzity poľa. Využitím vzťahov (4.6), (4.18) a (4.19) dostaneme pre vektor polarizácie veľkosť

$$P = \sigma_v = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = (\varepsilon - \varepsilon_0)E = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

Vektor polarizácie $\boldsymbol{P}$ má smer budiaceho poľa $\boldsymbol{E}$, takže možno napísať aj vektorový vzťah

$$\boldsymbol{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \kappa \boldsymbol{E} \tag{4.22}$$

kde

$$\kappa = \varepsilon_r - 1 \tag{4.23}$$

je ďalšia bezrozmerná materiálová konštanta nazývaná **elektrická susceptibilita**, ktorá v prípade homogénnych izotropných materiálov je kladné číslo. Podľa vzťahu (4.22) je vektor polarizácie úmerný vektoru intenzity elektrického poľa, a to platí pre bežné dielektriká až takmer po hranicu ich elektrickej pevnosti (po hranicu elektrického prierazu).

Nakoniec aj vektor elektrickej indukcie možno vyjadriť cez intenzitu budiaceho poľa. Ak vo výraze (4.10) dosadíme za $\boldsymbol{P}$ podľa výrazu (4.22) dostaneme

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{4.24}$$

V obyčajných dielektrikách vzťah medzi $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{D}$ je skutočne neobyčajne jednoduchý lineárny vzťah. Stojí za povšimnutie, že v uvažovanom kondenzátore vektor elektrickej indukcie má všade veľkosť

$$D = \sigma$$

teda aj v štrbine, aj v dielektriku, a smeruje od kladnej kovovej dosky k zápornej. Vektor $\boldsymbol{D}$ vytvára v jednoduchom dielektriku formálne rovnaké pole ako pole vektora $\boldsymbol{E}$. Tak napríklad na rozhraní vodiča s dielektrikom je vektor $\boldsymbol{D}$ kolmý na povrch vodiča a jeho veľkosť je $D_n = \sigma$, kde σ je plošná hustota voľného náboja na vodivej ploche. Z toho plynie, že aj vektor $\boldsymbol{E}$ je kolmý na povrch a jeho hodnota na povrchu je

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{4.25}$$

čo je vlastne Coulombova veta pre nabitý vodič ponorený v dielektriku. V spomínaných obyčajných dielektrikách aj Gaussov zákon možno napísať pre tok intenzity poľa $\boldsymbol{E}$ v dôverne známom integrálnom tvare

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon} \tag{4.26}$$

alebo v diferenciálnom tvare

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4.27}$$

Tieto výrazy sa odlišujú od výrazov pre vákuum iba vzájomnou zámenou ε_0 a ε.

4.4 DIELEKTRICKÉ MATERIÁLY

Príroda nám v svojej nekonečnej mnohotvárnosti poskytuje aj materiály, ktoré nie sú také jednoduché (a to je na nej fascinujúce!). Čitateľovi je možno známe, že najprirodzenejší stav čistých minerálnych látok v prírode je kryštalický stav, na ktorý sa látky menia v priebehu vekov. Sklenené vázy z staroegyptských hrobiek sa v priebehu tisícročí zmenili na kryštálové. Očarúvajú nás krásne kryštály kremíka SiO_2 nazývané kremeň, ktoré v podzemí rástli do svojich bizarných tvarov milióny rokov. Okrem neho sú známe nespočetné množstvá iných kryštalických nerastov, a dnes aj umelo pestovaných kryštálov. Tieto dielektrické látky sú vysoko anizotropné v svojich mechanických, ale aj v elektrických vlastnostiach, takže majú v rôznych smeroch rôzne polarizačné vlastnosti. Je len prirodzené, že elektrické vlastnosti takých látok nemôžu byť vyjadrené púhym číslom. Smerová závislosť (anizotropia) elektrických vlastností sa namiesto čísla vyjadruje tenzorom permitivity (alebo susceptibility) druhého rádu.

Niektoré látky majú objemovú nehomogenitu a tá sa prejaví funkčnou priestorovou závislosťou permitivity. Sú aj také látky, ktorých permitivita závisí od intenzity elektrického poľa, nazývané nelineárne, a nakoniec látky s elektrickou hysterézou, také, že ich polarizačný stav pri rovnakom budiacom elektrickom poli môže byť rôzny. Pre také látky napr. $\operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E})$ nie je to isté ako $\varepsilon\operatorname{div}\boldsymbol{E}$, t. j.

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} \neq \varepsilon \operatorname{div}\boldsymbol{E}$$

Vzťahy (4.25) až (4.27) pre takéto látky samozrejme neplatia alebo platia obmedzene. Pri nich treba vychádzať zo všeobecných formulácií Gaussovho zákona (4.11) a (4.13). V tabuľke 4 uvádzame klasifikáciu dielektrík podľa štruktúry a typu polarizácie.

Tabuľka 4

Typ dielektrika	Permitivita ε_r	Typ polarizácie
1. Plynné dielektriká	1,000 2 – 1,006	elektrónová
2. Nepolárne kvapaliny a tuhé dielektriká neobsahujúce ióny	1,8 – 2,3	detto
3. Polárne kvapaliny polárne polyméry	3 – 81	elektrónová a orientačná
4. Sklá Iónové kryštály Dipólové kryštály	3 – 20 4 – 300 10 – 300	elektrónová, iónová pružná polarizácia, elektrónová a orientačná
5. Iónové kryštály s poruchami	600 – 3 000	elektrónová, iónová pružná polarizácia
6. Feroelektriká (seignetoelektriká)	200 – 100 000	spontánna polarizácia

Komentár k tabuľke 4: Iónové kryštály sú kryštály s prevažne iónovým charakterom chemických väzieb. Typickými reprezentantmi sú halogenidy prechodných prvkov, ako napr. NaCl, LiCl, KBr a iné. Iónové kryštály s poruchami majú porušenú kryštalickú mriežku chýbajúcimi alebo cudzími atómami. Seignetoelektriká, alebo dnes častejšie nazývané feroelektriká, sú materiály s vysokou relatívnou permitivitou spôsobenou prítomnosťou samovoľne (spontánne) spolarizovaných oblastí (domén) existujúcich bez prítomnosti elektrického poľa. V tomto ohľade sa feroelektriká podobajú na feromagnetiká. O typoch polarizácie uvedených v tabuľke bude pojednané v odseku 4.8.

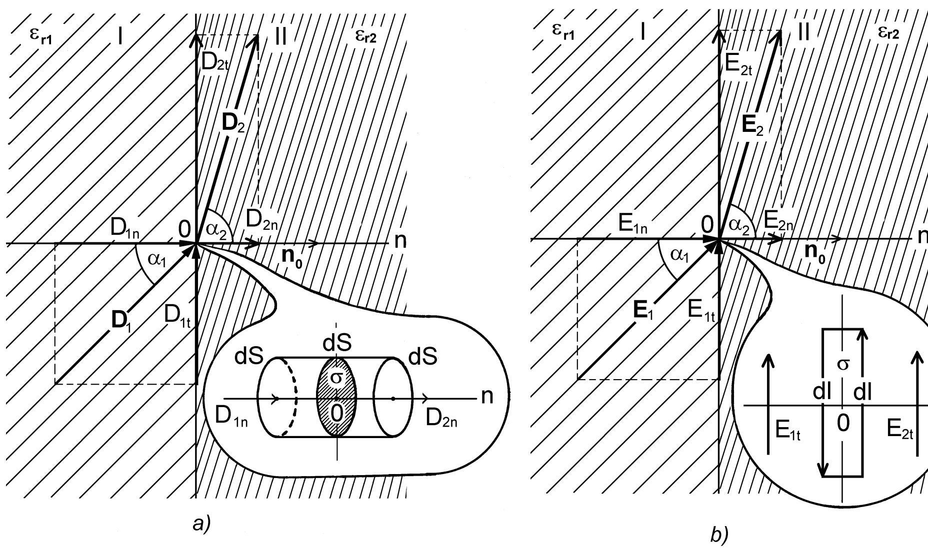
Tabuľka 5

Materiál	Permitivita ε_r	Elektrická pevnosť $\times 10^6$ V/m
Vákuum	1	∞
Vzduch	1,00059	3
Voda	81	–
Etylalkohol	26	–
Papier	3,5	14
Sľuda	5,4	160
Jantár	2,7	90
Porcelán	6,5	4
Mramor	7 – 8	3,5 – 16
Kremeň (tavený)	3,8	47 – 67
Sklo (pyrex)	4,5	13
Bakelit	4,8	12
PMMA (plexisklo)	2,7 – 3,2	11 – 13
Polyetylén	2,3	50
Polystyrén	2,6	25
Teflon	2,1	60
Neoprén	6,9	12
Kryštál NaCl	5,9	15
TiO	100	6

V tabuľke 5 sú uvedené vybrané dielektrické materiály, ich relatívne permitivity a elektrické pevnosti. Pod elektrickou pevnosťou materiálu rozumieme maximálnu prípustnú intenzitu elektrického poľa, nad ktorou sa v materiále zvyšuje nebezpečie elektrického prierazu. Údaje platia pre izbovú teplotu (cca pre 300 K), pre statické polia a boli prevzaté z Handbook of Chemistry and Physics, Cleveland (Ohio), 1955. Permitivity niektorých materiálov v striedavých elektrických poliach sú uvedené v tabuľke 17.

4.5 ELEKTRICKÉ POLE NA ROZHRANÍ DVOCH PROSTREDÍ. HRANIČNÉ PODMIENKY

Pri výpočte elektrostatického poľa v dielektriku treba zvláštnu pozornosť venovať poľu na rozhraní dvoch dielektrík a na rozhraní vodiča s dielektrikom. Tieto okrajové alebo hraničné podmienky, treba stanoviť aj s ohľadom na riešenie zložitých teoretických problémov elektrostatiky s využitím Laplaceovej rovnice. Pri prechode z jedného prostredia do druhého, keď sa skokom mení relatívna permitivita materiálu z hodnoty ε_{r1} na hodnotu ε_{r2}, sa budú skokom meniť aj vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{D}$, a to ich veľkosti aj smery.



Obr. 4.8

Uvažujme rozhranie dvoch dielektrík v bode 0 a v jeho nekonečne malom okolí na *obr. 4.8a*, v ktorom je nenulové elektrické pole dané vektormi $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ na jednej a druhej strane rozhrania, a im zodpovedajúce vektory $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ a $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{D}_2$. Pre všeobecnosť predpokladajme, že na rozhraní je rozložený voľný plošný náboj s hustotou σ. Nech je n normála k rozhraniu a $\boldsymbol{n}_0$ jednotkový vektor normály smerujúci z prostredia I do prostredia II. Rozložme v bode 0 v oblasti I vektor $\boldsymbol{D}_1$ na normálovú zložku D_{1n} pozdĺž normály k rozhraniu a tangenciálnu zložku D_{1t}. Podobne v tom istom bode sprava, v oblasti II, rozložme $\boldsymbol{D}_2$ na zložky D_{2n} a D_{2t}. Ak okolo bodu 0 vytvoríme nekonečne malý valček so základňami dS (valček má nulovú dĺžku), môžeme naň aplikovať zovšeobecnený Gaussov zákon. Pre normálovú zložku vektora $\boldsymbol{D}$ získame vzťah

$$D_{2n}\,\mathrm{d}S - D_{1n}\,\mathrm{d}S = \sigma \mathrm{d}S$$

alebo jednoducho

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \tag{4.28}$$

Aplikácia rovnakého postupu na tangenciálnu zložku nevedie k výsledku, treba sa pokúsiť o dráhový integrál po uzavretej dráhe. Lenže dráhový integrál pre vektor $\boldsymbol{D}$ nie je určený. Našťastie, dráhový integrál intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ po uzavretej dráhe nezávisí od prostredia, a aj v dielektriku sa rovná nule. Aplikujme teda tento princíp na nekonečne malú obdĺžnikovú slučku na *obr. 4.8b* s výškou dl tesne na rozhraní. Pre tangenciálne zložky vektora $\boldsymbol{E}$ po uzavretej slučke (ktorej šírka je v skutočnosti nulová) môžeme napísať

$$E_{2t}\,\mathrm{d}l - E_{1t}\,\mathrm{d}l = 0$$

alebo

$$E_{2t} - E_{1t} = 0 \tag{4.29}$$

Pretože rovnice (4.28) a (4.29) patria spolu, napíšeme ich ešte raz

$$\begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= \sigma \\ E_{2t} - E_{1t} &= 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

a nazveme ich **hraničné** alebo **okrajové podmienky** pre vektory elektrického poľa. Ich zvláštnosťou je, že platia úplne univerzálne v ľubovoľnom elektromagnetickom poli. Podľa nich sa rozdiel normálových (kolmých) zložiek vektora elektrickej indukcie rovná plošnému voľnému náboju σ na rozhraní a tangenciálne (dotyčnicové) zložky sú na oboch stranách rozhrania rovnaké. Čoskoro preskúmame niektoré zaujímavé špeciálne prípady.

Nuž, a ako sa správa na rozhraní dvoch dielektrík vektor polarizácie? Túto otázku sme vlastne zodpovedali v odseku 4.1, vzťahom (4.6). Ak reznou plochou v dielektriku je skutočné rozhranie dvoch prostredí, ako napr. na *obr. 4.9*, potom s využitím vzťahu (4.6) pre normálové zložky vektora polarizácie platí

$$P_{2n} - P_{1n} = \sigma_{v1} - \sigma_{v2} = -\sigma_v \tag{4.31}$$

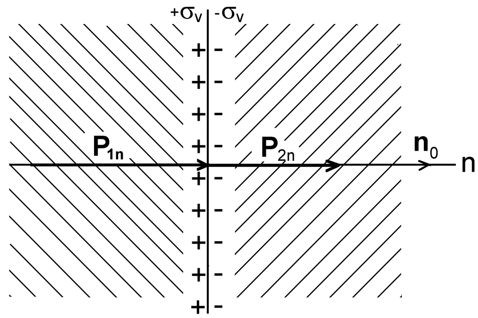
kde $\sigma_v = \sigma_{v2} - \sigma_{v1}$ je výsledná plošná hustota viazaného náboja na rozhraní. Vidíme, že ak $\sigma_{v1} = \sigma_{v2}$, potom aj $P_{1n} = P_{2n}$, a teda nejde o skutočné dielektrické rozhranie, ide iba o myslenú reznú plochu dielektrikom.

Posúďme dva špeciálne prípady:

1. **Na rozhraní nie sú žiadne voľné náboje**, teda $\sigma = 0$. V tom prípade prvú z okrajových podmienok môžeme napísať v tvare

$$\varepsilon_{r2}E_{2n} = \varepsilon_{r1}E_{1n}$$

Ak druhú okrajovú podmienku vydelíme touto rovnicou a uvážime, že



Obr. 4.9

$$\frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \operatorname{tg}\alpha_1 \qquad\qquad \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = \operatorname{tg}\alpha_2$$

môžeme napísať

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \tag{4.32}$$

Rovnica (4.32) sa nazýva **rovnica lomu elektrických siločiar**. V danom prostredí uhol lomu je úmerný relatívnej permitivite dielektrika (tg $\alpha \sim \varepsilon_r$).

2. **Jedno z prostredí**, napr. prostredie I, **je vodič**. Vo vodiči sa intenzita poľa rovná nule, teda $D = E = 0$ a tiež $E_{1t} = 0$. Z toho okamžite plynie, že $E_{2t} = 0$, t. j. na povrchu vodiča sa tangenciálna zložka intenzity poľa rovná nule. Je to známy fakt z kapitoly 3 venovanej vodičom. Z prvej okrajovej podmienky plynie, že

$$D_{2n} = \sigma \tag{4.33}$$

čo však tiež nie je nič nového – je to Coulombova veta v dielektriku [pozri vzťah (4.25)]. Tieto závažné fakty a ich súvis s hraničnými podmienkami svedčia o tom, že hraničné podmienky sú efektívnym nástrojom teórie elektromagnetického poľa.

4.6 ENERGIA ELEKTRICKÉHO POĽA V DIELEKTRIKU

Pri výpočte energie nábojov v dielektriku a energie elektrického poľa si treba všimnúť niektoré skutočnosti, ktoré výpočet energie komplikujú. Najprv treba posúdiť otázku síl, ktoré pôsobia medzi dvoma bodovými nábojmi v dielektriku. Treba si uvedomiť, že dielektrikum pozostáva tiež z nábojov, a preto otázka o silovom pôsobení dvoch vybraných nábojov sa stáva veľmi problematickou. V mnohých knihách sa pre silové pôsobenie takýchto nábojov bez uváženia napíše modifikovaný Coulombov zákon

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1q_2}{r^3}\boldsymbol{r}$$

v ktorom ε_r má charakterizovať prítomnosť prostredia. Autori často zabudnú na skutočnosť, že ε_r je makroskopická konštanta, ktorá v mikrosvete nemá nijaký význam. Taký zákon nemožno použiť napr. pre silové pôsobenie dvoch blízkych iónov v látke. Možno ho snáď použiť pre nejaké relatívne veľké nabité gule ponorené v kvapalnom dielektriku a umiestnené vo veľkej vzdialenosti od seba, inak povedané, pre makroskopické systémy. Sila vzájomného pôsobenia medzi guľami je potom ε_r-krát menšia ako sila medzi tými istými guľovými nábojmi vo vákuu. V tuhých látkach Coulombov zákon vôbec nevystihuje silové pôsobenie medzi guľami, pretože neberie do úvahy rôzne mechanické tlaky, prípadne točivé momenty.

Podobný, nič nehovoriaci vzťah, je aj výraz pre energiu dvoch bodových nábojov v dielektriku. V interakcii nie sú iba dva vybrané náboje, ale všetky náboje v okolí bez ohľadu na to, či ich považujeme za voľné, alebo tie, ktoré patria dielektriku. Všetky výrazy, ktoré sme napísali pre energiu sústavy bodových nábojov platia vtedy, ak do výpočtu zahrnieme aj tie náboje, ktoré patria k dielektriku, a samozrejme vzťahy už netreba korigovať žiadnou konštantou ε_r.

Keďže otázka energie nabitého telesa na mikroskopickej úrovni je veľmi zložitá, radšej sa vzdáme presného vyjadrenia energie sústavy bodových nábojov v látke a pokúsime sa o iný prístup. Budeme predpokladať, že dielektrikum je spojité kontinuum, v ktorom je definovaná objemová hustota ρ voľných nábojov rozložených v nejakom objeme τ. Pri takomto pohľade na dielektrikum ho možno charakterizovať permitivitou ako štatistickou veličinou, ktorá je zviazaná so strednou intenzitou poľa voľných nábojov v látke. Vyjdeme zo vzťahu (3.32) pre energiu spojitého rozloženia nábojov, ktorý platí aj v dielektriku. Nech V je stredný potenciál v uvažovanom bode objemu τ, potom

$$W = \frac{1}{2}\int_{\tau} \rho V \mathrm{d}\tau$$

kde ρ je hustota voľných nábojov.

Hustotu voľných nábojov ρ vyjadríme zovšeobecneným Gaussovým zákonom $\rho = \mathrm{div}\boldsymbol{D}$ a využijeme operátorovú identitu

$$\mathrm{div}(V\boldsymbol{D}) = V\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} + (\mathrm{grad}\,V).\boldsymbol{D}$$

Postupom podobným ako v odseku 3.7.2 dostaneme pre energiu výraz

$$W = \frac{1}{2}\left(\oint_{S\to\infty} V\boldsymbol{D}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\tau\to\infty} \boldsymbol{E}.\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau \right)$$

Prvý integrál sa rovná nule z rovnakých dôvodov ako vo vákuu, takže konečný výraz pre energiu je tvaru

$$W = \frac{1}{2}\int_{\tau\to\infty} \boldsymbol{E}.\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau = \int_{\tau\to\infty} w_{el}\mathrm{d}\tau \tag{4.34}$$

Veličina $$w_{el} = \frac{\boldsymbol{E}.\boldsymbol{D}}{2} \qquad [\mathrm{J.m^{-3}}] \tag{4.35}$$

je hustota energie elektrického poľa voľných nábojov v dielektriku, aj mimo neho. Výraz platí všeobecne pre všetky prostredia včítane vákua. Vo vákuu, kde $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$, prejde na tvar (3.35). V prípade lineárnych izotropných a homogénnych dielektrík, v ktorých $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, nadobudne tvar

$$w_{el} = \frac{\varepsilon E^2}{2} \tag{4.36}$$

V tomto tvare sa hustota energie vyjadruje najčastejšie, pretože väčšina v praxi sa vyskytujúcich dielektrík sú jednoduché materiály. Avšak výraz (4.35) je najvšeobecnejší, pretože platí ako pre bežné, tak aj pre nelineárne a anizotropné látky, v ktorých vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{D}$ nemusia mať rovnaký smer.

Na energiu elektrického poľa v dielektriku je možný ešte iný pohľad, ktorý zahŕňa aj náboje samotného dielektrika, teda všetky náboje, uložené vo vákuu. V tom prípade analýza, podobná už uvedenej, vedie k výrazu pre hustotu energie v tvare

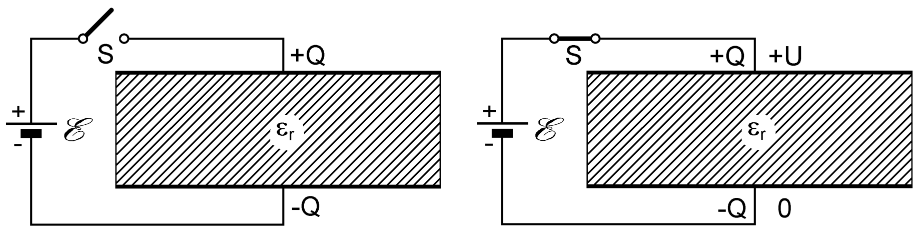
$$w_{el} = \frac{\varepsilon_0 E_{cel}^2}{2}$$

kde E_{cel} je celková intenzita poľa v priestore budená voľnými aj viazanými nábojmi – jednoducho všetkými nábojmi v priestore. Je zrejmé, že táto hustota energie je väčšia ako hustota daná výrazmi (4.35) alebo (4.36), pretože zahŕňa aj vnútornú energiu skrytú v samotnom dielektriku.

4.7 KONDENZÁTOR S DIELEKTRIKOM. PREMENY ENERGIE V KONDENZÁTORE A SILY PÔSOBIACE NA DIELEKTRIKUM

Nabíjanie kondenzátora zo zdroja elektromotorického napätia je zložitý proces, na ktorom sa zúčastňuje odpor spojovacích vodičov, ich indukčnosť, ako aj vodivostné vlastnosti dielektrika medzi doskami kondenzátora. Takýto proces sa vyznačuje strmým časovým nábehom napätia na kondenzátore a následným oscilačným priebehom s rýchlym útlmom na hodnotu napätia zdroja. Tento proces nazývame prechodový jav a budeme sa ním zaoberať neskôr. V tomto odseku nás budú zaujímať zmeny energie kondenzátora, ku ktorým dôjde v prípade, ak sa dielektrikum z kondenzátora vytiahne (odstráni), alebo naopak, sa do neho vloží.

Predpokladajme teda, že nejaký kondenzátor, najlepšie doskový, ktorý má bez dielektrika kapacitu C_0, bol naplnený homogénnym dielektrikom s permitivitou ε_r a bol nabitý do ustáleného stavu zo zdroja elektromotorického napätia $\mathscr{E} = U$. Budeme sledovať, ako sa mení energia kondenzátora, ak dielektrikum spomedzi dosiek vyberieme. Pritom budeme rozlišovať dva prípady, ktoré sú zobrazené na *obr. 4.10 a,b*.



a) *b*)

Obr. 4.10

Prípad prvý je znázornený na *obr. 4.10a*. Kondenzátor bol zo zdroja nabitý a zdroj bol potom od neho spínačom S odpojený. Na kondenzátore, ktorého kapacita $C = \varepsilon_r C_0$ je náboj veľkosti Q, ktorý zostáva konštantný, bez ohľadu na to, či sa dielektrikum medzi doskami nachádza, alebo nie. Napätie na kondenzátore sa však bude meniť. Ak je na začiatku na kondenzátore napätie

$$U = \frac{Q}{\varepsilon_r C_0}$$

po odstránení dielektrika kapacita kondenzátora klesne na hodnotu C_0 a pri konštantnom náboji musí napätie stúpnuť na hodnotu

$$U' = \frac{Q}{C_0} = \varepsilon_r U > U$$

Začiatočná energia kondenzátora s dielektrikom sa dá vyjadriť výrazmi

$$W_{zač} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_r C_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_r C_0 U^2$$

a jeho konečná energia po vytiahnutí dielektrika

$$W_{kon} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_r CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_r^2 C_0 U^2$$

Rozdiel konečnej a začiatočnej energie ΔW v súhlase so zákonom zachovania energie udáva prácu, ktorá bola na kondenzátore vykonaná. Tento rozdiel je daný výrazom

$$\Delta W = W_{kon} - W_{zač} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0} = \varepsilon_r(\varepsilon_r - 1)\ \frac{1}{2} C_0 U^2 > 0 \qquad (4.37)$$

Kladný rozdiel konečnej a začiatočnej energie svedčí o tom, že pri vyberaní dielektrika z kondenzátora bola na ňom vonkajšou silou vykonaná práca.

Prípad druhý je znázornený na *obr. 4.10b*. Pri vyberaní dielektrika je zdroj trvale pripojený ku kondenzátoru. Na kondenzátore zostáva stále rovnaké napätie $U = \mathscr{E}$, avšak náboj na ňom sa bude meniť. Na začiatku je na kondenzátore náboj

$$Q = \varepsilon_r C_0 U$$

a na konci, po odstránení dielektrika, náboj

$$Q' = C_0 U = \frac{Q}{\varepsilon_r} < Q$$

Začiatočná energia kondenzátora

$$W_{zač} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_r C_0 U^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_r C_0}$$

a konečná, po vybratí dielektrika

$$W_{kon} = \frac{1}{2} C_0 U^2 = \frac{1}{2}\frac{CU^2}{\varepsilon_r} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_r^2 C_0} = \frac{W_{zač}}{\varepsilon_r}$$

Rozdiel konečnej a začiatočnej energie

$$\Delta W = W_{kon} - W_{zač} = \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\frac{1}{2}CU^2 = \varepsilon_r\,(1-\varepsilon_r)\,\frac{1}{2}\,C_0 U^2 < 0$$

Napodiv, po vybratí dielektrika je energia kondenzátora nižšia ako na začiatku, a na prvý pohľad sa zdá, že kondenzátor vykonal prácu ΔW tým, že dielektrikum "vypudil". Experiment však ukazuje, že dielektrikum je do kondenzátora vťahované! Ak sa na náš systém pozrieme pozornejšie, vidíme, že je tu ešte jeden objekt, ktorý sa podieľa na energetických premenách, a tým je zdroj. Počas vyberania dielektrika sa na doskách kondenzátora zmenšuje náboj tým, že prechádza znovu do zdroja. Celkový náboj, ktorý v procese odstraňovania dielektrika prejde do zdroja je

$$\Delta Q = Q - Q' = (\varepsilon_r - 1) C_0 U$$

Ak je zdrojom akumulátor, tak týmto nábojom sa akumulátor pri konštantnom napätí U nabije, a vykoná sa na ňom práca

$$\Delta A = \Delta Q U = (\varepsilon_r - 1) C_0 U^2$$

Túto prácu vykonáva:

1. vybíjajúci sa kondenzátor (na účet poklesu jeho energie ΔW),
2. vonkajšia sila, ktorá vyťahuje dielektrikum a vykoná prácu A_v.

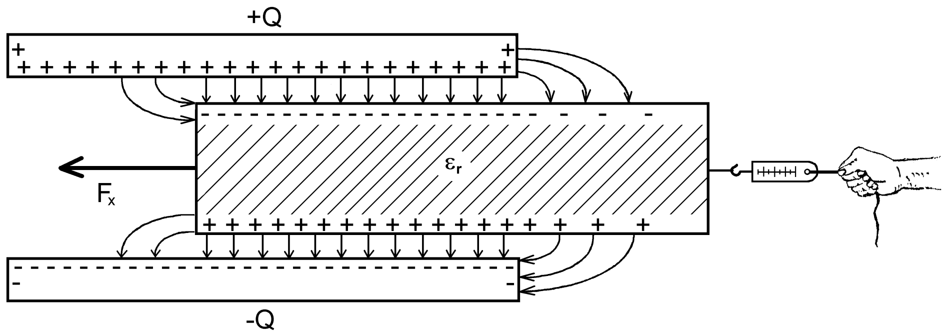
Rovnica energetickej rovnováhy teda znie:

$$\Delta W + A_v = \Delta A$$

z čoho práca vonkajšej sily

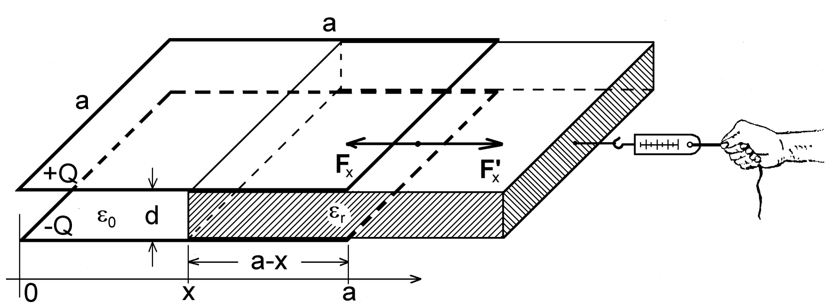
$$A_v = \Delta A - \Delta W = (\varepsilon_r - 1)\,\frac{1}{2}\,C_0 U^2 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{1}{2}CU^2 > 0 \tag{4.38}$$

Kondenzátor naozaj vykonal prácu – spolu s vonkajšou silou nabili zdroj.



Obr. 4.11

Na záver našich energetických úvah sa natíska otázka o silách, ktoré pôsobia na dielektrikum pri jeho vyťahovaní z kondenzátora. Táto otázka sa ukazuje ako neobyčajne zložitá. Silu pôsobiacu na dielektrikum možno interpretovať ako silu, ktorá pôsobí na dipóly dielektrika. V odseku 2.9.3 sme ukázali, že na dipól pôsobí translačná sila, ak sa nachádza v nehomogénnom elektrickom poli [pozri výraz (2.122), prípadne (2.123)]. Teda na dielektrikum pôsobí sila iba vtedy, ak sa nachádza v nehomogénnom poli. Ak sa pozrieme na *obr. 4.11*, na ktorom je dielektrikum z kondenzátora povytiahnuté, vidíme, že na časť dielektrika medzi doskami kondenzátora pole nepôsobí žiadnou silou, lebo je homogénne. Na časť dielektrika vonku, ďaleko od okraja kondenzátora, elektrická sila takisto nepôsobí, pretože tam je pole nulové. Oblasť dielektrika na hrane dosiek kondenzátora sa nachádza v silne nehomogénnom poli, a práve toto pole, ktoré sme doteraz ignorovali ako podružný okrajový efekt, má silový účinok na dielektrikum. Samozrejme, že ak je celé dielektrikum medzi doskami kondenzátora, žiadna sila naň nepôsobí. Teraz vidíme, prečo vznikajú také veľké problémy pri určení sily, ktorá vťahuje dielektrikum medzi dosky kondenzátora – veď nevieme určiť ani jej pôsobisko. Našťastie v takomto geometricky jednoduchom a definovanom prípade vieme silu určiť z princípu virtuálnej práce diferenciáciou energie podľa súradníc. Ukážeme ako!



Obr. 4.12

Na *obr. 4.12* je zobrazený doskový kondenzátor s plochou dosiek $S = a^2$, a ich vzdialenosťou d, ktorý má bez dielektrika kapacitu $C_0 = \varepsilon_0 a^2/d$. Kondenzátor je nabitý nábojom $\pm Q$ a od zdroja odpojený. Medzi jeho dosky možno zasúvať dielektrikum. Ak je dielektrikum s permitivitou ε_r zasunuté medzi doskami do hĺbky $a - x$, jeho kapacita

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0\left[ax+\varepsilon_r a(a-x)\right]}{d} = \frac{\varepsilon_0 a\left[x(1-\varepsilon_r)+\varepsilon_r a\right]}{d}$$

Energia kondenzátora ako funkcia x je potom

$$W(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a\left[x(1-\varepsilon_r)+\varepsilon_r a\right]} = \frac{Q^2 a}{2C_0\left[x(1-\varepsilon_r)+\varepsilon_r a\right]}$$

Sila pôsobiaca na dielektrikum je daná zápornou deriváciou energie podľa súradnice x, teda

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{Q^2 a(1-\varepsilon_r)}{2C_0\left[x(1-\varepsilon_r)+\varepsilon_r a\right]^2} < 0 \qquad (4.39)$$

Celková vykonaná práca A proti elektrickej sile F_x pri vyberaní dielektrika z kondenzátora je daná integrálom sily $F_x' = -F_x$ pre x od 0 (dielektrikum je vo vnútri) po a (dielektrikum je vonku), teda

$$A = -\int_0^a F_x \mathrm{d}x = \frac{Q^2 a(\varepsilon_r - 1)}{2C_0}\int_0^a \frac{\mathrm{d}\,x}{\left[x(1-\varepsilon_r)+\varepsilon_r a\right]^2} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0}$$

čo sa zhoduje s rozdielom konečnej a začiatočnej energie kondenzátora podľa výrazu (4.37).

Čitateľ si určite všimol isté slabiny našej analýzy. Výraz (4.39) pre silu, ako je zjavné, je nenulový aj pre $x = 0$, t. j. v prípade, keď dielektrikum je úplne zasunuté medzi dosky. Túto anomáliu možno vysvetliť matematickou nespojitosťou výrazu $C(x)$ v bode $x = 0$, kde nemáme právo počítať deriváciu zadanej funkcie $W(x)$, a teda ani silu F_x zo vzťahu (4.39). Rovnaký problém vzniká pri $x = a$, kde je síce sila naozaj nenulová, pretože aj na okraji kondenzátora a za ním je nenulové a nehomogénne pole, ale sila nie je daná hodnotou plynúcou z výrazu (4.39). Ten platí iba pre $0 < x < a$.

V súvislosti s analyzovanou problematikou nakoniec odporúčam čitateľovi riešiť úlohy 77 až 86.

Na záver tohoto odseku sú v tabuľke 6 uvedené všetky výrazy, ktoré sa môžu vyskytnúť v súvislosti s elektrickými poliami v doskových kondenzátoroch s dielektrikami, alebo bez nich. Kondenzátory majú plochy dosiek S a vzdialenosť dosiek d, dielektrikum má relatívnu permitivitu ε_r. V ľavej časti tabuľky dvojica kondenzátorov nesie konštantný náboj, vpravo je dvojica s konštantným napätím. Na konci tabuľky sú uvedené dva číselné príklady, ktoré majú čitateľovi priblížiť numerické súvislosti. Všetky vektory poľa ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{P}$) v kondenzátoroch majú rovnaký smer – od kladnej elektródy k zápornej.

Tabuľka 6

Kondenzátor bez dielektrika	Kondenzátor s dielektrikom	Kondenzátor bez dielektrika	Kondenzátor s dielektrikom
Q = konšt.		U = konšt.	
$D_0 = \dfrac{Q}{S}$	$D = \dfrac{Q}{S} = D_0$	$E_0 = \dfrac{U}{d}$	$E = \dfrac{U}{d} = E_0$
$E_0 = \dfrac{D_0}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$	$E = \dfrac{D}{\varepsilon} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r} < E_0$	$D_0 = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 \dfrac{U}{d}$	$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{U}{d} = \varepsilon_r D_0 > D_0$
$U_0 = E_0 d = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S} d$	$U = Ed = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \dfrac{U_0}{\varepsilon_r} < U_0$	$Q_0 = D_0 S = \varepsilon_0 \dfrac{U}{d} S$	$Q = DS = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{U}{d} S = \varepsilon_r Q_0 > Q_0$
$C_0 = \dfrac{Q}{U_0} = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$	$C = \dfrac{Q}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{S}{d} = \varepsilon_r C_0 > C_0$	$C_0 = \dfrac{Q_0}{U} = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$	$C = \dfrac{Q}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{S}{d} = \varepsilon_r C_0 > C_0$
Polarizácia nulová	$P = \sigma_v = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E = \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r}\right) \dfrac{Q}{S}$	Polarizácia nulová	$P = \sigma_v = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \dfrac{U}{d}$
Viazaný náboj nulový	$Q_v = \sigma_v S = \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r}\right) Q < Q$	Viazaný náboj nulový	$Q_v = \sigma_v S = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \dfrac{U}{d} S < Q$
Numerické hodnoty pre: S = 1 m^2, d = 1 mm, $\varepsilon_r = 2$			
$Q = 8{,}854.10^{-7}$ C		U = 100 V	
$D_0 = 8{,}854.10^{-7}$ C.m^{-2} $E_0 = 10^5$ V.m^{-1} U_0 = 100 V C_0 = 8,854 nF $P_0 = 0$ $Q_{v0} = 0$	$D = 8{,}854.10^{-7}$ C.m^{-2} $E = 5.10^4$ V.m^{-1} U = 50 V C = 17,71 nF $P = 4{,}43.10^{-7}$ C.m^{-2} $Q_v = 4{,}43.10^{-2}$ C	$E_0 = 10^5$ V.m^{-1} $D_0 = 8{,}854.10^{-7}$ C.m^{-2} $Q_0 = 8{,}854.10^{-7}$ C C_0 = 8,854 nF $P_0 = 0$ $Q_{v0} = 0$	$E = 10^5$ V.m^{-1} $D = 17{,}71.10^{-7}$ C.m^{-2} $Q = 17{,}71.10^{-7}$ C C = 17,71 nF $P = 8{,}854.10^{-7}$ C.m^{-2} $Q_v = 8{,}854.10^{-7}$ C

4.8 MIKROFYZIKÁLNA PODSTATA POLARIZÁCIE DIELEKTRIKA

V našom doterajšom výklade elektrických vlastností látok sme možno málo zdôrazňovali skutočnosť, že elektrické polia v látkach, ktoré sme považovali za statické, sú v skutočnosti stredné hodnoty priestorovo a časovo veľmi zložitých a rýchlo sa meniacich polí, zodpovedajúcich atomárnej, resp. molekulárnej štruktúre prostredia. Látku sme považovali za kontinuum, ktorého elektrické makroskopické vlastnosti sme opísali permitivitou a susceptibilitou. Tieto parametre látok sú dnes dobre merateľné, veď stačí iba zmerať kapacitu kondenzátora naplneného dielektrikom a bez neho, a podiel výsledkov merania dáva relatívnu permitivitu dielektrika. Ak by sme poznali teoretickú súvislosť týchto parametrov s mikrofyzikálnymi štruktúrnymi charakteristikami látok, porovnanie nameraných výsledkov s teoretickými predpoveďami by mohlo rozhodnúť o správnosti našich predstáv o mechanizmoch, ktoré vedú k polarizácii látok, a tak prispieť k poznaniu jednej stránky sveta v ktorom žijeme. Práve o to sa chceme v tomto odseku pokúsiť.

Videli sme, že vektor polarizácie väčšiny látok je v širokom intervale elektrických polí veličina úmerná intenzite elektrického poľa, a tento vzťah je lineárny. Táto skutočnosť značne zjednodušuje náš pohľad na látku v elektrickom poli.

4.8.1 Elektrónová polarizácia

Začneme analýzou najjednoduchšieho prípadu, akým je nepolárny inertný plyn. Každý atóm plynu v hrubom priblížení zaberá guľový objem, v ktorom je polarizovaný a vzniká z neho dipól. Atómy môžeme považovať za viac-menej voľné a na každý pôsobí iba vonkajšie elektrické pole s intenzitou $\boldsymbol{E}$. Vzhľadom na to, že polarizácia v systéme identických dipólov je úmerná koncentrácii, možno očakávať, že jednotlivé dipólové momenty $\boldsymbol{p}$, ktoré vzniknú v látke v dôsledku elektrónovej polarizácie, budú úmerné intenzite elektrického poľa, ktoré guľovo symetrický atóm polarizuje. Túto úmernosť zvykneme písať v tvare

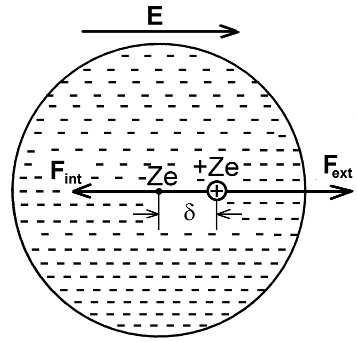
$$\boldsymbol{p} = \varepsilon_0 \alpha \boldsymbol{E} \tag{4.40}$$

kde α je konštanta, ktorá sa nazýva polarizovateľnosť atómu. Úlohou teórie je správne určiť α, aby zodpovedalo experimentálnym pozorovaniam. Vyjdime z predstavy, že atóm s atómovým číslom Z je tvorený bodovým nábojom jadra $Q_+ = Ze$ a záporným nábojom elektrónov $Q_- = -Ze$ rozloženým spojito v objeme gule s polomerom R. Ak sa atóm ocitne v elektrickom poli s intenzitou E, bude na jadro pôsobiť externá sila (pozri *obr. 4.13*, ako aj *obr. 4.1*)

$$F_{ext} = ZeE$$

s tendenciou vychýliť jadro zo stredu atómu. Na vychýlené jadro okamžite pôsobí spätná centrálna sila F_{int} od elektrónového obalu s veľkosťou

$$F_{int} = ZeE_{int}$$



Obr. 4.13

kde
$$E_{int} = \frac{Zer}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

je vnútorná intenzita elektrického poľa vo vzdialenosti r od stredu guľového rovnomerne rozloženého náboja $Q_- = -Ze$ [pozri vzťah (2.50)]. Treba povedať, že atóm je natoľko odolný, že bežné, v praxi sa vyskytujúce polia, nie sú schopné vytrhnúť jadro zo stredu atómu (totálne ho ionizovať) a môžu spôsobiť iba to, že jadro a obal sa navzájom nepatrne posunú. Tento posun $r = \delta$ pri rovnováhe síl F_{ext} a F_{int} plynie z podmienky

$$F_{ext} = F_{int}$$

alebo

$$ZeE = \frac{Z^2 e^2 \delta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

a z toho

$$\delta = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 E}{Ze}$$

Posun δ je dĺžka vzniklého dipólu tvoreného nábojmi $Q_\pm = \pm Ze$. Jeho dipólový moment má veľkosť

$$p = Q\delta = Ze\delta = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E \qquad (4.41)$$

a smeruje v smere intenzity polarizujúceho poľa E. Ak porovnáme tento výsledok so vzťahom (4.40), vidíme že podľa našich teoretických predstáv polarizácia je skutočne lineárna, a že polarizovateľnosť nepolárneho atómu

$$\alpha = 4\pi R^3 \qquad [\mathrm{m}^3] \qquad (4.42)$$

čo je výsledok vcelku pochopiteľný, avšak neočakávane jednoduchý. Polarizovateľnosť atómu je úmerná tretej mocnine jeho polomeru (objemu) – väčší atóm sa lepšie a viac polarizuje! Makroskopická veličina – polarizácia – je podľa vzťahov (4.2) a (4.22)

$$\boldsymbol{P} = n\boldsymbol{p} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E} = n\alpha\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

z čoho elektrická susceptibilita látky

$$\kappa = \varepsilon_r - 1 = n\alpha = 4\pi n R^3 \tag{4.43}$$

alebo relatívna permitivita

$$\varepsilon_r = 1 + 4\pi n R^3 \tag{4.44}$$

Bude zaujímavé porovnať tieto teoretické výsledky pre susceptibilitu a permitivitu s experimentálnymi údajmi. Meraniami bolo zistené, že vodík pri atmosférickom tlaku a teplote 0 °C (koncentrácia atómov $n = 2{,}69.10^{25}\ \mathrm{m^{-3}}$) má susceptibilitu

$$\kappa_{exp} = 0{,}000\,26$$

a relatívnu permitivitu

$$\varepsilon_{r\,exp} = \kappa_{exp} + 1 = 1{,}000\,26$$

Na druhej strane, ak za polomer vodíkového atómu budeme považovať jeho klasický (Bohrov) polomer $R = a_0 = 0{,}53.10^{-10}$ m a dosadíme do vzťahu (4.43) dostaneme teoretickú hodnotu susceptibility

$$\kappa_{teor} = 4\pi.2{,}69.10^{25}.(0{,}53.10^{-10})^3 = 0{,}000\,050\,3$$

čo je výsledok len asi 5-krát menší, ako experimentálne zistená hodnota. Takáto zhoda experimentálnych a teoretických výsledkov sa v atómovej fyzike považuje za veľmi dobrú, až vyvoláva podozrenie, že je to iba vec náhody; veď to, čo sme urobili, že sme jediný vodíkový elektrón na klasickej Bohrovej dráhe aproximovali jeho spojitým rozložením v guli rovnakého (Bohrovho) polomeru, je prílišná opovážlivosť. Lenže v atóme nijaké klasické dráhy neexistujú. Vodíkový elektrón sa môže s istou pravdepodobnosťou nachádzať v celom guľovom okolí jadra (protónu), najpravdepodobnejší pre jeho pobyt je však pobyt na guľovej ploche s Bohrovým polomerom. Feynman vo svojej už citovanej učebnici uvádza kvantovomechanický výsledok pre koeficient polarizovateľnosti vodíkového atómu

$$\alpha \approx 16\pi\, a_0^3$$

kde

$$a_0 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} = 0{,}529\ 18.10^{-10}\,\mathrm{m}$$

je polomer základnej Bohrovej orbity atómu ($\hbar$ je Planckova konštanta, m_e je hmotnosť elektrónu). Tento výraz dáva pre teoretickú susceptibilitu výsledok štyrikrát väčší ako náš, a teda takmer zhodný s experimentálnym výsledkom, ak naviac zoberieme do úvahy, že permitivita bola meraná pre molekulárny, a nie pre atomárny vodík.

Výsledok našich úvah je poučný z dvoch dôvodov: predovšetkým je to potvrdenie správnosti našich predstáv o rozložení elektrónového náboja v atóme a za druhé, že pole, ktoré polarizuje atóm v plyne, je vonkajšie pole bez vplyvu polí susedov, pretože sa predpokladalo, že koncentrácia atómov je nízka.

4.8.2 Nepolárne plyny a kvapaliny. Clausiusov-Mossottiho vzťah

Náš výklad polarizácie plynov bol urobený za predpokladu, že jednotlivé atómy, resp. dipóly, sú tak ďaleko od seba, že ich vzájomné pôsobenie môžeme zanedbať. Inak povedané, každý dipól sa nachádza iba vo vonkajšom poli, alebo že vonkajšie pole je súčasne vnútorným poľom v látke. V plynoch pri vysokých tlakoch s vysokou koncentráciou atómov alebo v kvapalných látkach tento predpoklad nie je splnený a skutočné pole, ktoré polarizuje vybraný atómu, je superpozíciou stredného poľa v látke E a poľa E' najbližšieho atomárneho okolia. Toto pole môže veľmi komplikovať výpočet, pretože závisí od vnútornej štruktúry látky. Lorentz ukázal, že dobré výsledky pre nepolárne plyny a kvapaliny sa dajú dosiahnuť, ak sa za vnútorné pole intenzity $\boldsymbol{E}'$ v mieste polarizovaného atómu považuje pole v guľovej dutine homogénneho polarizovaného dielektrika s makroskopickou polarizáciou $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E}$, podľa *obr. 4.14*. Pri výpočte intenzity poľa $\boldsymbol{E}'$ v dutine homogénne polarizovaného dielektrika možno využiť výsledok riešenia úlohy 37, prípadne 73. Z týchto úloh sa dozviete, že elektrická intenzita $\boldsymbol{E}_g$ vo vnútri homogénne polarizovanej gule s polarizáciou $\boldsymbol{P}$ je tiež homogénne pole dané výrazom (pozri aj *obr. 4.5*)

$$\boldsymbol{E}_g = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$$

Elektrické pole v dutine dielektrika je vlastne akýmsi "negatívom" poľa v guli, takže môžeme napísať

$$\boldsymbol{E}' = -\boldsymbol{E}_g = \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$$

Výsledné lokálne pole $\boldsymbol{E}_{lok}$, ktoré polarizuje jednotlivý atóm

$$\boldsymbol{E}_{lok} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$$

Polarizácia v látke je potom

$$\boldsymbol{P} = n\alpha\varepsilon_0\boldsymbol{E}_{lok} = n\alpha\varepsilon_0\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}\right)$$

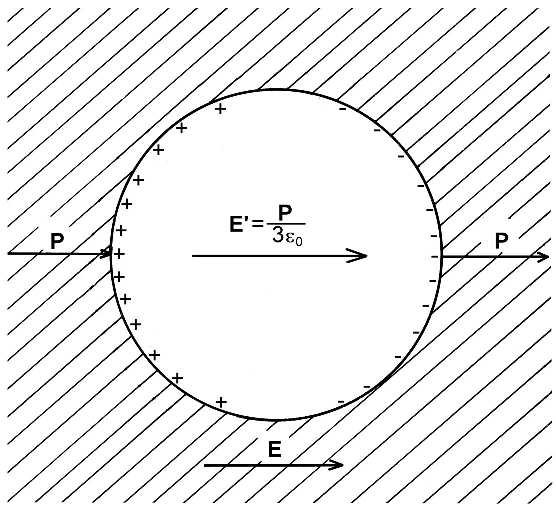
z čoho plynie výraz

$$\left(1 - \frac{n\alpha}{3}\right)\varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)\boldsymbol{E} = n\alpha\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

Po úprave posledného výrazu dostaneme vzťah

$$\varepsilon_r - 1 = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}} \tag{4.45a}$$

alebo vzťah v tvare



Obr. 4.14

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3} \tag{4.45b}$$

Vzťah (4.45) prvý raz odvodili R. Clausius a O. F. Mossotti a je všeobecne známy pod ich menami. **Clausiusov-Mossottiho vzťah** udáva súvis medzi permitivitou dielektrika (makroskopickou veličinou) a polarizovateľnosťou nepolárnych molekúl (mikroskopická veličina) v plynoch a kvapalinách. Pri nízkych tlakoch je $n\alpha/3 \ll 1$ z dôvodov nízkej koncentrácie a výraz (4.45) pre susceptibilitu sa redukuje na tvar

$$\varepsilon_r - 1 = n\alpha$$

zhodný s výrazom (4.43) pre susceptibilitu voľných atómov alebo molekúl plynu, bez Lorentzovej korekcie.

Clausiusov-Mossottiho vzťah bol experimentálne overovaný v širokom rozsahu tlakov až do 10^8 Pa na plynnom CO_2,[1] pričom sa preukázala výborná zhoda experimentálnych výsledkov s výsledkami vypočítanými podľa vzťahov (4.45).

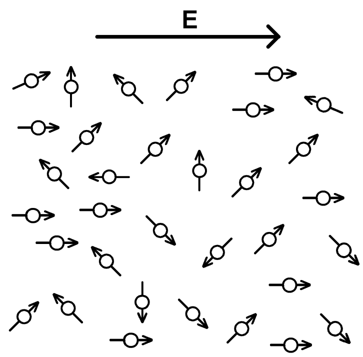
Pre polárne a tuhé látky, v ktorých $n\alpha/3 > 1$, dávajú rovnice (4.45) záporné hodnoty susceptibilít a ε_r menšie ako jedna. Pre také látky Clausiusov-Mossottiho vzťah neplatí.

---

[1] Michels, A., Michels, C., Phil. Trans. R. Soc. **A231**, 409 (1932)

4.8.3 Polárne látky. Orientačná polarizácia

Polárne látky, ktoré z elektrického hľadiska pozostávajú z dipólov aj bez prítomnosti vonkajšieho elektrického poľa, vykazujú principiálne iný proces polarizácie. Pod účinkom vonkajšieho elektrického poľa snažia sa dipóly polárnej látky zaujať smer tohto poľa, avšak chaotický tepelný pohyb jednotlivých molekulárnych dipólov bráni tomuto usporiadaniu, a pokiaľ vonkajšie elektrické pole nie je extrémne vysoké, dochádza k štatistickej strednej polarizácii $\boldsymbol{P}$ v smere intenzity poľa $\boldsymbol{E}$, pričom vzťah medzi veličinami je v širokom rozsahu polí lineárny. Pri danej hodnote poľa je polarizácia nepriamo úmerná teplote v dôsledku depolarizačného účinku teploty.



Obr. 4.15

Predpokladajme, že v jednotke objemu dielektrika sa nachádza n_0 molekúl s dipólovými momentami veľkosti p. Každý dipól v látke môže zaujímať štatisticky ľubovoľnú orientáciu vzhľadom k smeru vonkajšieho elektrického poľa. Ak smer intenzity poľa $\boldsymbol{E}$ stotožníme so smerom polárnej osi sférického súradnicového systému, možno potenciálnu energiu jednotlivých dipólov vyjadriť výrazom (pozri odsek 2.9.2)

$$W = -\boldsymbol{p}.\boldsymbol{E} = -pE\cos\vartheta \tag{4.46}$$

kde polárny uhol ϑ je štatistická, náhodná veličina. Bez poľa by jednotlivé dipóly boli rovnomerne rozložené do všetkých smerov pre uhly ϑ od 0 po π a azimutálny uhol φ od 0 po 2π. V látke by neexistovala v žiadnom smere výsledná nenulová polarizácia. Ak však je pole nenulové, bude jeho smer štatisticky významný, pretože jednotlivé momenty budú mať tendenciu zaujať práve tento smer (pozri *obr. 4.15*). Ak chceme určiť rozloženie osí dipólov za prítomnosti orientujúceho poľa $\boldsymbol{E}$, treba využiť zákony štatistickej mechaniky. Pre štatistické rozdelenie dipólov podľa energií sa hodí **Boltzmannovo štatistické rozdelenie**, podľa ktorého:

– v podmienkach termodynamickej rovnováhy (inak povedané – v tepelne ustálenom systéme) sa zákon rozdelenia molekúl (dipólov) podľa energií za prítomnosti konzervatívneho poľa (v našom prípade elektrostatického poľa) odlišuje od zákona ich rozdelenia bez toho poľa súčiniteľom

$$\mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}} \tag{4.47}$$

kde W je potenciálna energia molekuly v uvažovanom silovom poli, T je absolútna teplota a k je univerzálna konštanta nazývaná Boltzmannovou konštantou.

V našom prípade potenciálna energia W je energia dipólu (4.46) v elektrickom poli.

Keďže energia dipólu závisí od polárneho uhla ϑ pre ľubovoľnú hodnotu azimutálneho uhlu φ, treba nám teraz vyjadriť počet dipólov dn na jednotku objemu, ktoré smerovo ležia medzi kónickými plochami s uhlami ϑ a $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$ podľa *obr. 4.16*. Tento počet s využitím Boltzmannovho rozdelenia (4.47) je daný výrazom

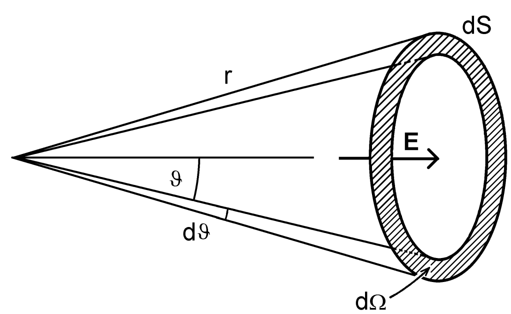
$$\mathrm{d}\,n = A\,\mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}}\,\mathrm{d}\,\Omega \tag{4.48}$$

kde A je konštanta, ktorú treba určiť normovaním a dΩ je elementárny priestorový uhol vymedzený kónickými plochami na *obr. 4.16*. Jeho veľkosť je daná výrazom

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2} = 2\pi \sin\vartheta\,\mathrm{d}\,\vartheta \tag{4.49}$$

Dosadením výrazu (4.49) do (4.48) dostaneme pre počet dipólov výraz

$$\mathrm{d}n = A\,\mathrm{e}^{\frac{pE}{kT}\cos\vartheta}\,2\pi \sin\vartheta\,\mathrm{d}\,\vartheta \tag{4.50}$$



Obr. 4.16

Vidíme, že odchýlka rozloženia od rovnomerného je daná faktorom

$$\mathrm{e}^{\frac{pE}{kT}\cos\vartheta}$$

a je tým väčšia, čím je väčšia intenzita E a čím je nižšia teplota T. To je pochopiteľné, pretože so zvyšovaním teploty rastie energia tepelného pohybu, ktorá narúša usporiadanie dipólov.

Teraz nám treba predovšetkým určiť konštantu A normovaním. Normovanie je matematický postup, pri ktorom treba zvoliť takú hodnotu A, aby sa po integrovaní výrazu (4.50) cez všetky možné hodnoty ϑ od 0 po π výsledok rovnal počtu dipólov n_0 na jednotku objemu, t. j. koncentrácii dipólov. Nech teda

$$n_0 = \int \mathrm{d}n = 2\pi A \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\frac{pE}{kT}\cos\vartheta} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \tag{4.51}$$

Spôsob výpočtu integrálu závisí od hodnoty exponentu e-funkcie. Pre väčšinu látok z uvažovanej skupiny je pomer $pE/(kT) \ll 1$ aj pre veľmi vysoké hodnoty intenzít polí. V takom prípade možno exponenciálnu funkciu aproximovať dvojčlenom

$$\mathrm{e}^{\frac{pE}{kT}\cos\vartheta} \approx 1 + \frac{pE}{kT}\cos\vartheta$$

a výraz (4.51) prejde na tvar

$$n_0 = 2\pi A \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right) \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi A$$

Z neho pre konštantu A dostávame hodnotu

$$A = \frac{n_0}{4\pi}$$

Konečne môžeme napísať výraz pre počet dipólov v jednotkovom objeme, ktorých energia je z intervalu uhlov ϑ a $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$

$$\mathrm{d}n = \frac{n_0}{2}\left(1 + \frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right) \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta$$

Tento počet dipólov prispieva k polarizácii dP priemetom dipólového momentu do smeru vonkajšieho poľa ($p\cos\vartheta$), teda

$$\mathrm{d}P = p\cos\vartheta \,\mathrm{d}n = \frac{n_0 p}{2}\left(1 + \frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right) \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta$$

Po integrácii tohto výrazu pre ϑ od 0 po π

$$P = \frac{n_0 p}{2} \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{pE}{kT}\cos\vartheta\right) \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{n_0 p^2}{3kT} E$$

konečne dostávame výraz pre orientačnú polarizáciu dielektrika v tvare

$$\boldsymbol{P} = \frac{n_0 p^2}{3kT} \boldsymbol{E} \tag{4.52}$$

a z neho výraz pre susceptibilitu v tvare

$$\kappa = \varepsilon_r - 1 = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{n_0 p^2}{3\varepsilon_0 kT} \tag{4.53}$$

Nakoniec treba znovu zdôrazniť, že výrazy (4.52) a (4.53) platia iba v prípade, ak

$$\frac{pE}{kT} \ll 1$$

Pri porušení tejto podmienky napr. vo veľmi silných poliach alebo pri veľmi nízkych teplotách prestane polarizácia P vzrastať lineárne s E a rastie k maximálnej možnej hodnote odpovedajúcej orientácii všetkých dipólov do smeru vektora $\boldsymbol{E}$. Veľkosť tejto "saturačnej polarizácie" je daná výrazom

$$P_{sat} = n_0 p$$

Na orientačnej polarizácii je pozoruhodná jej závislosť od teploty. Bola meraná závislosť susceptibility od prevrátenej hodnoty teploty a výsledkom je lineárny graf, čo potvrdzuje platnosť výrazu (4. 53). Na druhej strane, polarizácia nepolárnych dielektrík je jav, ktorý od teploty takmer nezávisí. Výraz (4.53) sa často píše v tvare

$$\kappa = \varepsilon_r - 1 = \frac{C}{T} \tag{4.54}$$

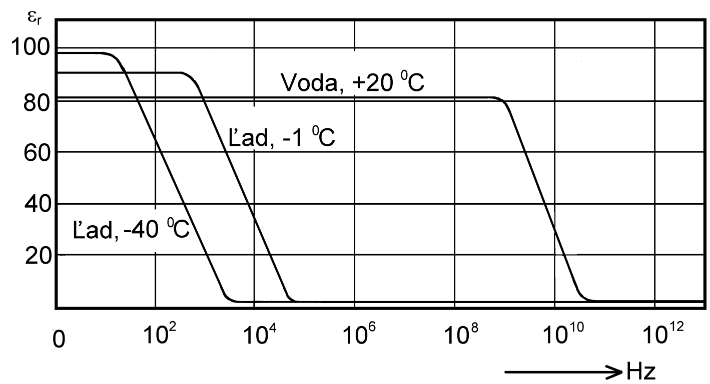
a nazýva sa Curieho zákon, na počesť francúzskeho fyzika P. Curie, ktorý v roku 1895 objavil formálne rovnaký zákon pre magnetickú susceptibilitu paramagnetických látok, zatiaľ čo vzťah (4.53) pre orientačnú polarizáciu dielektrík objavil P. Debye v roku 1912. Konštanta

$$C = \frac{n_0 p^2}{3\varepsilon_0 k}$$

sa nazýva Curieho konštanta.

Orientačná polarizácia má ešte jednu zvláštnosť oproti elektrónovej, a to je jej frekvenčná závislosť. Pri praktickom využívaní dielektrík je dôležité, ako sa dielektriká správajú nie v konštantných, ale v časovo premenných, napríklad striedavých (sínusovo sa meniacich) poliach. Schopnosť polarizácie je obmedzená relaxačnou dobou príslušnou istému druhu pohybu. Deformácia atómu, ktorá nastáva pri elektrónovej polarizácii, je proces, ktorý nastane za dobu rádovo 10^{-16} s. To znamená, že nepolárne látky sú schopné polarizácie striedavým elektrickým poľom až do frekvencií rádovo 10^{16} Hz, teda od nulovej frekvencie statického poľa až po svetelné frekvencie elektromagnetického poľa. Iná je situácia u polárnych látok. Pohyblivosť dipólov alebo možnosť ich rotácie v látke závisí od mnohých faktorov, predovšetkým od teploty a tlaku. Tieto faktory ovplyvňujú vnútorné trenie v látke, ktoré bráni periodickému preklápaniu dipólov pod účinkom striedavého elektrického poľa. So zvyšovaním frekvencie táto schopnosť dipólov klesá, až pri určitej frekvencii úplne zanikne. Dipóly sa prestanú preklápať a v látke sa zachová iba elektrónová polarizácia, ktorá existuje samozrejme aj u polárnych látok, len je podstatne slabšia.

Ako príklad možno uviesť pozorovania frekvenčných závislostí permitivity pre polárne molekuly vody. Pri izbovej teplote a normálnom tlaku v statickom poli má voda medzi bežnými látkami jednu z najväčších relatívnych permitivít, cca 81. Súvisí to s veľkým dipólovým momentom molekuly H_2O (pozri tabuľku 1). Ak na vzorku vody naložíme striedavé pole a začneme frekvenciu zvyšovať, zostane hodnota permitivity rovnaká až do frekvencií cca 10^9 Hz, teda do pásma, ktoré zvykneme nazývať mikrovlny. Pri ďalšom zvyšovaní frekvencie permitivita prudko klesá na hodnotu zodpovedajúcu elektrónovej polarizácii vody a zostáva konštantná až po svetelné frekvencie. Ak ale budeme merať permitivitu vody v tuhom stave, teda permitivitu ľadu, zistíme, že začiatočná permitivita začne klesať už pri frekvenciách 10 resp. 1000 Hz a potom zostáva konštantná. Na *obr. 4.17* sú znázornené experimentálne získané frekvenčné závislosti permitivity vody pri troch rôznych teplotách, ktoré potvrdzujú správnosť našich teoretických predstáv.[1]



Obr. 4.17

* * * * *

Na záver nášho pojednania o elektrostatike je na mieste otázka o význame elektrostatiky v širšom koncepte elektromagnetizmu. Môžeme na ňu odpovedať z dvoch hľadísk: z hľadiska teoretického poznávania a z hľadiska čisto utilitárneho. Predovšetkým si treba znovu uvedomiť, že nijaké statické elektrické polia v prírode v skutočnosti neexistujú – to čo v praxi prehlasujeme za statické, sú v skutočnosti stredné hodnoty elektrických veličín, ktorých pôvodcom sú elektrické náboje v látkach alebo vo vákuu vo svojom chaotickom tepelnom pohybe. Základné zákony elektrostatiky, ktoré sme v priebehu našich doterajších úvah sformulovali, v skutočnosti platia pre stredné hodnoty veličín. Táto skutočnosť však neznižuje dôležitosť samotných zákonov, pretože tie tvoria teoretický základ pre elektrodynamiku.

Elektrostatika zďaleka nemá také praktické využitie ako elektrodynamika. V bežnom živote elektrostatické efekty najčastejšie vnímame ako nepríjemné účinky nábojov nahromadených na izolačných materiáloch (tkaniny z umelých hmôt, podlahy, plastikové fólie a iné) teoreticky ťažko opísateľným trením (triboelektrina). V styku s ľudským telom

[1] Grafické priebehy sú z knihy Smyth, C. P.: "Dielectric Behaviour and Structure", McGraw-Hill, New York 1955 a z článku Auty, R. P., Cole, R. H., J. Chem. Phys. **20**, 1309 (1952)

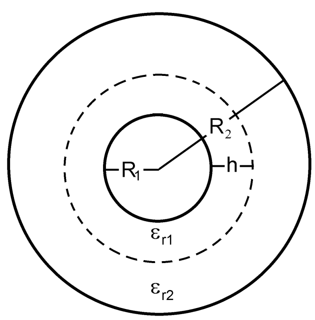
dochádza k vybíjaniu týchto nábojov preskokom elektrických iskier. Impozantným, ale aj nebezpečným prírodným úkazom je elektrický blesk – výboj "statickej" elektriny v atmosfére, počas ktorého sa náboj v priemere asi 20 C neutralizuje pri napätí rádovo 10^9 V = 1 GV elektrickým prúdom až 20 000 A.

Priame bezprostredné priemyselné využitie elektrostatických javov je – ako už bolo povedané – relatívne chudobné: sú to napr. elektrostatické odlučovače tuhých častíc z plynu a priemyselných splodín, xerografické zariadenia, rôzne typy elektrostatických úchytov a iné. Vo fyzike elementárnych častíc sa na ich urýchľovanie využívajú elektrostatické generátory napätia, napr. známy Van de Graaffov generátor, ktorý dosahuje napätia až niekoľko miliónov voltov, a ktorého stolnú verziu určenú na demonštračné účely vlastní takmer každé gymnázium. Statická elektrina v praxi je jav skôr nežiaduci, či neužitočný, ba až škodlivý, a treba s ňou často bojovať (vývoj rôznych typov antistatických materiálov prípadne náterov). Napriek týmto málo povzbudivým záverom je elektrostatika neodmysliteľnou teoretickou časťou elektromagnetizmu, bez ktorej by sme museli začať budovať elektrodynamiku "na zelenej lúke".

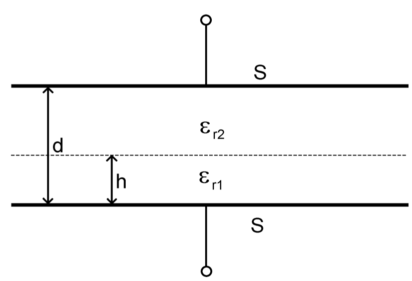
Úlohy 65 – 96

65. Dve rovnaké guľôčky s hmotnosťou *m* a polomerom *R* sú nabité nábojmi *Q* a zavesené na nitiach rovnakej dĺžky. V dôsledku odpudivej sily medzi nábojmi rozostúpia sa guľôčky tak, že nite zvierajú uhol φ. Tento systém nábojov je ponorený do dielektrickej kvapaliny s hustotou ρ a relatívnou permitivitou ε_r. Aká musí byť hustota kvapaliny, aby sa uhol φ medzi niťami po ponorení guľôčok do kvapaliny nezmenil?

66. Guľový kondenzátor je tvorený dvoma vodivými guľovými plochami s polomermi R_1 a R_2. Vnútorná guľa je obalená vrstvou dielektrika s hrúbkou *h* a permitivitou ε_{r1} (*obr. 66*). Zvyšok priestoru je vyplnený dielektrikom s permitivitou ε_{r2}. Vypočítajte kapacitu kondenzátora.



Obr. 66



Obr. 67

67. Doskový kondenzátor s plochou dosiek *S* a ich vzdialenosťou *d* je vyplnený dvoma vrstvami dielektrík hrubými *h* a *d* – *h* a s permitivitami ε_{r1} a ε_{r2} (*obr. 67*). Vypočítajte kapacitu kondenzátora.

68. Doskový kondenzátor je zaplnený dielektrikom, ktorého permitivita sa mení podľa vzťahu

$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_0 (x + a)}{a}$$

kde a je vzdialenosť dosiek a x je os kolmá na rovinu dosiek. Plocha každej dosky je S. Vypočítajte kapacitu kondenzátora a rozdelenie viazaného plošného a priestorového náboja v dielektriku, ak je kondenzátor udržiavaný na napätí U.

69. Na dvoch koncentrických guľových plochách s polomermi a a b sú rozložené náboje $\pm Q$ podľa *obr. 69*. Priestor v guľovej vrstve medzi elektródami kondenzátora je do polovice vyplnený dielektrikom s permitivitou ε, v druhej polovici je vákuum.

a) Nájdite priebeh vektora elektrickej indukcie v kondenzátore.

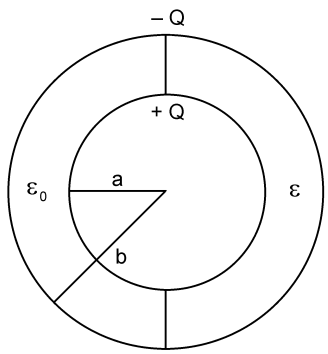
b) Vypočítajte rozloženie intenzity elektrického poľa v kondenzátore.

c) Nájdite plošné rozloženie nábojov na elektródach kondenzátora.

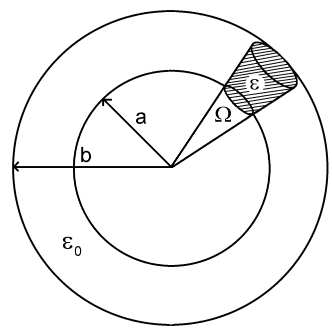
d) Vypočítajte hustotu viazaných nábojov na povrchových plochách dielektrika a v jeho objeme.

e) Vypočítajte kapacitu takého kondenzátora.

70. Guľový kondenzátor na *obr. 70* je čiastočne vyplnený dielektrikom s permitivitou ε. Dielektrikum vymedzuje priestorový uhol Ω s vrcholom v strede guľových plôch kondenzátora. Vypočítajte kapacitu kondenzátora.



Obr. 69



Obr. 70

71. Guľový kondenzátor s polomermi guľových elektród a a b ($a > b$) je vyplnený dielektrikom, ktorého permitivita sa s polomerom r mení podľa vzťahu

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \frac{a^2}{r^2}$$

Vypočítajte kapacitu kondenzátora.

72. Vodivá guľa s polomerom R, s celkovým nábojom Q je obalená guľovou vrstvou dielektrika s hrúbkou h a permitivitou ε_r (*obr. 72*). Vypočítajte:

a) hustotu plošného viazaného náboja na vonkajšej a vnútornej ploche dielektrika,

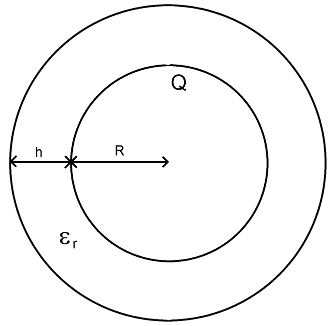
b) hustotu viazaného priestorového náboja v dielektriku,

c) celkový viazaný náboj na vonkajšej a vnútornej ploche dielektrika,

d) vektory ***E, D, P*** ako funkcie vzdialenosti r od stredu symetrie.

73. Dielektrická guľa s polomerom R je homogénne polarizovaná v celom objeme (vektor polarizácie v celom objeme je konštantný). Vypočítajte potenciál v okolí gule a v jej vnútri. Nakreslite priebeh siločiar vo vnútri gule a v jej okolí.

74. Dielektrická guľa s polomerom R a permitivitou ε_r je umiestnená v homogénnom elektrickom poli intenzity E_0. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa, vektor polarizácie a potenciál vo vnútri gule a v jej okolí.



Obr. 72

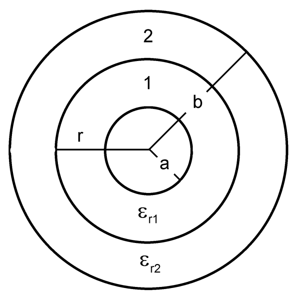
75. Vodivá uzemnená guľa s polomerom R je vložená do homogénneho elektrického poľa intenzity E_0. Vypočítajte potenciál v okolí gule a v jej vnútre.

Poznámka: Riešte ako limitný prípad predchádzajúcej úlohy.

76. Bodový náboj Q je umiestnený na rovinnom rozhraní dvoch dielektrík s permitivitami ε_1 a ε_2, vyplňujúcich celý priestor. Odvoďte výrazy pre vektor intenzity elektrického poľa, vektor elektrickej indukcie a potenciál ako funkcie vzdialenosti od náboja.

77. Doskový kondenzátor s dielektrikom je nabitý na istý potenciálový rozdiel U, pričom jeho energia je 3.10^{-5} J. Na vybratie dielektrika z kondenzátora treba vynaložiť prácu 5.10^{-5} J. Aká je relatívna permitivita dielektrika?

78. Doskový kondenzátor s plochou dosiek S a ich vzdialenosťou d je vyplnený pevným dielektrikom s relatívnou permitivitou ε_r a nabitý na potenciálový rozdiel U. Vypočítajte prácu, ktorú treba vynaložiť na vybratie dielektrika z kondenzátora.



Obr. 79

79. Priestor medzi cylindrickými vodičmi koaxiálneho kábla je vyplnený dvoma koaxiálnymi vrstvami dielektrík 1 a 2 s permitivitami $\varepsilon_{r1} = 6$ a $\varepsilon_{r2} = 3$. Dielektrická pevnosť dielektrika 1 je $E_{max1} = 6000$ kV/m a dielektrika 2 je $E_{max2} = 4000$ kV/m. Polomer vnútorného vodiča je $a = 1$ cm a vonkajšieho $b = 5$ cm (*obr. 79*).

a) Ako treba voliť polomer rozhrania dielektrík, aby pri intenzite elektrického poľa na povrchu vnútorného vodiča E_{max1} nepresiahla intenzita elektrického poľa v dielektriku 2 hodnotu E_{max2}?

b) Aké je maximálne dovolené napätie na kábli?

c) Aká je kapacita kábla na meter dĺžky?

d) Aká maximálna energia môže byť nazhromaždená v jednom metri kábla?

80. Horná hranica prípustného napätia na kondenzátore závisí od dielektrickej pevnosti jeho dielektrika. Dielektrická pevnosť materiálu je daná maximálnou prípustnou hodnotou intenzity elektrického poľa v materiále. Nad touto hranicou nastáva prieraz kondenzátora. Dielektrická pevnosť kvalitných dielektrík predstavuje hodnoty okolo 10^7 V/m. Vypočítajte maximálnu elektrickú energiu, ktorú možno „uskladniť" v jednom kilograme kondenzátora naplneného kvalitným dielektrikom s permitivitou 2,3 a mernou hustotou 10^3 kg/m^3. Hmotnosť elektród možno zanedbať. Porovnajte výsledok s „mernou energiou" (J/kg) olovených a Ni-Cd akumulátorov. Parametre autoakumulátorov udávané výrobcami podľa časopisu Svět motorů 21/75 sú:

	výkon/kg	energia/kg
Pb aku.	36 – 160 W/kg	10 – 40 Wh/kg
Ni-Cd aku.	100 – 200 W/kg	30 – 50 Wh/kg

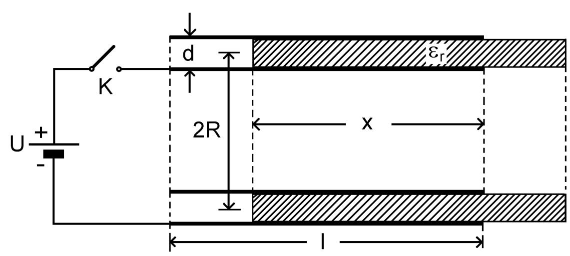
81. a) Akou silou f sa navzájom priťahujú dosky rovinného kondenzátora, ak medzi doskami je konštantné napätie U a dosky sú vo vzdialenosti a od seba?

b) Aká bude sila f, ak sa nabitý kondenzátor odpojí od zdroja, a potom sa naplní tekutým dielektrikom s relatívnou permitivitou ε_r?

c) Aká bude sila f, ak sa nabitý kondenzátor odpojí od zdroja napätia, a potom sa naplní tuhým dielektrikom s permitivitou ε_r a s hrúbkou trošku menšou ako je vzdialenosť dosiek a, takže dielektrikum sa dosiek nedotýka?

d) Aká bude sila f, ak sa najprv kondenzátor zaleje tekutým dielektrikom permitivity ε_r, a potom sa nabije na potenciálový rozdiel U?

e) Aká bude sila f, ak sa najprv kondenzátor naplní tuhým dielektrikom ako v prípade c), a potom sa nabije na potenciálový rozdiel U?



Obr. 82

82. V cylindrickom kondenzátore dĺžky l so stredným polomerom elektród R a ich vzdialenosťou d ($d \ll R$) podľa *obr. 82* sa môže voľne pohybovať dielektrická trubica permitivity ε_r s hrúbkou d, takže pri úplnom zasunutí vyplňuje celý aktívny objem kondenzátora.

a) Vypočítajte kapacitu kondenzátora bez dielektrika a s dielektrikom.

b) Kondenzátor bez dielektrika je pripojený na zdroj napätia U. Aká je jeho energia?

c) Dielektrikum sa začne zasúvať do kondenzátora pri konštantnom napätí zdroja. Aká sila pôsobí na dielektrikum? Aká práca sa vykoná pri úplnom zasunutí dielektrika?

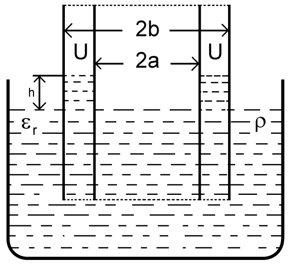
d) Dielektrikum je úplne zasunuté pri napätí U. Aká je energia kondenzátora?

e) Pri zasunutom dielektriku sa zdroj napätia od kondenzátora odpojí a dielektrikum začneme vyťahovať. Aká sila naň pôsobí? Akú prácu treba vykonať na úplné vytiahnutie dielektrika z kondenzátora?

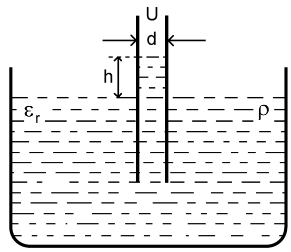
f) Aká je energia kondenzátora po vytiahnutí dielektrika?

83. Valcový kondenzátor s polomermi elektród a a b ($a < b$) a vzduchovým dielektrikom je ponorený do dielektrickej kvapaliny s hustotou ρ a relatívnou permitivitou ε_r podľa *obr. 83*.

Vypočítajte do akej výšky vystúpi kvapalina medzi elektródy kondenzátora, ak je tento udržiavaný na konštantnom napätí U.



Obr. 83



Obr. 84

84. Doskový kondenzátor je ponorený do dielektrickej kvapaliny s hustotou ρ a permitivitou ε_r podľa *obr. 84*. Kondenzátor je udržiavaný na napätí U. Vypočítajte výšku, do ktorej vystúpi kvapalina medzi dosky kondenzátora.

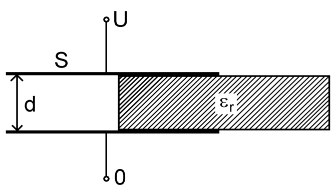
85. Vypočítajte silu, ktorou je vťahované dielektrikum s permitivitou ε_r medzi dosky kondenzátora na *obr. 85*. Na kondenzátore je konštantné napätie U.

86. Doskový kondenzátor pozostáva z dvoch štvorcových elektród so stranami $a = 15$ cm vzdialenými $d = 3$ mm. Medzi elektródy kondenzátora je zasunutá sklenená doska s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 6$ tak, že vypĺňuje tretinu objemu kondenzátora. Vo zvyšku objemu je vákuum, alebo vzduch (*obr. 86*). Na kondenzátor je pripojené napätie $U = 600$ V.

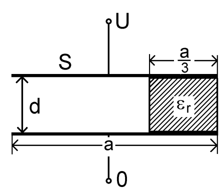
a) Vypočítajte kapacitu kondenzátora.

b) Stanovte celkový náboj na kondenzátore a jeho plošné rozloženie.

c) Vypočítajte energiu kondenzátora.



Obr. 85



Obr. 86

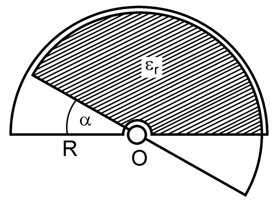
87. Nekonečne dlhý dielektrický valec polomeru R je homogénne polarizovaný ($\boldsymbol{P}$ je konštantný vektor polarizácie) v smere osi z kolmej na os valca. Vypočítajte potenciál a intenzitu elektrického poľa vo vnútri valca a v jeho okolí.

88. Nekonečne dlhý dielektrický valec s polomerom R a relatívnou permitivitou ε_r je vložený do homogénneho elektrického poľa intenzity $\boldsymbol{E}$ tak, že os valca je kolmá na smer poľa $\boldsymbol{E}$. Vypočítajte potenciál vo vnútri a v okolí valca.

89. Nekonečne dlhý kovový valec polomeru R je vložený do homogénneho elektrického poľa intenzity $\boldsymbol{E}$ tak, že os valca je kolmá na smer poľa $\boldsymbol{E}$. Vypočítajte potenciál vo vnútri a v okolí valca. (Riešte ako limitný prípad predchádzajúceho príkladu.)

90. Vypočítajte kapacitu guľového kondenzátora, ktorého polomer vnútornej elektródy je R_1, polomer vonkajšej elektródy R_2 a aktívny objem kondenzátora je vyplnený dielektrikom, ktorého permitivita je daná výrazom $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\cos^2\vartheta$, kde ϑ je polárny uhol.

91. Kondenzátor pozostáva z dvoch pevných polkruhových platní polomeru R a pohyblivej platne polkruhového dielektrika s permitivitou ε. Dielektrická platňa sa môže otáčať okolo osi O (*obr. 91*). Hrúbka dielektrickej platne h sa rovná vzdialenosti elektród kondenzátora. Na kondenzátore je napätie U. Nájdite moment sily vzhľadom na os O, ktorý pôsobí na dielektrikum v polohe podľa obrázku.



Obr. 91

92. Voľný bodový náboj q sa nachádza v dielektrickom prostredí, ktorého permitivita je daná výrazom $\varepsilon = \alpha/r$ (α je konštanta, r je vzdialenosť od náboja). Nájdite vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{P}$ a objemový viazaný náboj v dielektriku ako funkciu r.

93. Nekonečne veľká vrstva homogénneho dielektrika s permitivitou ε je nabitá voľným objemovým nábojom ρ s konštantnou hustotou. Hrúbka vrstvy je a. Nájdite:

a) intenzitu elektrického poľa a potenciál ako funkciu vzdialenosti x od stredu vrstvy (potenciál v strede vrstvy nech sa rovná nule); znázornite intenzitu elektrického poľa a potenciál ako funkcie vzdialenosti stredu vrstvy;

b) plošnú a objemovú hustotu viazaných nábojov.

94. Homogénne dielektrikum má tvar guľovej vrstvy s vnútorným polomerom a a vonkajším b. Nájdite a graficky znázornite závislosť intenzity elektrického poľa E a potenciálu V ako funkcie vzdialenosti r od stredu systému, ak náboj Q je rozložený rovnomerne

a) na vnútornej ploche dielektrika,

b) v objeme dielektrika.

95. Voľný náboj Q je rozložený rovnomerne v objeme gule polomeru R z homogénneho dielektrika permitivity ε_r. Nájdite a graficky znázornite intenzitu elektrického poľa E a potenciál V ako funkcie vzdialenosti r od stredu gule. Nájdite plošnú a objemovú hustotu viazaných nábojov.

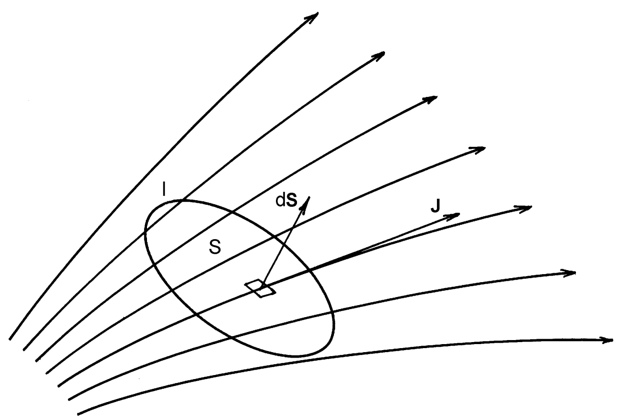
96. V kolmej vzdialenosti d od rovinného rozhrania dvoch dielektrík s permitivitami ε_{r1} a ε_{r2} sa nachádza bodový náboj Q. Nájdite plošnú hustotu viazaného náboja na rozhraní ako funkciu vzdialenosti r od náboja a celkový viazaný náboj.

5 ELEKTRICKÝ PRÚD

5.1 POHYB ELEKTRICKÝCH NÁBOJOV. ELEKTRICKÝ PRÚD

5.1.1 Vlastnosti elektrických prúdov, klasifikácia prúdov

Pod pojmom "elektrický prúd" rozumieme usmernený kolektívny pohyb elektrických nábojov, pričom pohybovať sa môžu elektróny, menej často protóny, prípadne iné elementárne častice, alebo aj kladné, resp. záporné ióny. Náboje sa môžu pohybovať vo vákuu, alebo v materiálnom prostredí tvorenom tuhou, kvapalnou, alebo plynnou látkou. V polovodičoch sa môžu popri elektrónoch pohybovať aj diery – kladné vakancie nenasýtených väzieb. Pri takej rozmanitosti prúdiacich nabitých objektov v rôznych prostrediach je len prirodzené, že elektrický prúd môže mať množstvo charakteristických vlastností. Prv než sa nimi začneme zaoberať, zavedieme niektoré všeobecné veličiny, ktoré elektrický prúd charakterizujú.

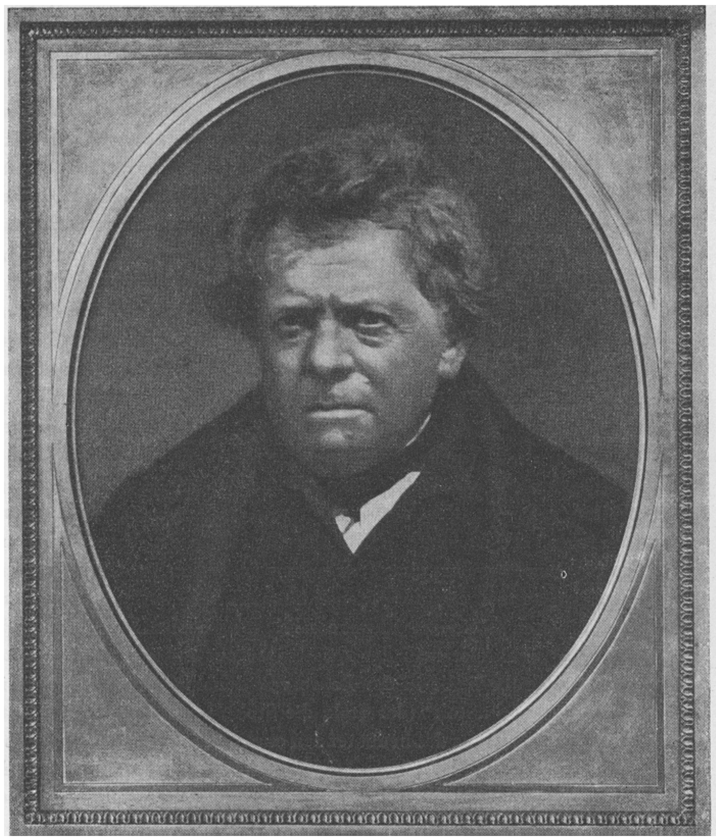


Obr. 5.1

Pre opis prúdového poľa identických elektrických nábojov q sa zavádza vektorová veličina nazývaná **objemová prúdová hustota** (mikroskopická definícia), daná výrazom

$$\boldsymbol{J} = nq\boldsymbol{v} = \rho\boldsymbol{v} \qquad [\mathrm{A.m^{-2}}] \tag{5.1}$$

kde n je koncentrácia pohybujúcich sa nabitých objektov (elektrónov, iónov a i.), $\boldsymbol{v}$ je ich rýchlosť v prúdovom poli, a $\rho = nq$ je objemová hustota náboja. Treba si všimnúť, že



Georg Simon OHM
(1789 Erlangen – 1854 Mníchov)

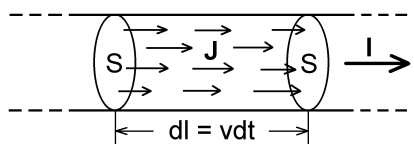
prúdová hustota kladných nábojov má rovnaký smer ako smer ich rýchlosti, pre záporné náboje sú obidva vektory navzájom opačné. Podľa uvedenej definície je veľkosť prúdovej hustoty v nejakom bode prúdového poľa daná nábojom, ktorý prejde za jednotku času jednotkovou plochou kolmou na smer rýchlosti. Čiary, ku ktorým vektor prúdovej hustoty má smer dotyčnice, sa nazývajú prúdočiary (pozri *obr. 5.1*). Ak si v prúdovom poli vymedzíme nejakú plochu S s hraničnou čiarou l, potom celkový tok nábojov cez túto plochu je daný integrálom prúdovej hustoty plochou S, teda

$$I = \int_S \boldsymbol{J} . \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad [\mathrm{A}] \tag{5.2}$$

Tok nábojov vymedzený plochou S a daný výrazom (5.2) sa nazýva elektrický prúd I. Vzťah (5.2) umožňuje zaviesť inú, makroskopickú definíciu prúdovej hustoty, ako pomer nekonečne malého prúdu dI, ktorý pretečie plôškou dS kolmou na smer prúdenia kladných nábojov, teda

$$\boldsymbol{J} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}\boldsymbol{n}_0 \qquad [\mathrm{A.m^{-2}}] \tag{5.3}$$

kde $\boldsymbol{n}_0$ je jednotkový vektor v smere prúdenia kladných nábojov.



Obr. 5.2

V praxi je častý prípad, že prúd tečie vymedzenou prúdovou trubicou prierezu S, napr. prierezom relatívne tenkého vodiča (pozri *obr. 5.2*), a na tomto priereze má konštantnú prúdovú hustotu, kolmú na prierez. Ak vyjadríme rýchlosť pohybujúcich sa nábojov ako $v = \mathrm{d}l/\mathrm{d}t$, kde d$l$ je posunutie náboja v trubici za čas dt a d$\tau = S\mathrm{d}l$ elementárny objem, v ktorom sa náboj d$Q = nq\mathrm{d}\tau$ za čas dt posunie o dl, potom veľkosť prešlého prúdu v uvažovanej prúdovej trubici s ohľadom na výraz (5.2)

$$I = JS = nqvS = nq\frac{S\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{nq\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.4}$$

V niektorých prípadoch tečú elektrické prúdy po povrchoch vodivých telies, majú teda plošný charakter. Takými sú napr. vysokofrekvenčné prúdy so skinefektom, keď amplitúda prúdu smerom do vnútra vodiča rapídne ubúda a prúd možno považovať za povrchový, teda plošný. **Plošná prúdová hustota** sa dá zaviesť výrazom

$$\boldsymbol{J}_s = \sigma\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{n}_0 \qquad [\mathrm{A.m^{-1}}]$$

kde σ je plošná hustota náboja pohybujúceho sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}$, dl je šírka elementárnej prúdnice na pásiku, ktorým tečie prúd dI a $\boldsymbol{n}_0$ je jednotkový vektor v smere pohybu kladných nábojov. Celkový prúd tečúci pásikom šírky l je daný integrálom tejto prúdovej hustoty po šírke pásika, teda

$$I = \int_l J_s \mathrm{d}l$$

Podľa výrazu (5.4) elektrický prúd môžeme definovať ako množstvo náboja, ktoré pretečie prierezom prúdovej trubice (prierezom vodiča) za jednotku času. Z danej definície vidíme, že elektrický prúd je skalárna veličina, avšak vzhľadom na dva druhy elektrického náboja môže mať dve znamienka podľa znamienka nábojov tečúcich v danom smere. V súhlase s konvenciou za kladný považujeme prúd kladných nábojov. V kovoch sa môžu pohybovať iba (záporné) elektróny, no napriek tomu za kladný považujeme prúd neskutočných kladných nábojov tečúcich v opačnom smere. Ak sa v uvažovanom priestore pohybujú kladné aj záporné náboje (napr. v elektrolytoch kladné a záporné ióny), výsledný prúd je daný algebraickým súčtom prítomných prúdov.

Ak prierezom vodiča pretečie za rovnaký čas rovnaké množstvo náboja, je prúd v čase konštantný alebo stály, v opačnom prípade je časovopremenný. Význačnou skupinou prúdov sú v čase periodické harmonické prúdové priebehy, ktoré sa nazývajú striedavé prúdy. Sú dôležité v elektrickej energetike, v nízkofrekvenčnej i vysokofrekvenčnej elektronike. Z časovopremenných prúdov si pozornosť zasluhujú tiež rôzne nestacionárne, prechodové prúdy. V tejto časti sa budeme zaoberať predovšetkým vlastnosťami v čase stálych, konštantných prúdov a v závere opíšeme nestacionárny, prechodový prúd v *RC*-obvode. Striedavým harmonickým prúdom sa budeme venovať neskôr v osobitnej kapitole.

Z praktického hľadiska je dôležitá otázka merania elektrických prúdov. Jednotka prúdu by sa dala stanoviť pomocou doteraz zavedených jednotiek pre náboj a čas, teda za jednotkový by sa mohol považovať prúd množstva nábojov 1 coulomb (C) za jednu sekundu, teda 1 $\mathrm{C.s^{-1}}$, samozrejme za predpokladu, že by sme tieto veličiny dokázali jednoducho a presne merať. Aj keď čas vieme merať s veľmi vysokou presnosťou, nemôžeme to isté povedať o množstve pretečeného náboja prierezom vodiča. Do zavedenia sústavy jednotiek SI sa určoval jednotkový náboj ako náboj potrebný na vylúčenie istého množstva látky (striebra) pri elektrolýze, avšak pre nepresnosť a nepohodlnosť určovania náboja sa od takého stanovenia jednotky nakoniec upustilo a dnes sa jednotka prúdu určuje zo špecifického silového pôsobenia pohybujúcich sa nábojov, ktoré nazývame magnetickým silovým pôsobením. Sila medzi dvoma elektrickými prúdmi sa dá merať s vysokou presnosťou, a tak nakoniec etalónom v elektrickej meracej technike nie je etalón náboja, ale elektrického prúdu. Jednotkou elektrického prúdu je 1 ampér (1 A) a jej stanovenie bude vysvetlené v časti 6.4.2. Ampér patrí medzi základné meracie jednotky SI-sústavy a až na jej základe je určená jednotka elektrického náboja 1 C = 1 A.s, hoci náboj je primárnym pojmom elektromagnetizmu. Na túto skutočnosť sme upozornili už na začiatku tejto učebnice, v odseku 2.1.

Pohyb elektrických nábojov, teda elektrický prúd, má v závislosti od svojho charakteru rôzne fyzikálne účinky. Je všeobecne známe, že ak nedokonalým vodičom tečie elektrický prúd, vodič sa ohrieva. Túto skutočnosť môžeme vysvetliť tým, že pohybujúce sa nosiče elektrického náboja, ktorými v prípade kovov sú elektróny, narážajú na ióny kovovej mriežky, tým zvyšujú jej energiu, čo sa prejaví vyššou teplotou materiálu. V danom prípade prúd má tepelné účinky. Prechod prúdu odporovým vodičom je najbežnejší spôsob premeny elektrickej energie na teplo. Samotnú skutočnosť, že nosičmi elektrického prúdu v kovoch sú elektróny, experimentálne dokázali v roku 1917 Tolman a Stewart[1] a neskôr, v roku 1944 Kettering a Scott[2] . Meraním na medi a hliníku sa takto zistilo, že pre obidva materiály pohyblivé nosiče náboja majú merný náboj $-1{,}757.10^{11}$ C.kg^{-1}, čo je vo veľmi dobrom súhlase s najpresnejšími meraniami merného náboja elektrónu $e/m_e = -1{,}758\,820\,174.10^{11}$ C.kg^{-1}.

Elektrický prúd elektrónov, prípadne iných nabitých častíc vo vákuu sa líši od prúdu vo vodičoch napríklad tým, že rýchlosť prúdiacich častíc môže dosahovať hodnôt blízkych rýchlosti svetla (napr. prúdy častíc v urýchľovačoch), zatiaľ čo vo vodičoch sú tieto rýchlosti aj pri veľmi vysokých prúdových hustotách zriedka väčšie ako cca 1 cm/s. Súvisí to s enormne vysokou koncentráciou prúdiacich nábojov vo vodičoch. K energetickým premenám v prúdovom zväzku vo vákuu nedochádza, iba pri prechode prúdu do vodivého prostredia – do elektródy sa odovzdáva vysoká kinetická energia elektrónov vo forme tepla.

Iný charakter má elektrický prúd v elektrolytoch. V nich sú pohyblivými nosičmi elektrického náboja ióny a pri ich prenose sa prenáša aj látka, ktorá sa na elektródach vylučuje vo forme galvanických povlakov. Množstvo vylúčenej látky na elektróde závisí od prejdeného náboja, od mocenstva a molekulovej hmotnosti vylučovanej látky. Tieto zákonitosti sformuloval Faraday a vo fyzikálnej chémii sú známe ako zákony o elektrolýze. Moderný pohľad na problematiku možno nájsť v literatúre[3].

Prenos elektrického náboja v plynoch má tiež svoje osobitosti a jeho opis je veľmi zložitý. Vodivý ionizovaný plyn sa nazýva fyzikálnou plazmou a predstavuje zmes iónov obidvoch druhov, prípadne aj voľných elektrónov a protónov. Prúdy v takýchto prostrediach sú vysoko nelineárne a podliehajú zvláštnym zákonitostiam. Ich štúdiom sa zaoberá fyzika plazmy.[4]

Všetky druhy elektrických prúdov majú jednu spoločnú vlastnosť. V priestore, v ktorom tečú, vytvárajú zvláštny typ silového poľa, ktoré nazývame **magnetické pole**. Tomuto poľu budeme venovať veľkú časť našich neskorších úvah.

Na vytvorení magnetického poľa sa podieľa ešte jeden prúd, ktorý v skutočnosti ani nie je prúdom, pretože ho necharakterizuje prenos elektrických nábojov. Nazýva sa **posuvný prúd** a spája sa s posúvaním nábojových centier v rámci jedného elektrického dipólu (v rámci jednej molekuly alebo atómu). Existuje aj vo vákuu, kde sa však nič neposúva. Jeho prúdová hustota $\boldsymbol{J}_p$ je daná výrazom

$$\boldsymbol{J}_p = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad [\mathrm{A.m^{-2}}]$$

kde $\boldsymbol{D}$ je vektor elektrickej indukcie. Vidíme, že $\boldsymbol{J}_p$ nemôže existovať v statických elektrických poliach. Tento prúd je zodpovedný za existenciu elektromagnetických vĺn. Názov "posuvný prúd" (displacement current) zaviedol tvorca elektromagnetickej teórie James Clerk Maxwell. Je známy tiež pod názvom "Maxwellov prúd". Jeho podstata bude objasnená v odseku 6.3.

---

[1] Tolman, R. C., Stewart, T. D., Phys. Rev., **9**, 64 (1917)
[2] Kettering, C. F., Scott, G. C., Phys. Rev., **66**, 257 (1944)
[3] Atkins, P. W.: Fyzikálna chémia 3, Vydavateľstvo STU Bratislava 1999
[4] Chen, F. F.: Úvod do fyziky plazmatu, Academia Praha 1984
Lieberman, M. A., Lichtenberg, A.. J.: Principles of Plasma Discharges and Materials Processing, J.Wiley, New York 1994

5.1.2 Zákon zachovania elektrického náboja. Rovnica spojitosti elektrického prúdu

Predpokladajme, že v nejakej oblasti priestoru existuje prúdové pole dané vektorom prúdovej hustoty $\boldsymbol{J}$ ako funkcia polohy. Vypočítajme tok nábojov nejakou uzavretou plochou S, teda v podstate elektrický prúd uzavretou plochou. Ak si spomínate, otázkou toku vektorovej veličiny uzavretou plochou sme sa zaoberali už pri formulácii Gaussovho zákona, kde sme konštatovali, že tok intenzity elektrického poľa je istá užitočná matematická fikcia. Tok vektora prúdovej hustoty ale nie je fikcia. Je to reálny prenos nábojov ako materiálnych objektov a cez uzavretú plochu môže byť nulový, ale aj nenulový. Nulový je vtedy, ak vo zvolených časových intervaloch vtečie do objemu rovnaké množstvo nábojov, ako z neho vytečie, pričom predpokladáme, že náboje sa zachovávajú. V tomto stacionárnom prípade na základe vzťahu (5.2) platí

$$I = \oint_S \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{5.5}$$

Ak je tok nenulový, tak pri jeho kladnej hodnote musí celkový náboj Q v objeme τ uzavretom plochou S s časom ubúdať, a naopak, ak celkový tok je záporný, musí náboj v objeme τ s časom narastať. V takomto všeobecnom a nestacionárnom prípade musí teda pre tok platiť

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = -\frac{dQ}{dt}} \tag{5.6}$$

Rovnica (5.6) je jednou zo základných rovníc elektromagnetizmu a nazýva sa **rovnica spojitosti** (kontinuity) elektrického prúdu napísaná v integrálnom tvare. V podstate vyjadruje zákon zachovania elektrického náboja. Matematicky plynie z Maxwellových rovníc, ale pre jej principiálny význam zákona zachovania hovoríme, že je s týmito rovnicami konzistentná. Z rovnice (5.6) pri $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$, teda pre Q = konšt. plynie stacionárny tvar rovnice spojitosti (5.5).

Ak uvážime, že celkový náboj uzavretý plochou S v objeme τ je objemovým integrálom nábojovej hustoty ρ v priestore, teda

$$Q = \int_\tau \rho\,\mathrm{d}\tau$$

potom rovnicu (5.6) pri časovo nepremennej ploche S možno prepísať do tvaru

$$\oint_S \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau$$

Integrál na ľavej strane výrazu možno pomocou Gaussovej vety premeniť na objemový integrál divergencie prúdovej hustoty a poslednú rovnicu prepísať do tvaru

$$\int_\tau \operatorname{div} \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}\,\tau = -\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}\,\tau$$

Vzhľadom na rovnaký obor integrácie na obidvoch stranách musí platiť

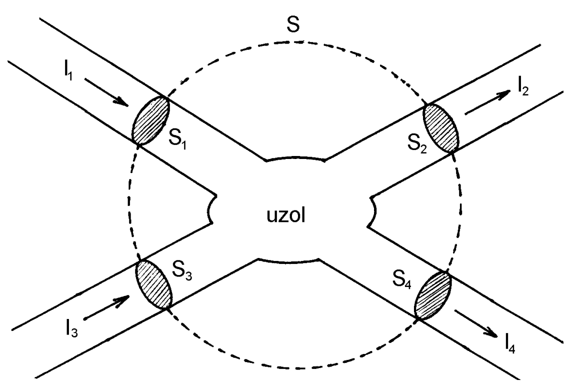
$$\boxed{\operatorname{div} J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \tag{5.6}$$

Výraz (5.7) je **rovnica spojitosti v diferenciálnom tvare**. Jej stacionárna podoba, v prípade keď $\partial\rho/\partial t = 0$, má tvar

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0 \tag{5.8}$$

5.1.3 Prvý Kirchhoffov zákon (Kirchhoffov zákon pre prúdy)

Rovnica spojitosti okrem svojho principiálneho vyjadrenia zákona zachovania elektrického náboja umožňuje sformulovať jedno z dvoch praktických pravidiel, na ktorých je založená analýza elektrických obvodov. V elektrickej sieti, ktorá je istým účelným spojením elektrických prvkov, ako sú zdroje, rezistory, kondenzátory a cievky (indukčnosti), sú miesta, v ktorých sa spojovacie vodiče prvkov stretajú v uzloch, a tam sa prúdy do jednotlivých vodičov vetvia. Súvis medzi rozvetvenými prúdmi plynie z rovnice spojitosti. Predpokladajme, že sa v nejakom mieste siete spájajú viac ako dva vodiče (drôty), ktorými tečú prúdy, ako na *obr. 5.3*. Obaľme uzol vodičov myslenou uzavretou plochou *S,* ktorá na prierezoch jednotlivých vodičov vytína plôšky S_1, S_2, S_3 a S_4. Prierezom každého z vodičov tečú odpovedajúce prúdy I_1 až I_4 ako integrály prúdovej hustoty cez jednotlivé plôšky. Tok nábojov uzavretou plochou S je daný algebraickým súčtom tokov cez jednotlivé plôšky, teda súčtom prúdov. Pri stacionárnom prúdení na základe vzťahu (5.5) je celkový tok nulový, teda súčet jednotlivých prúdov do uzla a von z uzla sa rovná nule. Matematicky



Obr. 5.3

$$I = \oint_S \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_1} \boldsymbol{J}_1.\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 + ... + \int_{S_4} \boldsymbol{J}_4.\mathrm{d}\boldsymbol{S}_4 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

Na základe uvedeného možno sformulovať všeobecné pravidlo pre n stacionárnych prúdov: **algebraický súčet všetkých prúdov v uzle elektrickej siete sa rovná nule,** teda

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \tag{5.9}$$

pre i = 1, 2, 3, ... n. Pravidlo (5.9) je známe ako **prvý Kirchhoffov zákon** (Kirchhoffov zákon pre prúdy). Zrejme pri nenulových hodnotách prúdov niektoré musia tiecť z uzla, a iné naopak. Je zvykom považovať prúdy, ktoré z uzla vytekajú za kladné a naopak, prúdy vtekajúce do uzla za záporné. Treba zdôrazniť, že prvý Kirchhoffov zákon platí iba pre stacionárne prúdy, keď sa náboj v uzle nehromadí alebo z neho neubúda.

5.2 OHMOV ZÁKON

V rokoch 1825 – 1827 uverejnil nemecký fyzik Georg Simon Ohm sériu prác s ústredným názvom "Stanovenie zákona, podľa ktorého kovy vedú elektrinu",[1] v ktorých opísal výsledky experimentov s elektrickými prúdmi v najčastejšie používaných kovových vodičoch. Pri meraní rozdielu potenciálov (napätia) U na definovanom úseku vodiča v závislosti od pretekaného prúdu I zistil, že pri danej teplote a pre daný materiál je závislosť napätia U od prúdu I vodičom lineárna, a možno ju napísať jednoduchým vzťahom

$$U = RI \tag{5.10}$$

kde R je koeficient úmernosti, závislý od druhu materiálu, od teploty, od dĺžky úseku, jeho priečnej geometrie a nazýva sa **odpor** (**rezistancia**) vodiča. Vzťah (5.10) je jedným z najznámejších vzťahov elektrodynamiky a nazýva sa podľa svojho objaviteľa **Ohmov zákon** (vo svojej integrálnej forme). Často sa tiež zapisuje v tvare

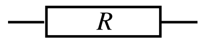
$$I = GU \tag{5.11}$$

kde $G = 1/R$ je **vodivosť** (**konduktancia**) vodiča. Odpor alebo vodivosť je integrálna vlastnosť vodiča. Pre potreby elektrotechniky a elektroniky sa priemyselne vyrábajú elektrotechnické súčiastky s odporovými vlastnosťami, pre ktoré slovenská terminologická komisia pred niekoľkými rokmi vymyslela kuriózny názov "odporník", a ktorý odborná komunita dodnes neakceptovala. V praxi len zriedkavo počujete elektroinžiniera alebo fyzika hovoriť o odporníkoch, najčastejšie pre súčiastku a jej elektrickú vlastnosť používajú ten istý názov "odpor". Vhodnejší je asi cudzí názov "rezistor", ktorý jazyková norma tiež pripúšťa. Podrobnosti o priemyselnej výrobe odporníkov alebo rezistorov sa

---

[1] Ohm, G. S.: Vorläufige Anzeige des Gesetzes nach welchem die Metalle die Kontakt-Elektrizität leiten, Schweizer Jour. (1825) – Bestimmung dieses Gesetzes nebst einem Entwurfe zu einer Theorie des Voltaischen Apparats, tamtiež (1826) – Die Galvanische Kette mathematisch bearbeitet, Berlin (1826)

možno dozvedieť z firemnej a elektrotechnickej literatúry. Podľa našich noriem sa v elektrických schémach rezistory kreslia symbolom



s vyznačením hodnoty odporu prípadne aj prípustného tepelného výkonu (na vyznačenie hodnoty odporu, jej tolerancie a výkonu sa používa aj farebný kód). Jednotkou elektrického odporu vodiča je 1 ohm (1 Ω). Je to odpor vodiča medzi jeho koncami, na ktorom pri prúde 1 A vznikne napätie (potenciálový spád) 1 V, teda

$$1\,\Omega = \frac{1\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{A}} = 1\,\mathrm{m}^2.\mathrm{kg}.\mathrm{s}^{-3}.\mathrm{A}^{-2}$$

Jednotkou elektrickej vodivosti je recipročný ohm (Ω^{-1}). Táto jednotka v sústave SI má názov siemens (S).[1] Teda 1 S = 1 Ω^{-1}.

Existuje iná, úplnejšia, diferenciálna formulácia Ohmovho zákona, podľa ktorej v lineárnom prostredí pod účinkom prúdovej hustoty $\boldsymbol{J}$ v každom bode priestoru je nenulová intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}$, a tieto veličiny súvisia vzťahom

$$\boldsymbol{E} = \rho \boldsymbol{J} \tag{5.12}$$

kde ρ je bodová charakteristika odporového prostredia nazývaná **rezistivita** (starší názov merný odpor). Rezistivita je materiálová konštanta prostredia a zo vzťahu (5.12) plynie pre ňu rozmer a jednotka 1 Ω.m.

Druhý spôsob diferenciálnej formulácie Ohmovho zákona je výraz

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{5.13}$$

kde $\sigma = 1/\rho$ sa nazýva **konduktivita** (starší názov merná vodivosť)[2] a meria sa v jednotkách $\mathrm{S.m}^{-1}$.

Diferenciálne formulácie Ohmovho zákona sú oproti integrálnym všeobecnejšie, pretože nezávisia od objemu a tvaru uvažovaného vodivého objektu. Treba si všimnúť, že vektory prúdovej hustoty a intenzity elektrického poľa v odporovo lineárnom prostredí majú rovnaké smery, čo v niektorých prípadoch umožňuje modelovať prúdové pole poľom siločiar vhodného elektrostatického problému. Toto tvrdenie možno podporiť aj čisto teoretickou úvahou: V stacionárnom prípade, vo vodivom prostredí, v ktorom konduktivita σ je konštantná, div $\boldsymbol{J} = \sigma\,\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0$ a $\boldsymbol{E} = -$ grad V. Využitím vzťahov medzi diferenciálnymi operátormi zistíme že pre potenciál vo vodivom prostredí platí známa Laplaceova rovnica

$$\Delta V = 0$$

podobne ako v elektrostatickom prípade v nevodivom prostredí, alebo vo vákuu. Ak dve dokonale vodivé elektródy ponoríme do prostredia s konečnou vodivosťou a budeme ich

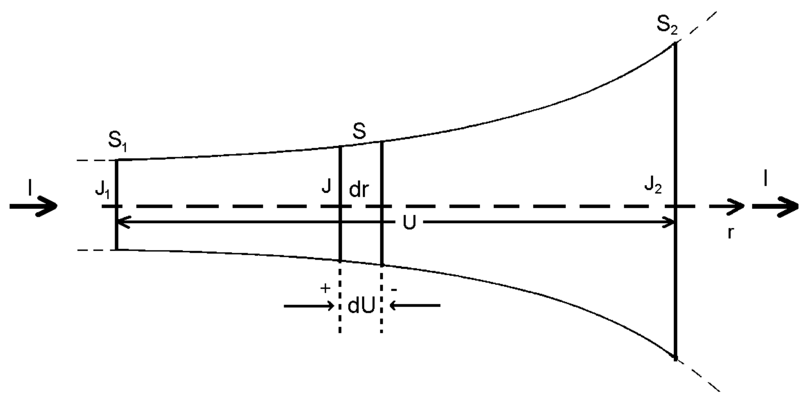
[1] Jednotka pomenovaná podľa nemeckého elektroinžiniera Wernera von Siemensa (1816 – 1892), vynálezcu elektrického stroja – dynama.

[2] Doteraz sme symbolmi ρ a σ označovali objemovú a plošnú hustotu elektrických nábojov. V ďalšom texte budeme tieto symboly používať aj na označenie rezistivít a konduktivít. Z kontextu bude jasné, o ktoré veličiny pôjde. Táto symbolika sa zvykne rovnako používať aj v iných učebniciach.

Werner von SIEMENS
(1816 Lenthe – 1892 Charlottenburg)

udržiavať na konštantnom potenciálovom rozdiele, bude rozloženie potenciálu a intenzity v priestore také isté ako rozloženie pre tieto elektródy vo vákuu.

Z diferenciálneho tvaru Ohmovho zákona možno jednoducho získať jeho integrálny tvar. Na *obr. 5.4* je zobrazený úsek prúdovej trubice tvorenej elektricky vodivým materiálom s konštantnou rezistivitou ρ. Predpokladá sa, že celou plochou S_1 do trubice vstupuje elektrický prúd $I = J_1S_1$ a plochou S_2 ten istý prúd $I = J_2S_2$ vystupuje. Vo vnútri trubice sa vytvorí elektrické pole intenzity $E = \rho J$, ktorá pri homogénnom materiáli má tú vlastnosť, že na ľubovoľnej prierezovej ploche má konštantnú hodnotu závislú iba od vzdialenosti od vstupnej plochy S_1. Každá prierezová plocha je ekvipotenciálnou plochou, a na nekonečne krátkom úseku dr medzi dvoma ekvipotenciálnymi plochami vznikne spád napätia



Obr. 5.4

$$\mathrm{d}U = E\mathrm{d}r = \rho J\mathrm{d}r$$

Prúdová hustota J sa pozdĺž trubice mení, na priereze v ľubovoľnej rovine však zostáva konštantná, pretože materiál prúdovej trubice je homogénny. V ľubovoľnej prierezovej rovine je teda prúdová hustota nepriamo úmerná prierezovej ploche S v danej vzdialenosti a pri konštantnom integrálnom prúde I je $J = I/S$. Po dosadení v poslednom vzťahu pre elementárny napäťový spád dU dostaneme

$$\mathrm{d}U = \rho \frac{\mathrm{d}r}{S} I$$

Celkový spád napätia pozdĺž prúdovej trubice, teda napätie na nej je

$$U = I\rho \int_0^l \frac{\mathrm{d}r}{S} = IR \tag{5.14}$$

Výraz (5.14) je integrálny tvar Ohmovho zákona pre prúdovú trubicu tvorenú vodivým materiálom, do ktorej prúd I plochou S_1 vstupuje a S_2 vystupuje a na trubici vznikne úbytok napätia U. Odpor uvažovanej trubice

$$R = \rho \int_0^l \frac{\mathrm{d}r}{S} \qquad [\Omega] \tag{5.15}$$

V prípade, ak trubicou je valec dĺžky l s konštantnou prierezovou plochou S, dostaneme pre jeho odpor známy jednoduchý výraz

$$R = \rho \frac{l}{S} \qquad [\Omega]$$

Rezistivita a konduktivita sú materiálové konštanty, ktoré sú pre elektricky izotropné prostredia rozmerové číselné konštanty, pre anizotropné prostredia sú rozmerové tenzorové veličiny. Rozsah hodnôt týchto konštánt pre rôzne látky v prírode je obrovský a prekrýva viac ako dvadsať rádov. Konduktivita dobrých vodičov (striebra, medi, hliníka a i.) je rádu 10^8 S/m, konduktivita kvalitných izolantov, ako napríklad tavený kremeň, je rádu 10^{-17} S/m, čo predstavuje odstup až dvadsaťpäť rádov.

Tabuľka 7

Materiál		Rezistivita pri 20 °C [Ω.m]	Teplotný odporový súčiniteľ pri 20 °C [°C^{-1}]
Čisté kovy	Striebro	$1{,}63.10^{-8}$	$3{,}8.10^{-3}$
	Meď	$1{,}72.10^{-8}$	$3{,}9.10^{-3}$
	Zlato	$2{,}35.10^{-8}$	$4{,}0.10^{-3}$
	Hliník	$2{,}83.10^{-8}$	$3{,}9.10^{-3}$
	Wolfram	$5{,}60.10^{-8}$	$4{,}5.10^{-3}$
	Nikel	$7{,}80.10^{-8}$	$6{,}0.10^{-3}$
	Cín	$1{,}15.10^{-7}$	$4{,}2.10^{-3}$
	Platina	$1{,}09.10^{-7}$	$3{,}9.10^{-3}$
	Železo	$0{,}98.10^{-7}$	$6{,}0.10^{-3}$
Zliatiny	Mosadz	$0{,}75.10^{-7}$	$\sim 10^{-3}$
	Konštantán	$0{,}44.10^{-6}$	$\sim 10^{-6}$
	Manganín	$0{,}48.10^{-6}$	$\sim 10^{-6}$
	Nichróm	$0{,}11.10^{-5}$	$\sim 10^{-4}$
Polovodiče	Germánium	$\sim 0{,}5.10^{0}$	záporný
	Kremík	$\sim 2.10^{3}$	záporný
Dielektriká (izolátory)	Sklo	2.10^{11}	
	Pečatný vosk	$\sim 10^{14}$	
	Síra	$\sim 10^{15}$	
	Tavený kremeň	$>5.10^{16}$	

Odpor a rezistivita materiálov závisia od teploty. U väčšiny materiálov ich odpor s teplotou vzrastá, u amorfného uhlíka (grafitu) klesá, a klesá aj u zvláštnej skupiny materiálov, ktoré sa nazývajú polovodiče. Pre nepríliš veľké teplotné zmeny v okolí 0 °C zmena odporu materiálov je lineárna a teplotná závislosť odporu je tvaru

$$R = R_0(1 + \alpha\vartheta) \qquad [\Omega] \qquad (5.16)$$

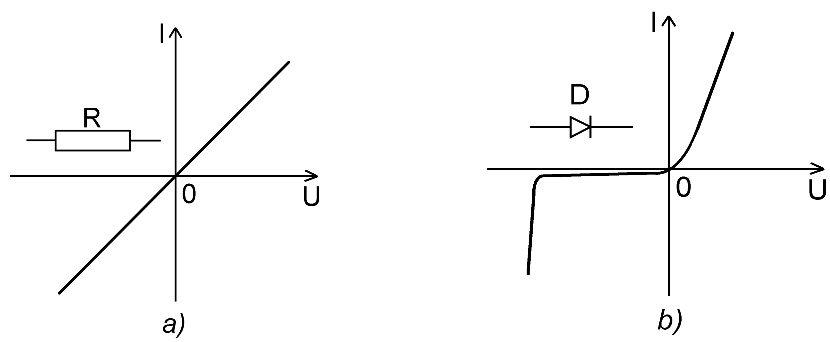
podobne pre rezistivitu

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\vartheta) \qquad [\Omega.\mathrm{m}] \qquad (5.17)$$

R_0 a ρ_0 sú odpor, resp. rezistivita pri 0 °C (prípadne pri inej referenčnej teplote), ϑ je teplota v Celsiovej stupnici a

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\vartheta} \qquad [°\mathrm{C}^{-1}] \qquad (5.18)$$

je pomerná zmena rezistivity ($\mathrm{d}\rho/\rho_0$) na jednotkovú zmenu teploty ϑ a nazýva sa tepelný odporový súčiniteľ. Pre kovy a ich zliatiny je kladný, pre uhlík (grafit) a polovodiče záporný. V tabuľke 7 sú uvedené niektoré typické materiály, orientačné hodnoty ich rezistivít $\rho = 1/\sigma$ a tepelných odporových súčiniteľov α.



Obr. 5.5

Popri lineárnych odporových materiáloch a z nich vyrobených rezistorov sa v praxi stretávame s elektrickými prvkami, ktoré sú nelineárne, a ktorých je hlavne v elektronike podstatne viac ako lineárnych. Na nelineárnych elektrických prvkoch je založená celá obvodová elektronika. Takými prvkami sú všetky polovodičové súčiastky, z ktorých najbežnejšie sú diódy a tranzistory. Linearita prvku sa posudzuje podľa jeho voltampérovej (VA) charakteristiky. Voltampérová charakteristika prvku, ktorý spĺňa Ohmov zákon, je priamka prechádzajúca začiatkom súradníc I – U ako na *obr. 5.5a* a smernica I/U je konštantná vodivosť prvku. Na *obr. 5.5b* je znázornená silne nelineárna VA-charakteristika stabilizačnej Zenerovej diódy.

5.2.1 Základy teórie vodivosti kovov a polovodičov

Základy elektrónovej teórie vodivosti kovov položili v roku 1900 P. Drude a H. A. Lorentz vyslovením predstavy, že kovy sú polykryštalické látky s kovovou väzbou. Valenčné elektróny sú len veľmi slabo viazané k ich atómom, a vytvorením kryštalickej mriežky kovu z kladných ionizovaných atómov sa tieto elektróny uvoľnia a pohybujú sa chaoticky s vysokými rýchlosťami. Súbor týchto voľných alebo vodivostných elektrónov tvorí **elektrónový plyn**. V medi, ktorej atómy majú 29 elektrónov, jeden elektrón je valenčný a vstupuje do elektrónového plynu, zostávajúcich 28 elektrónov spolu s jadrom tvoria kladný ión, ktorý je súčasťou kryštalickej mriežky medi.

Elektrónový plyn má niektoré vlastnosti reálnych plynov a možno preň zaviesť klasický pojem strednej voľnej dráhy, ktorú elektrón urazí medzi dvoma zrážkami s mriežkou. Pri zvyšovaní teploty kovov sa zvyšuje frekvencia zrážok elektrónov, teda skracuje sa doba medzi zrážkami. Plyn takmer neprijíma energiu, pri izbových teplotách je elektrónové merné teplo malé oproti mernému teplu súvisiacemu s kmitaním kryštalickej mriežky kovu. Toto vysvetlila až Sommerfeldova kvantová elektrónová teória. Klasickú teóriu pozmenil Sommerfeld predpokladmi, že energia valenčných elektrónov sa nemení spojito a že hladiny ich energií sú v monokryštáli obsadzované v zhode s Pauliho vylučovacím princípom. Dokonalý opis vodivostných vlastnosti kovov, ale hlavne polovodičov, však nepodala ani Sommerfeldova teórie, a preto v tridsiatych rokoch minulého storočia vznikla pásová teória tuhých látok.[1]

Keďže na tejto úrovni nie je možné podať presnú kvantovú teóriu elektrickej vodivosti kovov, uspokojíme sa s téoriou Drudeho a Lorentza (správnou pre niektoré typy polovodičov), ktorá vychádza z predstavy klasického elektrónového plynu, pre ktorý platí Maxwellovo-Boltzmannovo energetické rozloženie so strednou hodnotou energie

$$W = \frac{3}{2}kT = \frac{m_e\langle v\rangle^2}{2} \tag{5.19}$$

kde m_e je hmotnosť elektrónov a $\langle v\rangle$ je ich stredná tepelná rýchlosť v plyne; pri izbových teplotách (T ~ 300 K) dosahuje hodnôt v ~ 10^5 m/s. Podobne, ako pri molekulárnych zrážkach, aj tu môžeme opísať elektrónovo-mriežkové zrážky pomocou strednej voľnej dráhy λ, ako strednej vzdialenosti, ktorú elektrón prejde medzi dvoma zrážkami. (Vzájomné zrážky elektrónov sú zriedkavé a prakticky nemajú vplyv na vodivosť materiálu).

Ak sa v kove alebo v polovodiči vytvorí elektrické pole, zmení sa chaotický pohyb elektrónov tak, že celý súbor voľných elektrónov sa začne pomaly, driftovou (unášavou) rýchlosťou v_d, pohybovať proti smeru vonkajšieho elektrického poľa pri súčasnom zachovaní chaotického pohybu. Driftová rýchlosť je mnohokrát menšia ako spomínaná stredná tepelná rýchlosť elektrónov a pri bežných prúdoch dosahuje hodnôt rádu 10^{-2} cm/s (pozri napr. úlohu 97). Ak sa obmedzíme na klasické predstavy, možno driftovú rýchlosť vypočítať jednoducho. Ak je v materiále stredná intenzita elektrického poľa E, potom na každý elektrón pôsobí sila eE, a táto sila bude podľa druhého Newtonovho zákona udeľovať elektrónom zrýchlenie

$$a = \frac{eE}{m_e}$$

Driftovú rýchlosť môžeme vypočítať ako súčin tohoto zrýchlenia a strednej doby medzi zrážkami $\tau = \lambda/\langle v\rangle$, teda

$$v_d = a\tau = \frac{e\lambda}{m_e\langle v\rangle}E$$

[1] Sommerfeld, A., Bethe, H.: Elektronentheorie der Metalle, Handbuch der Physik, Band XXIV/II, Springer Verlag, Berlin 1933

Driftová rýchlosť nie je nič iné ako rýchlosť, ktorá vystupuje v definičnom vzťahu (5.1) pre prúdovú hustotu, a ktorý pre naše účely môžeme prepísať do tvaru $J = nev_d$. Ak sem dosadíme posledný výraz, dostaneme

$$J = \frac{ne^2\lambda}{m_e\langle v\rangle}E$$

Porovnaním tohto výrazu s výrazom (5.13) pre Ohmov zákon v diferenciálnom tvare, dostaneme vyjadrenie konduktivity kovu v tvare

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{m_e\langle v\rangle} \tag{5.20}$$

Výraz (5.20) by sme mohli považovať za potvrdenie, že kovy spĺňajú Ohmov zákon za predpokladu, že λ a $\langle v\rangle$ nezávisia od pôsobiaceho elektrického poľa E. Je celkom prirodzené predpokladať, že je to pravda, pretože λ a $\langle v\rangle$ závisia od rýchlostného rozloženia vodivostných elektrónov a toto rozloženie sa nemení ani vo veľmi silných, prakticky realizovateľných poliach, o čom svedčí skutočnosť, že driftová a tepelná rýchlosť elektrónov sa líšia asi o desať rádov. Inak povedané, môžeme si byť istí, že hodnoty λ a $\langle v\rangle$, napr. pre meď pri teplote 20 °C, bez prítomnosti poľa zostanú nezmenené aj v prípade, ak v medi vybudíme elektrické pole. Teda výraz (5.20) nezávisí od E a kovový materiál spĺňa Ohmov zákon. Numerické výpočty konduktivít zo vzťahu (5.20) sú obťažné, pretože je ťažké stanoviť λ, avšak takéto výpočty boli predsa len pre mnohé materiály urobené a v prípade niektorých kovov, ale hlavne polovodičov výsledky potvrdili použiteľnosť aj tejto klasickej teórie.

Napriek tomu že Drudeho teória založená na Maxwellovej-Boltzmannovej štatistike dokáže pomerne úspešne vysvetliť elektrickú vodivosť kovov a polovodičov, úplne zlyháva pri vysvetľovaní merného tepla kovov. Molové merné teplo mriežky kovu pri izbových teplotách dané Dulongovým-Petitovým zákonom je $3R$ (R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1} je plynová konštanta) a na základe strednej energie W danej výrazom (5.19) voľné elektróny prispievajú k mernému teplu kovu ešte príspevkom $3R/2$. Takto by bolo merné teplo kovu asi o 50 % väčšie ako merné teplo dielektrika, avšak merania tento rozdiel nepotvrdzujú a merné teplá kovu a dielektrika sa podstatne nelíšia. Táto ťažkosť sa dala odstrániť až predpokladom, že pre elektrónový súbor (plyn) v kove nemožno použiť klasickú Maxwellovu-Boltzmannovu štatistiku, ale musí sa použiť kvantová Fermiho-Diracova štatistika s rozdelením podľa energií W tvaru[1]

$$f_{FD} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{W-W_F}{kT}}+1} \tag{5.21}$$

kde k je Boltzmannova konštanta, T je absolútna teplota a W_F je Fermiho hladina (najvyššia energia, ktorú môžu elektróny dosiahnuť pri teplote T = 0 K). Elektrón má

[1] Pozri napr. Hrivnák, Ľ., Bezák, V., Foltín, J., Ožvold, M.: Teória tuhých látok, VEDA Vydavateľstvo SAV Bratislava 1985

totiž vlastný moment hybnosti (spin) veľkosti $\hbar/2$ a iba rozdelenie typu (5.21) mu náležito vyhovuje.

Kvantovomechanické výpočty merného tepla C_v vodivostných elektrónov v kove s využitím Fermiho-Diracovho rozdelenia (5.21) vedú k hodnote[1]

$$C_v = \frac{1}{2}\pi^2 R \frac{kT}{W_F}$$

Keďže $kT \ll W_F$ pri izbových teplotách, je elektrónové merné teplo iba zlomok predpovedanej klasickej hodnoty $3R/2$. Ťažkosti s veľkým merným teplom elektrónov v klasickej Drudeho teórii sú týmto odstránené.

5.3 ELEKTROMOTORICKÉ NAPÄTIE ZDROJA

V našich úvahách o elektrických prúdoch sme zatiaľ nepoložili otázku o príčinách pohybu elektrických nábojov. Okrem triviálneho, v praxi zriedkavého prípadu, keď sa náboj ako hmotný objekt pohybuje zotrvačnosťou bez vonkajšieho pôsobenia, je k pohybu náboja potrebná vonkajšia hnacia sila, bez ktorej, hlavne v látkovom prostredí, každý pohyb elektrických nábojov veľmi rýchle ustáva. Pre lepšie pochopenie problematiky si predstavme dve kovové vodivé telesá, jedno nenabité a druhé nabité záporne (elektrónmi). Prvé, nenabité teleso, sa oproti druhému nachádza na nejakom kladnom potenciáli (napätí) U_0. Spojme tieto telesá tenkým vodivým drôtom. Je zrejmé, že záporný náboj z druhého telesa potečie na prvé, nenabité, a teda drôtom tečie elektrický prúd (podľa dohody opačný ako prúd elektrónov). Fyzikálne možno tento prúd vysvetliť tým, že bezprostredne po pripojení drôtu vznikne v ňom, v dôsledku napätia U_0, nenulové elektrické pole, ktoré núti elektróny k pohybu vo vodiči. Keďže prenosom nábojov bude začiatočný rozdiel potenciálov veľmi rýchle klesať k nule, bude k nule klesať aj intenzita elektrického poľa v drôte a v dôsledku toho prúd v drôte veľmi rýchle zanikne. Tento nestacionárny proces charakterizuje vybíjanie telies, alebo prerozdeľovanie náboja na nich, a vo väčšine prípadov predstavuje v čase jednoduchý exponenciálny priebeh.

Ak by mal prúd spojovacím vodičom zostať stacionárny, začiatočný potenciálový rozdiel U_0 by sa musel udržiavať, a to tak, že elektróny, ktoré prešli drôtom by sa po inej dráhe (mimo drôtu) prenášali znovu na pôvodne nabité teleso. Je len samozrejmé, že túto prácu nemôže vykonať vlastné elektrické pole, ale iba nejaká vonkajšia sila. Zariadenia, ktoré sú schopné prenášať náboj proti elektrickému poľu, a tak udržiavať stály rozdiel potenciálov medzi svojimi výstupnými svorkami aj v prípade, ak cez tie svorky tečie elektrický prúd, sa nazývajú zdroje **elektromotorických napätí (EMN)**. Toto napätie sa zvykne označovať symbolom $\mathscr{E}$. Elektromotorické napätie zdroja možno opísať formálnou vnútenou intenzitou $\boldsymbol{E}_{emn}$ smerujúcou v zdroji od zápornej svorky ku kladnej, ktorá je v rovnováhe so skutočnou intenzitou poľa v zdroji $\boldsymbol{E}_i$, teda $\boldsymbol{E}_{emn} = -\boldsymbol{E}_i$ (pozri tiež odsek 2.11). Veľmi ilustratívnym, v zmysle uvedenej definície zdroja EMN, je známy Van de Graaffov generátor, v ktorom sa sníma z jednej elektródy náboj a mechanicky,

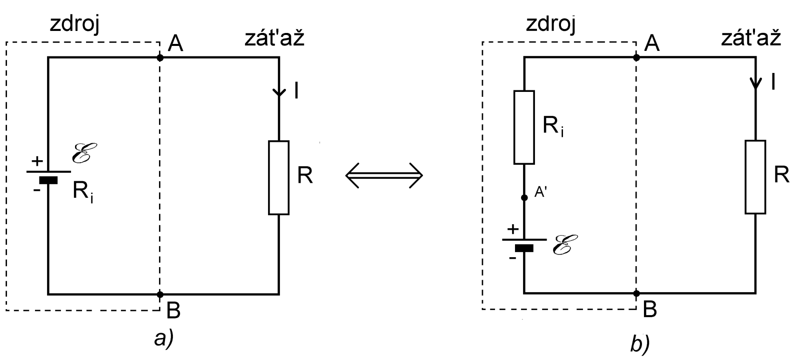
[1] Kittel, C.: Elementary statistical physics, New York J. Wiley & Sons, Inc., London Chapman & Hall, Ltd. 1960

transmisným izolačným pásom, sa prenáša proti sile poľa na druhú elektródu. Iný príklad prenosu elektrického náboja proti silám poľa je galvanický článok, alebo sekundárny článok (akumulátor), v ktorom sa potenciálový rozdiel na elektródach udržuje vďaka elektrochemickým pochodom na elektródach ponorených v elektrolyte. Výkonovými zdrojmi EMN sú rôzne druhy jednosmerných, ale hlavne striedavých generátorov určených na výrobu elektrickej energie v elektrárniach.

5.4 JEDNODUCHÝ ELEKTRICKÝ OBVOD

Každý zdroj elektromotorického napätia charakterizujú dva parametre; je to jeho elektromotorické napätie a jeho vnútorný odpor. Pod elektromotorickým napätím $\mathscr{E}$ rozumieme napätie na svorkách nezaťaženého zdroja, teda v prípade, keď zdroj nedodáva do vonkajšej záťaže elektrický prúd. Elektromotorické napätie zdroja možno vyjadriť integrálom formálnej intenzity $\boldsymbol{E}_{emn}$ vo vnútri zdroja od jeho zápornej svorky ku kladnej, teda

$$\mathscr{E} = \int_{(-)}^{(+)} \boldsymbol{E}_{emn} . \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5.22}$$



Obr. 5.6

Vnútorný odpor zdroja R_i je ten odpor, ktorý zdroj kladie vlastnému prúdu, alebo aj prúdu iných zdrojov, ktoré sú zapojené v okruhu. Na *obr. 5.6a* je znázornený jednoduchý elektrický obvod, v ktorom zdroj elektromotorického napätia $\mathscr{E}$ s vnútorným odporom R_i je pripojený k záťaži reprezentovanej odporom R. Na *obr. 5.6b* je znázornený náhradný obvod zapojenia, v ktorom zdroj medzi svorkami AB je nahradený sériovým spojením ideálneho bezodporového zdroja $\mathscr{E}$ a jeho vnútorného odporu R_i. V zdroji a v rezistoroch obvodu sú nenulové intenzity elektrického poľa, a pre tieto intenzity platí, že integrál po uzavretej dráhe pozdĺž obvodu sa z nich rovná nule, teda

$$\oint \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{A'}^{A} \boldsymbol{E}_{ri}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{A}^{B} \boldsymbol{E}_{r}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{B}^{A'} \boldsymbol{E}_{i}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{5.23}$$

kde $\boldsymbol{E}_{ri}$, $\boldsymbol{E}_r$ a $\boldsymbol{E}_i$ sú postupne intenzity vo vnútornom odpore zdroja, v záťažovom odpore a intenzita poľa medzi svorkami ideálneho zdroja. Prvý integrál v súčte predstavuje napätie $U_{A'A}$ na vnútornom odpore zdroja R_i a podľa Ohmovho zákona

$$\int_{A'}^{A} \boldsymbol{E}_{ri}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = U_{A'A} = R_i I$$

kde I je prúd, ktorý tečie v obvode. Podobne druhý integrál predstavuje spád napätia U_{AB} na odpore záťaže R, teda

$$\int_{A}^{B} \boldsymbol{E}_{r}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = U_{AB} = RI$$

Nakoniec tretí integrál predstavuje pozitívny skok napätia vo vnútri zdroja spôsobený spomínanými vnútenými silami, ktoré udržujú potenciálny rozdiel na svorkách zdroja, a v obvode elektrický prúd. Intenzita $\boldsymbol{E}_i = -\boldsymbol{E}_{emn}$ je intenzita smerujúca v zdroji od kladnej elektródy k zápornej, teda od A' k B na *obr. 5.6b*, takže príslušný integrál dá zápornú hodnotu elektromotorického napätia zdroja

$$\int_{B}^{A'} \boldsymbol{E}_{i}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{B}^{A'} \boldsymbol{E}_{emn}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\mathscr{E}$$

Ak dosadíme tieto vyjadrenia integrálov do (5.23) dostaneme jednoduchý vzťah medzi elektromotorickým napätím zdroja $\mathscr{E}$ a potenciálovými spádmi $U_{A'A}$ a U_{AB} na odporoch v obvode

$$U_{A'A} + U_{AB} - \mathscr{E} = 0$$

alebo po dosadení a úprave

$$\mathscr{E} = RI + R_i I \tag{5.24}$$

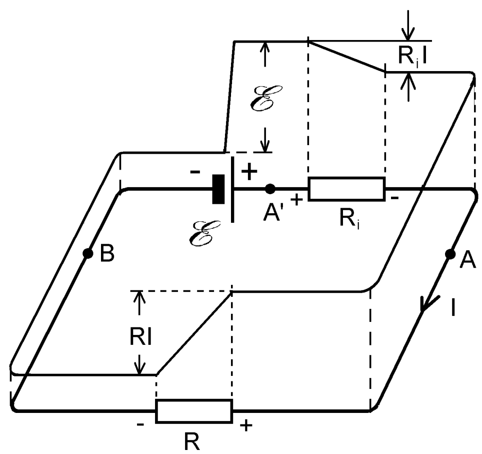
Vzťah (5.24) vyjadruje Ohmov zákon pre jednoduchý uzavretý obvod so zdrojom a odporom. Na *obr. 5.7* je priebeh napätia na jednotlivých prvkoch znázornený graficky v cykle pozdĺž obvodu. Priebeh napätia zdroja $\mathscr{E}$ v jeho vnútri nemusí byť nutne lineárny ako na obrázku – to závisí od charakteru a vnútornej štruktúry zdroja (pozri *obr. 2.48*). Napätie

$$U_{AB} = \mathscr{E} - R_i I < \mathscr{E} \tag{5.25}$$

sa nazýva svorkové napätie zdroja a je vždy menšie ako EMN zdroja (v danom prípade sa súčasne rovná napätiu na záťažovom odpore R). Podľa (5.24) v obvode tečie prúd

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + R_i} \tag{5.26}$$

Podľa vnútorného odporu sa zdroje delia na **tvrdé a mäkké zdroje**. Tvrdý zdroj je taký, ktorý má malý vnútorný odpor vo vzťahu k možným záťažovým odporom. V takom zdroji spád napätia R_iI na jeho vnútornom odpore je malý v porovnaní s $\mathscr{E}$ a svorkové napätie zdroja zostáva aj pri jeho veľkom zaťažení (veľkom prúde) blízke EMN zdroja, čo vidíme zo vzťahu (5.25). Tvrdým zdrojom je napr. akumulátorová batéria používaná v automobiloch. Jej vnútorný odpor v dobrom stave je rádovo $R_i \sim 10^{-3}\ \Omega$. Ak zoberieme do úvahy, že spúšťač automobila potrebuje prúd $I \sim 200$ A, je pri štarte spád napätia na vnútornom odpore zdroja $R_iI \sim 0{,}2$ V, čo pri 12 V-ovej batérii predstavuje pokles jej svorkového napätia asi na 11,8 V, teda asi o 1,7 %. Takýto pokles neovplyvní činnosť spúšťača. Ak je batéria zle ošetrovaná, môže jej vnútorný odpor vzrásť o jeden alebo viac rádov, teda na hodnotu $\sim 10^{-2}\ \Omega$ alebo aj viac, čo by pri rovnakom prúde znamenalo pokles svorkového napätia o 2 V, teda na 10 V, a to by už nemuselo stačiť na roztočenie spúšťača.



Obr. 5.7

Tvrdým zdrojom je z hľadiska spotrebiteľa aj bytová prípojka (zásuvka) k energetickej sieti 220 V, 50 Hz. Aj pri veľkom zaťažení zásuvky toto napätie, presnejšie jeho amplitúda, resp. efektívna hodnota, zostáva relatívne stále. Proti neprimeranému preťaženiu je elektráreň chránená systémom poistiek a ističov po celej rozvodovej trase. Napätie 220 V je tvrdé a pri skrate napr. cez ľudské telo neklesne, ale elektrickým prúdom zabíja!

Ideálnym napäťovým zdrojom je hypotetický zdroj s nulovým vnútorným odporom. Jeho svorkové napätie zostáva stále pri ľubovoľnom zaťažení a rovná sa EMN zdroja.

Medzi mäkké napäťové zdroje patrí napr. Van de Graaffov generátor a vôbec všetky elektrostatické generátory napätia. Aj keď ich EMN môže dosahovať stotisíce až milióny voltov, vzhľadom na ich vysoký vnútorný odpor toto napätie pri sebemenšom zaťažení prudko klesá až k nule.

Zdroje EMN možno spájať sériovo a paralelne. **Sériové spojenie zdrojov** poskytne zdroj, ktorého EMN sa rovná súčtu jednotlivých EMN účastných zdrojov, teda

$$\mathscr{E} = \sum_j \mathscr{E}_j$$

a výsledný vnútorný odpor zdroja je súčet sériovo zapojených vnútorných odporov

$$R_i = \sum_j R_{ij}$$

Sériovým spojením dostaneme zdroj s vyšším EMN, ale aj s väčším vnútorným odporom, teda zdroj mäkší. Príklad sériového spojenia zdrojov je už spomínaná akumulátorová batéria 6 článkov, každý s EMN cca 2 V.

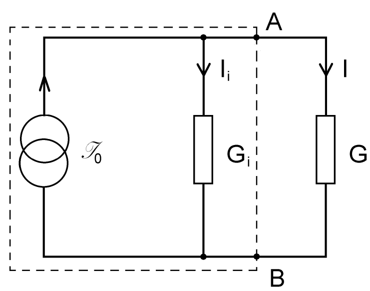
Paralelné spojenie zdrojov je technicky prípustné iba pre identické zdroje, a samozrejme spájajú sa svorky s rovnakou polaritou. Výsledné EMN spojenia je rovnaké ako jedného zdroja, ale výsledný vnútorný odpor R_{iv} je výsledkom paralelného radenia rovnakých vnútorných odporov R_i jednotlivých zdrojov, teda

$$R_{iv} = \frac{R_i}{n}$$

kde n je počet zaradených zdrojov. Výhodou takého spojenia je nižší vnútorný odpor výsledného zdroja, teda tvrdší zdroj. Energetické kapacity zdrojov sa u obidvoch zapojení sčítavajú, nábojové kapacity sa obyčajne udávajú v ampérhodinách (Ah).

V teoretickej elektrotechnike sa popri pojme "zdroj napätia" často pracuje s pojmom "**zdroj prúdu**". Treba povedať, že nejde o nejaký zvláštny zdroj, ide iba o iný, duálny pohľad na zdroj elektrickej energie. Podobne, ako sa elektromotorické napätie zdroja rovná súčtu napätia na vnútornom odpore zdroja a záťaži podľa vzťahu (5.23), tak prúd $\mathscr{I}_0$ "prúdového zdroja" sa rovná súčtu prúdu I_i cez vnútorný odpor R_i (alebo vodivosť $G_i = 1/R_i$) a prúdu I cez záťaž R (alebo $G = 1/R$), teda

$$\mathscr{I}_0 = I_i + I \tag{5.27}$$



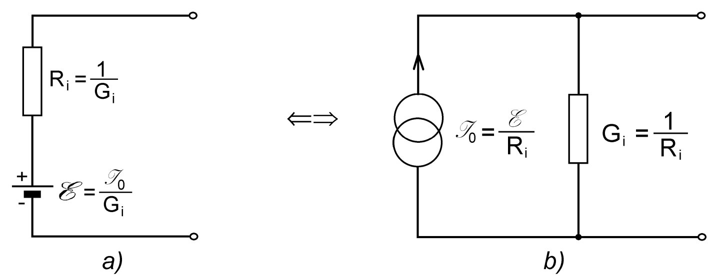
Obr. 5.8

Keďže v tomto "zapojení" sú obidva odpory paralelné, musia na nich byť napätia rovnaké, teda $I_iR_i = IR$, alebo $I_i/G_i = I/G$. Podľa povedaného vhodným schematickým znázornením zapojenia prúdového zdroja a záťaže je schéma na *obr. 5.8*. Schémy na *obr. 5.6b* a *5.8* budú z hľadiska záťaže R ekvivalentné, keď medzi prúdom $\mathscr{I}_0$ a EMN $\mathscr{E}$ bude jednoduchý vzťah

$$\mathscr{I}_0 = \frac{\mathscr{E}}{R_i} = \mathscr{E}G_i$$

a obidva vnútorné odpory budú rovnaké, teda $R_i = 1/G_i$. Na *obr. 5.9* sú znázornené ekvivalentné zdroje napätia a prúdu.

V analógii s ideálnym napäťovým zdrojom je ideálny prúdový zdroj taký, ktorého prúd nezávisí od záťaže. Takým však v praxi môže byť iba napäťový zdroj, ktorého vnútorný odpor je nekonečný. Je to kuriózna požiadavka, pretože takýto zdroj s konečným EMN, by do záťaže nedodával žiadny prúd. Aby však pojem ideálneho prúdového zdroja mal predsa nejakú reálnu hodnotu, rozumieme pod ním taký zdroj, ktorého vnútorný odpor je podstatne väčší ako odpor každej do úvahy prichádzajúcej záťaže ($R_i \gg R$).

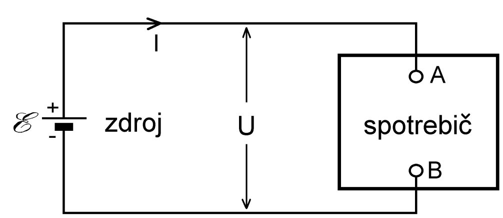


Obr. 5.9

5.5 PRENOS ENERGIE V ELEKTRICKOM OBVODE. JOULOV ZÁKON

Ak k zdroju EMN pripojíme nejaký spotrebič (pozri *obr. 5.10*), ako je napr. rezistor, elektrický motor, akumulátor a i., potečie vytvoreným elektrickým obvodom prúd, pričom kladné alebo záporné náboje prechodom medzi svorkami A a B cez spotrebič strácajú svoju začiatočnú potenciálnu energiu, ktorá sa v dôsledku platnosti zákona zachovania mení na iné formy energie. V elektrickom motore sa energia mení na mechanickú prácu, v akumulátore sa hromadí ako chemická energia a v rezistore sa energia mení na teplo. Vo všetkých prípadoch zdroj koná prácu, ktorej nekonečne malé množstvo dA, vykonané tým, že zdroj "pretlačí" spotrebičom náboj dQ, sa rovná

$$\mathrm{d}A = U\mathrm{d}Q$$



Obr. 5.10

kde U je napätie na spotrebiči. Nekonečne malý náboj dQ je daný prúdom I v spotrebiči a časovým intervalom dt, počas ktorého prúd spotrebičom tečie, teda dQ = Idt a vykonaná práca

$$\mathrm{d}A = UI\mathrm{d}t \tag{5.29}$$

Celková vykonaná práca za čas t sa získa integráciou posledného výrazu. Dôležitejšou veličinou je však práca vykonaná za jednotku času, t. j. výkon

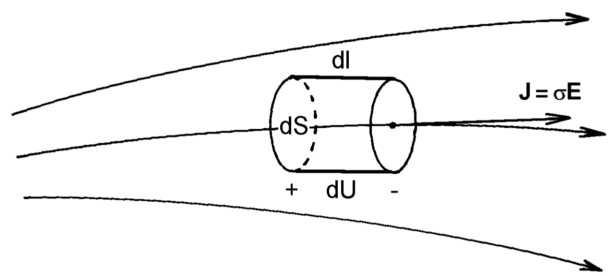
$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = UI \qquad [\mathrm{W}] \tag{5.30}$$

Výkon v záťaži je teda daný súčinom napätia a prúdu v nej a môže to byť veličina stála, ak prúd a napätie sú stále, alebo časovo premenná, ako napr. v prípade striedavých harmonických prúdov. Jednotkou výkonu, ako je známe, je watt (W), pričom v elektromagnetizme 1 W = 1 V × 1 A.

Ak je záťažou spotrebič s odporom R, ktorý spĺňa Ohmov zákon (5.10), resp. (5.11), možno výkon v odpore R, resp. vo vodivosti $G = 1/R$ vyjadriť výrazmi

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} = U^2 G = \frac{I^2}{G} \tag{5.31}$$

Výraz (5.31) pre tepelný, termodynamicky ireverzibilný výkon v odporoch sa nazýva **Joulov zákon** (integrálny tvar).



Obr. 5.11

V odporovom lineárnom prostredí s konduktivitou $\sigma = 1/\rho$, v ktorom tečie prúd, možno vybrať elementárny objem $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}l\mathrm{d}S$ pozdĺž prúdočiary, ako na *obr. 5.11*. Elementárny výkon dP v objeme dτ v súhlase s (5.30) je daný výrazom

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}U\mathrm{d}I = (E\mathrm{d}l)(J\mathrm{d}S) = JE\,\mathrm{d}\tau$$

kde dU je nekonečne malé napätie medzi čelnými plochami vybraného valcového objemu a dI je nekonečne malý prúd tečúci kolmo plôškou dS. Integráciou posledného výrazu cez celý uvažovaný objem dostaneme celý spotrebovaný výkon P. Veličina JE má význam objemovej hustoty výkonu. Využitím Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare možno pre objemovú hustotu výkonu p napísať výrazy

$$p = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\tau} = JE = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma} = \rho J^2 = \frac{E^2}{\rho} \qquad [\mathrm{W.m^{-3}}] \qquad (5.32)$$

Výrazy (5.32) sú diferenciálnymi formuláciami Joulovho zákona. Ich objemovou integráciou dostaneme celý výkon v danom objeme.

Objemovú hustotu výkonu možno získať aj na základe mikrofyzikálnych predstáv. Ak je n koncentrácia identických nábojov q v priestore, a ak sa tieto náboje pohybujú rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ v poli intenzity $\boldsymbol{E}$, potom na každý náboj pôsobí sila $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ a výkon tejto sily (na jednotku objemu) je

$$p = n\boldsymbol{F}.\boldsymbol{v} = nq\boldsymbol{E}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{E}.\boldsymbol{J} \qquad (5.33)$$

kde $\boldsymbol{J} = nq\boldsymbol{v}$ je prúdová hustota. Výraz (5.33) je všeobecnejší ako (5.32), pretože platí aj pre anizotropné prostredia (kryštály), kde smery vektorov $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{J}$ nemusia byť totožné, dokonca vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{J}$ môžu mať aj opačný smer. V takom prípade objemová hustota je záporná, čo znamená, že v danej oblasti sa nachádzajú zdroje energie a výkon sa tam generuje.

Vráťme sa teraz k *obr. 5.6* a posúďme problém prenosu energie v obvode z inej strany – z hľadiska energetickej bilancie v obvode. Zdroj energie v obvode má nejaký nenulový vnútorný odpor a na ňom vznikajú tiež isté energetické straty. Ak rovnicu (5.24) vynásobíme s prúdom I, dostaneme výraz

$$\mathscr{E}I = R_i I^2 + RI^2$$

ktorý je energetickou bilanciou obvodu: celkový odovzdávaný výkon $P_c = \mathscr{E}I$ zdrojom EMN je súčtom výkonu spotrebovaného samotným zdrojom $P_i = R_i I^2$ a užitočného výkonu spotrebovaného vonkajšou záťažou $P = RI^2$, teda

$$P_c = P_i + P$$

Využijeme výraz (5.26) a pre užitočný výkon P môžeme napísať vyjadrenie

$$P = RI^2 = \frac{\mathscr{E}^2 R}{\left(R + R_i\right)^2} \qquad (5.34)$$

Ak možno meniť záťažový odpor, vidíme, že výkon sa v ňom mení a je nulový, ak $R = 0$ a tiež pre $R = \infty$. Existuje teda taká hodnota odporu záťaže, pre ktorú je výkon extremálny (v danom prípade maximálny). Preskúmaním extrému posledného výrazu pre R zistíme, že zdroj odovzdáva do záťaže maximálny výkon vtedy, ak jej odpor sa rovná vnútornému odporu zdroja, teda pre

$$R = R_i \qquad (5.35)$$

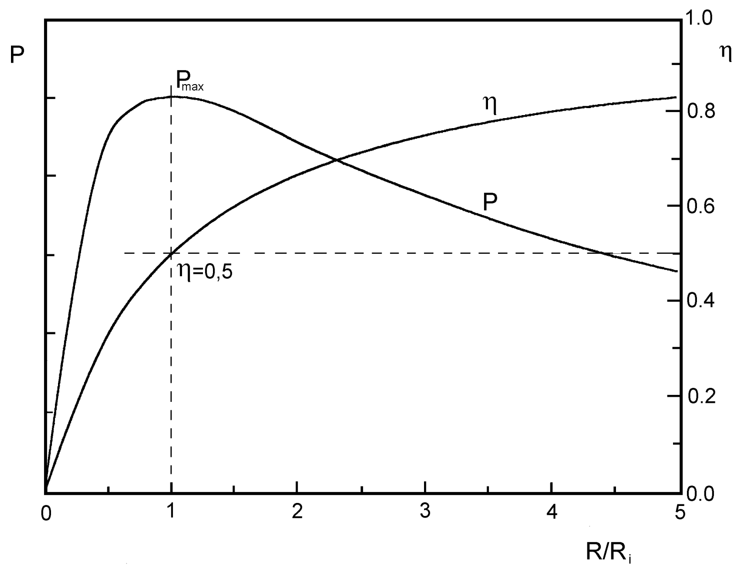
Záťaž, ktorá spĺňa podmienku (5.35) sa nazýva **prispôsobená záťaž** (podľa angl. názvu matched load). Do nej sa odovzdáva výkon

$$P_{max} = \frac{\mathscr{E}^2}{4R} = \frac{P_c}{2} \qquad (5.36)$$

teda iba polovica toho výkonu, ktorý produkuje zdroj. Ak uvážime, že účinnosť zdroja je daná výrazom

$$\eta = \frac{P}{P_i + P} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R}} \tag{5.37}$$

potom v režime prispôsobenia dodáva zdroj do záťaže iba 50 % produkovaného výkonu, a teda aj energie. Druhá polovica výkonu ohrieva zdroj svojím Joulovým teplom. Je zrejmé, že takýto režim činnosti zdroja by bol vrcholne neekonomický, a preto napr. v energetike neprichádza do úvahy. Tam sa vyžaduje vysoká účinnosť energetickej sústavy, teda $\eta \to 1$, čo podľa výrazu (5.37) vyžaduje záťažový odpor R » R_i. V režime prispôsobenia pracujú zdroje, ktoré počas krátkeho času majú dodať do spotrebiča veľkú energiu. Je to napr. spomínaný akumulátor pracujúci do spúšťača automobila. V elektronike veľmi vysokých frekvencií sa vo väčšine prípadov vyžaduje prispôsobená záťaž vedenia nielen z výkonových dôvodov, ale predovšetkým kvôli zamedzeniu odrazu signálov, ktoré majú za následok nežiadúce interferencie a vznik stojatých vĺn na dlhých prenosových vedeniach. Na *obr. 5.12* sú graficky znázornené závislosti elektrického výkonu v záťaži a účinnosti od pomeru R/R_i.

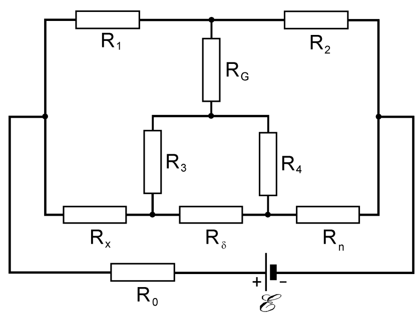


Obr. 5.12

5.6 ELEKTRICKÁ SIEŤ

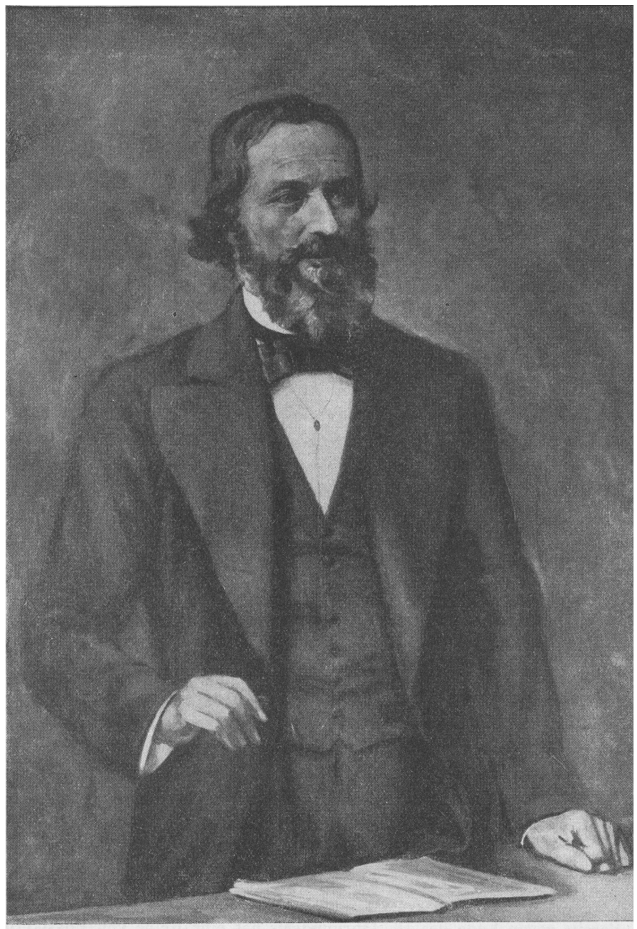
5.6.1 Ohmov zákon pre časť uzavretého obvodu

Zdroje EMN a rezistory možno istým účelným spôsobom spájať a vytvárať zapojenia, ktoré sa v teoretickej elektrotechnike nazývajú elektrické siete. Elektrická sieť môže vo všeobecnosti obsahovať okrem rezistorov a zdrojov EMN aj ďalšie elektrotechnické prvky, ako sú kondenzátory, cievky, prípadne induktívne viazané cievky (vzájomné indukčnosti). Siete so zdrojmi stálych napätí však môžu obsahovať iba rezistory (tzv. galvanické alebo odporové siete). Príklad takejto odporovej siete je na *obr. 5.13* známy Kelvinov dvojitý most.

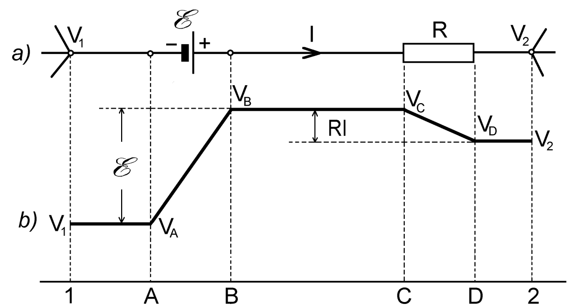


Obr. 5.13

S pojmom elektrickej siete sme sa stretli už aj v odseku 3.6., kde sme analyzovali zapojenia pozostávajúce zo zdrojov a kondenzátorov. Aj v odporovej sieti za uzol budeme považovať miesto spojenia najmenej troch vodičov a za vetvu siete vodivé spojenie medzi dvoma uzlami. Sieť na *obr. 5.13* má šesť uzlov a tie sú pospájané deviatimi vetvami. Vetva môže obsahovať zdroj alebo niekoľko sériovo spojených zdrojov EMN so svojimi (sériovými) vnútornými odpormi a jeden alebo niekoľko sériovo spojených rezistorov. Ak využijeme pravidlá o sériovom spájaní zdrojov a rezistorov, môžeme každú vetvu charakterizovať jedným výsledným zdrojom EMN $\mathscr{E}$ a jedným výsledným odporom R, ako výsledkom sériového spojenia uvažovaných prvkov. Ak sú v sieti dané všetky prvky, možno sieť analyzovať. Pod analýzou elektrickej siete rozumieme výpočet prúdov vo všetkých jej vetvách alebo stanovenie potenciálov všetkých jej uzlov. Prv než k takejto analýze pristúpime, treba stanoviť všeobecný súvis medzi prúdom a koncovými potenciálmi v jednej vybranej vetve. Takáto vetva je zobrazená na *obr. 5.14a*. Potenciály uzlov vetvy sú označené V_1 a V_2, medzi bodmi A-B je zdroj EMN $\mathscr{E}$ a medzi bodmi C-D je homogénne rozložený odpor R. Potenciál vo vnútri zdroja (medzi bodmi A-B) nemusí prebiehať od V_A po V_B lineárne, ako na obrázku, priebeh závisí od charakteru a štruktúry zdroja (pozri odsek 2.11). Úseky 1-A, B-C a D-2 sú tvorené bezodporovými vodičmi, na ktorých sa potenciál nemení. Celý priebeh potenciálu pozdĺž vetvy je znázornený na *obr. 5.14b*. Vidíme, že pre rozdiely potenciálov jednotlivých bodov pozdĺž vetvy platia vzťahy



Gustav Robert KIRCHHOFF
(1824 Königsberg – 1887 Berlín)



Obr. 5.14

$$V_1 - V_A = 0$$

$$V_A - V_B = -\mathscr{E}$$

$$V_B - V_C = 0$$

$$V_C - V_D = RI$$

$$V_D - V_2 = 0$$

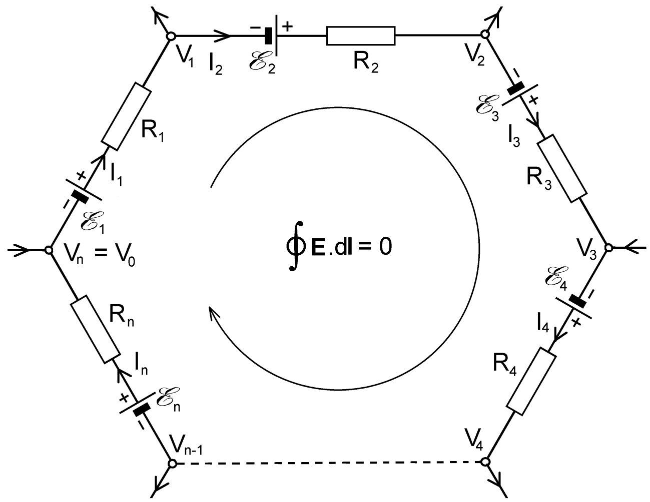
Ak tieto rovnice sčítame, dostaneme výraz

$$V_1 - V_2 = RI - \mathscr{E} \tag{5.38}$$

podľa ktorého rozdiel potenciálov na svorkách vybranej vetvy sa rovná algebraickému súčtu napätia $\mathscr{E}$ a potenciálového spádu RI. Znamienka pri RI a $\mathscr{E}$ závisia od smeru prúdu vo vetve a od polarity zdroja. Príslušné znamienka vo vzťahu (5.38) zodpovedajú situácii na *obr. 5.14*. Ak sú potenciály na koncoch vetvy rovnaké, teda ak $V_1 = V_2$, vtedy $\mathscr{E} = RI$, t. j. ide o vetvu, ktorá nijako neovplyvňuje elektrické pomery vo zvyšku siete a môže byť zo siete vypustená alebo nahradená skratom. Vzťah (5.38) sa nazýva Ohmov zákon pre časť uzavretého obvodu. Využijeme ho pri formulácii druhého Kirchhoffovho zákona.

5.6.2 Druhý Kirchhoffov zákon (Kirchhoffov zákon pre napätia)

Druhý Kirchhoffov zákon je v podstate vyjadrením skutočnosti, že integrál intenzity elektrického poľa po uzavretej dráhe, ktorá prebieha v sieti pozdĺž vetiev ľubovoľného vybraného okruhu sa rovná nule. Na *obr. 5.15* je znázornený takýto okruh pozostávajúci z n vetiev, pričom k-tá vetva (k = 1, 2, 3, ..., n) vo všeobecnosti obsahuje zdroj $\mathscr{E}_k$ a odpor R_k (v odpore R_k sú zahrnuté aj vnútorné odpory zdrojov v uvažovanej vetve). Vo vetve tečie prúd I_k a na jej priľahlých uzloch sú potenciály V_{k-1} a V_k. Potenciálové rozdiely medzi uzlami v uzavretom obvode, počítané v smere vyznačenej dráhy, sú v súhlase s výrazom (5.38) dané vzťahmi:



Obr. 5.15

$$\begin{aligned} V_0 - V_1 &= -\mathscr{E}_1 + R_1 I_1 \\ V_1 - V_2 &= -\mathscr{E}_2 + R_2 I_2 \\ &\vdots \\ V_{k-1} - V_k &= -\mathscr{E}_k + R_k I_k \\ &\vdots \\ V_{n-1} - V_n &= -\mathscr{E}_n + R_n I_n \end{aligned}$$

Ak tieto rovnice sčítame a uvážime, že $V_0 = V_n$ je potenciál toho istého uzla, dostaneme po úprave rovnicu

$$\sum_{k=1}^{n} \mathscr{E}_k = \sum_{k=1}^{n} R_k I_k \tag{5.39}$$

Rovnica (5.39) je matematickým vyjadrením **druhého Kirchhoffovho zákona**,[1] ktorý možno vyjadriť slovne:

Algebraický súčet elektromotorických napätí zdrojov $\pm\mathscr{E}_k$ v uzavretom obvode elektrickej siete sa rovná súčtu potenciálnych spádov $\pm R_k I_k$ na jednotlivých odporoch obvodu.

Toto vyjadrenie je ekvivalentné tvrdeniu, že algebraický súčet všetkých napätí (napätí zdrojov a napäťových spádov na odporoch) v uzavretom obvode sa rovná nule a odpovedá formálnemu tvrdeniu, že integrál intenzity poľa po uzavretej dráhe vybraného obvodu sa rovná nule.

[1] Kirchhoff formuloval svoje zákony v roku 1845 ešte ako mladý 21 ročný študent na univerzite v Königsbergu (terajší Kaliningrad)

5.7 PRINCÍPY ANALÝZY ELEKTRICKÝCH SIETÍ

Každá elektrická sieť z topologického hľadiska pozostáva z m vetiev (vetiev v zmysle definície), ktoré sú pospájané p uzlami. V každej vetve tečie istý prúd a každý uzol má istý potenciál. Pri analýze elektrickej siete treba určiť m vetvových prúdov alebo p uzlových potenciálov. Priamočiary, aj keď nie najjednoduchší spôsob analýzy siete je výpočet jej m vetvových prúdov s využitím I. a II. Kirchhoffovho zákona. Kirchhoffove zákony (5.9) a (5.39) sú z matematického hľadiska lineárne vzťahy medzi vetvovými prúdmi, napätiami zdrojov a odpormi siete. Pre m prúdov vo vetvách treba zostaviť m takýchto lineárnych rovníc a umenie analýzy spočíva vo výbere rovníc tak, aby systém bol úplný, lineárne nezávislý a spôsob riešenia bol čo najjednoduchší. Pri výbere rovníc sa odporúča dodržovať nasledovné pravidlá, ktoré plynú z teoretickej elektrotechniky:

1. V analyzovanej sieti ľubovoľným spôsobom zvolíme smery prúdov v jednotlivých vetvách. Ak bude na konci analýzy číselná hodnota prúdu kladná, smer príslušného prúdu bol zvolený správne, ak hodnota je záporná, skutočný prúd má opačný smer.

2. Pre ľubovoľných $p - 1$ uzlov napíšeme rovnice dávajúce do súvisu prúdy podľa prvého Kirchhoffovho zákona, pričom rešpektujeme zvolené smery prúdov (vytekajúce prúdy sú kladné, vtekajúce záporné). Ďalšia rovnica pre p-tý uzol by už bola lineárnou kombináciou predchádzajúcich, a preto do systému nepatrí.

3. V sieti nájdeme nezávislé uzavreté obvody, ktorých počet je

$$n = m - (p - 1) = m - p + 1$$

Tento počet je jednoznačný, avšak spôsobov výberu obvodov je viac. Každý nový obvod je nezávislý, ak sa nedá vytvoriť z už zostavených nezávislých obvodov. Nezávislé obvody možno vytvárať napr. tak, že každý nový musí obsahovať jednu novú vetvu. Pre zložité siete boli vypracované špeciálne metódy výberu nezávislých obvodov, z ktorých najznámejšia je metóda nazývaná "metóda úplného stromu".

4. V každom nezávislom obvode zvolíme smer obehu, alebo "smer integrácie". Tento smer je ľubovoľný, a to v rovine pravotočivý alebo ľavotočivý. Je však dobre dodržať jeden zvolený smer.

5. Pre každý z $n = m - p + 1$ nezávislých obvodov napíšeme rovnice podľa druhého Kirchhoffovho zákona, a to tak, že na jednej strane rovnice je súčet napätí zdrojov v obvode (s kladným znamienkom v súčte budú tie napätia, kde smer obehu smeruje od – ku +), a na druhej strane rovnice sa sčítavajú príspevky RI, ktoré sú kladné, ak vyznačený smer prúdu a smer obehu sú rovnaké. V opačnom prípade sú záporné.

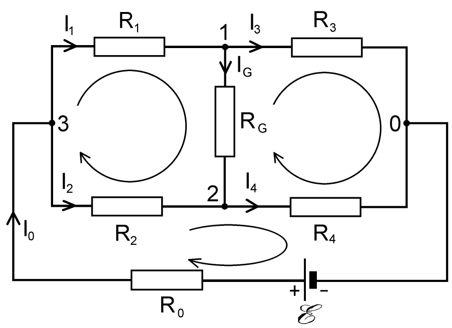
6. Získaný systém $p - 1 + n = m$ rovníc pre neznáme prúdy riešime bežnými metódami lineárnej algebry.

5.7.1 Wheatstonov most

Na ilustráciu uvedenej procedúry analyzujme zariadenie, známe z oblasti elektrickej meracej techniky, nazvané Wheatstonov most. Elektrická schéma jeho zapojenia je znázornená na *obr. 5.16.* Zariadenie sa používa na meranie neznámych odporov a v elektrickej regulačnej technike. Základ mostu tvoria štyri odpory R_1 až R_4, ktoré sú premostené indikátorom (napr. galvanometrom), v schéme reprezentovaným jeho vnútorným odporom R_G. Ak jeden zo štvorice odporov R_1 – R_4 je premenný a kalibrovaný, potom jeho nastavením môžeme dosiahnuť toho, že potenciály uzlov 1 a 2 budú rovnaké, a vetvou indikátora prúd nepotečie. Tento stav nastane, ak bude splnená podmienka

$$R_1R_4 = R_2R_3 \tag{5.40}$$

Ak jeden z ďalších troch odporov je neznámy, jeho hodnotu možno určiť z rovnice (5.40). Dôkaz podmienky (5.40), ktorú nazývame podmienkou rovnováhy mostu, plynie z výsledkov analýzy mostu.



Obr. 5.16

Ako vidíme z *obr. 5.16*, most pozostáva zo šiestich vetiev, ktoré sú pospájané štyrmi uzlami. Pri danej voľbe smerov prúdov možno pre tri uzly (napr. uzly 1, 2 a 3) napísať rovnice

$$\begin{aligned} -I_1 + I_3 + I_G &= 0 \\ -I_2 + I_4 - I_G &= 0 \\ -I_0 + I_1 + I_2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.41a}$$

Rovnica pre uzol 0

$$I_0 - I_3 - I_4 = 0$$

je viditeľne lineárnou kombináciou rovníc (5.41a), a preto do daného systému nepatrí. Samozrejme systém rovníc možno vybrať aj ináč, napr. pre uzly 0, 1 a 2.

Počet nezávislých obvodov v sieti je

$$n = 6 - (4 - 1) = 3,$$

a možno ich vybrať napríklad tak, ako je to vyznačené na obrázku. Sú to obvody prechádzajúce uzlami 1→2→3, 1→0→2 a 0→3→2. Odpovedajúce rovnice podľa druhého Kirchhoffovho zákona majú tvar

$$\begin{aligned} R_1I_1 + R_GI_G - R_2I_2 &= 0 \\ R_3I_3 - R_4I_4 - R_GI_G &= 0 \\ R_0I_0 + R_2I_2 + R_4I_4 &= \mathscr{E} \end{aligned} \tag{5.41b}$$

Obvody možno samozrejme vybrať aj inak, napríklad prechodom uzlami 0→1→3→2 a napísať pre obvod rovnicu

$$-R_3I_3 - R_1I_1 + R_2I_2 + R_4I_4 = 0$$

ale táto rovnica je evidentne súčtom prvých dvoch rovníc systému (5.41b) a výsledok je vynásobený s –1. V danej sieti možno vybrať trojice nezávislých obvodov celkove šestnástimi spôsobmi.

Systém rovníc (5.41) pre 6 neznámych prúdov je úplný a lineárne nezávislý. Teoreticky umožňuje vypočítať ľubovoľný prúd, prakticky je najzaujímavejší prúd I_G indikátorom mostu, z ktorého pri podmienke $I_G = 0$ možno dostať podmienku rovnováhy mostu (5.40). V prípade, keď sa má určiť odpor Wheatstonovho mostu zo strany napájacieho zdroja, potom treba vypočítať prúd I_0 a odpor mosta R_{03} medzi uzlami 0 a 3 sa vypočíta z výrazu

$$R_{03} = \frac{\mathscr{E}}{I_0} - R_0$$

Je zrejmé, že odpor mosta R_{03} sa nedá určiť s využitím jednoduchých pravidiel o sériovom a paralelnom radení odporov.

Uvedený príklad dokazuje, že elektrickú sieť možno analyzovať s priamym využitím Kirchhoffových zákonov, ale ako z postupu vidieť, je to metóda veľmi prácna, pretože aj pri takej relatívne jednoduchej sieti, akou je Wheatstonov most treba riešiť systém šiestich algebraických rovníc. Existujú však dve duálne metódy analýzy sietí, z ktorých jedna sa nazýva **metóda obvodových prúdov** a druhá **metóda uzlových potenciálov**. Každá z týchto metód znižuje počet rovníc, ktoré treba pri analýze elektrickej siete riešiť. Žiadna z metód nemá osobitné priority; metóda uzlových potenciálov obyčajne vyžaduje menej východzích rovníc pre potenciály, ale ak z tých treba nakoniec určiť vetvové prúdy, potom prednosť metódy môže byť iba zdanlivá.

5.7.2 Metóda obvodových prúdov

Metóda obvodových prúdov spočíva vo využití druhého Kirchhoffovho zákona pre špeciálne volené prúdy v sieti tak, že prvý Kirchhoffov zákon je pre ne automaticky splnený. Takýmito prúdmi sú formálne cirkulujúce prúdy v nezávislých obvodoch siete. Skutočný prúd vo vetve je daný algebraickým súčtom všetkých prítomných obvodových prúdov. Počet potrebných rovníc systému sa rovná počtu nezávislých obvodov, teda

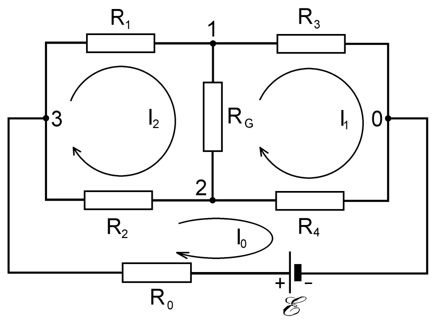
$$n = m - p + 1$$

Obvodové prúdy pre Wheatstonov most možno zvoliť tak, ako je to na *obr. 5.17*. Pre slučky s obvodovými prúdmi I_0, I_1 a I_2 možno potom písať rovnice

$$R_0I_0 + R_2(I_0 - I_2) + R_4(I_0 - I_1) = \mathscr{E}$$

$$R_3I_1 + R_4(I_1 - I_0) + R_G(I_1 - I_2) = 0 \qquad (5.42)$$

$$R_1I_2 + R_G(I_2 - I_1) + R_2(I_2 - I_0) = 0$$



Obr. 5.17

Po úprave možno sústavu rovníc vyriešiť pre obvodové prúdy. Z *obr. 5.17* vidieť, že prúdy v odporoch R_0, R_1 a R_3 sa rovnajú príslušným obvodovým prúdom, skutočný prúd indikátorom (odporom R_G) je

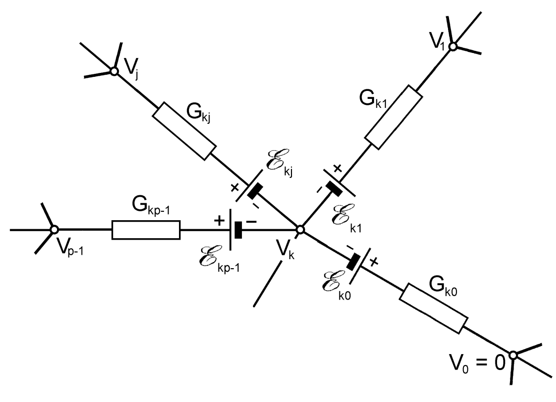
$$I_G = I_2 - I_1 \tag{5.43}$$

5.7.3 Metóda uzlových potenciálov

Metóda uzlových potenciálov je alternatívnou k metóde obvodových prúdov a je založená na platnosti prvého Kirchhoffovho zákona. V sieti s p uzlami sa potenciál jedného ľubovoľného uzla (napr. uzla s označením 0) položí rovný nule, teda $V_0 = 0$. Tento uzol je referenčný a potenciály ostatných $p - 1$ uzlov sú v skutočnosti napätia týchto uzlov oproti referenčnému a budú výsledkom analýzy siete.

Na *obr. 5.18* je znázornená časť siete s vybraným uzlom k. Pre tento uzol podľa prvého Kirchhoffovho zákona platí, že

$$\sum_{j=0}^{p-1} I_{kj} = 0 \qquad j \neq k \tag{5.44}$$



Obr. 5.18

kde I_{kj} je prúd, ktorý tečie vetvou z uzla k do uzla j (platí $I_{jk} = -I_{kj}$). Potenciály uzlov k a j sú V_k a V_j . Pre uvažovanú vetvu v súhlase s rovnicou (5.38) možno napísať

$$V_k - V_j = R_{kj}I_{kj} - \mathscr{E}_{kj} \qquad j \neq k$$

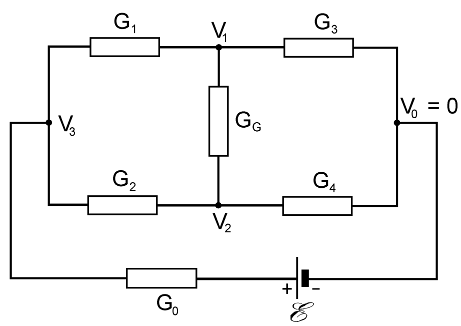
kde R_{kj} je celkový odpor vetvy a $\mathscr{E}_{kj}$ je celkové elektromotorické napätie sériových zdrojov vo vetve. Z tejto rovnice plynie pre prúd vo vetve výraz

$$I_{kj} = \frac{V_k - V_j + \mathscr{E}_{kj}}{R_{kj}} = G_{kj}(V_k - V_j + \mathscr{E}_{kj}) \quad j \neq k \tag{5.45}$$

kde $G_{kj} = 1/R_{kj}$ je vodivosť uvažovanej vetvy. Prúd I_{kj} z uzla k vyteká. Ak výrazy (5.45) dosadíme do (5.44), dostaneme lineárny matematický vzťah

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{p-1} \left(V_k - V_j + \mathscr{E}_{kj}\right) G_{kj} = 0 \tag{5.46}$$

v ktorom sú neznámymi veličinami potenciály V_1 až V_{p-1}. Takých lineárne nezávislých rovníc možno napísať p – 1. Rovnica pre posledný, p-tý uzol by už bola lineárnou kombináciou predchádzajúcich. Matematickým riešením systému je analýza siete metódou uzlových potenciálov ukončená. Ak treba vypočítať prúdy vo vetvách, tie poskytuje výraz (5.45) zo známych uzlových potenciálov. V prípadoch, v ktorých numerická hodnota prúdu je záporná, prúd tečie do uzla.



Obr. 5.19

Na ilustráciu použitia metódy uzlových potenciálov budeme analyzovať Wheatstonov most ešte raz. Na *obr. 5.19* sú vyznačené uzlové potenciály V_0 = 0, V_1 až V_3, odpory vetiev sú nahradené ich vodivosťami. Pre uzly *1* až *3* môžeme postupne písať rovnice

$$\begin{aligned} G_3V_1 \qquad &+ G_1(V_1 - V_3) + G_G(V_1 - V_2) = 0 \\ G_4V_2 \qquad &+ G_2(V_2 - V_3) + G_G(V_2 - V_1) = 0 \\ G_1(V_3 - V_1) &+ G_2(V_3 - V_2) + G_0(V_3 - \mathscr{E}) = 0 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Možno napísať rovnicu aj pre uzol *0*, ktorá v danom prípade má tvar

$$G_3V_1 + G_4V_2 + G_0(V_3 + \mathscr{E}) = 0$$

ale tá je lineárnou kombináciou (tu súčtom) rovníc systému (5.47). Prúd I_G indikátorom podľa vzťahu (5.45) je

$$I_G = G_G(V_1 - V_2) = \frac{V_1 - V_2}{R_G} \tag{5.48}$$

V našom stručnom prehľade metód analýzy elektrických odporových sietí boli uvedené iba tie, ktoré sa najčastejšie používajú. Všetky boli ilustrované úmyselne jedinou elektrickou sieťou – Wheatstonovým mostom. Trpezlivý čitateľ sa môže presvedčiť, že metóda Kirchhoffových zákonov riešením rovníc (5.41), metóda obvodových prúdov riešením rovníc (5.42) s použitím výrazu (5.43) a metóda uzlových potenciálov riešením rovníc (5.47) s využitím výrazu (5.48) poskytujú pre prúd I_G indikátorom mosta rovnaký výsledok, ktorý má takýto elegantný tvar:

$$I_G = \mathscr{E}\frac{R_2R_3 - R_1R_4}{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)+R_0(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_G[R_0(R_1+R_2+R_3+R_4)+(R_1+R_2)(R_3+R_4)]} \tag{5.49}$$

(výraz sa značne zjednoduší ak $R_0 = 0$, čím sa fyzikálne vlastnosti mostu nezmenia). Z výrazu (5.49) vidieť, že prúd indikátorom sa bude rovnať nule vtedy, keď bude splnená podmienka

$$R_2R_3 - R_1R_4 = 0$$

čo je podmienka rovnováhy mostu (5.40). Podmienka rovnováhy plynie aj z porovnania potenciálov uzlov *1* a *2*. Ak sú odpory mostu volené tak, že

$$V_1 = V_2$$

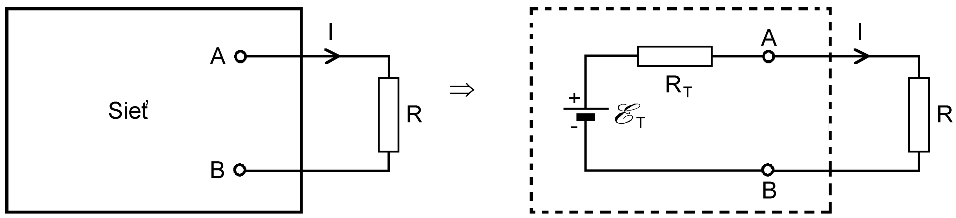
vtedy je podľa (5.48) $I_G = 0$, a teda platí vzťah (5.40).

5.7.4 Dve vety z teórie elektrických sietí

Théveninova veta (veta o ekvivalentnom napäťovom zdroji):

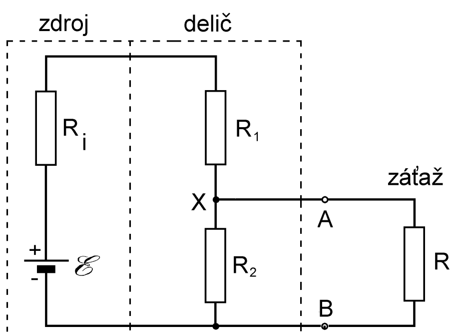
"*Ľubovoľnú elektrickú sieť pozostávajúcu zo zdrojov a rezistorov možno vzhľadom k dvom vybraným uzlom AB (pozri obr. 5.20) nahradiť ekvivalentným zdrojom, ktorého EMN* $\mathscr{E}_T$ *sa rovná napätiu medzi uzlami naprázdno (t. j. vetva spájajúca uzly je vybraná), a ktorého vnútorný odpor* R_T *sa rovná odporu medzi uvažovanými uzlami, ak všetky zdroje v sieti sú vybrané a nahradené iba ich vnútornými odpormi*".

Théveninova veta sa dá s výhodou použiť v sieťach, v ktorých je predmetom záujmu iba jedna vybraná vetva a elektrické pomery na nej. Ako príklad jej použitia uvedieme analýzu činnosti jednoduchej siete, nazývanej **odporový napäťový delič** s odporovou záťažou, ktorého zapojenie je zobrazené na *obr. 5.21*. Podľa svojho názvu sa také zariadenie používa na získanie časti napätia daného zdroja. Rezistory R_1 a R_2 v praxi často tvoria jeden rezistor s odporom $R_p = R_1 + R_2$ a spoločný uzol X rezistorov predstavuje klzný vodivý kontakt tak, že pomer odporov R_1/R_2 možno spojito meniť. Takýto elektrický prvok je vlastne premenný odporový delič a je známy pod názvom **potenciometer** (pozri *obr. 5.22*).

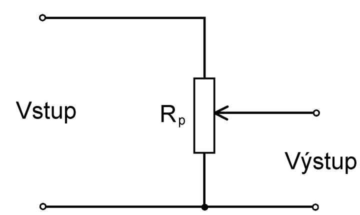


Obr. 5.20

V jednoduchej elektrickej sieti na *obr. 5.21* je obyčajne predmetom záujmu iba napätie na svorkách záťažového odporu R, prípadne prúd záťažou. Tieto veličiny možno samozrejme získať použitím niektorej z uvedených metód teórie sietí, jednoduchšie je však využiť Théveninovu vetu. Podľa nej treba vypočítať ekvivalentné napätie $\mathscr{E}_T$ na svorkách AB, ak je odpor R odpojený (pozri *obr. 5.23a*), a odpor R_T medzi týmito svorkami, ak sa ideálny zdroj $\mathscr{E}$ nahradí skratom (ako na *obr. 5.23b*). Prúd tečúci obvodom zdroja na *obr. 5.23a* ak odpor R je odpojený je



Obr. 5.21



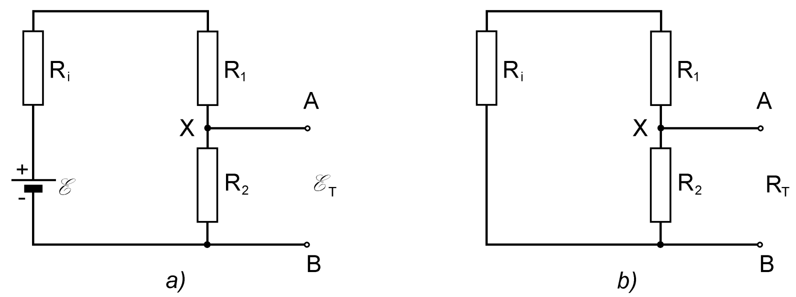
Obr. 5.22

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_i + R_1 + R_2}$$

a napätie na svorkách AB (na odpore R_2)

$$\mathscr{E}_T = R_2 I = \mathscr{E}\frac{R_2}{R_i + R_1 + R_2}$$

Vnútorný odpor ekvivalentného zdroja R_T plynie zo zapojenia na *obr. 5.23b* a jeho hodnota je



Obr. 5.23

$$R_T = \frac{(R_i + R_1)R_2}{R_i + R_1 + R_2}$$

Prúd záťažovým odporom R je teda

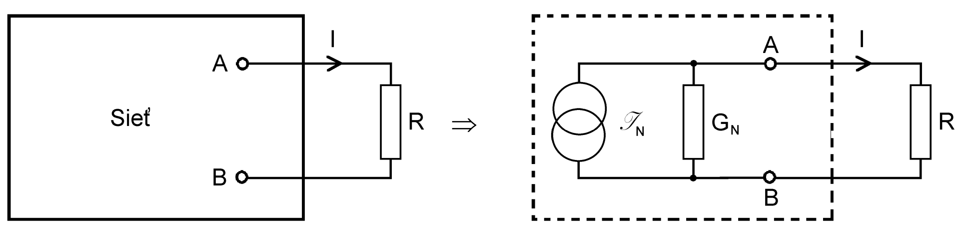
$$I_z = \frac{\mathscr{E}_T}{R_T + R} \tag{5.50a}$$

a napätie na ňom

$$U_z = U_{AB} = RI_z = \mathscr{E}_T \frac{R}{R_T + R} \tag{5.50b}$$

Nortonova veta (veta o ekvivalentnom prúdovom zdroji):

"Ľubovoľnú elektrickú sieť pozostávajúcu zo zdrojov a rezistorov možno z hľadiska jej dvoch vybraných uzlov AB (obr. 5.24) nahradiť ekvivalentným prúdovým zdrojom, ktorého menovitý prúd $\mathscr{I}_N$ sa rovná skratovému prúdu medzi uzlami AB a vnútorná vodivosť sa rovná celkovej vodivosti G_N medzi uzlami, ak sa všetky zdroje vyradia, a na ich miestach zostanú v sieti iba ich vnútorné vodivosti."



Obr. 5.24

Ako príklad použitia Nortonovej vety vypočítame prúd ekvivalentného prúdového zdroja a jeho vnútornú vodivosť pre napäťový delič na *obr. 5.21*. Ekvivalentný prúdový generátor bude dodávať prúd, ktorý sa rovná skratovému prúdu cez svorky *AB* na *obr. 5.23a* a ten je

$$\mathscr{I}_N = \frac{\mathscr{E}}{R_i + R_1}$$

a ekvivalentná vodivosť $$G_N = \frac{1}{R_T}$$

Napätie na záťažovej vodivosti G (záťažovom odpore R)

$$U_z = \frac{\mathscr{I}_N}{G_N + G} \tag{5.51a}$$

a prúd záťažou

$$I_z = GU_z = \mathscr{I}_N \frac{G}{G_N + G} \tag{5.51b}$$

Čitateľovi odporúčam dokázať, že výrazy (5.50) a (5.51) poskytujú rovnaké výsledky.

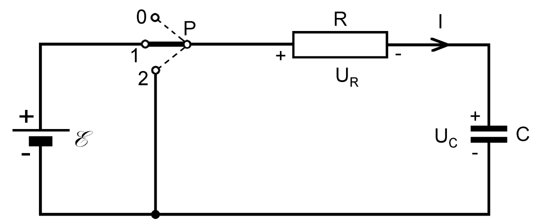
Théveninovu a Nortonovu vetu možno sformulovať i pre harmonické striedavé siete pozostávajúce zo zdrojov a impedancií (pozri časť 9.6).

5.8 ELEKTRICKÝ PRÚD V *RC* OBVODE. PRECHODOVÝ JAV V *RC* OBVODE

Naše doterajšie pojednania o elektrických prúdoch sa týkali stacionárnych a predovšetkým časovo stálych elektrických prúdov, ktoré môžu tiecť iba v odporových obvodoch alebo sieťach. Ak je v obvode zaradený kondenzátor, tak sa situácia dramaticky mení. Na prvý pohľad sa zdá, že jednoduchým obvodom pozostávajúcim zo zdroja, odporu R a kondenzátora kapacity C, elektrický prúd netečie, pretože obvod nie je galvanicky uzavretý. Na druhej strane o kondenzátore už vieme, že ak sa pripojí na zdroj elektrického výkonu, nabije sa elektrickým nábojom a bude nositeľom elektrickej energie. Ak sa teda obvod vytvorený zo zdroja, odporu a nenabitého kondenzátora elektricky uzavrie, bude sa kondenzátor nabíjať, takže zdrojom a odporom musí tiecť elektrický prúd. Tento prúd je však nestacionárny, a tak, ako sa kondenzátor postupne nabíja, musí prúd v čase klesať. Ak naopak, nabitý kondenzátor pripojíme paralelne k rezistoru, bude sa kondenzátor vybíjať a obvodom tiež potečie v čase klesajúci elektrický prúd. Pretože uvedené procesy majú zásadný význam v obvodovej elektronike a objavujú sa pri každom zopnutí spínača, v ktorého obvode je kondenzátor, posúdime ich podrobnejšie.

Na *obr. 5.25* je zapojenie pozostávajúce z bezodporového – ideálneho napäťového zdroja $\mathscr{E}$, odporu R v sérii s kondenzátorom C, ktoré možno pomocou trojpolohového prepínača P pripojiť buď k zdroju (poloha 1), alebo sériové spojenie RC skratovať (poloha 2). Budeme pre jednoznačnosť predpokladať, že na začiatku je kondenzátor vybitý, teda je na ňom nulové napätie. V čase $t = 0$ prepínač zapneme do polohy 1. Od tohto okamihu sa kondenzátor začína nabíjať, narastá na ňom napätie a odporom tečie elektrický prúd. Po istom čase t je na kondenzátore náboj $Q(t)$ a odporom tečie prúd $I(t)$. V tomto čase je na kondenzátore napätie

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$



Obr. 5.25

a na odpore napäťový spád

$$U_R(t) = RI(t)$$

Aj v takomto obvode sa súčet všetkých napätí musí rovnať nule, teda musí platiť

$$U_R + U_C = RI + \frac{Q}{C} = \mathscr{E} \tag{5.52}$$

Keďže prúd v obvode sa podľa definície rovná časovému prírastku náboja Q na kondenzátore, t. j. $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, možno v poslednej rovnici urobiť príslušnú substitúciu, čím rovnica prejde na tvar

$$R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = \mathscr{E} \tag{5.53}$$

Je to rovnica pre neznámy náboj Q na kondenzátore, ktorého veľkosť je funkciou času. Nie je to algebraická rovnica, ale – ako ju matematici nazývajú – obyčajná diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientmi R, $1/C$ a s pravou stranou $\mathscr{E}$. Jej riešenie je jednoduché; ak v čase $t = 0$ je na kondenzátore nulový náboj $Q(0) = 0$, riešenie má tvar

$$Q(t) = \mathscr{E}C\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{5.54}$$

O správnosti riešenia sa možno presvedčiť jeho dosadením do rovnice (5.53). Na kondenzátore je ale zaujímavejšie napätie U_C, ktoré je úmerné náboju a má vyjadrenie

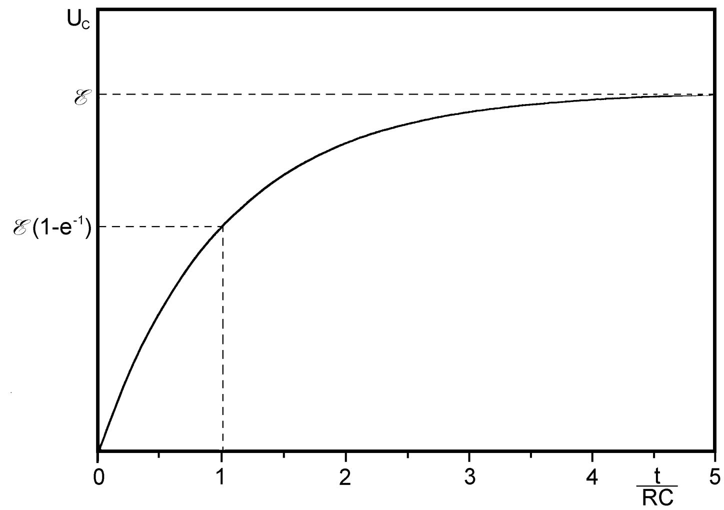
$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \mathscr{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{5.55}$$

Prúd cez rezistor R je daný výrazom

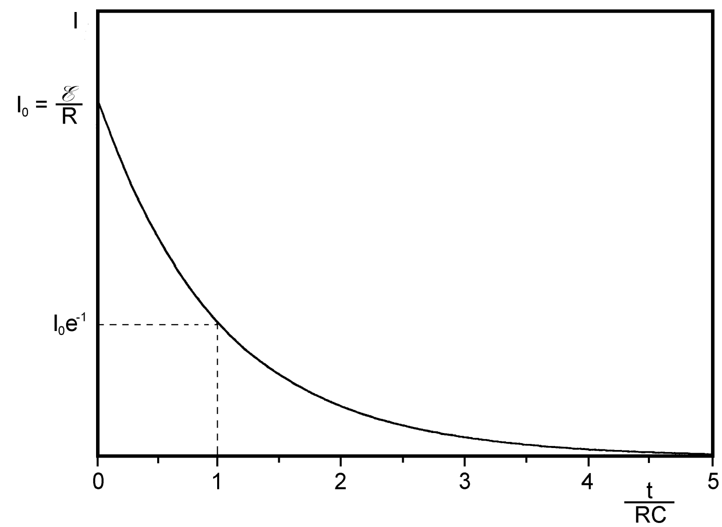
$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathscr{E}}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{5.56}$$

a napätie na ňom

$$U_R(t) = RI(t) = \mathscr{E}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{5.57}$$



Obr. 5.26



Obr. 5.27

Výrazy (5.54) až (5.57) predstavujú úplný fyzikálny opis elektrických procesov pri nabíjaní kondenzátora cez odpor. Tieto procesy sa často nazývajú prechodové javy z dôvodov ich nestacionarity. Na *obr. 5.26* a *5.27* sú graficky znázornené závislosti napätia a prúdu ako funkcie času pre isté hodnoty veličín $\mathscr{E}$, R a C. Vidieť, že náboj a napätie na kondenzátore v procese jeho nabíjania exponenciálne narastajú, pre $t \to \infty$ sa náboj blíži asymptoticky k hodnote $C\mathscr{E}$ a napätie k hodnote EMN zdroja $\mathscr{E}$. Prúd a napätie na odpore, naopak, exponenciálne klesajú, pre $t \to \infty$ sa obidve veličiny asymptoticky blížia k nule. Je dobre si tiež všimnúť, že začiatočný prúd v obvode je $\mathscr{E}/R$,

t. j. taký, aký by tiekol v obvode pri skratovanom kondenzátore (nenabitý kondenzátor sa v začiatočnom okamihu prechodového javu správa ako skrat). Dôležitým parametrom obvodu je súčin RC – veličina, ktorá vystupuje v menovateli exponentu e-funkcie. Táto veličina má očividne rozmer času (už aj preto, že exponent musí byť bezrozmerný), a preto sa nazýva časová konštanta obvodu

$$\tau = RC \text{ [s]} \tag{5.58}$$

Táto konštanta určuje charakter časového priebehu elektrických veličín v obvode. Obvody s veľkými hodnotami R a C, teda s veľkými časovými konštantami sú "pomalé", priebehy náboja, napätia a prúdu sú časovo pozvoľné a naopak, pre obvody s malými časovými konštantami sú priebehy veľmi prudké. Za čas rovnajúci sa časovej konštante obvodu klesne prúd v obvode na

$$\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368 = 36{,}8\ \%$$

jej začiatočnej hodnoty a napätie vzrastie na

$$1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632 = 63{,}2\ \%$$

asymptotickej hodnoty napätia (hodnoty EMN zdroja). Prechodový jav sa považuje prakticky za ukončený po uplynutí päťnásobku času časovej konštanty, kedy prúd v obvode poklesne na $\mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}007$ – teda asi na 7 promile svojej začiatočnej hodnoty.

Je zaujímavé posúdiť energetické pomery v RC-obvode. Vynásobením rovnice (5.52) s prúdom I dostaneme rovnicu

$$\mathscr{E}I = RI^2 + \frac{Q}{C}I$$

ktorá je výkonovou bilanciou RC-obvodu. Súčin $\mathscr{E}I$ predstavuje celkový výkon P dodávaný zdrojom, teda

$$P = \mathscr{E}I$$

Prvý člen na pravej strane

$$P_R = RI^2$$

je disipatívny výkon, s ktorým sa energia zdroja mení na teplo v odpore R a druhý člen

$$P_C = \frac{Q}{C}I$$

je výkon, s ktorým sa energia ukladá v kondenzátore C. Prechodový jav teoreticky trvá nekonečne dlho, čitateľ sa môže presvedčiť, že za tento nekonečný čas zdroj dodá celkovú energiu

$$W = \int_0^\infty P\,\mathrm{d}t = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\mathrm{d}t = C\mathscr{E}^2 \tag{5.59}$$

ktorej polovica sa uloží v elektrickom poli kondenzátora a druhá polovica sa spotrebuje na teplo v odpore (pozri tiež úlohu 143), teda

$$W_R = W_C = \frac{1}{2}C\mathscr{E}^2 \tag{5.60}$$

Predpokladajme teraz, že po dostatočne dlhom (teoreticky nekonečnom) čase, keď napätie na kondenzátore dosiahlo hodnoty EMN zdroja (keď $U_C = \mathscr{E}$), sme prepli prepínač do polohy 2. Vznikol tak jednoduchý uzavretý obvod z rezistora a nabitého kondenzátora, v ktorom teraz potečie vybíjací prúd kondenzátora opačným smerom. Pre obvod platí napäťová rovnica $U_R + U_C = 0$, alebo

$$R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{5.61}$$

Táto jednoduchá diferenciálna rovnica pre náboj Q na kondenzátore dáva pri začiatočnej podmienke pre $t = 0$, $Q(0) = C\mathscr{E}$ nasledovné riešenie

$$Q(t) = C\mathscr{E}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{5.62}$$

Napätie na kondenzátore

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \mathscr{E}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{5.63}$$

a prúd v odpore

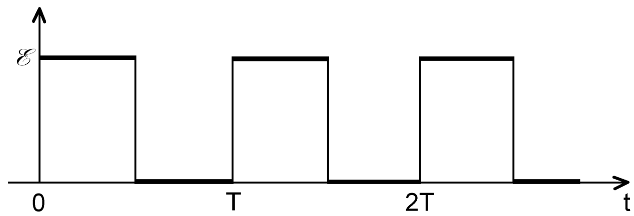
$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathscr{E}}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{5.64}$$

Vidíme, že napätie a náboj na kondenzátore exponenciálne klesajú podobne ako prúd na *obr. 5.27*; takisto klesá v absolútnej hodnote aj prúd, ale jeho smer je opačný ako na *obr. 5.27*, pretože kondenzátor sa vybíja. Akumulovaná elektrická energia (5.60) sa celá premení na teplo v odpore.

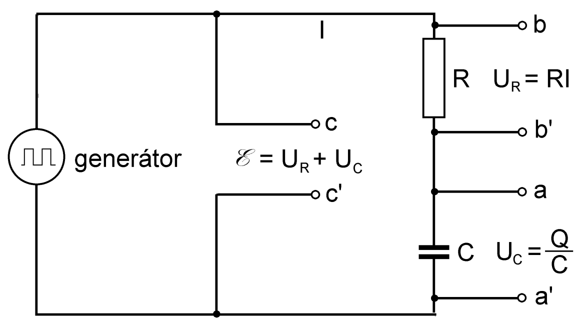
Periodické nabíjanie a vybíjanie kondenzátora možno pozorovať na osciloskope, ak namiesto zdroja konštantného napätia s prepínačom použijeme generátor obdĺžnikového napätia s malým vnútorným odporom ($R_{gen} \ll R$). Časový priebeh napätia na výstupe takého generátora je znázornený na *obr. 5.28*. Periódu T priebehu napätia generátora treba zvoliť dostatočne dlhú, aby v polovici každého cyklu generátora na odpore a kondenzátore bol stav, ktorý už možno považovať za ustálený (kondenzátor je plne nabitý alebo vybitý, prúd cez odpor je nulový). To vyžaduje, aby bola splnená podmienka

$$\frac{T}{2} \approx 5\tau = 5RC$$

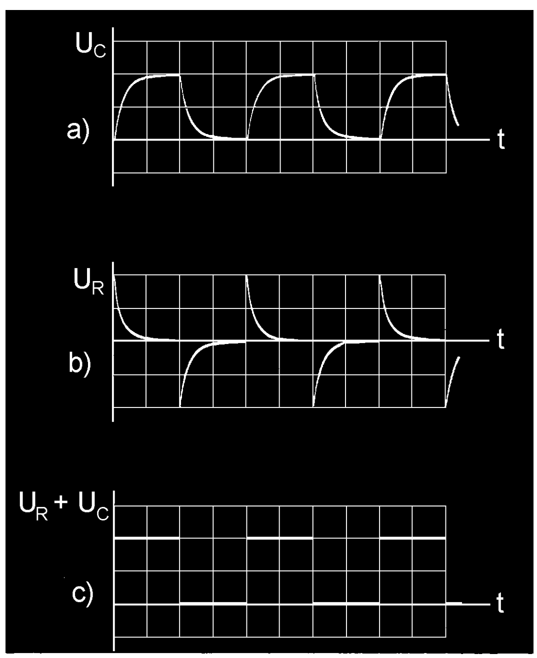
Obvod vhodný na osciloskopické pozorovanie časových priebehov napätí je znázornený na *obr. 5.29*. Svorky aa', bb' a cc' môžeme postupne pripájať na vertikálny vstup osciloskopu (alebo pripojiť súčasne na vstup mnohokanálového osciloskopu) a na jeho obrazovke budeme pozorovať priebehy, ktoré sú znázornené na *obr. 5.30*. Počas prvej



Obr. 5.28



Obr. 5.29



Obr. 5.30

polperiódy napätia generátora napätie na kondenzátore exponenciálne narastá a na odpore klesá, podobne ako na *obr. 5.26* a *5.27*. Obraz napätia na odpore je súčasne aj obrazom prúdu v ňom. V druhej polperióde sa kondenzátor vybíja a ďalej sa celý cyklus opakuje. Súčet napätí na odpore a kondenzátore je na *obr. 5.30c* a je skutočne napätím generátora.

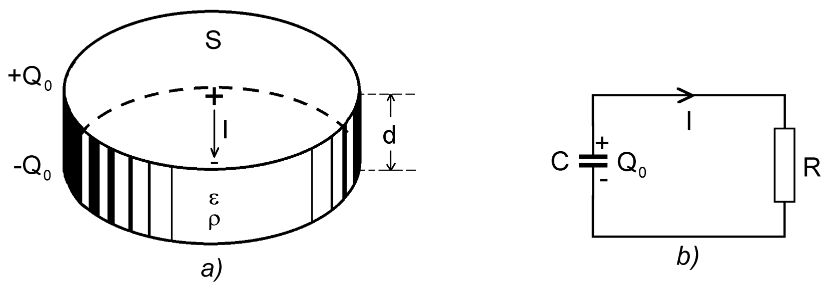
Na záver tohto odseku venujme ešte pozornosť prechodovému javu, ktorý vznikne v nabitom kondenzátore s čiastočne vodivým dielektrikom (kondenzátor so zvodom). Na *obr. 5.31a* je znázornený doskový kondenzátor s plochou dosiek S a vzdialenosťou d medzi nimi, ktorý je naplnený čiastočne vodivým dielektrikom s permitivitou ε a s konduktivitou $\sigma = 1/\rho$ (ρ je rezistivita dielektrika). Kondenzátor má kapacitu $C = \varepsilon S/d$ a odpor dielektrika medzi elektródami kondenzátora $R = \rho d/S$. Pre takýto kondenzátor možno nakresliť náhradný obvod podľa *obr. 5.31b*. Ak je v čase $t = 0$ kondenzátor nabitý nábojom Q_0, bude sa samovoľne vybíjať a časový priebeh náboja na ňom bude tvaru

$$Q(t) = Q_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

Náboj na kondenzátore teda klesá k nule s časovou konštantou

$$\tau = RC = \rho\varepsilon = \varepsilon/\sigma \qquad (5.65)$$

ktorá sa nazýva **Maxwellov relaxačný čas**.



Obr. 5.31

Vidíme, že kondenzátor s kvalitným dielektrikom ($\sigma \to 0$) má časovú konštantu $\tau \to \infty$, t. j. po nabití si náboj udrží veľmi dlho, a naopak kondenzátor so zvodom sa skôr alebo neskôr vybije. Je zaujímavé, že časová konštanta kondenzátora so zvodom nezávisí od jeho geometrie, iba od elektrických parametrov prostredia. Možno teda očakávať, že ak v ľubovoľnom objeme materiálu je v čase $t = 0$ nerovnomerne rozložený náboj $+Q$ a $-Q$, bude začiatočná objemová hustota náboja ρ_0^* v ľubovoľnom bode materiálu klesať s časom podľa výrazu

$$\rho^*(t) = \rho_0^*\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\rho\varepsilon}}$$

Toto tvrdenie plynie zo všeobecných rovníc elektromagnetického poľa a je výsledkom riešenia úlohy 104.

Obvody s odpormi a kondenzátormi majú dôležitý význam v obvodovej elektronike, kde slúžia ako rôzne väzobné členy, časti elektrických filtrov a sú základom pre derivačné a integračné obvody hojne používané v impulzných a v počítačových zapojeniach.

Úlohy 97 – 151

97. Medeným valcovým vodičom s priemerom 1 mm tečie prúd 1 A.

a) Aká je hustota prúdu a driftová rýchlosť vodivostných elektrónov, ak ich koncentrácia v medi je $8{,}5.10^{28}$ m^{-3}

b) Aká je intenzita elektrického poľa v medi, ak rezistivita medi je $1{,}72.10^{-8}$ Ω.m?

c) Aký náboj prejde prierezom vodiča za 20 s? Koľko je to elektrónov?

d) Aké je napätie medzi dvoma prierezmi vodiča vzdialenými 100 m od seba?

98. V synchrotróne pre urýchľovanie elektrónov na energiu 6 GeV sa asi 10^{11} elektrónov pohybuje prakticky rýchlosťou svetla po 240 metrovej kruhovej dráhe. Vypočítajte elektrický prúd v synchrotróne.

99. Sklenená trubica s prierezom 0,5 cm je naplnená roztokom NaCl a tečie ňou elektrický prúd. Pod vplyvom elektrického poľa sa pohybujú ióny Na^+ rýchlosťou 0,045 cm/s a ióny Cl^- rýchlosťou 0,0677 cm/s.

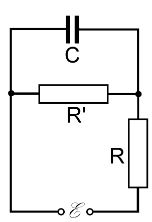
a) Aký elektrický prúd tečie trubicou, ak v každom cm^3 je 10^{20} iónov každého druhu?

b) Koľko sodíkových iónov prejde na katódu za jednu minútu? Atómová hmotnosť sodíka je 22,99. Koľko sodíka (vo váhovom množstve) prejde na katódu?

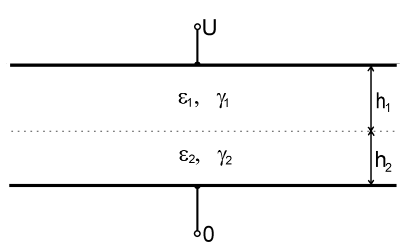
100. Doskový kondenzátor s plochou dosiek S = 10 cm a ich vzdialenosťou d = 2 mm je vyplnený dielektrikom, ktorého permitivita lineárne narastá z hodnoty $\varepsilon_{r1} = 3$ pri jednej doske, na hodnotu $\varepsilon_{r2} = 4$ pri druhej doske. Podobne vodivosť dielektrika narastá z hodnoty $\sigma_1 = 10^{-7}$ S/m na hodnotu $\sigma_2 = 5.10^{-7}$ S/m v tom istom smere. Vypočítajte celkový voľný náboj v objeme kondenzátora, ak ním tečie prúd $I = 10^{-7}$ A v smere nárastu permitivity. Zmení sa náboj, ak ten istý prúd tečie v opačnom smere? Vypočítajte tepelné straty (výkon) v kondenzátore.

101. Rovinné rozhranie dvoch vodivých prostredí, z ktorých jedno má konduktivitu γ a druhé nekonečnú vodivosť, tečie prúd s prúdovou hustotou $\boldsymbol{J} = J\boldsymbol{n}_0$, kde $\boldsymbol{n}_0$ je jednotkový vektor normály k rozhraniu a smeruje do vodiča s konduktivitou γ. Vypočítajte plošný náboj na rozhraní.

102. Vzduch v priestore doskového kondenzátora objemu 10 cm × 10 cm × 2 cm je ionizovaný röntgenovými lúčmi tak, že v 1 cm^3 za 1 s vzniká 10^9 iónov a rovnaký počet voľných elektrónov. Dosky kondenzátora sú pripojené na zdroj EMN $\mathscr{E}$ = 1300 V cez odpor $R = 10^{10}$ Ω a ku kondenzátoru je paralelne pripojený odpor $R' = 10^{10}$ Ω (*obr. 102*). Aký prúd tečie cez odpor R? Predpokladajte, že ióny a elektróny pri pohybe medzi doskami nestačia rekombinovať a že náboj každého iónu je v absolútnej hodnote rovnaký ako náboj elektrónu.

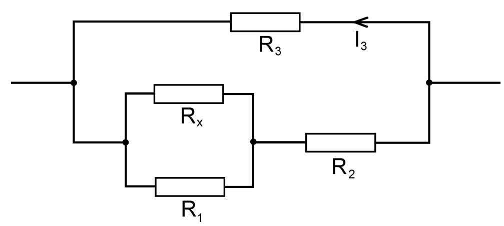


Obr. 102



Obr. 103

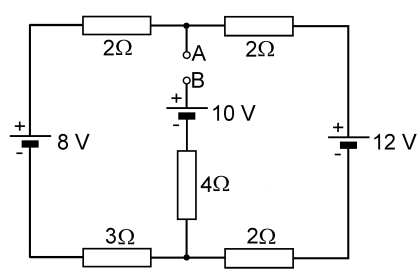
103. Priestor medzi rovinnými doskami kondenzátora je vyplnený čiastočne vodivými materiálmi s konduktivitami γ_1 a γ_2 a permitivitami ε_1 a ε_2. Materiály tvoria dve vrstvy s hrúbkami h_1 a h_2 a vypĺňujú celý objem kondenzátora (*obr. 103*). Kondenzátor je udržiavaný na konštantnom napätí U. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa, elektrickú indukciu a prúdovú hustotu v obidvoch materiáloch. Vypočítajte hustoty voľných a viazaných nábojov na všetkých rozhraniach a vo vnútri materiálov. Určite smery vektorov $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{J}$. Okrajové efekty možno zanedbať.



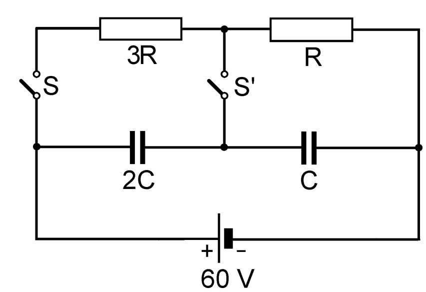
Obr. 105

104. Použitím Ohmovho zákona, Gaussovho zákona a rovnice kontinuity dokážte, že ak v izolovanom vodiči existuje v čase $t = 0$ nenulová objemová hustota nábojov ρ_0, potom táto hustota v čase exponenciálne zaniká (rozptylom náboja na hraničné plochy vodiča) s charakteristickým (relaxačným) časom, ktorý závisí od permitivity vodiča a jeho konduktivity.

105. Na *obr. 105* je časť elektrickej schémy, v ktorej $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 15\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $I_3 = 10$ A a napätie na odpore R_2 je 45 V. Vypočítajte odpor R_x.



Obr. 106



Obr. 107

106. V elektrickom zapojení na *obr. 106* nájdite hodnotu napätia medzi svorkami *A* a *B*. Aký prúd tečie 12-voltovým zdrojom, ak svorky *A* a *B* sú skratované?

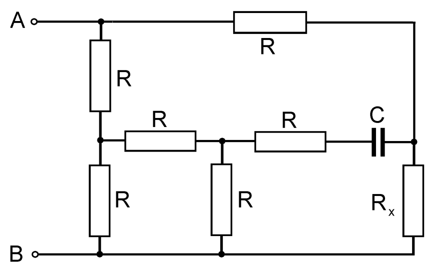
107. V zapojení podľa *obr. 107* treba vypočítať napätia na kondenzátoroch v ustálenom stave v nasledujúcich prípadoch:

a) spínače *S* a *S′* sú zopnuté,

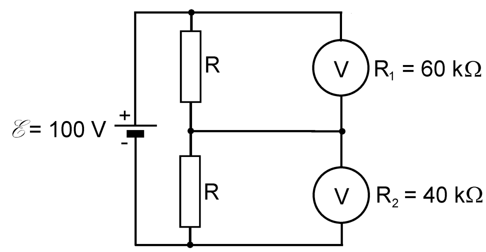
b) spínač *S* je zopnutý a spínač *S′* rozopnutý,

c) spínač *S* je rozopnutý a spínač *S′* zopnutý.

108. Ak sa ku svorkám *A*-*B* na *obr. 108* pripojí zdroj EMN, náboj na kondenzátore *C* sa rovná nule. Aká je hodnota odporu R_x ?



Obr. 108



Obr. 109

109. Aké hodnoty napätia ukazujú voltmetre v zapojení podľa *obr. 109*? R_1 a R_2 sú vnútorné odpory voltmetrov, R = 50 kΩ.

110. Telegrafný kábel dlhý 50 km spájajúci telegrafné stanice A a B je na istom mieste porušený zvodom (v danom mieste sa zníži priečny elektrický odpor). Treba určiť vzdialenosť miesta poruchy od stanice A. Za tým účelom v stanici A bol pripojený ku káblu zdroj napätia 200 V so zanedbateľným vnútorným odporom a v stanici B bolo na kábli namerané 40 V. Potom v stanici B bol ku káblu pripojený 300 V zdroj a v stanici A namerali tiež 40 V. Z týchto údajov vypočítajte vzdialenosť miesta poruchy od stanice A. Materiál kábla má nenulový, konštantný odpor na jednotku dĺžky.

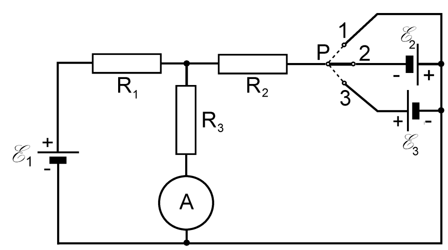
111. Akumulátorová batéria s elektromotorickým napätím $\mathscr{E}_0$ a s malým vnútorným odporom R_i má dodávať počas dlhej doby konštantný prúd do spotrebiča s odporom R_z. Aby sa batéria šetrila, pripojí sa paralelne so spotrebičom cez odpor R ku generátoru jednosmerného napätia $\mathscr{E}$. Avšak elektromotorické napätie generátora kolíše v medziach od $\mathscr{E}_1$ do $\mathscr{E}_2$ ($\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2 > \mathscr{E}_0$). Hodnota odporu R sa volí tak, že pri napätí generátora $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1$ batéria nedodáva prúd.

a) Nakreslite schému opísaného zapojenia.

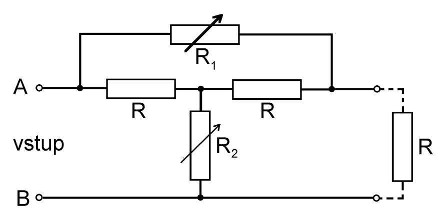
b) Aký prúd bude odoberaný z batérie pri napätí generátora $\mathscr{E} = \mathscr{E}_2$?

c) Aké prúdy tečú spotrebičom pri obidvoch krajných hodnotách napätí generátora $\mathscr{E}_1$ a $\mathscr{E}_2$?

d) Riešte numericky pre $\mathscr{E}_0$ = 6 V, R_i = 0,1 Ω, R_z = 10 Ω, $\mathscr{E}_1$ = 120 V, $\mathscr{E}_2$ = 100 V.



Obr. 112



Obr. 113

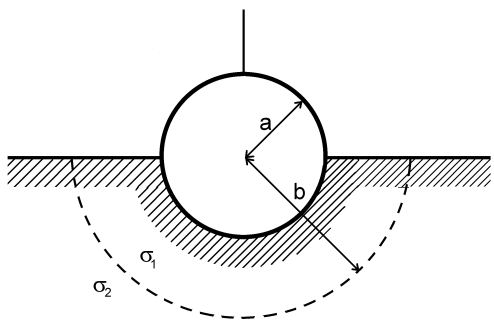
112. Ak je v zapojení na *obr. 112* prepínač P v polohe 1, potom ampérmeter registruje 60 mA. Po prepnutí prepínača do polohy 2 prúd ampérmetrom je 40 mA. Aký prúd tečie ampérmetrom, ak sa prepínač prepne do polohy 3? $\mathscr{E}_2$ = 4 V, $\mathscr{E}_3$ = 6 V.

113. V meracej technike je niekedy potrebný atenuátor (zoslabovač) elektrického napätia, ktorý má konštantný vstupný a výstupný odpor nezávislý od zoslabenia. Takéto požiadavky splňuje zapojenie na *obr. 113* (tzv. premostený T-článok). Predpokladajte, že výstup T-článku je zaťažený odporom R. Aký vzťah musí platiť medzi odpormi R_1 a R_2, aby vstupný odpor bol tiež R?

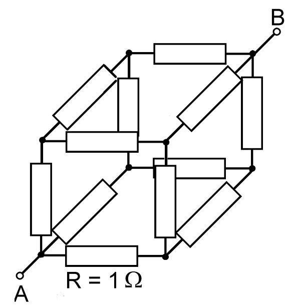
114. Elektrický stožiar vysokého napätia U = 400 kV je uzemnený vodivou guľou do polovice zakopanou v zemi. Polomer gule je r_0 = 30 cm. Na vedení vznikla porucha tak, že nastal skrat medzi stožiarom a vedením. Vypočítajte pod akým napätím sa ocitne človek, ktorý urobí 80 cm krok vo vzdialenosti a) 100 m, b) 25 m od stožiara (smerom k nemu, alebo od neho). Toto napätie sa nazýva krokovým napätím. Konduktivita zeme je 10^{-2} S/m.

115. Guľový kondenzátor s polomermi elektród R_1 a R_2 ($R_1 < R_2$) je vyplnený čiastočne vodivým dielektrikom s rezistivitou ρ = konšt. Vypočítajte priečny odpor kondenzátora.

116. Uzemnenie pozostáva z vodivej gule s polomerom a, ktorá je do polovice zakopaná v zemi (*obr. 116*). Vrstva zeme polomeru b okolo gule má umele zvýšenú konduktivitu $\sigma_1 > \sigma_2$, kde σ_2 je konduktivita zeme. Nájdite odpor uzemnenia.



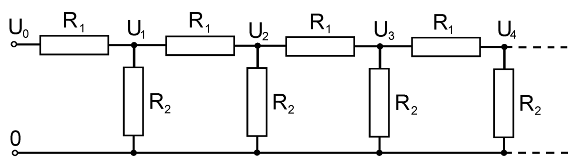
Obr. 116



Obr. 117

117. Kostra kocky sa skladá z rovnakých 1-ohmových odporov pozdĺž každej hrany (*obr. 117*). Využitím symetrie zapojenia vypočítajte odpor medzi protiľahlými vrcholmi A-B.

118. Vypočítajte vstupný odpor nekonečného odporového reťazca na *obr. 118*. Môžete napr. využiť skutočnosť, že odpor reťazca sa nezmení, ak sa k jeho vstupným svorkám pripojí jedna dvojica R_1-R_2. Dokážte, že napätia pozdĺž reťazca (U_1, U_2, U_3, ...) tvoria geometrickú postupnosť. Ako voliť pomer R_1/R_2, aby napätia klesali s kvocientom 1/2?

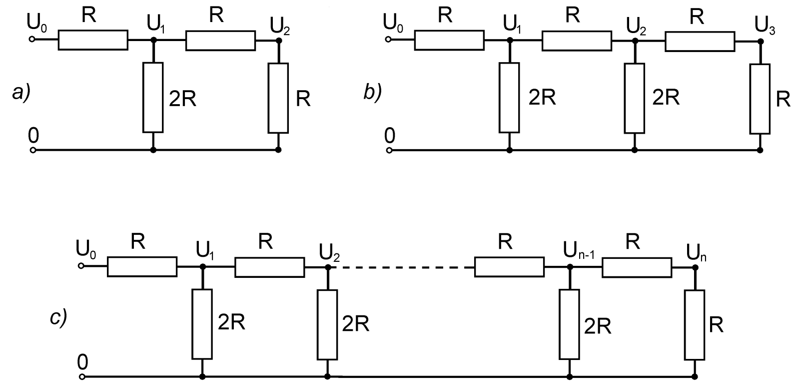


Obr. 118

119. Vypočítajte vstupné odpory zapojení podľa *obr. 119a*, *b*. Určite napätia U_1, U_2, U_3, ak vstupné napätia v obidvoch zapojeniach sú U_0. Matematickou indukciou nájdite vstupný odpor reťazca na *obr. 119c* a napätia U_i (i = 1, 2, 3, ... , n). Porovnajte riešenia s výsledkami úlohy 118.

120. Podzemný kábel má konštantný odpor R na jednotku dĺžky. Izolácia kábla je nedokonalá a má priečnu vodivosť G na jednotku dĺžky. Úlohu spätného vodiča kábla hrá okolitá zem. Napíšte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje závislosť prúdu v kábli na vzdialenosti od zdroja. Nájdite súvislosť medzi prúdom v kábli a jeho napätím oproti zemi.

121. Kondenzátor s kapacitou C = 10 μF s dielektrikom s permitivitou ε_r = 4 a konduktivitou $\sigma = 10^{-14}$ S/m je pripojený na zdroj napätia U = 1 000 V. Vypočítajte zvodový prúd kondenzátora.

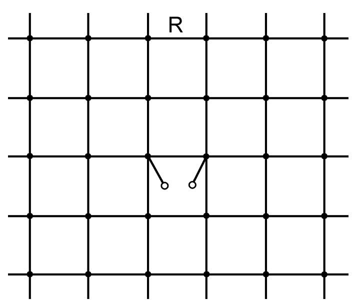


Obr. 119

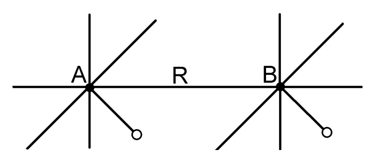
122. Dva kondenzátory s kapacitami C_1 = 0,2 μF a C_2 = 0,5 μF s dielektrikami, ktoré majú relatívne permitivity ε_{r1} = 2,4, ε_{r2} = 4 a konduktivity $\sigma_1 = 2.10^{-10}$ S/m, $\sigma_2 = 5.10^{-9}$ S/m, sú spojené do série a pripojené na zdroj napätia U = 1200 V. Vypočítajte napätia na kondenzátoroch v ustálenom stave.

123. Dve kovové gule s polomermi a_1 a a_2 sú ponorené do vody vo veľkej vzdialenosti od seba. Ak sa na gule pripojí pomocou izolovaných káblov zdroj napätia U, potečie obvodom prúd I, ktorého veľkosť je nepriamo úmerná elektrickému odporu vodného prostredia, v ktorom sú gule ponorené. Tento odpor závisí od vodivosti vody a od rozmerov gulí. Nájdite vzťah, ktorý z nameraného odporu medzi guľami (pomeru U/I) a zo známych polomerov gulí dáva možnosť vypočítať konduktivitu vody.

124. Nekonečná štvorcová sieť je zostavená z rovnakých odporov R medzi susednými uzlami (*obr. 124*). Využitím symetrie zapojenia a zákona superpozície nájdite odpor siete medzi dvoma susednými uzlami.



Obr.124



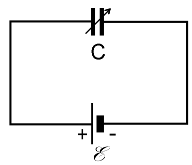
Obr. 125

125. Nekonečná kubická mriežka pozostáva z odporov R medzi susednými uzlami (*obr. 125*). Nájdite celkový odpor medzi susednými uzlami A-B.

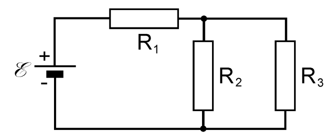
126. V priestore je daných n bodov (uzlov). Všetky uzly sú pospájané odpormi R, každý s každým. Nájdite odpor medzi dvoma uzlami.

127. Desať uzlov je prepojených odpormi R = 40 Ω, každý s každým. K dvom uzlom je pripojený zdroj EMN $\mathscr{E}$ = 10 V s vnútorným odporom R_i = 2 Ω. Aké prúdy tečú jednotlivými odpormi?

128. Na kondenzátor premennej kapacity je pripojený zdroj EMN $\mathscr{E} = 10$ V. Aký prúd dodáva zdroj, ak sa kapacita kondenzátora mení rýchlosťou $C_t = 1\,000$ pF/s?



Obr. 129



Obr. 130

129. Kapacita kondenzátora na *obr. 129* sa zväčšuje tak, že nabíjací prúd kondenzátora je konštantný. Vypočítajte zmenu energie kondenzátora po čase t a energiu dodanú zdrojom. Vysvetlite prípadný rozdiel medzi energiou kondenzátora a energiou dodanej zdrojom.

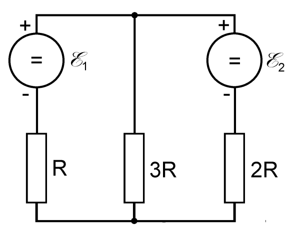
130. Aký musí byť vzájomný súvis medzi odpormi R_1, R_2, R_3 v zapojení na *obr. 130*, aby výkon v odpore R_3 nezávisel od malých zmien tohoto odporu?

131. Pre ohrev miestnosti sa používa elektrická pec na 220 V. V miestnosti sa rozptyľuje $8{,}65.10^7$ J tepla za 24 hodín. Vypočítajte:

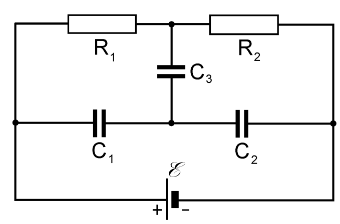
a) odpor pece,

b) dĺžku odporového drôtu s priemerom 1 mm a s rezistivitou 10^{-6} Ω.m potrebného na konštrukciu pece,

c) výkon pece.



Obr. 133



Obr. 134

132. Koaxiálny kábel s polomerom vnútorného vodiča 4 mm a vonkajšieho vodiča 8 mm je vyplnený dielektrikom s konduktivitou 10^{-9} S/m. Kábel je dlhý 10 km. Ku káblu je na jeho jednom konci pripojené napätie $U = 600$ V a druhý koniec je nezaťažený. Vypočítajte:

a) prúd dodávaný zdrojom,

b) hustotu prúdu v dielektriku ako funkciu vzdialenosti od osi kábla,

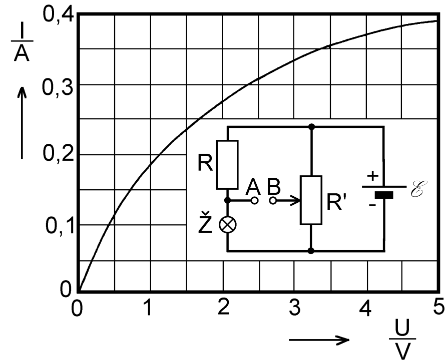
c) hustotu tepelného výkonu v dielektriku,

d) celkové tepelné straty v dielektriku kábla vo wattoch.

133. V zapojení na *obr. 133* sú $\mathscr{E}_1$ a $\mathscr{E}_2$ generátory elektromotorických napätí s nulovým vnútorným odporom. Ak pracuje generátor $\mathscr{E}_1$ a $\mathscr{E}_2 = 0$, potom výkon dodávaný do zapojenia je 55 W. Ak pracuje generátor $\mathscr{E}_2$ a $\mathscr{E}_1 = 0$, potom dodávaný výkon je 176 W. Aký výkon je dodávaný do zapojenia, ak obidva generátory pracujú súčasne?

134. V zapojení podľa *obr. 134* nájdite náboje na kondenzátoroch C_1, C_2 a C_3. V akom vzťahu musia byť R_1, R_2, C_1, C_2, aby napätie na kondenzátore C_3 bolo nulové? Úlohu riešte pre ustálený stav.

135. Dlhý valcový vodič s polomerom *a* je vyhotovený z materiálu, ktorého rezistivita je daná výrazom $\rho = \alpha/r^2$, kde *r* je vzdialenosť od osi vodiča a α je konštanta. Vodičom tečie prúd *I*. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa vo vodiči a odpor *R* na jednotku dĺžky valca.

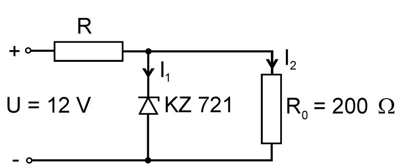


Obr. 136

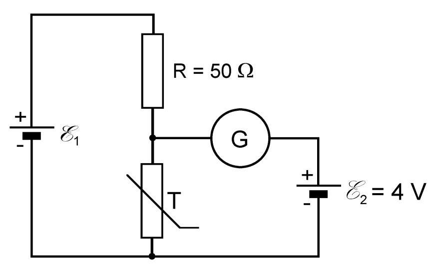
136. Na *obr. 136* je znázornená voltampérová charakteristika žiarovky zapojenej v obvode na obrázku. EMN zdroja $\mathscr{E} = 4$ V, odpor $R = 10\ \Omega$, celkový odpor potenciometra $R' = 40\ \Omega$. Nájdite graficky prúd v žiarovke. V akej polohe musí byť bežec potenciometra, aby sa napätie medzi svorkami *A* a *B* rovnalo nule?

137. V zemskej atmosfére dochádza za každú sekundu v priemere k asi sto elektrickým výbojom (bleskom). Každý blesk trvá v priemere 10^{-3} s. Blesk nastáva pri potenciálovom rozdiele okolo 10^9 V a zodpovedajúci prúd blesku je 20 kA. Odhadnite celkovú ročnú energiu bleskov na zemeguli a porovnajte ju celkovou ročnou produkciou elektrickej energie na svete, ktorá je asi $9{,}6 \cdot 10^{19}$ J.

138. Nelineárny odporový prvok má voltampérovú charakteristiku danú výrazom $I = kU^2$, kde $k = 0{,}02$ A/V^2. Tento prvok je spojený do série s odporom $R = 100\ \Omega$ a dvojica je pripojená na zdroj EMN $\mathscr{E} = 12$ V so zanedbateľným vnútorným odporom. Vypočítajte výkon v odpore a v nelineárnom prvku.



Obr. 139

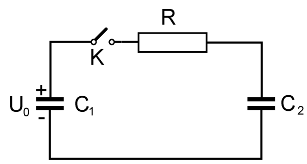


Obr. 140

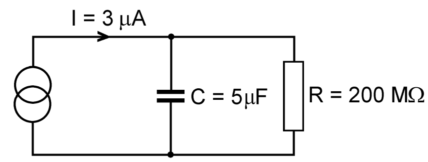
139. Zenerova dióda *KZ* 721 má byť použitá ako stabilizátor napätia na odpore R_0 v obvode podľa *obr. 139*. V katalógu súčiastok je uvedené, že maximálny prípustný výkon na dióde je $P_z = 280$ mW a jej stabilizačné napätie $U_z = 7{,}8$ V. Vypočítajte minimálnu hodnotu odporu *R*, pre ktorú prípustný výkon na dióde ešte nebude prekročený. Predpokladajte, že U_z je konštantné pre celý pracovný interval diódy.

140. V zapojení podľa *obr. 140* je nelineárny element, ktorého voltampérová charakteristika je daná vzťahom $I = 0{,}02\ U^2$ [A, V]. Galvanometrom G netečie prúd. Vypočítajte výkon dodávaný zdrojom $\mathscr{E}_1$.

141. Vypočítajte časový priebeh prúdu v obvode na *obr. 141* a priebeh napätí na kondenzátoroch C_1 a C_2 po zopnutí obvodu. Začiatočné napätie na kondenzátore C_1 je U_0 a kondenzátor C_2 je pred zopnutím nenabitý.



Obr. 141



Obr. 142

142. *RC* dvojici na *obr. 142* je dodávaný konštantný prúd 3 μA. Za aký čas sa kondenzátor nabije na 500 V?

143. Dokážte, že energia kondenzátora nabitého na potenciálny rozdiel U sa pri vybití kondenzátora cez odpor R premení na teplo v tomto odpore.

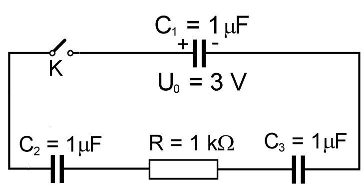
144. Doskový kondenzátor s plochou dosiek S a ich vzdialenosťou d má čiastočne vodivé dielektrikum s permitivitou ε a konduktivitou σ. Ak je takýto kondenzátor nabitý, potom sa samovoľne vybíja. Vypočítajte časovú konštantu kondenzátora.

145. V obvode na *obr. 145* je kondenzátor C_1 nabitý na potenciálový rozdiel 3 V a C_2, C_3 sú nenabité. V čase $t = 0$ sa kľúč zopne.

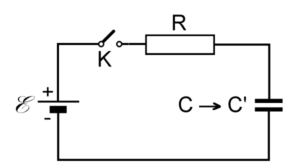
a) Nájdite časovú závislosť prúdu v obvode.

b) Aké budú napätia na jednotlivých kondenzátoroch po ustálení?

c) Aký celkový náboj prejde odporom R?



Obr. 145



Obr. 146

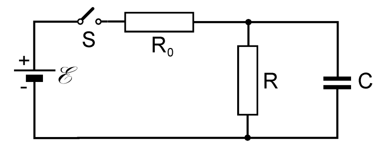
146. V obvode na *obr. 146* má kondenzátor začiatočnú hodnotu kapacity $C = 1\,000$ pF, po zopnutí spínača a po dostatočne dlhom čase sa elektrické pomery v obvode ustália. Za časový interval $\Delta t = 10^{-2}$ s sa kapacita zmení na hodnotu C', ktorá zodpovedá polovičnej vzdialenosti dosiek pôvodného kondenzátora.

1. Aká je hodnota C'?

2. Aká musí byť hodnota odporu R, aby v časovom intervale Δt náboj na kondenzátore zostal prakticky konštantný?

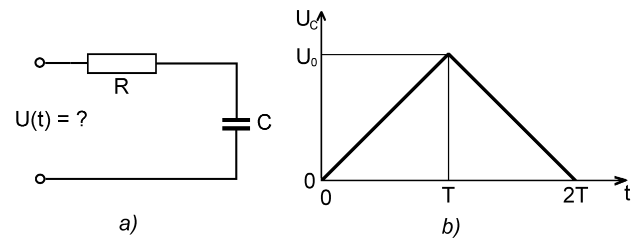
3. Aká energia sa vyžiari na odpore R vo forme tepla od okamihu zmeny kapacity na hodnotu C' až po čas, ktorý zodpovedá novému ustálenému stavu?

147. V zapojení podľa *obr. 147* vypočítajte prúdy jednotlivými vetvami a napätia na jednotlivých prvkoch ako funkcie času po zopnutí spínača S.



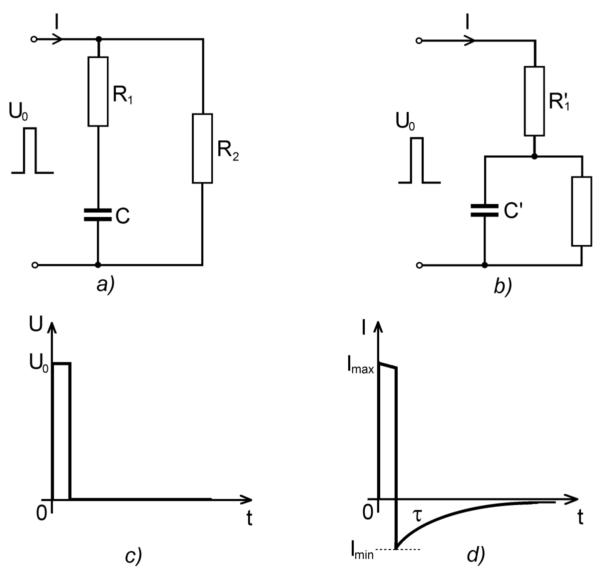
Obr. 147

148. Na kondenzátore C v obvode podľa *obr. 148a* má byť časový priebeh napätia podľa *obr. 148b*. Aký musí byť časový priebeh vstupného napätia? Znázornite graficky.



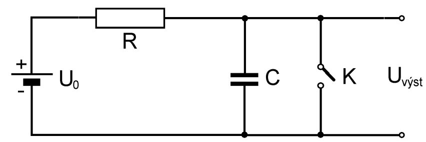
Obr. 148

149. Na *obr. 149a* a *149b* sú znázornené dva obvody pozostávajúce z odporov a kondenzátorov. Pri vhodne zvolených hodnotách odporov a kondenzátorov sú obidva obvody vzhľadom na ich vstupné svorky elektricky identické. Súvis medzi prvkami obvodov pre identické vlastnosti možno získať z porovnania ich impedancií, avšak takýto spôsob je ťažkopádny. Jednoduchšie je porovnať odozvy obvodov na veľmi krátky napäťový impulz (*obr. 149c*) z generátora s nulovým vnútorným odporom. Tvar prúdovej odozvy v obidvoch obvodoch je na *obr. 149d*. Obvody budú identické, ak v obidvoch prípadoch I_{max} a I_{min}, ako aj časové konštanty τ sú rovnaké. Na základe analýzy odozvy na napäťový impulz nájdite vzťahy medzi prvkami obvodov pre ich elektrickú identitu.



Obr. 149

150. Jednoduchý relaxačný generátor periodických časových priebehov je na *obr. 150*. Vo funkcii kľúča K môže slúžiť napr. neónová výbojka so zápalným napätím U_1 a zhášacím napätím U_2. Po pripojení zdroja U_0 k obvodu sa kondenzátor začne nabíjať a v okamihu, keď napätie na kondenzátore dosiahne hodnotu U_2, kľúč sa zopne a kondenzátor sa rýchle vybije na hodnotu napätia U_1, pri ktorom sa kľúč rozopne. Kondenzátor sa z hodnoty napätia U_1 začne znovu nabíjať až na hodnotu U_2 a celý proces sa opakuje. Napätie zdroja U_0 musí byť vždy vyššie ako U_2. Vypočítajte periódu kmitov takého generátora, pričom čas, za ktorý sa kondenzátor vybíja cez kľúč, považujte za nulový. Časové priebehy kmitov znázornite graficky.



Obr. 150

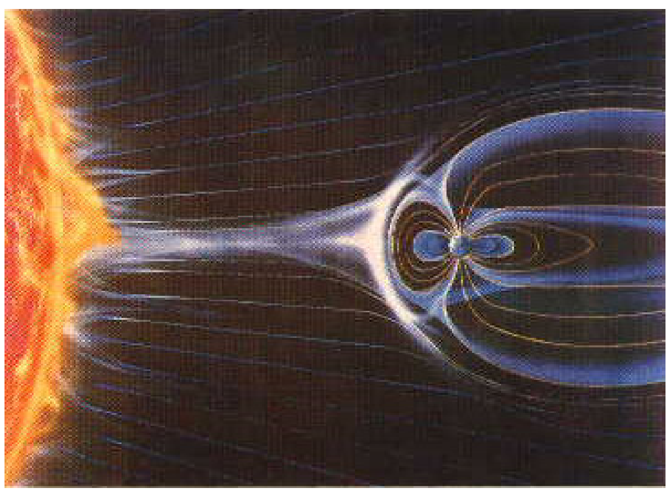
151. Biologickú bunku možno v istom zmysle považovať za kondenzátor tvorený bunečnou membránou (dielektrikum kondenzátora), ktoré oddeľuje dve vodivé kvapaliny (elektródy kondenzátora). Elektrické vlastnosti nervových buniek sú zvlášť dôležité, pretože šírenie nervového impulzu je doprevádzané rýchlymi zmenami rozdielu potenciálov medzi vnútrom bunky a prostredím, ktoré ju obklopuje. Je známe, že kapacita bunečnej membrány je $C' = 10^{-2}$ F.m^{-2} a jej relatívna permitivita je $\varepsilon_r = 3$. Aká je hrúbka bunečnej membrány? Iné elektrické merania ukazujú, že bunečná membrána nie je dokonalý izolátor. Priečna vodivosť bunečnej membrány je $G' = 1/R' = 10$ S.m^{-2}. Bunečná membrána je teda kondenzátorom so zvodom, čo je ekvivalentné kondenzátoru s ideálnym dielektrikom, ku ktorému je pripojený paralelne odpor. Aká je časová konštanta takého "bunečného kondenzátora" (ktorá je mimochodom mierou rýchlosti reakcie nervového systému na nervový impulz)? Závisí táto časová konštanta od rozmerov kondenzátora? Aká je rezistivita bunečnej membrány?

6 MAGNETIZMUS ELEKTRICKÝCH PRÚDOV

Few subjects in science are more difficult
to understand than magnetism

Encyclopedia Britannica, Pätnáste vydanie 1989

Máloktorý z fyzikálnych javov fascinuje človeka tak, ako magnetizmus. Už v dávnej minulosti pastier z okolia antického mesta Magnésia (dnešná Manisa v Turecku) s úžasom pozoroval čudesné kúsky minerálov, ktoré sa niekedy priťahovali, inokedy sa úporne odpudzovali. Starogrécky filozof Thales z Milétu už v 6. storočí pred naším letopočtom napísal, že "tieto podivné predmety (išlo o prírodne sa vyskytujúce kysličníky železa FeO a Fe_2O_3 dnes známe pod menom magnetit alebo magnetovec) majú silu priťahovať železo". Uvádza sa, že Číňania už v 3. tisícročí pred n. l. v nejakej podobe poznali a na pozemnú navigáciu používali najjednoduchší magnetický prístroj – magnetku. Prvé predmety v histórii, na ktoré človek potreboval železo, bola zrejme magnetka a meč. Sokrates sa vo svojich filozofických dielach zmieňuje, že "sú v prírode také predmety (ide o magnetit), ktoré majú schopnosť vyvolať v železe vlastnosť priťahovať iné železné predmety", t. j. indukovať v ňom magnetické vlastnosti. Permanentný (stály) a indukovaný (vyvolaný) magnetizmus teda patria medzi prvé vedecké objavy v histórii ľudstva.



Obr. 6.1. Vplyv slnečného vetra na magnetosféru Zeme

Hoci sa starí grécki filozofi domnievali, že elektrické a magnetické sily majú spoločnú podstatu, ich domnienka sa dlhé stáročia ignorovala. Možno to súviselo s tým, že záujem o magnetické javy sa obmedzoval iba potrebami súvisiacimi s konštrukciou magnetických kompasov pre námornú plavbu. Samotný princíp činnosti kompasov bol ich tvorcom absolútne neznámy. Dôkazom toho je skutočnosť, že zemský magnetizmus bol objavený až v 16. storočí anglickým učencom Wiliamom Gilbertom (1564 – 1603) v čase, keď sa kompas už dlhé stáročia používal. Gilbert svoje magnetické experimenty a pozorovania publikoval v roku 1600 v rozsiahlom šesťzväzkovom diele "De Magnete …[1]" (O magnete…), ktoré na dlhé roky upadlo do zabudnutia, a v tom čase veda o magnetizme nepokročila ani o krok. K dielu Gilberta sa až o viac ako 200 rokov neskôr vrátili Gauss a Ampère, ktorým poslúžilo ako základ pre stavbu modernej teórie magnetizmu.

Druhým faktorom, ktorý nepriaznivo ovplyvňoval rozvoj náuky o magnetizme bola skutočnosť, že magnetické javy sa tvrdošijne oddeľovali od javov elektrických. Bádatelia 16. storočia svojím scholastickým hodnotením pozorovaných prírodných javov usúdili, že elektrina a magnetizmus navzájom nesúvisia, pretože elektricky nabitý predmet silovo nepôsobí na permanentný magnet ("magnet a elektrizovaný jantár na seba silovo nepôsobia"). Tento súvis prostredníctvom silového pôsobenia medzi pohybujúcimi sa (a pohyb je tu záležitosť zásadného významu) elektrickými nábojmi a magnetom sa viac-menej náhodne podarilo objaviť až v roku 1820 dánskemu profesorovi fyziky Hansovi Christianovi Oerstedovi (1777 – 1851).[2]

Oersted na konci jednej zo svojich prednášok z fyziky konaných v zime rokov 1819/20 na Kodanskej univerzite chcel predviesť študentom experiment o tepelných účinkoch elektrického prúdu. Všimol si pritom, že magnetka nachádzajúca sa v blízkosti prúdom rozžeraveného drôtu sa pod účinkom prúdu pohla. Zo začiatku to pripisoval tepelnému účinku, neskôr nad magnetku, kolmo na jej smer umiestnil prúdovodič a čakal čo sa stane, či elektrický prúd náhodou neotočí magnetku do svojho smeru. Po zapnutí prúdu vodičom sa očakávaný účinok na magnetku neobjavil. Pred odchodom z prednášky niečo Oersteda napadlo a otočil prúdovodič nad magnetkou do jej smeru. Podľa slov jedného z jeho žiakov "po zapnutí prúdu v okruhu bol Oersted doslova šokovaný, keď uvidel ako magnetka pri zapínaní a vypínaní prúdu vykonávala veľké kmity a pri stálom prúde sa ustálila kolmo na smer prúdu, pričom sa otočila o 180^{o}, ak sa smer prúdu zmenil".

Dnes sme presvedčení, že **všetky magnetické efekty sú dôsledkom usmerneného pohybu elektrických nábojov, teda prúdov**, bez ohľadu na to, či ide o prúdy v tuhých látkach, kvapalinách, plynoch, alebo vo vákuu. Magnetizmus je len jednou neoddeliteľnou časťou všeobecnejšieho prírodného fenoménu – elektromagnetizmu. Silný magnetizmus permanentných magnetov (feromagnetizmus) je tiež spôsobený pohybom elektrónov v atóme železa po orbitách, ale hlavne ich rotačným pohybom okolo vlastnej osi – ich spinom, teda ich momentom hybnosti. (Táto interpretácia spinu elektrónu ako bodového objektu nezodpovedá predstavám kvantovej fyziky, umožňuje však vysvetliť dostatočne presne mnohé atómové javy). Feromagnetizmus je natoľko tajuplný a zložitý jav, že ani dodnes jeho teória nie je uzavretá. Vysvetlenie javov feromagnetizmu v svojej podstate spadá do oblasti štatistickej a kvantovej fyziky.

Ešte záhadnejšie sú pre nás účinky magnetických polí na biologické objekty. Experimentálne bolo zistené, že silné nehomogénne magnetické pole ovplyvňuje rast rastlín, avšak príčina a mechanizmy pôsobenia sú zatiaľ neznáme. Takmer nič nevieme napríklad o fyziologických účinkoch magnetizmu a o magnetických poliach produkovaných bioprúdmi.

---

[1] De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure – O magnete, magnetických telesách a veľkom magnete Zeme

[2] Oersted, H. C.: Experiment on the effects of a current on the magnetic needle, Annals of Philosophy **16** (1820)

Hans Christian OERSTED
(1777 Rudkjöbing v Dánsku – 1851 Kodaň)

Nedostatok exaktných vedomostí o tajoch magnetizmu okamžite zneužívajú rôzni podvodníci a šarlatáni, ktorí sľubujú dôverčivým ľuďom svojím "magnetickým" pôsobením odstrániť ich telesné trápenia. Doba im praje – svojho času boli napríklad veľmi populárne "liečivé" magnetické náramky. Pojem "magnetizmus" sa takto zneužíva na podvod, ale mnohí ľudia potrebujú byť klamaní.

Z toho mála, čo sme doteraz o magnetizme povedali, môže nás znepokojiť tvrdenie, že magnetizmus je atribút pohybu nábojov, teda že závisí od ich rýchlosti. Keďže rýchlosť je relatívna veličina a vzťahuje sa vždy k istému pozorovateľovi (k istej vzťažnej sústave), vzniká otázka, či aj magnetické účinky sú relatívne. Odpoveď je možno prekvapujúca, ale je kladná – magnetické účinky sú skutočne relatívne, teda rôzne pre rôznych pozorovateľov. Magnetizmus je teda jav relativistický a jeho vysvetlenie treba hľadať v teórii relativity. Z tohoto pohľadu nie je prekvapujúce, že teória relativity naopak, má svoje korene v elektromagnetizme. Priekopnícka práca v tejto oblasti publikovaná Einsteinom[1] v roku 1905 sa nenazýva teóriou relativity, ale "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (K elektrodynamike pohybujúcich sa telies), a dnes je len ťažko posúdiť, či by bola mohla vzniknúť pred vznikom teórie elektromagnetického poľa.

Keďže každá fyzikálna teória musí byť relativisticky invariantná (nezávislá od výberu vzťažnej sústavy), možno sa domnievať, že na základe povedaného tento princíp pre magnetické javy neplatí. Je to pravda, ale magnetické javy sú len jednou stránkou celkového elektromagnetického účinku spojeného s elektrickými nábojmi. Druhou stránkou sú už opisované elektrické javy, ktoré logicky musia byť tiež relativistické. Celkový elektromagnetický účinok je však relativisticky invariantný a odpovedá zásade – ak sa na jednej strane niečo uberie, na druhej strane to treba pridať. Tieto otázky podrobnejšie posúdime v odseku o Lorentzových transformáciách elektromagnetických polí (odsek 6.5). Teraz chceme iba zdôrazniť, že elektromagnetická teória je relativisticky invariantná teória a vznikla skôr ako teória relativity.

Pri našom výklade magnetických javov nezachováme historický princíp, pretože to, čo bolo známe na začiatku, menovite feromagnetizmus, sa vysvetľuje najťažšie. Naše úvahy o magnetizme a magnetických silových účinkoch začneme opisom magnetického poľa elektrických prúdov.

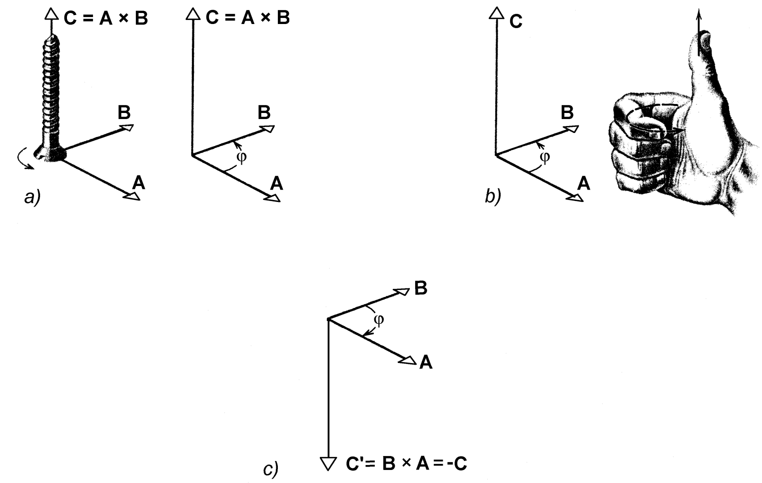
6.1 MAGNETICKÉ POLE ELEKTRICKÉHO PRÚDU

6.1.1 Magnetické silové pôsobenie dvoch bodových nábojov vo vákuu

Pred začiatkom čítania tohto a ďalších odsekov o magnetických javoch odporúčam čitateľovi zopakovať a ujasniť si význam a vlastnosti vektorovej operácie "vektorový súčin": Vektorovým súčinom dvoch vektorov v poradí $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ je vektor $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, ktorého veľkosť je $C = AB \sin \varphi$ (φ je uhol medzi vektormi $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$) a smer je daný pravidlom pravotočivej skrutky (*obr. 6.2a*), alebo pravidlom pravej ruky (*obr. 6.2b*). Vektorový súčin zmení znamienko, ak sa zmení poradie vektorov (*obr. 6.2c*), teda platí $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{C}$.

---

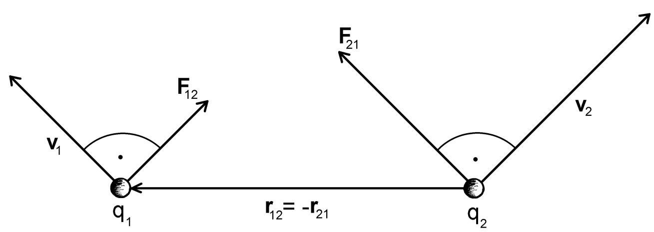
[1] Einstein, A., Ann. d. Physik, Bd. **17** (1905) S. 891



Obr. 6.2

Na *obr. 6.3* je zobrazená dvojica bodových nábojov q_1 a q_2 rovnakého znamienka, ktoré v istej súradnicovej sústave spojenej s pozorovateľom, a v istom čase, sú vo vzájomnej vektorovej vzdialenosti $\pm\boldsymbol{r}_{12}$. Náboje sa pohybujú vo vákuu rýchlosťami $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$. Z elektrostatiky je známe, že medzi nábojmi pôsobí sila, ktoré spĺňa Coulombov zákon. Praktická skúsenosť ukazuje, že **pozorovateľ vo zvolenej sústave pozoruje ešte jednu zvláštnu silu, ktorá súvisí s pohybom nábojov v danej vzťažnej sústave.** Nová sila $\boldsymbol{F}_{12}$ pôsobiaca na náboj q_1 od náboja q_2 tiež závisí priamo úmerne od veľkosti nábojov a nepriamo úmerne od štvorca vzdialenosti r_{12} (teda podobne ako elektrická sila podľa Coulombovho zákona), ale okrem toho jej veľkosť a smer závisia od obidvoch rýchlosti spôsobom, ktorý sa dá matematicky vyjadriť prostredníctvom vektorovej veličiny

$$\boldsymbol{v}_1 \times \left(\boldsymbol{v}_2 \times \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}} \right)$$



Obr. 6.3

Tieto experimentálne skúsenosti potvrdené mnohými pokusmi a každodennou praxou nám poslúžia ako základ pre budovanie teórie magnetizmu.

Silu $\boldsymbol{F}_{12}$ možno teda vyjadriť vzťahom

$$\boldsymbol{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{v}_1 \times \left(\boldsymbol{v}_2 \times \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}\right) \tag{6.1a}$$

Podobne na náboj q_2 od náboja q_1 pôsobí sila

$$\boldsymbol{F}_{21} = k\frac{q_2 q_1}{r_{21}^2}\boldsymbol{v}_2 \times \left(\boldsymbol{v}_1 \times \frac{\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}}\right) \tag{6.1b}$$

kde $\boldsymbol{r}_{21} = -\boldsymbol{r}_{12}$ ($r_{21} = r_{12}$). Konštanta k v sústave jednotiek SI sa píše v tvare

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} \tag{6.2}$$

kde μ_0 je rozmerová konštanta, ktorej hodnota je daná definitoricky, určením jednotky prúdu ako jednej zo základných jednotiek sústavy SI (pozri odsek 6.4.2). Konštanta má presnú hodnotu

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H/m} \tag{6.3}$$

a nazýva sa **magnetická konštanta** (permeabilita vákua). K jej určeniu sa vrátime pri definícii jednotky elektrického prúdu.

Vráťme sa však k výrazom (6.1) pre sily pôsobiace na náboje pri ich pohybe. Tieto sily majú dve zvláštnosti, ktoré ich odlišujú od doteraz známych síl pôsobiacich medzi materiálnymi objektami. Predovšetkým tieto sily závisia od rýchlostí obidvoch nábojov. Je zvláštne, že sily vymiznú, ak hoci len jedna z rýchlosti sa rovná nule, ináč povedané, ak je pozorovateľ pevne spojený s jedným z nábojov. V tom spočíva relativita týchto síl. Druhou zvláštnosťou síl je skutočnosť, že na prvý pohľad nespĺňajú tretí Newtonov zákon – ich veľkosť je rôzna a nepôsobia pozdĺž spojnice nábojov.[1] (Čitateľovi odporúčam dokázať, že iba v prípade rovnakých nábojov pohybujúcich sa rovnakými rýchlosťami v jednej rovine sú obidve sily rovnako veľké a pôsobia na spojnici nábojov smerom k sebe. Ak sú náboje opačného znamienka, sily pôsobia od seba). Možno očakávať, že takéto sily, ktoré nazývame **magnetické sily**, budú mať na nabité pohybujúce sa objekty podivuhodné účinky, čoho svedkom sa staneme v ďalších častiach tejto knihy.

Pre naše ďalšie účely je vhodné sily (6.1) prepísať do tvaru

$$\boldsymbol{F}_{12} = q_1\boldsymbol{v}_1 \times \left(k\frac{q_2\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}\right) \tag{6.4a}$$

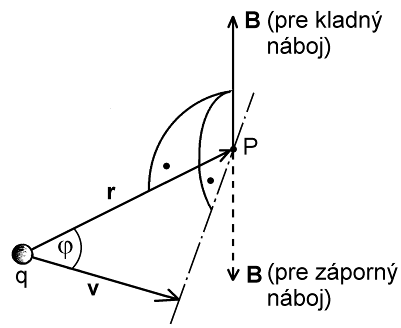
$$\boldsymbol{F}_{21} = q_2\boldsymbol{v}_2 \times \left(k\frac{q_1\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3}\right) \tag{6.4b}$$

---

[1] Zdanlivé porušenie tretieho Newtonovho zákona vyvolalo medzi fyzikmi zdesenie a veľa diskusií. V roku 1945 Page a Adams (Page, L., Adams, N. I., Am. J. Phys. 13, (1945) str. 141) však dokázali, že v skutočnosti tretí Newtonov zákon nie je porušený, pretože elektromagnetické pole dvojice bodových nábojov unáša so sebou hybnosť, ktorej časová zmena sa rovná práve rozdielu obidvoch síl. Pozri tiež Tamm, I. J.:"Osnovy teorii električestva", Gostechizdat Moskva 1957

Z tohoto zápisu vidíme, že každá zo síl na vybraný náboj závisí od jeho hodnoty, jeho rýchlosti a od veličiny v zátvorke, ktorá vyjadruje vlastnosti druhého náboja v interakcii (jeho veľkosť, znamienko, rýchlosť a vektorovú vzdialenosť k prvému náboju). Táto veličina vytvára vektorové pole v priestore, má silový charakter, pretože určuje silu na iný náboj a nazýva sa **magnetická indukcia** alebo presnejšie **vektor magnetickej indukcie** a spravidla sa označuje symbolom $\boldsymbol{B}$. Zátvorka vo výraze (6.4a) predstavuje teda vektor magnetickej indukcie náboja q_2 v mieste náboja q_1 a podľa uvedeného mu možno priradiť symbol $\boldsymbol{B}_1$. Podobne zátvorka vo výraze (6.4b) je magnetická indukcia $\boldsymbol{B}_2$ v mieste náboja q_2. Vo všeobecnosti náboj q pohybujúci sa v priestore rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ vytvára vo vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}$ v bode P na *obr. 6.4* magnetické pole s magnetickou indukciou

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{6.5}$$



Obr. 6.4

kde konštanta k bola vyjadrená pomocou výrazu (6.2). Vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ je kolmý na obidva vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{r}$, má veľkosť

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\sin\varphi$$

a smer vektorového súčinu $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$ (*obr. 6.4*). Pre magnetickú indukciu platí zákon superpozície, to znamená že magnetické účinky viacerých pohybujúcich sa nábojov sa vektorovo sčítavajú. Ak sa teraz vo vzdialenosti $\boldsymbol{r}$ od náboja nachádza iný vybraný náboj q a jeho rýchlosť je tam $\boldsymbol{v}$, bude naň pole $\boldsymbol{B}$ podľa výrazov (6.4) a (6.5) pôsobiť magnetickou silou

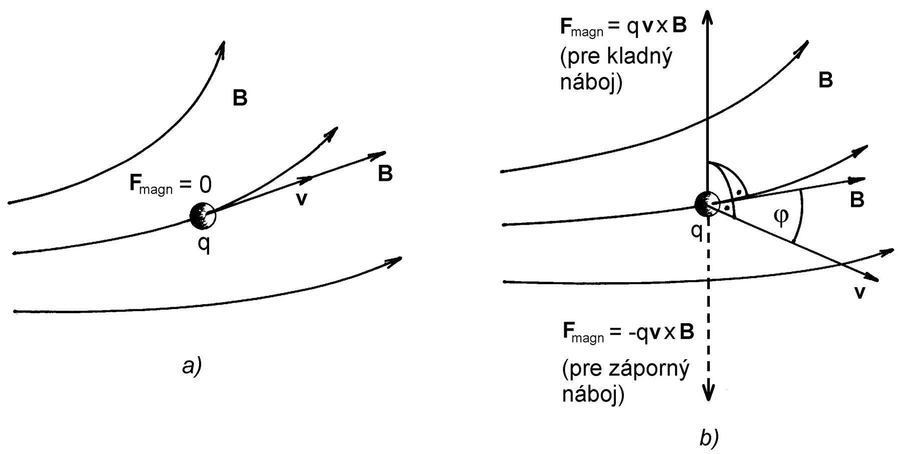
$$\boldsymbol{F}_{mag} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{6.6}$$

Táto sila pôsobí na náboj q popri elektrickej sile $\boldsymbol{F}_{el} = q\boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{E}$ je intenzita elektrického poľa. Celková elektromagnetická sila, ktorá pôsobí na náboj q pohybujúci sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ v elektrickom poli $\boldsymbol{E}$ a magnetickom poli $\boldsymbol{B}$, je daná výrazom

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{elmag} = \boldsymbol{F}_{el} + \boldsymbol{F}_{magn} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}} \tag{6.7}$$

Tento výraz sformuloval v roku 1909 holandský teoretický fyzik Hendrik Antoon Lorentz[1] (1853 – 1928) a podľa neho sa nazýva **Lorentzova sila**. Je to jediná sila, ktorá pôsobí na náboje v elektromagnetickom poli, a výraz (6.7) je jeden zo základných výrazov teórie elektromagnetického poľa. Iné sily v elektromagnetizme nepoznáme.

Vráťme sa však k opisu vlastností magnetických polí. Toto vektorové pole možno podobne ako elektrické pole graficky mapovať sústavou čiar, ktoré nazývame **indukčné čiary**. Sú to čiary, ku ktorým má vektor magnetickej indukcie v každom bode poľa smer dotyčnice. Ak sa nejaký náboj q v magnetickom poli pohybuje pozdĺž indukčnej čiary (vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ sú paralelné, alebo antiparalelné), v tom prípade magnetická sila na náboj je nulová (pozri *obr. 6.5a*). Ak rýchlosť $\boldsymbol{v}$ zviera so smerom vektora $\boldsymbol{B}$ uhol φ, sila má veľkosť $F_{magn} = qvB \sin \varphi$ a má smer vektorového súčinu $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ (pozri *obr. 6.5b*). Ak sú vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ navzájom kolmé, sila je maximálna a má veľkosť $F_{magn} = qvB$. Sila je vždy kolmá na obidva vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$, a preto nie je správne zamieňať pojem "magnetické indukčné čiary" pojmom "magnetické siločiary", pretože sila nemá smer dotyčníc k týmto čiaram, ale naopak, je na ne kolmá.



Obr. 6.5

Dôležitým pojmom a veličinou v magnetickom poli je pojem **toku vektora magnetickej indukcie** Φ, ktorý je formálne definovaný podobne ako tok intenzity elektrického poľa, teda tok vektora magnetickej indukcie zvolenou neuzavretou plochou S v priestore je (*obr. 6.6*)

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (6.8)$$

kde d$\boldsymbol{S}$ je vektorový element na ploche S. Tento pojem hrá zásadnú úlohu pri takom dôležitom jave ako je elektromagnetická indukcia, ktorá bude predmetom našich úvah v kapitole 7.

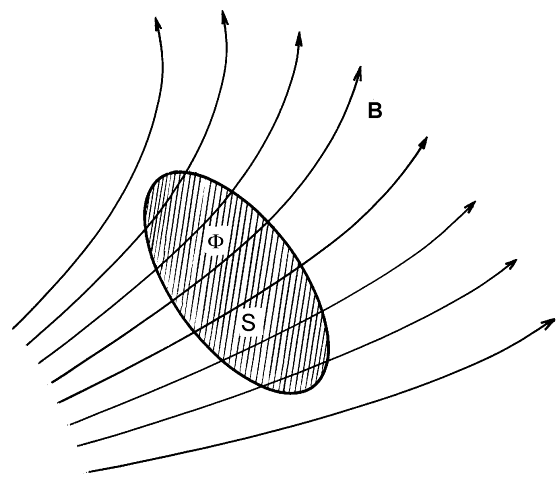
[1] Lorentz, H. A.: The Theory of Electrons, New York, 1909

Meracia jednotka pre magnetickú indukciu plynie z výrazu (6.6) pre magnetickú silu. Využitím výrazu možno napísať rozmerovú rovnicu pre jednotku magnetickej indukcie

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{\mathrm{N.s}}{\mathrm{C.m}} = \mathrm{kg.s^{-2}.A^{-1}} \tag{6.9}$$

Jednotkou magnetickej indukcie v sústave SI je 1 tesla (T) pomenovanej po americkom inžinierovi chorvátskeho pôvodu Nikola Teslovi (1856 – 1943). Jej definícia spočíva na vzťahoch (6.6) a (6.9), a znie: **Magnetická indukcia v nejakom bode priestoru, v ktorom je magnetické pole, má hodnotu 1 tesla (T), ak na náboj 1 coulombu (C), ktorý sa v danom bode pohybuje rýchlosťou 1 m/s kolmo na indukčné čiary, pôsobí magnetická sila 1 newton (N).** Podľa (6.9)

$$1\,\mathrm{T} = 1\frac{\mathrm{N.s}}{\mathrm{C.m}} = 1\frac{\mathrm{V.s}}{\mathrm{m^2}} = 1\,\mathrm{kg.s^{-2}.A^{-1}} \tag{6.10}$$



Obr. 6.6

Ak si všimneme výraz (6.8) pre indukčný tok, vidíme, že jeho jednotkou musí byť 1 T.m^2, čo na druhej strane podľa (6.10) sa rovná 1 V.s. Jednotka pre indukčný tok má však svoje vlastné meno a nazýva sa weber (Wb) na počesť nemeckého fyzika Wilhelma Eduarda Webera (1804 – 1891) profesora na Univerzite v Göttingene, súčasníka a spolupracovníka K. F. Gaussa, teda

$$1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{T.m^2} = 1\ \mathrm{V.s} = 1\ \mathrm{m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}} \tag{6.11}$$

Jeden weber (1 Wb) je tok magnetickej indukcie veľkosti 1 tesla homogénne a kolmo plochou 1 m^2.

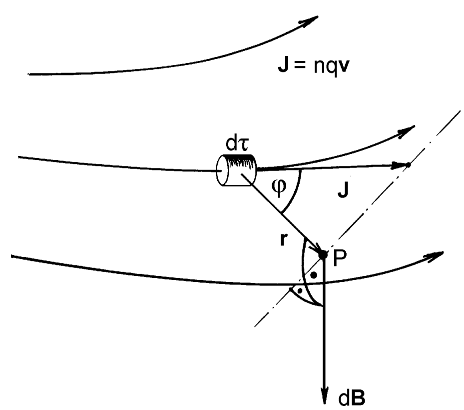
V niektorých starších učebniciach, ale tiež vo vedeckej a technickej praxi hlavne v USA a v západnej Európe, sa ešte dnes často používa pre jednotku magnetickej indukcie označenie Wb/m^2, ktoré plynie zo vzťahu (6.11) a samotný vektor $\boldsymbol{B}$ sa oprávnene nazýva **hustota magnetického indukčného toku** (magnetic flux density).

Magnetická indukcia 1 T predstavuje veľmi silné magnetické pole produkované napr. veľkým elektromagnetom. Pre porovnanie možno uviesť, že prirodzené magnetické pole na povrchu Zeme dosahuje absolútnych maximálnych hodnôt iba cca 6,2.10^{-5} T (na zemských magnetických póloch).

6.1.2 Magnetické pole prúdu elektrických nábojov

V praxi dôležitejšie ako magnetické pole bodového náboja je pole súboru pohybujúcich sa nábojov, teda magnetické pole elektrického prúdu. Prúd však nemusí byť lokalizovaný na tenký prúdovodič (drôt), ale môže mať priestorový charakter. Predpokladajme teda, že v priestore sa pohybujú identické náboje q rozložené s koncentráciou n, takže v nekonečne malom objeme $\mathrm{d}\tau$ je nekonečne malý náboj $\mathrm{d}Q = nq\mathrm{d}\tau$, ktorý sa v priestore pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ (*obr. 6.7*). Nekonečne malý príspevok k magnetickej indukcii d$\boldsymbol{B}$, ktorý tento náboj budí vo vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}$ v bode P, musí byť podľa princípu superpozície daný formálne rovnakým výrazom ako je (6.5), teda

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}Q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$



Obr. 6.7

Ak uvážime, že

$$\mathrm{d}Q\boldsymbol{v} = nq\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{J}\mathrm{d}\tau$$

kde $\boldsymbol{J}$ je prúdová hustota, možno poslednému výrazu dať tvar

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}\tau \tag{6.12}$$

Vzťah (6.12) môže aspoň formálne poslúžiť k výpočtu magnetických polí za predpokladu, že je zadaná prúdová hustota ako funkcia polohy v priestore. Výraz (6.12) treba integrovať cez celý objem τ, v ktorom prúdy tečú. Takto dostaneme výraz

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \mathrm{d}\tau \tag{6.13}$$

Vo väčšine praktických prípadov však je výpočet integrálu vo výraze (6.13) veľmi zložitý.

6.1.3 Biotov-Savartov-Laplaceov zákon

Elektrické prúdy, ktoré produkujú magnetické polia, často tečú relatívne tenkými vodičmi (drôtmi), ktoré sú v inak nevodivom prostredí nejakým spôsobom rozložené, veľmi často navinuté do tvaru jednovrstvových husto vinutých cievok (solenoidov) alebo toroidálnych cievok. Magnetické polia v okolí prúdovodičov experimentálne bezprostredne po Oerstedovom objave v roku 1820 skúmali J. B. Biot a F. Savart a na základe svojich meraní spolu s P. S. Laplaceom sformulovali zákon, podľa ktorého magnetická indukcia, ktorú budí dostatočne krátka časť prúdovodiča dĺžky Δl s prúdom I vytvára vo vzdialenosti r ($r \gg \Delta l$) magnetickú indukciu veľkosti

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\Delta l \sin\varphi}{r^2} \tag{6.14}$$

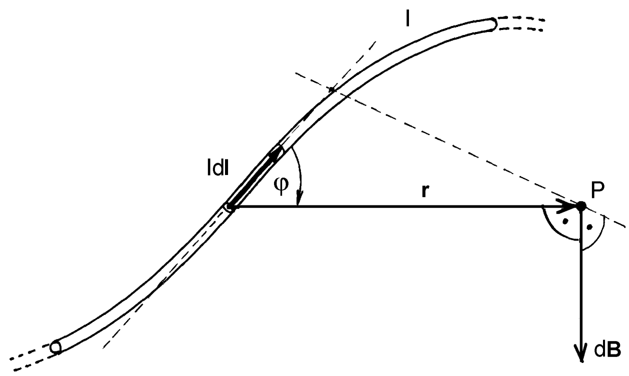
kde φ je uhol medzi smerom r a smerom prúdového elementu $I\Delta l$. Pri takom vyjadrení magnetickej indukcie sa smer vektora $\Delta\boldsymbol{B}$ určuje ťažkopádne, napr. pomocou pravidla pravej ruky. Ak však využijeme možnosti, ktoré poskytuje diferenciálny a vektorový počet, možno vzťah (6.14) napísať pre elementárne malý príspevok d$\boldsymbol{B}$ k magnetickej indukcii od nekonečne krátkeho prúdového elementu $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ (vektor d$\boldsymbol{l}$ má smer pohybu kladných nábojov) vo vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}$ (pozri *obr. 6.8*). Biotov-Savartov-Laplaceov zákon, ktorý udáva vektorový príspevok d$\boldsymbol{B}$ k magnetickej indukcii možno napísať v tvare

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}} \tag{6.15}$$

Prúdový element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ je časťou nejakého uzavretého prúdového obvodu, v ktorom sú zaradené zdroje elektromotorických napätí udržujúce prúd v obvode, ale žiadne kondenzátory. Prípad s kondenzátorom vyžaduje zvláštny prístup a bude predmetom našich úvah neskôr. Ak chceme vypočítať výslednú magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$ od celého uzavretého obvodu, treba príspevky (6.15) integrovať pozdĺž celého obvodu. Výsledná indukcia bude potom daná výrazom

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{l} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{6.16}$$

kde l je uzavretá čiara pozdĺž prúdového obvodu. Treba si všimnúť, že výraz (6.15) a následne aj (6.16) plynú zo všeobecnejších výrazov (6.12) a (6.13) pre magnetickú indukciu spojitého rozloženia prúdov s prúdovou hustotou $\boldsymbol{J}$. Ak prúdové pole obmedzíme na vnútrajšok tenkého vodiča prierezu S, potom elementárne objemy $\mathrm{d}\tau$ na vodiči môžeme vytvoriť ako krátke úseky dĺžky dl pozdĺž vodiča, teda



Obr. 6.8

$$\mathrm{d}\tau = S\mathrm{d}l$$

pričom sa predpokladá, že prúdová hustota na priereze vodiča je konštantná, takže prúd vo vodiči

$$I = JS$$

Na základe uvedeného možno vo výraze (6.12) urobiť zámenu

$$\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\tau \Leftrightarrow I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

a tým prejde na tvar (6.15).

Biotov-Savartov-Laplaceov zákon umožňuje vypočítať magnetickú indukciu v okolí vodičov, ktorými preteká elektrický prúd. V samotnom vodiči, kde pole je tiež nenulové, tento zákon zlyhá. Tam treba použiť iný prístup.

6.1.4 Magnetická indukcia v okolí nekonečne dlhého priameho prúdovodiča

Predovšetkým treba povedať, že nekonečne dlhý priamy prúdovodič je z praktického hľadiska fikcia, pretože každý prúdový obvod musí byť uzavretý. Môžu však existovať obvody, v ktorých nejaký relatívne dlhý úsek je priamočiary a nás môže zaujímať magnetické pole v jeho blízkom okolí. V tom prípade môžeme použiť priblíženie nekonečne dlhého prúdovodiča. Úloha je však dôležitá aj z iného teoretického hľadiska, pretože jej riešenie dokazuje, že magnetické indukčné čiary sú uzavreté a my ho použijeme pri formulácii jednej zo základných rovníc magnetostatiky.

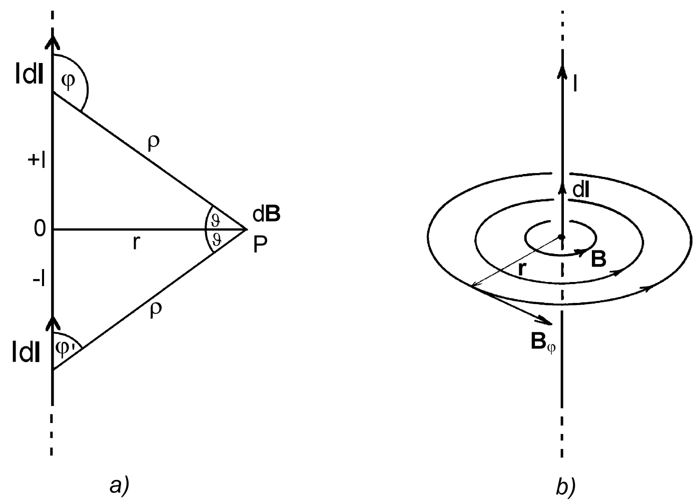
Predpokladajme teda, že v nekonečne dlhom tenkom a priamom prúdovodiči tečie stály elektrický prúd I (pozri *obr. 6.9a*). Našou úlohou je vypočítať veľkosť a smer magnetickej indukcie v kolmej radiálnej vzdialenosti r od prúdovodiča.

Na vodiči vo vzdialenostiach $\pm l$ zvolíme dva prúdové elementy $I\mathrm{d}l$, ktoré sú v rovnakej vzdialenosti ρ od bodu P, v ktorom treba určiť magnetickú indukciu. Príspevok $\mathrm{d}B'$ od horného prúdového elementu má veľkosť

$$\mathrm{d}\,B' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin\varphi}{\rho^2}$$

Z obrázka plynie, že $\varphi = \vartheta + \pi/2$, takže platí $\sin\varphi = \sin\varphi' = \cos\vartheta$. Smer vektora $\mathrm{d}\boldsymbol{B}'$ v bode P je za nákresňu. V dôsledku symetrie druhý príspevok $\mathrm{d}B''$ od spodného elementu má rovnakú veľkosť a vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{B}''$ v bode P smeruje tiež za nákresňu. Príspevky sa teda sčítavajú a výsledný príspevok od dvoch elementov má veľkosť

$$\mathrm{d}B = \mathrm{d}B' + \mathrm{d}B'' = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{\mathrm{d}\,l \cos\vartheta}{\rho^2} \tag{6.17}$$



Obr. 6.9

Takéto elementy treba pozdĺž prúdovodiča integrovať od 0 po ∞. Je však výhodné integrovať nie cez dĺžku l, ale cez uhol ϑ od 0 po $\pi/2$. Preto dĺžku

$$l = r \operatorname{tg} \vartheta$$

diferencujeme podľa ϑ a dostaneme

$$\mathrm{d}\,l = \frac{r}{\cos^2\vartheta}\mathrm{d}\vartheta$$

Ďalej vyjadríme

$$\rho = \frac{r}{\cos\vartheta}$$

a výrazy pre dl a ρ dosadíme do (6.17). Pre dB dostaneme výraz

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$$

ktorý závisí iba od ϑ. Po jeho integrácii od 0 po π/2 dostaneme

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Na základe uvedených úvah môžeme prehlásiť, že vektor magnetickej indukcie od nekonečne dlhého priameho prúdovodiča leží v rovine kolmej na prúdovodič, jeho veľkosť závisí iba od prúdu I a vzdialenosti r podľa vzťahu

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{6.18}$$

Na kružniciach polomeru r má B_φ konštantnú hodnotu a vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}_\varphi$ má azimutálny smer dotyčnice ku kružnici v smere vektorového súčinu d$\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}$ (pozri *obr. 6.9b*). Všetky sústredné kružnice okolo prúdovodiča sú teda uzavreté indukčné čiary.

Vo vnútri prúdovodiča je tiež nenulové magnetické pole, ktoré však nemožno vypočítať priamou aplikáciou Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona.

Ďalšie aplikácie Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona uvedieme v odseku 6.1.9.

6.1.5 Divergencia magnetického poľa.

Nežriedlovosť magnetického poľa ako jedna z jeho základných vlastností

Pri štúdiu vlastností elektrostatických polí sme sa po rozsiahlych analýzach dopracovali k poznaniu, že vlastnosti poľa sú určené jeho divergenciou (Gaussov zákon) a rotáciou (nulovou prácou po uzavretej dráhe). Použime tieto princípy aj pre magnetické pole a vypočítajme jeho divergenciu s tým, že využijeme výraz (6.5) pre magnetickú indukciu a princíp superpozície. Pre naše ďalšie účely napíšeme výraz (6.5) pre vektor $\boldsymbol{B}$ v trochu neobvyklom tvare

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q\boldsymbol{v} \times \left(-\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) \tag{6.19}$$

čo je skutočne pravda, pretože

$$-\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\nabla\frac{1}{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{6.20}$$

[pozri výraz (2.106)]. Divergencia vektora $\boldsymbol{B}$ sa potom dá napísať v tvare

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\operatorname{div}\left[\boldsymbol{v}\times\left(-\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)\right]$$

Ak na tento výraz použijeme operátorovú identitu

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}.\operatorname{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}.\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$$

(pozri tabuľku 2), potom prejde na tvar

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}.\operatorname{rot}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}.\operatorname{rot}\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) \tag{6.21}$$

Rotácia gradientu ľubovoľnej skalárnej funkcie sa rovná nule [pozri výraz (2.156)], teda druhý člen v zátvorke výrazu (6.21) sa rovná nule. Hodnotu divergencie $\boldsymbol{B}$ určuje teda súčin $\boldsymbol{r}.\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$. Ak rozložíme rýchlosť $\boldsymbol{v}$ na zložku $\boldsymbol{v}_{\parallel}$ pozdĺž vektora $\boldsymbol{r}$ a zložku $\boldsymbol{v}_{\perp}$ priečnu k $\boldsymbol{r}$ vidíme, že

$$\boldsymbol{r}.\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}.\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}_{\parallel} + \boldsymbol{v}_{\perp}) = \boldsymbol{r}.\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_{\parallel} + \boldsymbol{r}.\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_{\perp} = 0$$

pretože $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_{\parallel} = 0$ a $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_{\perp}$ je kolmá na $\boldsymbol{r}$. Zátvorka vo výraze (6.21) sa teda rovná nule, takže môžeme prehlásiť, že **divergencia vektora magnetickej indukcie pohybujúceho sa bodového náboja sa rovná nule** ($\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$). Na základe princípu superpozície možno toto tvrdenie rozšíriť na ľubovoľný systém nábojov a tvrdiť, že divergencia každého magnetického poľa sa rovná nule, čo okrem toho platí nielen pre statické magnetické polia, ale dokonca aj pre polia závislé od času. Teda

$$\boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0} \tag{6.22}$$

vždy a všade – aj vo vnútri atómov! Rovnica (6.22) je jednou zo základných rovníc elektromagnetického poľa, jednou z Maxwellových rovníc v diferenciálnom tvare vo svojej konečnej podobe. Skutočnosť, že magnetické pole má nulovú divergenciu znamená, že neexistujú analogické zdroje či žriedla tohto poľa, ako sú elektrické náboje zdrojmi a žriedlami elektrického poľa. V tridsiatych rokoch dvadsiateho storočia anglický teoretický fyzik Paul Adrien Maurice Dirac (1902 – 1984) vyslovil podivnú hypotézu o existencii "magnetického náboja" alebo "magnetického monopólu" v snahe o symetrizáciu rovníc elektromagnetického poľa[1]. Veľké fyzikálne výskumné centrá na svete sa desiatky rokov snažili o experimentálny dôkaz existencie "magnetického monopólu", avšak všetky tieto pokusy skončili s neúspechom. Existencia magnetického monopólu by nevyhnutne viedla k zásadnej revízii dnešnej elektromagnetickej teórie.

---

[1] Dirac, P. A. M.: Proc. Roy. Soc. A **133**, 60 (1931)
Dirac, P. A. M.: Phys. Rev. **74**, 817 (1948)

Existuje ešte iný spôsob dôkazu toho, že magnetické pole má nulovú divergenciu, pri ktorom možno využiť vzťah (6.13), a netreba využívať princíp superpozície. Naviac poskytuje výraz pre ďalšiu, ešte nezavedenú veličinu. Výraz (6.13) s využitím (6.20) možno napísať v tvare

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \left(\nabla \frac{1}{r} \times \boldsymbol{J}\right) \mathrm{d}\,\tau = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \nabla \times \frac{\boldsymbol{J}}{r} \mathrm{d}\,\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_\tau \frac{\boldsymbol{J}}{r} \mathrm{d}\,\tau = \\ &= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\boldsymbol{J}}{r} \mathrm{d}\,\tau = \nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\end{aligned} \tag{6.23}$$

kde bola využitá skutočnosť, že vo vodivom prostredí, kde $\boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{E}$, je rot $\boldsymbol{J} = 0$. Podľa výrazu (6.23) je vektor magnetickej indukcie daný rotáciou nejakého nového vektora

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\boldsymbol{J}}{r} \mathrm{d}\,\tau \qquad [\mathrm{Wb.m^{-1} = T.m}] \tag{6.24}$$

závislého iba od prúdovej hustoty $\boldsymbol{J}$ a jej rozloženia v priestore. Tento vektor sa nazýva **vektorový potenciál** $\boldsymbol{A}$ a má podobný význam ako skalárny potenciál V v elektrickom poli. Výsledkom našich úvah sú dve závažné skutočnosti:

1. Magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ je vždy rotáciou ďalšieho vektora $\boldsymbol{A}$, teda

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{6.25}$$

Ak vieme vypočítať vektor $\boldsymbol{A}$ pomocou vzťahu (6.24), čo je však skôr výnimočný prípad, môžeme z neho pomocou vzťahu (6.25) vypočítať vektor $\boldsymbol{B}$.

2. Ak vždy platí výraz (6.25), potom div $\boldsymbol{B} = 0$, pretože pre ľubovoľný vektor platí

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla.(\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

[pozri výraz (2.157)]. K vektorovému potenciálu sa vrátime v osobitnom odseku.

Skutočnosť, že magnetické pole má nulovú divergenciu alebo inak povedané, že nemá "žriedla" (neexistujú magnetické monopóly), logicky vedie k záveru, že pole vektora magnetickej indukcie má charakter vírového poľa. Jeho rotácia bude vo všeobecnosti nenulová, čo dokážeme neskôr. Rovnicu (6.22) môžeme integrovať cez ľubovoľný objem τ, teda

$$\int_\tau \mathrm{div}\,\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\,\tau = 0$$

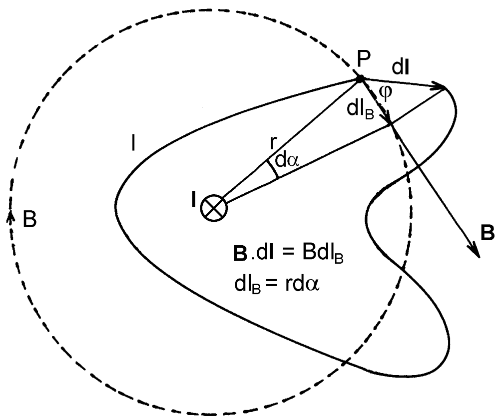
a aplikovať na ňu Gaussovu vetu. Dostaneme tak integrálny prepis základnej rovnice magnetického poľa (6.22) v tvare

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = 0} \tag{6.26}$$

André Marie AMPÈRE
(1775 Polémieux pri Lyone – 1836 Marseille)

kde S je plocha, ktorá uzatvára objem τ. Z matematického hľadiska má výraz (6.26) význam toku vektorovej veličiny $\boldsymbol{B}$ z objemu τ uzavretou plochou S.

Tento tok je však v každom prípade nulový. Pokiaľ $\boldsymbol{B} \neq 0$, je to možné iba vtedy, ak tok do vnútra objemu sa rovná toku von. Z hľadiska magnetických indukčných čiar to znamená, že tieto čiary musia byť vždy uzavreté, o čom sa presvedčíme pri výpočte rôznych magnetických polí. Výraz (6.26) sa pre svoju formálnu podobu na Gaussov zákon pre elektrické pole nazýva tiež **Gaussov zákon v magnetizme**.



Obr. 6.10

6.1.6 Ampérov zákon. Rotácia magnetického poľa.

Vírovosť magnetického poľa ako jedna z jeho základných vlastností

Teraz sme pripravení odvodiť druhý základný zákon magnetostatiky, ktorý súvisí s účinkom vektora magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ na uzavretej dráhe. Predpokladajme, že v priestore sa nachádza nekonečný priamy prúdovodič s prúdom I. Zvoľme v priečnej rovine ľubovoľnú uzavretú dráhu l, ktorá obopína vodič (pozri *obr. 6.10*) a položme si otázku, aká je hodnota integrálu

$$\oint_l \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

po tejto dráhe? Podobná otázka o hodnote integrálu $\oint \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ v elektrickom poli poskytla dôležité teoretické informácie o vlastnostiach toho poľa. Na obrázku je zvolený bod vo vzdialenosti r od vodiča, v ktorom je zvolený element dráhy d$\boldsymbol{l}$, ktorý v danom bode s vektorom $\boldsymbol{B}$ zviera uhol φ, takže

$$\boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = B\mathrm{d}l \cos \varphi = B\mathrm{d}l_B$$

kde $\mathrm{d}l_B = \mathrm{d}l\cos\varphi$ je priemet elementu d$\boldsymbol{l}$ do smeru magnetickej indukcie, teda na kruhovú indukčnú čiaru. Ak uvážime, že v danom bode P je veľkosť magnetickej indukcie daná vzťahom (6.18), môžeme posledný výraz napísať v tvare

$$\boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\mathrm{d}l_B}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\alpha$$

Takýto výraz môžeme napísať pre ľubovoľný element dráhy, pričom je dôležité všimnúť si, že ľubovoľný súčin $\boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ na dráhe nezávisí od polomeru r, na ktorom sa element nachádza, ale je úmerný uhlovému elementu $\mathrm{d}\alpha$, pod ktorým vidieť element d$\boldsymbol{l}$ z miesta, kde sa nachádza prúdovodič. Integrál dráhových príspevkov $\boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ je úmerný integrálnemu súčtu $\mathrm{d}\alpha$ od 0 po 2π, teda

$$\oint_l \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha = \mu_0 I \tag{6.27}$$

Dráhový integrál magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ po uzavretej dráhe, na rozdiel od podobného integrálu v elektrickom poli, sa teda nerovná nule, ale je úmerný tomu prúdu, ktorý dráha obopína. Ak by dráha neobopínala žiadny prúd, uvažovaný integrál by sa rovnal nule, o čom sa čitateľ môže ľahko presvedčiť. Naopak, ak dráha obopína n prúdov I_1 až I_n, potom s využitím princípu superpozície môžeme očakávať, že dráhový integrál bude úmerný algebraickému súčtu týchto prúdov, teda

$$\boxed{\oint_l \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\sum_{k=1}^{n} I_k} \tag{6.28}$$

Súvis dráhového integrálu s obopnutými prúdmi (6.28) je jedna z možných formulácií **Ampérovho zákona** (integrálny tvar). Výraz možno zovšeobecniť na prúdy, ktoré netečú diskrétnymi prúdovodičmi, ale sú rozložené v priestore spojito s prúdovou hustotou $\boldsymbol{J}$ ako funkciou polohy v priestore. Ak v prúdovom poli $\boldsymbol{J}$ zvolíme uzavretú čiaru l, ktorá obopína plochu S, potom dráhový integrál $\boldsymbol{B}$ po uzavretej dráhe l musí byť, s ohľadom na výraz (6.28), úmerný prúdu

$$I = \int_S \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ktorý dráha l obopína. Môžeme teda výraz pre Ampérov zákon napísať aj v tvare

$$\oint_l \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\int_S \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{6.29}$$

Ak na ľavej strane posledného výrazu aplikujeme Stokesovu vetu [pozri výraz (2.136)], prejde výraz na tvar

$$\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \mu_0\boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Integračná plocha S je rovnaká na obidvoch stranách rovnice a musí spĺňať jedinú podmienku, že je "pripnutá" na svoju hraničnú čiaru l, inak je ľubovoľná. Z toho plynie, že integrandy rovnice musia byť rovnaké, teda musí platiť

$$\boxed{\text{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}} \tag{6.30}$$

Rovnica (6.30) je Ampérov zákon v diferenciálnom tvare a vyjadruje lokálnu vlastnosť magnetického poľa – jeho vírovosť. Všade tam, kde tečú prúdy, vytvára magnetické pole víry. V takomto poli nemožno vo všeobecnosti definovať skalárnu funkciu podobnú skalárnemu potenciálu v elektrickom poli, z ktorej by sa magnetická indukcia počítala ako záporný gradient. Platí totiž, že rot grad = 0 pre každú skalárnu funkciu, čo by viedlo k sporu s výrazom (6.30). Skalárny magnetický potenciál V_m však možno zaviesť všade tam, kde netečú prúdy ($\boldsymbol{J}$ = 0, resp. I = 0). V tých miestach $\boldsymbol{B} = -\text{grad}\ V_m$. Čitateľovi v tejto súvislosti odporúčam riešiť úlohu 162, z ktorej sa dozvie, ako vyzerá V_m pre jednoduchý prúdový okruh. Pre výpočet magnetickej indukcie sa však skalárny potenciál využíva zriedkavo.

Veličinou zásadnejšieho významu v magnetickom poli je ale vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$, ktorého vyjadrenie (6.24) sme získali ako "medziprodukt" pri dôkaze nulovej divergencie magnetického poľa. Venujme teraz pozornosť niektorým jeho vlastnostiam!

6.1.7 Vektorový potenciál

Spôsob, ktorým sme získali výraz (6.24) možno nazvať "experimentálny", pretože jeho základom je experimentom potvrdený výraz pre magnetickú silu (6.1), ktorú môžete zmerať napríklad z pohybu elektrónu v obrazovke Vášho televízora. V teórii elektromagnetického poľa sa často postupuje naopak, že sa postulujú základné rovnice poľa (Maxwellove rovnice) a skúmajú sa ich dôsledky. Takým spôsobom sa postuluje aj rovnica

$$\text{div}\,\boldsymbol{B} = 0$$

a skúma sa, aké má vlastnosti pole vektora $\boldsymbol{B}$. Ak rovnica platí všeobecne, potom $\boldsymbol{B}$ musí byť rotáciou iného, už spomínaného vektora $\boldsymbol{A}$, teda

$$\boldsymbol{B} = \text{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{6.31}$$

pretože

$$\text{div}\,(\text{rot}\,\boldsymbol{A}) = 0$$

vždy. Okrem toho podľa vzťahu (6.30) musí platiť, že

$$\text{rot}\,\boldsymbol{B} = \text{rot}\,(\text{rot}\,\boldsymbol{A}) = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{6.32}$$

Ak uvážime operátorovú identitu

$$\text{rot rot} \equiv \text{grad div} - \Delta$$

(pozri tabuľku 2), tak rovnicu (6.32) môžeme prepísať do tvaru

$$\text{grad}\,(\text{div}\,\boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{J} \tag{6.33}$$

Z matematického hľadiska je to zložitá parciálna diferenciálna rovnica pre neznámy vektor $\boldsymbol{A}$ pri známom rozložení prúdovej hustoty $\boldsymbol{J}$. Bez ujmy na všeobecnosti možno rovnicu zjednodušiť. Ak uvážime, že $\boldsymbol{A}$ je zdrojom vektora $\boldsymbol{B}$ prostredníctvom vzťahu (6.31), potom v určení $\boldsymbol{A}$ je veľká voľnosť bez toho, aby sa zmenilo $\boldsymbol{B}$. K vektoru $\boldsymbol{A}$ možno napr. pripočítať ľubovoľný konštantný vektor a rotácia výsledku, teda $\boldsymbol{B}$, sa nezmení (spomeňte si na ľubovoľnú aditívnu konštantu pri skalárnom elektrickom potenciáli). S vektorovým potenciálom si môžeme dovoliť ešte viac; môžeme k nemu dokonca pridať gradient ľubovoľnej skalárnej funkcie Λ a jeho rotácia zostane rovnaká, t. j.

$$\boldsymbol{B} = \text{rot}\,(\boldsymbol{A} + \text{grad}\,\Lambda) = \text{rot}\,\boldsymbol{A} + \text{rot grad}\,\Lambda = \text{rot}\,\boldsymbol{A}$$

pretože rot grad $\Lambda = 0$. Takáto veľká voľnosť vo výbere $\boldsymbol{A}$ určite ho dovoľuje vybrať tak, aby bola splnená podmienka

$$\text{div}\,\boldsymbol{A} = 0 \text{ [1]} \tag{6.34}$$

Ak je podmienka (6.34) splnená, potom sa rovnica (6.33) zjednoduší na tvar

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{J} \tag{6.35}$$

Rovnica (6.35) je parciálna diferenciálna rovnica Poissonovho typu pre vektorovú veličinu $\boldsymbol{A}$ (v skutočnosti tri diferenciálne rovnice pre tri zložky vektora $\boldsymbol{A}$), podobná rovnici (2.154b) pre skalárny potenciál V. Môžeme očakávať, že ak výraz (2.78) je riešením rovnice (2.154b), bude riešením (6.35) formálne rovnaký výraz pre $\boldsymbol{A}$, menovite

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\boldsymbol{J}}{r}\,\text{d}\,\tau \tag{6.36}$$

Lenže výraz (6.36) pre nás nie je novým, pretože sme ho získali už pri dôkaze nulovej divergencie magnetického poľa [pozri vzťah (6.24)].

Ak elektrický prúd I tečie uzavretým prúdovodičom malého prierezu S, dĺžky l s konštantnou prúdovou hustotou $\boldsymbol{J}$, potom na prúdovodiči možno voliť prúdové elementy $I\text{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{J}\text{d}\tau$ a výraz (6.36) pre vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$ v okolí vodiča prejde na tvar

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l \frac{\text{d}\boldsymbol{l}}{r} \tag{6.37}$$

a napr. v zložkách pravouhlého súradnicového systému

$$A_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l \frac{\text{d}\,x}{r} \qquad A_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l \frac{\text{d}\,y}{r} \qquad A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l \frac{\text{d}\,z}{r} \tag{6.38}$$

[1] Ak by bola div $\boldsymbol{A} \neq 0$, potom nevírový vektor $\boldsymbol{A}$ by sa skladal z vírovej zložky $\boldsymbol{A}'$ a nevírovej (žriedlovej) zložky $\boldsymbol{A}''$, teda $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}''$. Potom by ale platilo: div $\boldsymbol{A}' = 0$ a rot $\boldsymbol{A}'' = 0$, a tak $\boldsymbol{B} = \text{rot}\,\boldsymbol{A}'$. Zložka $\boldsymbol{A}''$ by nevplývala na $\boldsymbol{B}$, teda by bolo možné položiť $\boldsymbol{A}'' = 0$ a tak teda platí: div $\boldsymbol{A}$ = div $\boldsymbol{A}' = 0$.

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Nakoniec nám zostáva odpovedať na dôležitú otázku: Aký je vlastne význam vektorového potenciálu. Ponúka sa odpoveď, že rovnaký, ako je význam skalárneho potenciálu – pomocou neho vypočítať magnetickú indukciu. Avšak $\boldsymbol{A}$ je vektor, teda nemá tú výhodu akú má skalár V, naviac výrazy pre vektorový potenciál sú nezriedka zložitejšie ako výrazy pre samotnú magnetickú indukciu. Vektorový potenciál môže mať dokonca nenulovú hodnotu tam, kde samotná magnetická indukcia je nulová (napr. v okolí nekonečne dlhého solenoidu – pozri úlohu 178). Teda ponúkaná odpoveď znie dosť nepresvedčivo. Avšak existuje veľmi dôležitá úloha, ktorej jednoduché riešenie bez vektorového, alebo aspoň skalárneho magnetického potenciálu si neviem predstaviť. Je to úloha o magnetickej indukcii v okolí veľmi malej prúdovej slučky (napr. podľa klasickej predstavy magnetická indukcia od cirkulujúceho elektrónu v atóme). Vektorový potenciál pomáha hlavne v zložitejších úlohách magnetických polí, umožňuje prehľadnejší prístup k energetickým otázkam magnetických polí. Jeho význam sa ocení hlavne v časovo premenných elektromagnetických poliach a má priamy fyzikálny význam v rôznych problémoch kvantovej teórie.[1] Vektorový potenciál je dôležitou veličinou elektromagnetickej teórie.

6.1.8 Vektorový potenciál priameho nekonečného prúdovodiča

S akými záludnosťami sa možno stretnúť pri výpočte vektorového potenciálu budeme ilustrovať na nekonečne dlhom priamom prúdovodiči. Predpokladajme, že prúdovodič má polomer a, a tečie ním prúd I s konštantnou prúdovou hustotou $J_z = I/(\pi a^2)$ v smere osi z pravouhlého súradnicového systému x, y, z (pozri *obr. 6.11a*). Pokúsime sa o výpočet vektorového potenciálu vo vzdialenosti

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

od osi prúdovodiča najprv pre $r > a$. Pri zvolenom smere prúdu má vektorový potenciál nenulovú iba zložku A_z v smere osi z, zvyšné zložky $A_x = A_y = 0$. K výpočtu A_z sa ponúka tretí z výrazov (6.38), v ktorom treba integrovať elementy dz od $-\infty$ po $+\infty$, teda

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Takýto integrál diverguje, to nie je schodná cesta k výsledku.

Inú možnosť ponúka priamo rovnica (6.35), ktorá pre jedinú zložku vektora $\boldsymbol{A}$ prejde na tvar

$$\Delta A_z = -\mu_0 J_z = -\mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \tag{6.39}$$

[1] Pozri napr. Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: Feynmanove prednášky z fyziky 3, str. 333, Alfa Bratislava 1988

vo vnútri prúdovodiča, teda pre $r < a$. Vzhľadom na to, že problém má osovú symetriu, je vhodné ho riešiť v cylindrických súradniciach r, φ, z. Zložka A_z závisí iba od r, preto naň pôsobí iba časť Laplaceovho operátora závislá od r a rovnica nadobudne tvar (pozri tabuľku 23)

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\left(r\frac{\mathrm{d}\,A_z}{\mathrm{d}\,r}\right) = -\mu_0\frac{I}{\pi a^2} \tag{6.40}$$

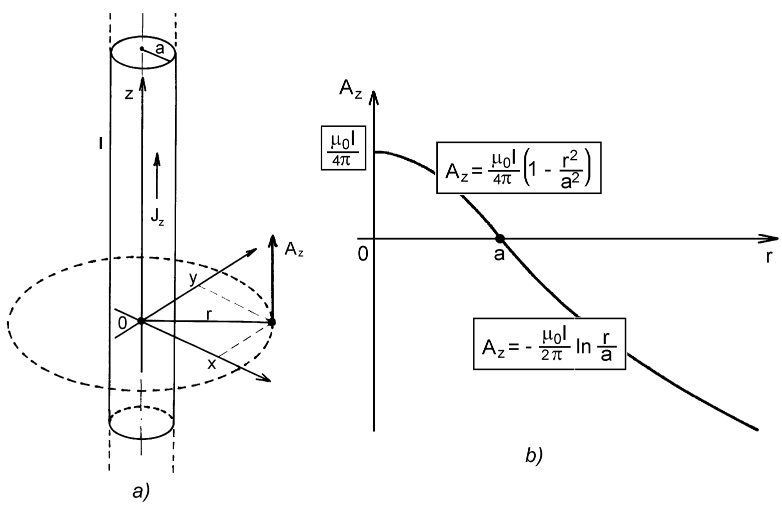
Po vynásobení s r a prvej integrácii dostaneme výraz

$$r\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}r} = -\mu_0\frac{Ir^2}{2\pi a^2}$$

Integračnú konštantu sme položili rovnú nule, pretože výraz musí platiť aj pre $r = 0$. Vydelením s r a druhou integráciou dostaneme výraz pre A_z vo vnútri vodiča v tvare

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) \tag{6.41}$$

pričom druhá integračná konštanta bola zvolená tak, že $A_z = 0$ pre $r = a$.



Obr. 6.11

Pre okolie vodiča ($r > a$) prejde rovnica (6.40) na tvar

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\left(r\frac{\mathrm{d}\,A_z}{\mathrm{d}\,r}\right) = 0 \tag{6.42}$$

vynásobením s r a po prvej integrácii dostaneme výraz

$$r\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}r}=C_1$$

kde C_1 je integračná konštanta. Vydelením s r a ďalšou integráciou posledného výrazu dostaneme

$$A_z = C_1 \ln r + C_2 \tag{6.43}$$

kde C_2 je ďalšia integračná konštanta. Integračné konštanty C_1 a C_2 treba zvoliť tak, aby vektorový potenciál a tým aj magnetická indukcia boli spojité na povrchu prúdovodiča. To vyžaduje, aby platilo

$$C_2 = -\,C_1 \ln a$$

čím výraz (6.43) nadobudne tvar

$$A_z = C_1 \ln\frac{r}{a} \tag{6.44}$$

Z výrazu (6.44) vidieť, že pre $r = a$ je $A_z = 0$, výraz (6.41) pre $r = a$ dáva tiež nulovú hodnotu vektorového potenciálu, teda A_z je na povrchu prúdovodiča spojitý. Ak tam má byť spojitá aj magnetická indukcia, potom pri $r = a$ musí byť spojitá aj prvá derivácia A_z. To vyžaduje voliť $C_1 = -\mu_0 I/(2\pi)$ a výraz (6.44) nadobudne konečný tvar pre okolie vodiča

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r}{a} \tag{6.45}$$

Ak zhrnieme naše poznatky o vektorovom potenciáli priameho veľmi dlhého prúdu vidíme, že vektorový potenciál má smer osi prúdu. Na kružniciach polomeru r koncentrických s osou prúdu má pre $r < a$ rovnaké hodnoty dané výrazom (6.41), a pre $r > a$ výrazom (6.45). Čitateľ sa môže presvedčiť, že výpočet $\mathrm{rot}(A_z\boldsymbol{e}_z)$ s využitím výrazu (6.45) vedie na výraz (6.18) pre magnetickú indukciu v okolí prúdovodiča. Na druhej strane, vo vnútri vodiča je magnetická indukcia daná rotáciou výrazu (6.41), teda

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\left(A_z\boldsymbol{e}_z\right) = -\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{6.46}$$

Všimnite si tiež, že výraz (6.45) je formálne podobný výrazu pre skalárny potenciál

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{a}$$

v okolí nekonečne dlhého priamkového náboja, ktorý bol odvodený v elektrostatike [pozri výraz (2.79)]. Analogicky s výrazom (6.41) možno tiež spätne pre skalárny potenciál vo vnútri nekonečne dlhého valca polomeru a nabitého objemovým nábojom $\rho = \lambda/(\pi a^2)$ napísať výraz

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{\rho a^2}{4\varepsilon_0}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

Zložka vektorového potenciálu A_z má konštantné hodnoty na kružniciach ktoré splývajú s magnetickými indukčnými čiarami (pozri *obr. 6.11a*). Radiálna závislosť $A_z(r)$ je graficky znázornená na *obr. 6.11b*.

6.1.9 Výpočet niektorých dôležitých magnetických polí

Na výpočet magnetických polí sme v predchádzajúcich odsekoch vypracovali niekoľko metód, ktoré v krátkosti zrekapitulujeme. Sú to:

a) **Biotov-Savartov-Laplaceov zákon** (BSL zákon), ktorý dáva možnosť vypočítať magnetickú indukciu prúdov, ktoré tečú v objeme τ s prúdovou hustotou $\boldsymbol{J}$ [výraz (6.13)] alebo prúdy I tečú v prúdovodičoch [výraz (6.15)]. V poslednom prípade nemožno počítať magnetickú indukciu vo vnútri prúdovodiča, o ktorom sa predpokladá, že je nekonečne tenký.

b) **Ampérov zákon** v tvare (6.28) alebo (6.29) umožňuje riešiť niektoré, na prvý pohľad zložité úlohy za predpokladu, že pole má vysoký stupeň symetrie a je známy priebeh magnetických indukčných čiar. V tomto ohľade je aplikácia Ampérovho zákona analogická aplikácii Gaussovho zákona pri výpočte elektrických polí. Teoreticky je prostriedkom pre výpočet polí aj Ampérov zákon v diferenciálnom tvare (6.30). V skutočnosti sú to ale tri zložité diferenciálne rovnice pre zložky vektora $\boldsymbol{B}$, pre ktoré treba zadať aj okrajové podmienky.

c) **Výpočet magnetických polí z vektorového potenciálu** daného rovnicami (6.35) alebo (6.36) až (6.38). Zo známeho vektorového potenciálu sa magnetická indukcia určí za pomoci výrazu (6.31).

d) **Skalárny magnetický potenciál**

$$V_m = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega \qquad [\mathrm{Wb.m^{-1} = T.m}] \tag{6.47a}$$

ktorý budí jednoduchý prúdový obvod (prúdová slučka) v bode P, z ktorého obvod vidíme pod priestorovým uhlom Ω. Magnetická indukcia v bode P sa vypočíta podľa vzťahu

$$\boldsymbol{B} = -\operatorname{grad} V_m \tag{6.47b}$$

Výrazy (6.47a,b) sú predmetom dôkazu v úlohe 162.

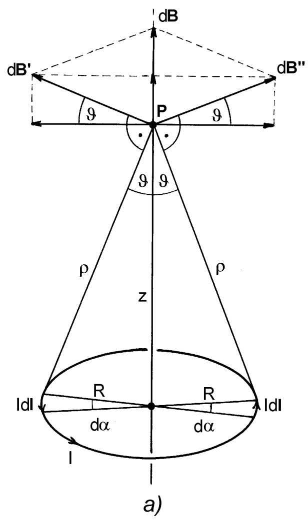
V ďalšom uvedieme niekoľko príkladov na výpočet magnetických polí prúdov jednoduchých konfigurácií:

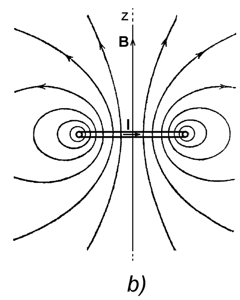
1. **Magnetické pole kruhového prúdu.** Dôležitým magnetickým poľom je pole budené prúdom I, ktorý tečie po obvode kružnice polomeru R. Prúdovú dráhu môže tvoriť jeden kruhový závit drôtu polomeru R, prípadne tenká prstencová cievka n závitov tenkého drôtu (účinný prúd je potom nI), alebo stredný prúd elektrónu na obežnej dráhe okolo jadra atómu. Ukazuje sa, že pole takého jednoduchého prúdu je vo všeobecnosti zložité. Magnetická indukcia je jednoduchá na osi závitu (pozri *obr. 6.12a*), kde ju možno určiť pomocou skalárneho alebo vektorového potenciálu, avšak najjednoduchšie priamou aplikáciou BSL zákona. Ak na priemere prúdovej kružnice zvolíme dva elementy $I\mathrm{d}l$, každý vo vzdialenosti ρ, v bode P na osi z vyvolá magnetickú indukciu veľkosti

$$\mathrm{d}B' = \mathrm{d}B'' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}l}{\rho^2}$$

Priemety týchto príspevkov na os z sa vektorovo sčítavajú a priemety do roviny kolmej na os z sa rušia. Výsledný príspevok

$$\mathrm{d}B = (\mathrm{d}B' + \mathrm{d}B'')\sin\vartheta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\mathrm{d}l}{\rho^2}\sin\vartheta$$





Obr. 6.12

smeruje pozdĺž osi z. Ak uvážime, že $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\alpha$ a $\rho = R/\sin\vartheta$, môžeme príspevky integrovať po polkružnici (uhol ϑ od 0 po π) a dostaneme

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\sin^3\vartheta}{R}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\vartheta \tag{6.48}$$

Magnetická indukcia je tu vyjadrená ako funkcia uhla ϑ, ktorý sa môže meniť od $\vartheta = 0$ ($z = +\infty$, $B = 0$) cez $\vartheta = \pi/2$ [$z = 0$, $B = \mu_0 I/(2R)$] po $\vartheta = \pi$ ($z = -\infty$, $B = 0$). Magnetická indukcia má všade smer kladnej osi z a predstavuje priamkovú magnetickú indukčnú čiaru od $-\infty$ po $+\infty$ (pozri *obr. 6.12b*). Ak uvážime, že

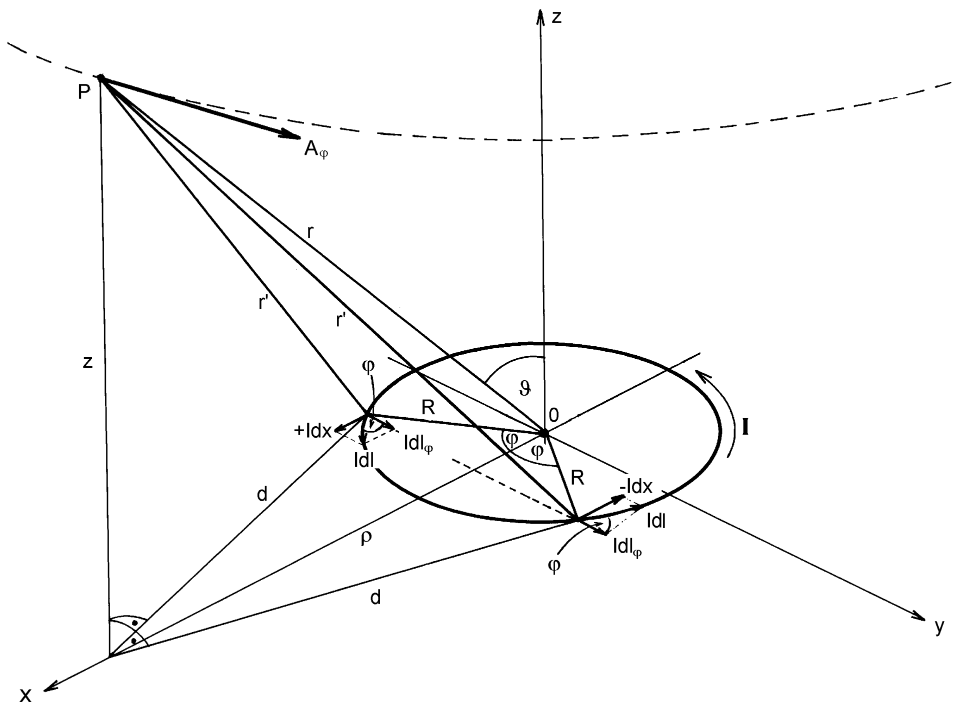
$$\sin\vartheta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

možno výraz (6.48) napísať v tvare

$$B = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{1}{\left(1 + \dfrac{z^2}{R^2}\right)^{3/2}}$$

V priestore mimo osi závitu je výpočet magnetickej indukcie zložitý a vedie na eliptické integrály (pozri úlohu 177). Pre ďalšie účely vypočítame však namiesto $\boldsymbol{B}$ vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$ v okolí kruhového závitu. Na *obr. 6.13* je znázornený závit s prúdom I a bod P, v ktorom chceme určiť vektorový potenciál. Dva vybrané prúdové elementy $I\mathrm{d}l$ sú v rovine závitu rozložené na zložky $I\mathrm{d}x$ a $I\mathrm{d}y = I\mathrm{d}l_\varphi$. Keďže vybrané elementy $I\mathrm{d}x$ sú protibežné, ich príspevok k vektorovému potenciálu je nulový a v bode P budú prispievať iba zložky $I\mathrm{d}l_\varphi$ každá s príspevkom

$$\mathrm{d}A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}l_\varphi}{r'}$$



Obr. 6.13

Výslednú hodnotu A_φ získame integráciou daných príspevkov pozdĺž celého závitu, teda

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l \frac{\mathrm{d}l_\varphi}{r'} \tag{6.49}$$

Hľadaný vektorový potenciál leží v paralelnej rovine nad závitom vo výške z a tvorí dotyčnicu ku kružnici s polomerom ρ. Na výpočet integrálu sú potrebné vyjadrenia

$$\mathrm{d}l_\varphi = R\cos\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$r' = \sqrt{d^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\varphi + z^2} \tag{6.50}$$

okrem toho položme

$$\varphi = \pi + 2\alpha$$

takže $\mathrm{d}\varphi = 2\mathrm{d}\alpha$ a $\cos\varphi = 2\sin^2\alpha - 1$. Po takýchto substitúciách výraz (6.49) prejde na tvar

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi \mathrm{d}\varphi}{\sqrt{R^2+\rho^2+z^2-2R\rho\cos\varphi}} =$$

$$= \frac{\mu_0 IR}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(2\sin^2\alpha - 1)\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{(R+\rho)^2+z^2-4R\rho\sin^2\alpha}}$$

Po ďalšej substitúcii

$$k^2 = \frac{4R\rho}{(R+\rho)^2+z^2}$$

prejde posledný integrál do tvaru

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 IR}{\pi}\frac{k}{\sqrt{4R\rho}}\int_0^{\pi/2}\frac{(2\sin^2\alpha-1)\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi k}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\mathrm{K}-\mathrm{E}\right] \tag{6.51}$$

kde

$$\mathrm{K} = K\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} \tag{6.52a}$$

je úplný eliptický integrál prvého druhu a

$$\mathrm{E} = E\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha \tag{6.52b}$$

je úplný eliptický integrál druhého druhu.[1] Numerické hodnoty integrálov (6.52) sú pre rôzne hodnoty parametra k tabuľované v špecializovaných matematických

[1] Pozri napr. Rektorys, K.: Přehled užité matematiky, str. 490, SNTL Praha 1981

príručkách.[1] Magnetická indukcia v okolí prúdového závitu sa "vypočíta" ako rotácia azimutálneho vektorového potenciálu A_φ daného výrazom (6.51). Magnetické pole v okolí závitu je znázornené na *obr. 6.12b*.

V praxi je veľmi dôležitý prípad výpočtu magnetickej indukcie vo veľkej vzdialenosti od závitu, alebo ak je polomer závitu veľmi malý, t. j. je splnená podmienka

$$R \ll r \tag{6.53}$$

Vtedy do výrazu (6.49) s ohľadom na podmienku (6.53) možno dosadiť

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\rho^2+z^2-2R\rho\cos\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi\sin\vartheta}} \approx$$
$$\approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{R}{r}\cos\varphi\sin\vartheta\right)$$

čím výraz (6.49) prejde na tvar

$$\begin{aligned} A_\varphi &= 2\frac{\mu_0 IR}{4\pi r}\int_0^\pi \left(1+\frac{R}{r}\sin\vartheta\cos\varphi\right)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{\mu_0 IR}{2\pi r}\int_0^\pi \left(\cos\varphi+\frac{R}{r}\sin\vartheta\cos^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I\pi R^2}{4\pi r^2}\sin\vartheta \end{aligned} \tag{6.54}$$

V poslednom výraze $\pi R^2 = S$ je plocha kruhu, ktorý je po obvode obtekaný prúdom I. Je vhodné túto plochu zaviesť ako plošný vektor $\boldsymbol{S}$**,** ktorý je kolmý na plochu S a smeruje na tú stranu plochy, z ktorej vidieť tiecť prúd proti smeru hodinových ručičiek. Vektorová veličina

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S} \qquad [\mathrm{A.m^2}] \tag{6.55}$$

sa nazýva **magnetický moment prúdovej slučky**. Uvažovaný vektorový potenciál má podľa vzťahu (6.54) tvar

$$\boldsymbol{A} = A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2}\sin\vartheta\,\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{6.56}$$

kde $\boldsymbol{e}_\varphi$ je jednotkový vektor v azimutálnom smere sférických súradníc, ϑ je polárny uhol a $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor bodu P vzhľadom na stred závitu.

Poučný je tiež výpočet skalárneho magnetického potenciálu v okolí malej prúdovej slučky (pozri *obr. 6.14*). Z bodu P vo vzdialenosti $r \gg R$ vidieť slučku pod priestorovým uhlom

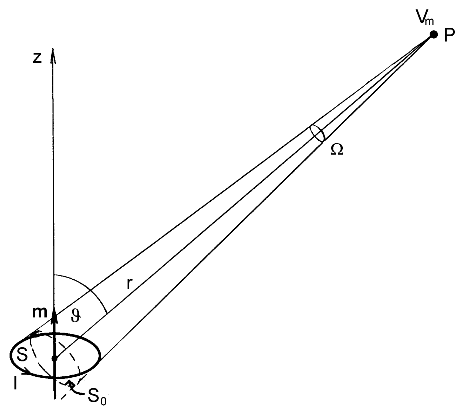
$$\Omega = \frac{S_0}{r^2} = \frac{S}{r^2}\cos\vartheta$$

[1] Pozri napr. Jahnke, E., Emde, F., Lösch, F.: Tafeln höherer Funktionen, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1960

Skalárny potenciál daný výrazom (6.47a) nadobudne tvar

$$V_m = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega = \frac{\mu_0 IS}{4\pi r^2}\cos\vartheta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2}\cos\vartheta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}.\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{6.57}$$

Všimnite si, že skalárny magnetický potenciál prúdového závitu je svojou matematickou štruktúrou rovnaký ako výraz pre skalárny potenciál elektrického dipólu [pozri výraz (2.114), v ktorom možno urobiť zámeny $1/\varepsilon_0 \rightarrow \mu_0$ a $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{m}$, a prejde na výraz (6.57)].



Obr. 6.14

Výrazy (6.56) a (6.57) možno konečne využiť na výpočet magnetickej indukcie vo veľkej vzdialenosti od malej prúdovej slučky v ľubovoľnom smere. Výpočtom možno ukázať, že magnetická indukcia v okolí prúdovej slučky je daná výrazom

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = -\operatorname{grad}V_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\operatorname{grad}\frac{\boldsymbol{m}.\boldsymbol{r}}{r^3} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}.\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3}\right]\end{aligned} \tag{6.58}$$

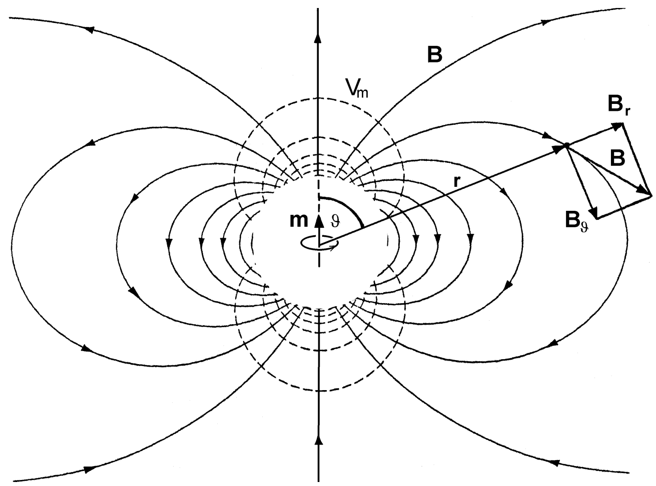
Výraz (6.58) sa svojou štruktúrou podobá na výraz (2.116), ktorý opisuje pole elektrického dipólu. Malá prúdová slučka sa preto často nazýva **magnetický dipól** napriek tomu, že nejde o nijaký dvojpólový objekt. Toto treba mať na pamäti všade, kde v budúcnosti použijeme pojem "magnetický dipól". Robíme tak len z úcty k histórii – sám pojem prináša do elektromagnetizmu viac škody ako osohu, pretože je tendencia spájať ho s neexistujúcimi magnetickými nábojmi. Magnetické pole vo väčšom okolí slučky (magnetického dipólu) vyzerá formálne presne tak, ako elektrické pole elektrického dipólu (pozri *obr. 6.15* a porovnaj s *obr. 2.43*) a jeho zložky v sférických súradniciach sú

$$B_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3}\cos\vartheta \qquad B_\varphi = 0 \qquad B_\vartheta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\sin\vartheta \tag{6.59}$$

Absolútna hodnota magnetickej indukcie ako funkcia r a ϑ je daná výrazom

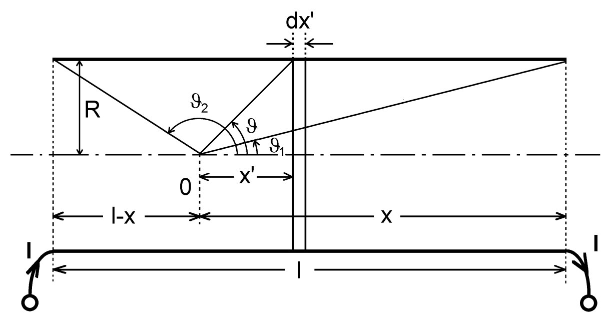
$$B = \sqrt{B_r^2 + B_\vartheta^2} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1} \tag{6.60}$$

Magnetické pole v bezprostrednom okolí slučky nie je na *obr. 6.15* zobrazené, pretože tam nie je dané výrazmi (6.58). Tam na jeho výpočet treba využiť vektorový potenciál podľa výrazu (6.51). Grafický priebeh poľa v blízkom okolí slučky je na *obr. 6.12b*.



Obr. 6.15

Pojem magnetického momentu má rozhodujúcu úlohu pri štúdiu mikroskopických magnetických vlastností látok. Ako je známe, atómy, z ktorých sa látky skladajú, sú dynamické systémy zložené z elementárnych častíc. Tieto elektricky nabité častice vykonávajú v atómoch zložité cirkulačné a rotačné pohyby, správajú sa ako magnetické dipóly. K týmto otázkam sa vrátime v časti o magnetických vlastnostiach látok.



Obr. 6.16

2. **Magnetická indukcia na osi solenoidu**. Solenoid je husto vinutá jednovrstvová valcová cievka polomeru R a dĺžky l s hustotou n závitov na jednotku dĺžky (pozri *obr. 6.16*). Ak vodičom solenoidu tečie prúd I, vzniká v jeho dutine a v okolí magnetické pole. Jednoducho sa pole analyzuje iba na osi solenoidu, kde indukcia má smer pozdĺž osi x, a v bode 0 možno veľkosť vektora magnetickej indukcie vypočítať ako superpozíciu polí nekonečne krátkych prstencových cievok dĺžky $\mathrm{d}x'$. Každý takýto prstenec má $n\mathrm{d}x'$ závitov a tečie ním prúd $nI\mathrm{d}x'$, podobne ako v jedinom závite v predchádzajúcej úlohe.

Prstenec vo vzdialenosti x' od bodu 0, ktorý z tohto bodu vidieť pod uhlom ϑ, vytvorí v bode 0 príspevok k magnetickej indukcii [pozri vzťah (6.48)]

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 nI \,\mathrm{d}\, x'}{2R}\sin^3 \vartheta \tag{6.61}$$

Tieto príspevky treba integrovať pozdĺž celého solenoidu. K tomu treba elementy dx' vyjadriť prostredníctvom uhlov ϑ a dϑ. Z obrázka vidieť, že

$$x' = R \operatorname{cotg} \vartheta$$

a

$$\mathrm{d}x' = -\frac{R}{\sin^2 \vartheta}\mathrm{d}\vartheta$$

Dosadením za dx' vo výraze (6.61) po úprave dostaneme výraz

$$\mathrm{d}B = -\frac{\mu_0 nI}{2}\sin \vartheta$$

Takéto príspevky treba integrovať pre všetky prstence pozdĺž solenoidu, vymedzené uhlami ϑ_2 až ϑ_1, takže nakoniec dostaneme

$$B = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \sin \vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2\right) \tag{6.62}$$

Ak uvážime, že

$$\cos \vartheta_1 = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \qquad\qquad \cos \vartheta_2 = -\frac{l - x}{\sqrt{R^2 + (l-x)^2}}$$

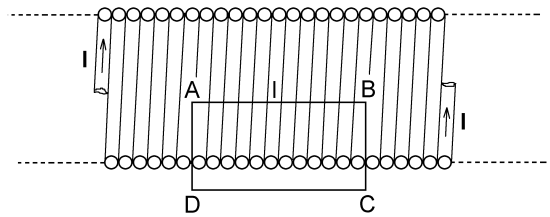
možno výraz pre magnetickú indukciu napísať v tvare

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} + \frac{l - x}{\sqrt{R^2 + (l-x)^2}}\right] \tag{6.63}$$

Magnetická indukcia na osi solenoidu je najväčšia v strede solenoidu ($x = l/2$) a klesá k nule pre $x \to \pm\infty$. Mimo osi solenoidu je výpočet magnetickej indukcie zložitý a vedie k podobným matematickým problémom ako v prípade jediného závitu.

Ak je solenoid veľmi dlhý a tenký, teda ak platí $l \gg R$, možno pre vnútorné body okolo stredu položiť $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$. Pre túto oblasť podľa (6.62) má magnetická indukcia jednoduchý výraz

$$B = \mu_0 nI \tag{6.64}$$



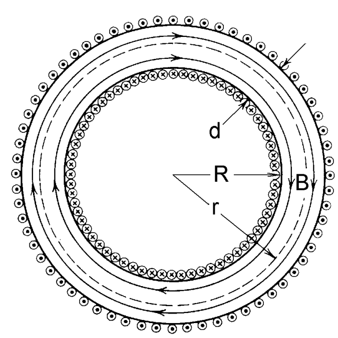
Obr. 6.17

Čím je solenoid dlhší, tým presnejšie platí výraz (6.64) a pole v dutine solenoidu sa stáva homogénnejším. Pre nekonečne dlhý solenoid výraz (6.64) platí presne a dokonca nielen na osi, ale všade v dutine. Pole je homogénne, hoci to z našej doterajšej analýzy nevyplýva. Na výpočet magnetickej indukcie v nekonečne dlhom solenoide možno využiť Ampérov zákon (metóda b), ak prijmeme logický predpoklad, že pole vo vnútri nekonečného solenoidu je homogénne, s priamkovými indukčnými čiarami pozdĺž osi solenoidu začínajúcimi a končiacimi v nekonečnách. Z vonkajšej strany solenoidu musí byť pole nulové. Za týchto okolností možno pre integrál $\oint \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ na solenoide vybrať integračnú dráhu po obdĺžniku *ABCD* podľa *obr. 6.17*. Dráha obopína *nl* závitov a hodnota integrálu je

$$\oint_{ABCD} \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = Bl = \mu_0 nlI$$

z čoho plynie výraz (6.64).

Cievky v tvare solenoidov sú veľmi častým prúdovým zdrojom magnetických polí.



Obr. 6.18

3. **Magnetické pole toroidálnej cievky.** Toroidálna cievka (toroid) je husto a radiálne navinutá cievka na prstenci ľubovoľného, obyčajne však kruhového prierezu. V priečnom reze je takýto toroid zobrazený na *obr. 6.18*, rozmery sú zrejmé z obrázka. V našich úvahách budeme predpokladať, že dutina toroidu je prázdna.

Na prvý pohľad sa zdá, že výpočet magnetického poľa je úloha veľmi zložitá, najmä ak by sa mala riešiť pomocou BSL zákona. Avšak magnetické pole toroidu je celé uzavreté v dutine toroidu, indukčné čiary sú koncentrické kružnice s osou toroidu a ich polomery r spĺňajú podmienku

$$R < r < R + d$$

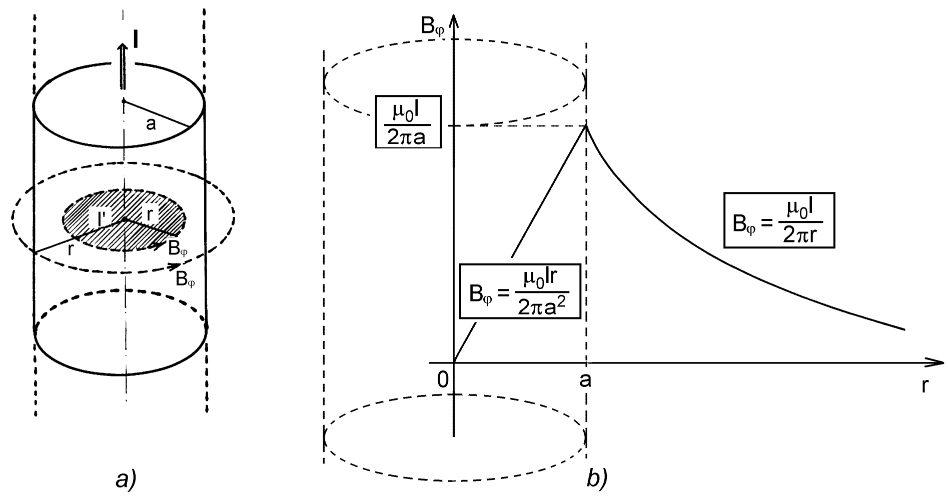
a to umožňuje na riešenie problému využiť Ampérov zákon. Pre každú indukčnú čiaru s polomerom r a s dĺžkou $l = 2\pi r$ môžeme podľa Ampérovho zákona písať

$$\oint_l \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi r B = \mu_0 N I$$

N je celkový počet závitov toroidu, takže obopnutý prúd každou indukčnou čiarou je NI. Magnetická indukcia v dutine toroidu podľa posledného vzťahu je teda

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \tag{6.65}$$

V okolí toroidu je – prísne vzaté – tiež magnetické pole spôsobené pohybom nábojov po obvode toroidu v dôsledku špirálového stúpania závitov (pozri úlohu 159). Toto pole je podobné ako pole jedného závitu, avšak v porovnaní s poľom v dutine je veľmi slabé.



Obr. 6.19

4. **Magnetické pole vo vnútri valcového prúdovodiča.** Pretože prúdová hustota je vo vnútri prúdovodiča nenulová, možno očakávať, že tam bude nenulové aj magnetické pole. V priamom vodiči polomeru a, v ktorom tečie prúd I s prúdovou hustotou $J = I/(\pi a^2)$, a ktorého časť je zobrazená na *obr. 6.19a*, budú magnetické indukčné čiary koncentrické kružnice s polomerom $r < a$. Ampérov zákon aplikovaný na takúto kružnicu vedie k výrazu

$$\oint \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi r B_\varphi = \mu_0 I'$$

kde I' je prúd obopnutý uvažovanou indukčnou čiarou a jeho veľkosť je

$$I' = \pi r^2 J = \frac{r^2}{a^2} I$$

Dosadením do predchádzajúceho výrazu dostaneme

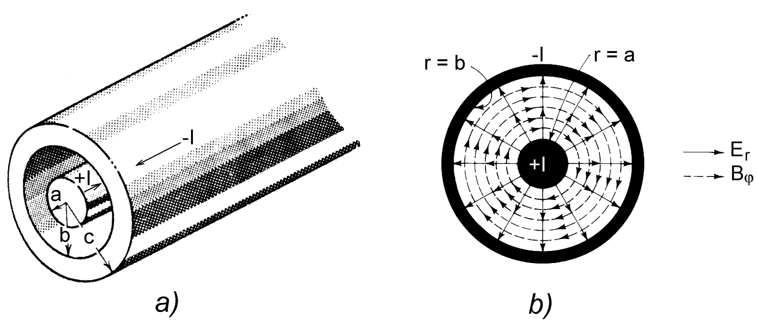
$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \tag{6.66}$$

Vo vnútri prúdovodiča je teda azimutálne magnetické pole, ktorého veľkosť narastá na osi vodiča od nuly k hodnote $B = \mu_0 I/(2\pi a)$. Výraz (6.66) sme už získali ako rotáciou vektorového potenciálu (6.41) v odseku 6.1.8. Na *obr. 6.19b* je graficky zobrazená závislosť B_φ od r v celom priestore – vo vnútri prúdovodiča a v jeho okolí.

Zaujímavý a dôležitý je prípad, ak prúdovodič má vo svojom vnútri koaxiálnu dutinu polomeru $a_0 < a$. Ak vodičom tečie prúd I, bude v jeho okolí magnetická indukcia podobne ako v prípade plného vodiča, vo vodiči bude indukcia klesať až na nulovú hodnotu pre $r = a$, a v dutine je magnetická indukcia rovná nule. Plynie to napr. z Ampérovho zákona, pretože ak zvolíme akúkoľvek uzavretú dráhu l v dutine, dráha neobopne žiadny prúd a

$$\oint_l \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

pre každé l. To je možné iba vtedy, ak v dutine $B = 0$.



Obr. 6.20

5. **Magnetické pole v dutine koaxiálneho kábla**. Ak sa do cylindrickej dutiny polomeru b prúdovodiča koaxiálne vloží druhý valcový vodič polomeru a, vznikne koaxiálny kábel alebo koaxiálne vedenie (pozri *obr. 6.20a*), ktoré sa dnes používa na prenos elektrických signálov do frekvencií až takmer 100 GHz (1 GHz = 10^9 Hz). Ak na vstupe kábla je pripojený ideálny zdroj EMN $\mathscr{E}$ a na jeho vzdialenom konci odpor R, potečie káblom prúd $I = \mathscr{E}/R$, napríklad tak, ako je to na *obr. 6.20a*. Okolo vnútorného vodiča v dutine vznikne azimutálne magnetické pole s indukciou

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (6.67)$$

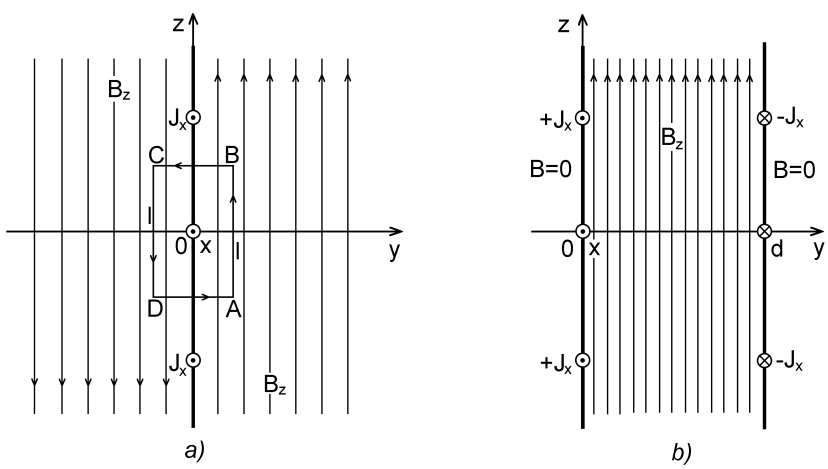
a v dôsledku rozdielu potenciálov valcov, ktorý je rovný napätiu *IR*, aj radiálne elektrické pole intenzity (*obr. 6.20b*).

$$E_r = \frac{\mathscr{E}}{r \ln \frac{b}{a}}$$

(pozri úlohu 39).

Z vonkajšej strany koaxiálneho kábla neexistuje ani elektrické ani magnetické pole, čo je dôsledok platnosti Gaussovho a Ampérovho zákona. Koaxiálny kábel je vhodným prostriedkom na prenos signálov bez vyžarovania, pretože elektromagnetické pole je uzavreté v dutine kábla, a takisto vonkajšie rušivé elektromagnetické polia nemôžu ovplyvniť signály v dutine kábla.

6. **Magnetické pole v okolí nekonečnej prúdovej roviny a pole dvoch prúdových planparalelných rovín**. Ak v rovine *xz* (y = 0) pravouhlého súradnicového systému tečie plošný prúd J_x (v A/m) v smere osi *x* (pozri *obr. 6.21a*), v okolí roviny bude homogénne magnetické pole v smere osi $+z$ pre *y* kladné a v smere osi $-z$ pre *y* záporné.



Obr. 6.21

Na toto pole možno aplikovať Ampérov zákon s uzavretou obdĺžnikovou dráhou *ABCD* podľa obrázka. K integrálu $\oint \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ prispievajú iba strany *AB* a *CD* obdĺžnika, teda

$$\oint_{ABCD} \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = B_z l + B_z l = \mu_0 J_x l$$

z čoho

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} J_x$$

a vo vektorovom tvare

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 J_x}{2} \frac{y}{|y|} \boldsymbol{k} \tag{6.68}$$

kde $\boldsymbol{k}$ je jednotkový vektor v smere osi z. Takéto pole je homogénne na obidvoch stranách prúdovej roviny. Ak vo vzdialenosti d od tejto roviny ($d > 0$) umiestnime planparalelne druhú rovinu s plošnou hustotou prúdu $-J_x$ (pozri *obr. 6.21b*), bude tento prúd prispievať tiež svojím magnetickým poľom a výsledné pole medzi rovinami ($0 < y < d$) bude

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 J_x \boldsymbol{k} \tag{6.69a}$$

a v okolí dvojice bude pole nulové. Ak prúdy v obidvoch rovinách majú rovnaký smer, medzi rovinami je pole nulové a v okolí dvojice je pole s veľkosťou danou výrazom (6.69a), smery poľa na oboch stranách dvojice sú opačné. Keďže plošný prúd $J_x = \sigma v_x$, kde σ je plošný náboj na rovine a v_x jeho rýchlosť pozdĺž osi x, tiež platí

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \sigma v_x \boldsymbol{k} \tag{9.69b}$$

Možno si položiť otázku, aký má táto úvaha zmysel, veď nekonečné prúdové roviny neexistujú. Odpoveď je rovnaká ako v mnohých iných podobných prípadoch. Výraz (6.68) platí približne aj pre prúdové roviny konečných rozmerov, ak sa zaujímame o pole blízko roviny a ďaleko od jej okrajov. V prípade dvoch rovín konečnej šírky uložených veľmi blízko seba je magnetická indukcia v strednej oblasti daná približne výrazom (6.69). Ako príklad môžeme uviesť tzv. páskové vedenie (dva rovnobežné kovové pásiky s dielektrikom uprostred) určené na prenos signálov veľmi vysokých frekvencií až do mikrovlnnej oblasti (rádovo do 10 GHz). Možno ho vyrobiť z obojstranne plátovanej dosky plošných spojov. Ak je pomer šírky k hrúbke páskového vedenia dostatočne veľký, magnetické pole v jeho vnútri je približne homogénne a dané výrazmi (6.69). Pole leží v rovine dosky a je kolmé na smer prúdov vo vedení.

6.2 INTENZITA MAGNETICKÉHO POĽA

Pre opis magnetického poľa sa zavádza ešte jedna vektorová veličina – **vektor intenzity magnetického poľa** $\boldsymbol{H}$. Táto veličina sa dlhý čas vydávala za základný magnetický vektor (namiesto vektora $\boldsymbol{B}$). Dôvodom takého prístupu bolo dobové chápanie magnetických javov, keď bola snaha vysvetľovať magnetické pole ako produkt "magnetických nábojov". Istým dôvodom takého chápania bola aj stará, Gaussova sústava meracích jednotiek, v ktorej vektory $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{H}$ majú rovnaký rozmer, a nakoniec aj skutočnosť, že najviac študovanými magnetickými javmi bol magnetizmus permanentných magnetov, ktorých vonkajšie polia majú veľa spoločného s elektrostatickými poliami. Dnes vektor $\boldsymbol{H}$ považujeme za pomocný magnetický vektor, vhodný a užitočný pri opise magnetických javov predovšetkým v látkových prostrediach, hlavne vo feromagnetikách.

Pojem intenzity magnetického poľa je pracovným pojmom predovšetkým feromagnetikov – technológov.

Pozrime sa na logické dôvody, ktoré vedú k zavedeniu vektora intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$. Z Ampérovho zákona v jeho integrálnej formulácii (6.27) až (6.29) plynie, že dráhový integrál magnetickej indukcie je úmerný iba dráhou obopnutému prúdu, kde konštanta úmernosti je magnetická konštanta poľa (permeabilita vákua). Ak napr. rovnicu (6.27) vydelíme s μ_0, dostaneme výraz

$$\oint_l \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I$$

Dráhový integrál nového **vektora intenzity magnetického poľa** (názov má historické korene)

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} \qquad [\mathrm{A.m^{-1}}] \tag{6.70}$$

(a nie $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$, ako sa to často píše), sa skutočne rovná iba obopnutému prúdu. Možno teda za definičný vzťah pre vektor intenzity magnetického poľa považovať výraz

$$\oint_l \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \tag{6.71}$$

kde I je algebraický súčet všetkých prúdov vo vodičoch obopnutých dráhou l, prípadne integrálny prúd prúdovej hustoty prenikajúcej plochou S ohraničenou čiarou l (pozri *obr. 6.11*). Výraz (6.71) sa niekedy nazýva **zákon celkového prúdu**, pretože prúd I v najvšeobecnejšom prípade zahŕňa aj spomínaný, ale zatiaľ nezavedený posuvný prúd. Zákonu možno dať aj diferenciálny tvar

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{6.72}$$

kde $\boldsymbol{J}$ je hustota celkového prúdu. Rozmer a jednotka $\mathrm{A.m^{-1}}$ pre vektor $\boldsymbol{H}$ plynie z výrazu (6.71). Vo vákuu sa vektory $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{H}$ líšia iba multiplikatívnou rozmerovou konštantou $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m a preto je na mieste otázka, aký je vôbec zmysel vektora $\boldsymbol{H}$. Vo vákuu v statických poliach, pravdu povediac, žiadny! Zatiaľ čo $\boldsymbol{B}$ je silový vektor, fyzikálny význam vektora $\boldsymbol{H}$ nie je na prvý pohľad jasný. V tejto súvislosti si spomeňte, že s podobnými rozpakmi sme zavádzali v elektrostatike vektor elektrickej indukcie $\boldsymbol{D}$ (pozri odsek 4.2). S interpretáciou vektora $\boldsymbol{H}$ vznikajú vážne problémy v permanentných magnetoch, kde $I = 0$. Vektor $\boldsymbol{H}$ zavádzame na tomto mieste iba kvôli kontinuite výkladu. **Magnetickú intenzitu doteraz analyzovaných polí môžeme získať, ak všetky odvodené výrazy pre magnetickú indukciu jednoducho vydelíme s μ_0.**

Iná situácia je v látkových prostrediach. Ampérov zákon (6.29) a (6.30) aplikovaný v látkovom prostredí musí svojou pravou stranou odrážať aj magnetické vlastnosti uvažovaného prostredia. Vlastnosti prostredí môžu byť mnohoraké. V takom prostredí je dobre definovať vektor, ktorý závisí iba od magnetizujúceho (voľného) prúdu, teda vektor $\boldsymbol{H}$. Makroskopický parameter, ktorý odráža magnetické vlastnosti látky, sa nazýva permeabilita prostredia

$$\mu = \mu_0 \mu_r \tag{6.73}$$

kde μ_r je relatívna permeabilita, ktorá môže byť číselnou bezrozmernou konštantou, tenzorom, môže závisieť od $\boldsymbol{B}$ resp. $\boldsymbol{H}$, prípadne môže byť aj funkciou súradníc a času. Závisí to od druhu látky a od jej magnetického stavu. V látkovom prostredí má Ampérov zákon tvar

$$\oint_l \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} . \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \tag{6.74}$$

a vektor intenzity magnetického poľa

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} \tag{6.75}$$

Výrazom (6.74) a (6.75) bude venovaná väčšia pozornosť v kapitole 8 o magnetizme látkových prostredí. Rovnice (6.71) a (6.72) platia univerzálne, bez ohľadu na prostredie, $\boldsymbol{H}$ teda závisí od prúdu a veličiny $\boldsymbol{B}$ a μ závisia od magnetických vlastností prostredia. Pod uvažovaným prúdom sa tu rozumie iba nami kontrolovaný (voľný) prúd, prípadne aj posuvný prúd a nie napríklad atomárne, prípadne molekulárne (viazané) prúdy v látkach. V tom spočíva význam vektora intenzity magnetického poľa v látkových prostrediach.

6.3 MAXWELLOV POSUVNÝ PRÚD

Pri tvorbe jednotnej teórie elektromagnetického poľa v šesťdesiatych rokoch minulého storočia si jej tvorca James Clerk Maxwell všimol, že Ampérov zákon pre statické prúdy vyjadrený vo vákuu napr. rovnicou

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{6.76}$$

(pozri odsek 6.1.6) nie je konzistentný so zákonom zachovania elektrického náboja, ktorý možno vyjadriť rovnicou spojitosti elektrického prúdu

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{6.77}$$

(pozri odsek 5.1.2). Ak sa totiž na rovnicu (6.76) aplikuje divergencia, výsledok je v rozpore s rovnicou (6.77). Platí totiž

$$\mathrm{div\, rot}\, \boldsymbol{B} = \mu_0\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{J} = 0 \tag{6.78}$$

pretože divergencia rotácie akéhokoľvek vektora sa rovná nule. Rovnica (6.78) platí iba pre stacionárne prúdy. Maxwell intuitívne cítil, že na pravej strane rovnice (6.76) k prúdovej hustote $\boldsymbol{J}$ treba pripočítať nejakú rozmerovo rovnakú veličinu, a až divergencia súčtu týchto veličín sa rovná nule. Takáto možnosť sa ponúkla, keď uvážil, že podľa Gaussovho zákona

$$\rho = \mathrm{div}\, \boldsymbol{D} \tag{6.79}$$

(pozri odsek 4.2). Vyjadrenie (6.79) dosadil do (6.77) a dostal

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{D} = -\operatorname{div} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

alebo po úprave

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) = 0 \tag{6.80}$$

Výraz v zátvorke je tou hľadanou veličinou – je to celková prúdová hustota

$$\boldsymbol{J}_c = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_p \tag{6.81}$$

ktorá musí v rovnici (6.76) nahradiť prúdovú hustotu $\boldsymbol{J}$. Veličina

$$\boldsymbol{J}_p = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{6.82}$$

sa nazýva **hustota posuvného (Maxwellovho) prúdu**. Ak dosadíme vyjadrenie (6.81) do (6.76), dostaneme

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \tag{6.83}$$

Ak sa divergencia aplikuje na túto rovnicu, bude splnený zákon zachovania náboja, a aj Gaussov zákon. Rovnica (6.83) sa obyčajne píše pre vektor intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$, teda

$$\boxed{\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}} \tag{6.84}$$

a často sa nazýva **zákon celkového prúdu v diferenciálnom tvare**. Je to ďalšia zo série Maxwellových rovníc vo svojom konečnom tvare. Možno ju prepísať do integrálneho tvaru, ak výraz (6.84) integrujeme po ploche S ohraničenej čiarou l a použijeme Stokesovu vetu. Dostaneme

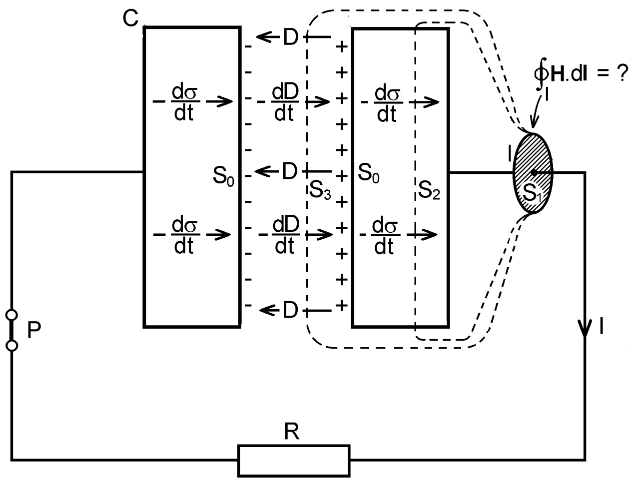
$$\oint_l \boldsymbol{H} . \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} . \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \boldsymbol{t}} . \mathrm{d}\boldsymbol{S} = I + I_p \tag{6.85}$$

Prúd I je celkový prúd elektrických nábojov prenikajúci plochou S a ohraničený čiarou l. Podobne

$$I_p = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} . \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{6.86}$$

je **posuvný prúd**. Ako už bolo spomínané, pojem "posuvný prúd" má historický pôvod. Zaviedol ho ešte Maxwell na vyjadrenie posuvu nábojových centier dipólov pri polarizácii dielektrík. Význam pojmu sa však stráca vo vákuu, kde niet dipólov, ale napriek tomu môže existovať nenulové $\partial \boldsymbol{D}/\partial t = \varepsilon_0 \partial \boldsymbol{E}/\partial t$.

Z rovnice (6.84) vidíme, že na produkcii magnetického poľa sa v istom pomere zúčastňujú obidve prúdové hustoty. Vo vákuu, bez prítomnosti nábojov, je magnetické pole závislé iba od $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$, naopak, v dobrých vodičoch je elektrická indukcia $\boldsymbol{D}$ obyčajne malá, a ak jej časové zmeny sú pomalé, možno posuvný prúd oproti vodivému zanedbať. V ostatných prípadoch majú obidve prúdové hustoty porovnateľný podiel na tvorbe magnetického poľa.



Obr. 6.22

Pokúsime sa teraz Maxwellov predpoklad o existencii posuvného prúdu dokázať mysleným experimentom. Na *obr. 6.22* je znázornený jednoduchý obvod pozostávajúci z kondenzátora C a rezistora R. Kondenzátor pozostáva z masívnych rozmerných ideálne vodivých dosiek s čelnou plochou S_0 uložených v istej vzdialenosti. Celý elektrický odpor obvodu je sústredený v rezistore R. V čase $t = 0$ je na kondenzátore nejaký náboj a zopne sa spínač P. V obvode začne tiecť časovo premenný, exponenciálne zanikajúci prúd

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = S_0 \frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}$$

kde $Q(t) = S_0\sigma(t)$ je okamžitý náboj na kondenzátore a $\sigma(t)$ je plošná hustota náboja na čelných plochách kondenzátora. Prúd v obvode vytvorí v celom priestore, v prúdovodiči, v masívnych doskách (predpokladáme, že nie sú feromagnetické), aj v priestore medzi doskami magnetické pole, ktoré bude s časom takisto zanikať. Vytvorme okolo prúdovodiča uzavretú dráhu l v tvare kružnice a položme si otázku, čím je daná hodnota integrálu $\oint_l \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ po dráhe l. Podľa výrazu (6.85) je jeho hodnota daná celkovým obopnutým prúdom, presnejšie tým prúdom, ktorý preteká plochou S napnutou na čiaru l. Lenže takých plôch je ľubovoľné množstvo. Môže to byť kruhová plocha S_1, ktorou prechádza prúdovodič alebo plocha S_2 prechádzajúca masou dosky kondenzátora, ale nie je vylúčená ani plocha

S_3 prechádzajúca vnútrom kondenzátora, a tú žiadny vodivý prúd nepretína. Plochou S_1 preteká prúd

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

plochou S_2 rovnaký prúd

$$I = S_0 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

V treťom prípade plochou S_3 musí tiecť veličina, ktorá s plošnou hustotou náboja σ priamo súvisí. V dutine kondenzátora elektrická je indukcia $D = \sigma$, takže plochou S_3 tečie veličina

$$I_p = S_0 \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = S_0 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I$$

Treba si všimnúť, že zatiaľ čo vektor $\boldsymbol{D}$ smeruje sprava doľava (od kladnej elektródy k zápornej), $\mathrm{d}\boldsymbol{D}/\mathrm{d}t$ smeruje naopak, pretože prúd I, plošná hustota náboja σ a tým aj $\boldsymbol{D}$ s časom klesajú. Smer $\mathrm{d}\boldsymbol{D}/\mathrm{d}t$ je teda taký istý ako smer prúdu kladných nábojov v obvode.

Hodnota integrálu $\oint_l \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ môže byť skutočne daná buď integrálom prúdovej hustoty vodivého prúdu $J = \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$ vo vodičoch, alebo prúdovej hustoty posuvného prúdu $J_p = \mathrm{d}D/\mathrm{d}t$ v dielektriku alebo vo vákuu. Ak tieto prostredia nie sú oddelené (ako je to v uvažovanom obvode), potom sa na tvorbe integrálu podieľajú súčasne obidva prúdy, tak ako to stanovuje rovnica (6.84) alebo rovnica (6.85).

Dôležitý význam posuvného prúdu ako veličiny úmernej $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ spočíva v tom, že je spolu s elektromagnetickou indukciou predpokladom pre vznik elektromagnetických vĺn, ktorých existenciu predpovedal Maxwell v roku 1864.[1] Tie krátko po vzniku Maxwellovej teórie v roku 1888 objavil experimentálne nemecký fyzik H. Hertz.[2]

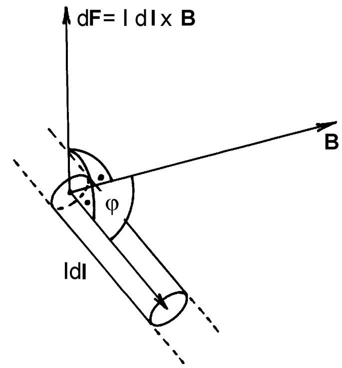
6.4 SILOVÉ ÚČINKY MAGNETICKÝCH POLÍ NA PRÚDOVÉ OBVODY

V odseku 6.1.1 sme konštatovali, že v magnetickom poli pôsobí na pohybujúci sa náboj sila. Z praktického hľadiska sú neobyčajne dôležité sily, ktorými magnetické pole pôsobí na náboje pohybujúce sa v prúdovodičoch (drôtoch), teda sily pôsobiace na elektrické prúdy. Takéto silové pôsobenie je totiž základom funkcie každého elektrického motora, magnetoelektrických a elektrodynamických meracích prístrojov, rôznych servoelementov a i. Sila pôsobiaca na náboje sa prenáša na ich nosiče, teda na prúdovodiče. Silové pôsobenie na vodič môže byť veľmi zložité, závislé od konfigurácie magnetického poľa a od prúdovej cesty, ktorou je obyčajne uzavretý prúdový obvod.

---

[1] Maxwell, J. C., Phil. Magazine 155 (1864)

[2] Hertz, H.: Kräfte elektrischer Schwingungen behandelt nach Maxwellschen Theorie, Ann. d. Physik (1888)



Obr. 6.23

Na *obr. 6.23* je znázornený element prúdovodiča $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, ktorý je v magnetickom poli indukcie $\boldsymbol{B}$. Na každý náboj prúdového elementu pôsobí magnetická sila daná výrazom (6.6), a ak je v elemente celkový náboj $\mathrm{d}Q = I\mathrm{d}t$, ktorý má rýchlosť $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{l}/\mathrm{d}t$, elementárna sila pôsobiaca na element je

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

alebo

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{6.87}$$

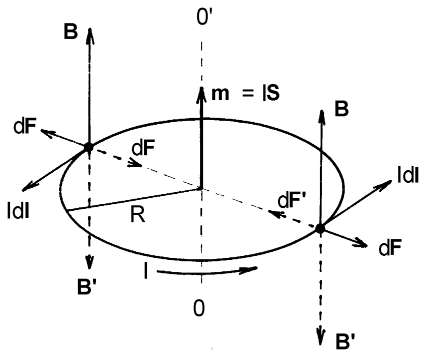
s veľkosťou $\mathrm{d}F = IB\mathrm{d}l \sin\varphi$, kde φ je uhol medzi $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{B}$. Ako vidíme, magnetická sila na vodič je úmerná prúdu I, magnetickej indukcii $\boldsymbol{B}$ v mieste elementu a rozhodujúcim spôsobom závisí od uhla medzi $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{B}$. Ak element $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ je kolmý na $\boldsymbol{B}$ ($\varphi = \pi/2$) sila je v danom mieste maximálna, má veľkosť $\mathrm{d}F = IB\mathrm{d}l$ a smeruje kolmo na rovinu vektorov $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{B}$ v smere vektorového súčinu $\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$. Ak prúdový element smeruje pozdĺž magnetickej indukčnej čiary, sila je nulová (pozri tiež *obr. 6.5 a,b*).

Silové pôsobenie magnetického poľa na elektrický prúd a jeho prostredníctvom na prúdovodič objavil A. M. Ampère takmer súčasne s Oerstedovými objavmi, a preto sa výraz (6.87) niekedy nazýva **Ampérov silový zákon**.

6.4.1 Prúdová slučka v magnetickom poli

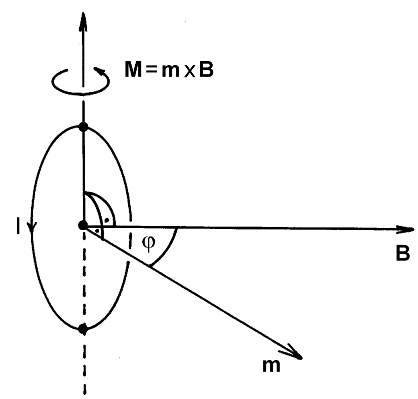
Na kruhovej prúdovej slučke budeme ilustrovať silové účinky magnetického poľa na prúdový obvod. Výsledky, ktoré dosiahneme, majú význam pre pochopenie vlastnosti sily (6.87), ale súčasne poskytujú informáciu o účinkoch magnetického poľa na magnetický dipól. Najprv predpokladajme, že v homogénnom magnetickom poli indukcie $\boldsymbol{B}$ sa nachádza jednoduchý kruhový prúdovodič polomeru R s prúdom I ako na *obr. 6.24*, pričom os závitu splýva so smerom vektora $\boldsymbol{B}$. Ak na obvode závitu vyznačíme dva prúdové elementy $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, potom na každý element pôsobí radiálna sila $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$ všade rovnako veľká, teda $\mathrm{d}F = IB\mathrm{d}l$. Výsledná translačná sila na závit je nulová a silový účinok poľa sa prejaví iba radiálnym napínaním prúdovej dráhy (napínaním prúdovodiča).

Prúdový závit v homogénnom poli možno považovať za "magnetický dipól" s magnetickým momentom veľkosti $m = IS = \pi R^2 I$, ktorý pri danej orientácii prúdu smeruje nahor, teda v smere vektora magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ (vyznačené plnými šípkami). Magnetické pole má tendenciu zväčšiť magnetický moment, teda zväčšiť plochu S (podobne ako elektrické pole má tendenciu zväčšiť moment elektrického dipólu, t. j. zväčšiť jeho dĺžku d). Ak sa zmení smer prúdu alebo poľa (prerušované šípky), zmení sa smer sily (závit bude stláčaný). Je zaujímavé, že radiálna sila bude pôsobiť na závit aj vtedy, ak vonkajšie pole neexistuje. Vtedy je závit napínaný vlastným magnetickým poľom. Možno povedať, že prúdový závit (magnetický dipól) má svoju vlastnú vnútornú energiu.



Obr. 6.24

Ešte zaujímavejší je prípad, ak os závitu (teda jeho magnetický moment $\boldsymbol{m}$) zviera s vektorom $\boldsymbol{B}$ nenulový uhol φ (pozri *obr. 6.25*). Jednoduchým výpočtom pomocou vzťahu (6.87) možno dokázať, že v takom prípade na závit pôsobí magnetické pole silovým točivým momentom



Obr. 6.25

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{6.88}$$

s veľkosťou $M = mB \sin\varphi$, kde φ je uhol medzi $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{B}$. Výraz (6.88) môžeme napísať priamo, pretože magnetické pole "magnetického dipólu" je formálne rovnaké ako pole elektrického dipólu. Výraz (6.88) je analógom výrazu (2.121). Točivý moment (6.88) je maximálny $M_{max} = mB$ vtedy, keď je dipólový moment kolmý na smer poľa a má tendenciu natočiť dipól do smeru magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ tak, že vektory $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{B}$ budú mať rovnaký smer. Vtedy točivý moment (6.88) vymizne ($\varphi = 0$, $M_{min} = 0$) a dipól je v stabilnej polohe.

Vo využívaní analógií možno pokračovať a napísať výraz pre translačnú silu $\boldsymbol{F}$, ktorou na magnetický moment pôsobí nehomogénne magnetické pole

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{m}.\mathrm{grad})\boldsymbol{B} \tag{6.89}$$

alebo v zložkách

$$F_x = \boldsymbol{m}.\mathrm{grad}\, B_x$$
$$F_y = \boldsymbol{m}.\mathrm{grad}\, B_y \tag{6.90}$$
$$F_z = \boldsymbol{m}.\mathrm{grad}\, B_z$$

[porovnaj s výrazom (2.122)]. Takáto sila má tendenciu posúvať dipól do miest, kde je pole homogénne, teda tam, kde sa gradienty zložiek indukcie $\boldsymbol{B}$ rovnajú nule. Tam sa dipól otočí do smeru $\boldsymbol{B}$, a to je jeho stabilná poloha.

Analogickou veličinou je aj potenciálna energia magnetického dipólu v magnetickom poli

$$W = -\boldsymbol{m}.\boldsymbol{B} = -mB\cos\varphi \tag{6.91}$$

[porovnaj s výrazom (2.120)]. Podobne ako v elektrickom poli, dipól v magnetickom poli má maximálnu potenciálnu energiu $W_{max} = mB$ ak je otočený proti smeru poľa ($\varphi = \pi$); nulovú $W = 0$ ak dipól leží v poli kolmo na smer $\boldsymbol{B}$ ($\varphi = \pi/2$); a minimálnu $W_{min} = -mB$ ak je otočený v smere poľa ($\varphi = 0$). Odporúčam čitateľovi do pozornosti skutočnosť, že ak sa na dipól dívame ako na prúdovú slučku s prúdom I, má v magnetickom poli potenciálnu energiu

$$W = -I\Phi \tag{6.92}$$

kde $\Phi = \int_S \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je indukčný tok prenikajúci plochou S obopnutou prúdom I.

Pojem magnetického momentu je základným pojmom, na ktorom je založená mikroskopická teória magnetizmu látok. Spolu s pojmom elektrického dipólu umožňujú vytvoriť celkový elektromagnetický obraz neživej aj živej prírody, pritom tento obraz je dvojjediný, závislý od uhla pohľadu na prírodu.

6.4.2 Vzájomné silové pôsobenie elektrických prúdov

Definícia jednotky ampér (A)

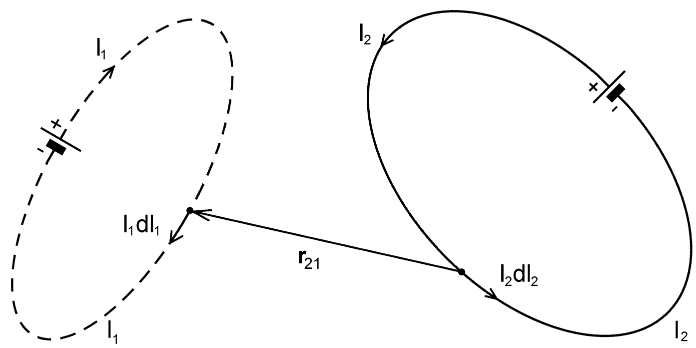
Dôležitý prípad silového pôsobenia je vzájomné pôsobenie prúdov, ak magnetická indukcia vo výraze (6.87) je daná iným prúdom, tečúcim v nejakom uzavretom elektrickom obvode l_2 (pozri *obr. 6.26*). Magnetická indukcia $\boldsymbol{B}_1$ v mieste prúdového elementu $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ od prúdového obvodu l_2 sa dá vypočítať využitím BSL zákona. Spojením výrazov (6.16) a (6.87) dostaneme výraz pre elementárnu silu $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1$ pôsobiacu na prúdový element $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ obvodu l_1 v tvare

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_1 = I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{B}_1 = I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3} \tag{6.93}$$

kde význam symbolov plynie z *obr. 6.26*. Ďalšia integrácia cez obvod l_1 sa obyčajne nerobí, pretože v pevnom obvode l_1 by sa sčítavali silové účinky s rôznymi pôsobiskami bez uváženia silových momentov na slučku.

Dôležitým prípadom je silové pôsobenie medzi nekonečne dlhými priamymi paralelnými prúdovodičmi s rovnakými prúdmi $I_1 = I_2 = I$, uloženými vo vzájomnej vzdialenosti a. Podľa výrazu (6.18) magnetická indukcia od jedného v mieste druhého prúdovodiča je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$



Obr. 6.26

Táto magnetická indukcia vyvolá na dĺžku Δl druhého vodiča magnetickú silu

$$\Delta F = I\Delta l B = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}\Delta l$$

Sila na jednotku dĺžky prúdovodiča má veľkosť

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \tag{6.94}$$

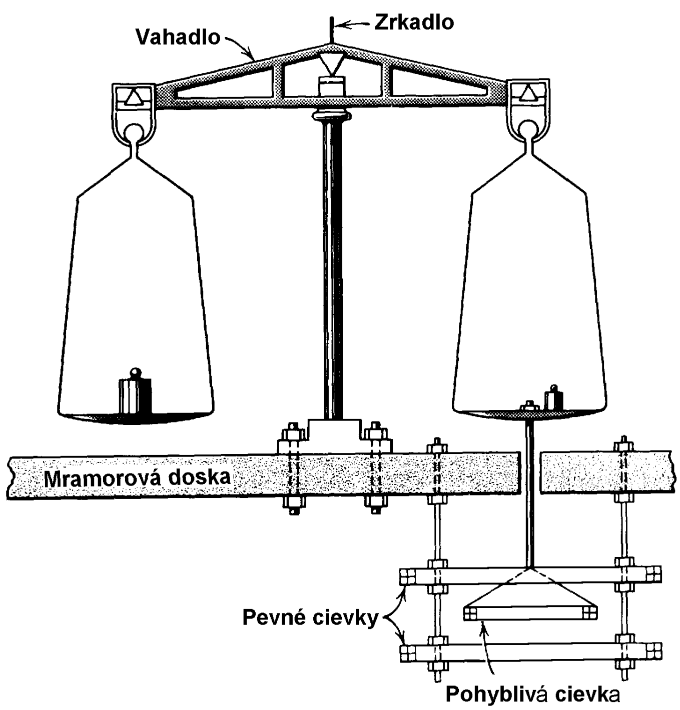
má príťažlivý alebo odpudivý charakter podľa vzájomnej orientácie prúdov vo vodičoch a závisí iba od veľkosti prúdov I a vzájomnej vzdialenosti prúdovodičov a. Tento vzťah slúži na definíciu jedinej elektromagnetickej základnej jednotky sústavy SI, jednotky pre elektrický prúd. Ak vzdialenosť medzi vodičmi zvolíme pevnú, veľkosti a = 1 m, tak vo vzťahu medzi silou a prúdom vystupuje jediná, zatiaľ neurčená konštanta μ_0, ktorej hodnotu možno vybrať ľubovoľne, napríklad tak, aby zohľadňovala predtým používané jednotky prúdu, požiadavky praxe a aby pri celočíselných hodnotách sily mal prúd takisto celočíselnú hodnotu. S uvážením týchto požiadaviek možno číselnú hodnotu μ_0 vybrať takto

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}} \tag{6.95}$$

kde H je jednotka indukčnosti, ktorá bude určená neskôr. Potom možno výraz (6.94) prepísať na číselný vzťah

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2.10^{-7}\, I^2$$

z ktorého vidieť, že ak sila na jednotku dĺžky medzi prúdovodičmi má hodnotu $\Delta F/\Delta l$ = = 2.10^{-7} newtonov na jednotku dĺžky ($\mathrm{N.m^{-1}}$), treba hodnotu prúdu považovať za jednotkovú, teda I = 1 jednotka. Táto jednotka bola na počesť francúzskeho fyzika a učenca André Marie Ampère nazvaná ampér (A).



Obr. 6.27

Na základe uvedených úvah môžeme vysloviť definíciu jednotky elektrického prúdu:

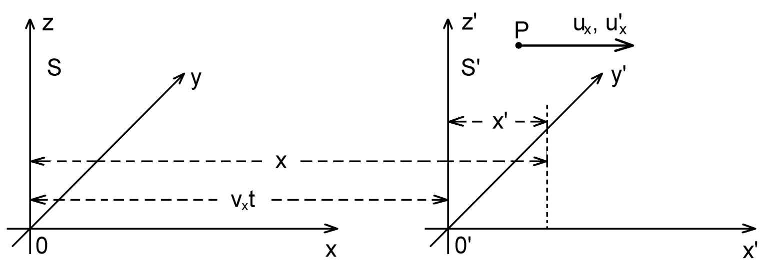
Jeden ampér (1 A) je elektrický prúd, ktorý pri stálom prietoku dvoma paralelnými priamymi nekonečne dlhými vodičmi zanedbateľného kruhového prierezu, umiestnenými vo vákuu vo vzdialenosti 1 m, vyvolá medzi vodičmi silu 2.10^{-7} N na jeden meter dĺžky.

Meranie sily medzi priamymi veľmi dlhými vodičmi je nepraktické, a preto ako štandard alebo **etalón prúdu**, boli vyvinuté precízne **prúdové (Ampérove) váhy**, určené na kalibráciu prúdových meracích prístrojov (ampérmetrov). Na *obr. 6.27* sú znázornené váhy, ktoré sa na meranie prúdu používajú v metrologických centrách na celom svete. Základ váh tvorí trojica precízne vinutých prstencových cievok. Dve cievky sú pevné, uchytené na masívnom mramorovom stole, tretia pohyblivá je zavesená na vahadle dvojramenných váh a zasahuje medzi dve predchádzajúce. Cievky sú zapojené tak, že meraný prúd je spoločný všetkým trom. Váhy sa vyvažujú bežne závažiami a prúd sa z nameranej sily vypočítava zložitými výpočtami.

6.5 LORENTZOVE TRANSFORMÁCIE ELEKTROMAGNETICKÝCH POLÍ

Naše úvahy o magnetických poliach sme začali prekvapujúcim zistením, že magnetické silové pôsobenie má relativistický charakter, že pozorovatelia v rôznych pohybových stavoch pozorujú rôzne silové účinky. Z toho vyplýva, že aj samotné magnetické polia majú relativistický charakter, a pojalo nás podozrenie, že relativistické je aj elektrické pole. Bude preto nanajvýš užitočné podrobnejšie preskúmať, aké polia pozorujú dvaja pozorovatelia – jeden spojený s pevnou sústavou S pravouhlých súradníc x, y, z, a druhý spojený so sústavou S' (čiarkovaných súradníc), ktorá sa voči sústave S pohybuje rýchlosťou v_x pozdĺž súradnice x podľa *obr. 6.28*. Budeme vychádzať zo všeobecnej platnosti Lorentzových relativistických transformačných vzťahov medzi súradnicami pevnej a pohyblivej sústavy. Ak zavedieme označenie $\beta = v_x/c$ (c je rýchlosť svetla vo vákuu), transformačné vzťahy medzi súradnicami budú mať tvar

$$x' = \frac{x - v_x t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z \tag{6.96a}$$



Obr. 6.28

a čas sa transformuje podľa vzťahu

$$t' = \frac{t - \dfrac{\beta}{c} x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.96b}$$

Je dobre si uvedomiť, že ak sa zmení v_x na $-v_x$, zmenia sa čiarkované súradnice a čas na nečiarkované, a naopak.

Lorentzove transformácie majú tri zaujímavé a veľmi dôležité dôsledky:

1. Vektorové sčítavanie rýchlosti je neplatné a musí byť nahradené zložitejším vzťahom. Ak sa v sústave S' pohybuje objekt P (častica, bodový náboj a pod., pozri *obr. 6.28*) rýchlosťou u_x', potom v sústave S sa ten istý objekt P pohybuje rýchlosťou

$$u_x = \frac{u_x' + v_x}{1 + \dfrac{u_x' v_x}{c^2}} = \frac{u_x' + v_x}{1 + \beta_u' \beta} \tag{6.97}$$

kde $\beta_u' = u_x'/c$. (Ak $u_x' = c$, potom aj $u_x = c$, zatiaľ čo pri Galileiho transformácii $u_x = c + v_x$).

2. Dĺžka objektu (dráhy) pre pozorovateľa, ktorý sa pohybuje, je vždy kratšia, ako pre pozorovateľa v systéme spojenom s objektom, teda

$$\Delta l = \Delta l' \sqrt{1-\beta^2} < \Delta l' \tag{6.98}$$

(Lorentzova-FitzGeraldova kontrakcia dĺžok).

3. Časové úseky pre pozorovateľa v pevnej sústave sú vždy dlhšie ako pre pozorovateľa v pohybujúcej sa sústave, teda

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta t' \tag{6.99}$$

(Einsteinova dilatácia času).

Tieto základné princípy teórie relativity a skutočnosť že elektrický náboj je relativistický invariant využijeme pri hľadaní odpovede na otázku: Aké elektrické a magnetické polia $\boldsymbol{E}'$ a $\boldsymbol{B}'$ bude pozorovať pozorovateľ v sústave S', ak pozorovateľ v sústave S pozoruje polia $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$?

Pre naše úvahy využijeme najjednoduchšie typy homogénnych elektrických a magnetických polí, ktoré sme spoznali v našich doterajších úvahách. Je to elektrické pole medzi homogénne plošne nabitými, nekonečne veľkými rovinami, dané výrazom (2.48) a magnetická indukcia medzi týmito rovinami daná výrazom (6.69), ak sa náboje pohybujú vybraným smerom. Napríklad

$$\boldsymbol{E} = E_y \boldsymbol{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \boldsymbol{j} \qquad\qquad \boldsymbol{B} = B_z \boldsymbol{k} = \mu_0 J_x \boldsymbol{k} = \mu_0 \sigma v_x \boldsymbol{k} \tag{6.100}$$

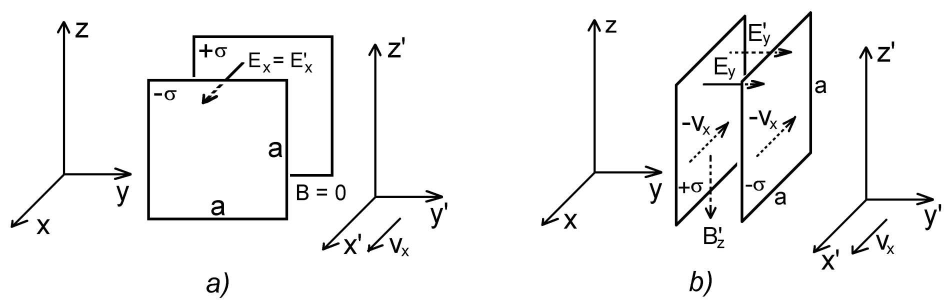
kde σ je plošná hustota náboja v_x je jeho rýchlosť, $\boldsymbol{j}$ je jednotkový vektor v smere osi y a $\boldsymbol{k}$ jednotkový vektor v smere osi z. V danom prípade je dvojica nabitých rovín planparalelná s rovinou xz. Využitím týchto jednoduchých polí a zákona superpozície možno dokázať transformačné vzťahy medzi zložkami polí v sústavách S a S', ktoré sú ináč výsledkom nie jednoduchých úvah teórie elektromagnetického poľa. Využijeme pritom tiež skutočnosť, že náboj je relativistický invariant, t. j. jeho veľkosť nezávisí od pohybového stavu.

Predpokladajme, že na nekonečných planparalelných rovinách sú rozložené náboje s plošnou hustotou $\pm\sigma$. V S – sústave vyjadríme túto hustotu ako pomer náboja Q, ktorý je rozložený na ploche štvorca so stranou a, teda

$$\sigma = \frac{Q}{a^2} \tag{6.101}$$

V ďalšom budeme pracovať s týmto vybraným štvorcovým "kondenzátorom" s plochou $A = a^2$ v S-sústave. "Kondenzátor" budeme otáčať do troch navzájom kolmých smerov, čím budeme postupne vytvárať polia pozdĺž jednotlivých súradníc x, y, z. Na *obr. 6.29a* je kondenzátor svojimi plochami uložený v rovine yz a vytvára elektrické pole

$$E_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{6.102}$$



Obr. 6.29

V sústave S je náboj na kondenzátore v pokoji, a preto tento pozorovateľ nepozoruje žiadne magnetické pole, teda

$$\boldsymbol{B} = 0 \tag{6.103}$$

Pre pozorovateľa v sústave S' sa skracujú dĺžky v smere osi x', teda nabité plochy sa približujú. Keďže pole nekonečného kondenzátora nezávisí od vzdialenosti nabitých rovín, bude aj tento pozorovateľ pozorovať rovnaké pole, teda

$$E_x{}' = E_x \tag{6.104}$$

V smere pohybu obidvaja pozorovatelia vidia rovnaké elektrické a žiadne magnetické pole.

Otočme teraz kondenzátor do roviny *xz* ako na *obr. 6.29b*. V *S* – sústave teraz existuje elektrické pole

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{6.105}$$

a žiadne magnetické pole. Iná situácia však nastala pre pozorovateľa S'. Pre neho sa v smere osi *x* dĺžky skracujú a pôvodný vybraný štvorec z nekonečného kondenzátora sa redukuje na obdĺžnik s plochou

$$A' = a^2\sqrt{1-\beta^2}$$

Keďže náboj je invariantný, musí sa pre pozorovateľa v S' zvýšiť hustota náboja na hodnotu

$$\sigma' = \frac{Q}{a^2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

a pozorovateľ vidí v kondenzátore elektrické pole intenzity

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.106a}$$

ktoré je väčšie ako to, čo vidí pozorovateľ v *S*. Zaujímavé je, že pozorovateľ v S' pozoruje aj magnetické pole, pretože z jeho hľadiska sa náboje $\pm\sigma'$ pohybujú rýchlosťou $-v_x$ a na rovinách vytvárajú plošný prúd $J_x' = \pm\sigma' v_x$. Medzi rovinami v S' je s ohľadom na (6.100) magnetické pole indukcie

$$B'_z = -\mu_0 J'_x = -\mu_0\sigma' v_x = -\frac{\mu_0\sigma v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\mu_0\varepsilon_0 E_y v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ak uvážime, že $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, možno pre magnetickú indukciu napísať konečný výraz

$$B'_z = -\frac{\frac{v_x E_y}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.106b}$$

Nakoniec otočíme kondenzátor do roviny *xy* a urobíme podobné úvahy pre novú situáciu. Čitateľ sa môže presvedčiť, že pozorovatelia v *S* a S' pozorujú nasledovné elektrické a magnetické polia:

– v *S* – sústave

$$E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad B = 0 \tag{6.107}$$

– v S' – sústave

$$E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad B'_y = \frac{\frac{v_x E_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.108}$$

Zaveďme označenie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{\parallel} &= E_x \boldsymbol{i} & \boldsymbol{E}'_{\parallel} &= E'_x \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{B}_{\parallel} &= B_x \boldsymbol{i} & \boldsymbol{B}'_{\parallel} &= B'_x \boldsymbol{i} \end{aligned} \tag{6.109}$$

pre zložky poľa pozdĺžne so súradnicou x, resp. x', a označenie

$$\boldsymbol{E}_{\perp} = E_y \boldsymbol{j} + E_z \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{E}'_{\perp} = E'_y \boldsymbol{j} + E'_z \boldsymbol{k} \tag{6.110a}$$

$$\boldsymbol{B}_{\perp} = B_y \boldsymbol{j} + B_z \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{B}'_{\perp} = B'_y \boldsymbol{j} + B'_z \boldsymbol{k} \tag{6.110b}$$

pre zložky poľa priečne k súradnici x (vo všeobecnosti priečne k tej súradnici, pozdĺž ktorej sa sústava S' pohybuje). S využitím týchto označení pri superpozícii získaných zložiek polí dostaneme výrazy, podľa ktorých sa elektrostatické pole pevného pozorovateľa v sústave S transformuje na polia pohyblivého v sústave S'. Tieto výrazy sú

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{E}'_{\parallel} &= \boldsymbol{E}_{\parallel} & \boldsymbol{B}'_{\parallel} &= \boldsymbol{B}_{\parallel} = 0 \\ \boldsymbol{E}'_{\perp} &= \frac{\boldsymbol{E}_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}} & \boldsymbol{B}'_{\perp} &= \frac{-\frac{(v \times \boldsymbol{E})_{\perp}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}} \tag{6.111}$$

Vidíme, že v tomto najjednoduchšom prípade, ak pevný pozorovateľ v S-sústave pozoruje iba elektrostatické pole, pohyblivý spojený so sústavou S' pozoruje okrem elektrického aj magnetické pole. Toto magnetické pole ako dôsledok pohybu v elektrickom poli spájame s pojmom posuvného prúdu.

Zaujímavý a dôležitejší je prípad, ak magnetické pole existuje aj v pevnej sústave S, t. j. v pevnej sústave tečú elektrické prúdy. Vytvorený kondenzátor umiestnime v rovine xz tak, ako na *obr. 6.30* a plošný náboj $\pm\sigma$ v pevnej sústave S necháme na ňom tiecť v smere osi x rýchlosťou u_x. V priestore kondenzátora bude elektrické pole

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{6.112}$$

a magnetické pole

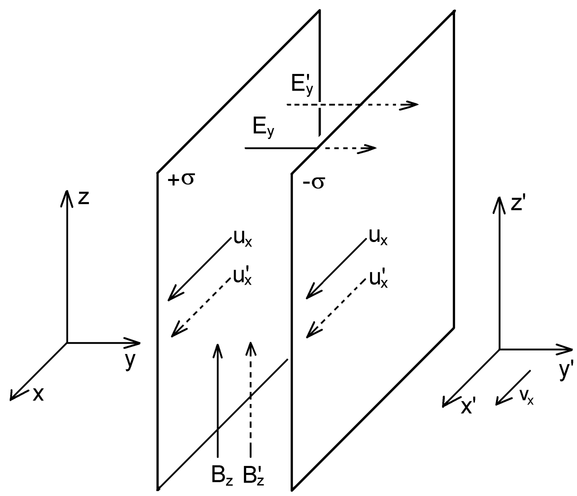
$$B_z = \mu_0 \sigma u_x = \frac{u_x}{c^2} E_y \tag{6.113}$$

V sústave S' sú elektrické a magnetické polia dané výrazmi

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \qquad\qquad B'_z = \mu_0 \sigma' u'_x \tag{6.114a,b}$$

kde σ' a u_x' je plošný náboj a jeho rýchlosť v sústave S'. Čiarkované veličiny treba teraz vyjadriť cez nečiarkované. Zaveďme označenia

$$\beta_u = \frac{u_x}{c} \qquad\qquad \beta'_u = \frac{u'_x}{c} \tag{6.115}$$



Obr. 6.30

V pevnej sústave sa pre náboje dĺžka v smere osi x skracuje, a teda platí

$$Q = \sigma a^2 \sqrt{1-\beta_u^2}$$

a v čiarkovanej sa takisto skracuje dĺžka x', teda

$$Q = \sigma' a^2 \sqrt{1-\beta_u'^2}$$

Porovnaním týchto výrazov dostaneme plošnú hustotu náboja v sústave S'

$$\sigma' = \sigma \frac{\sqrt{1-\beta_u^2}}{\sqrt{1-\beta_u'^2}} \tag{6.116}$$

ktorý sa tam pohybuje rýchlosťou u_x', a pre ktorú podľa vzťahu (6.97) platí

$$u'_x = \frac{u_x - v_x}{1 - \frac{u_x v_x}{c^2}} \tag{6.117}$$

Rýchlostný faktor $\beta_u' = u_x'/c$ možno pomocou (6.115) a (6.117) vyjadriť v tvare

$$\beta'_u = \frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta\beta_u} \tag{6.118}$$

a nakoniec plošnú hustotu náboja v sústave S' výrazom

$$\sigma' = \sigma \frac{\sqrt{1-\beta_u^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta\beta_u}\right)^2}} = \sigma \frac{1 - \beta\beta_u}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sigma \frac{1 - \frac{v_x u_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.119}$$

Ak teraz výraz (6.119) pre σ' dosadíme do (6.114a) dostaneme pre y-ovú zložku intenzity elektrického poľa v sústave S' výraz

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{1 - \frac{v_x u_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = E_y \frac{1 - \frac{v_x u_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_y - v_x B_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.120a}$$

kde bol tiež využitý vzťah (6.113). Zložku magnetickej indukcie B_y' dostaneme dosadením výrazov (6.117) a (6.119) pre u_x' a σ' do výrazu (6.114b), teda

$$B'_z = \mu_0 \sigma' u'_x = \mu_0 \sigma \frac{u_x - v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ak zase využijeme vzťahy (6.112) a (6.113), výraz pre magnetickú zložku poľa dostane konečný tvar

$$B'_z = \frac{B_z - \frac{v_x E_y}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.120b}$$

Celú úvahu možno zopakovať pre kondenzátor, ktorého roviny sú planparalelné s rovinou xy a prúdy majú v sústave S plošné hustoty $\pm\sigma u_x$. Čitateľ sa môže presvedčiť, že transformačné vzťahy pre existujúce priečne zložky polí sú tvaru

$$E'_z = \frac{E_z + v_x B_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad\qquad B'_y = \frac{B_y - \frac{v_x E_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.121}$$

Nakoniec, ak kondenzátor otočíme do roviny yz, vznikne v ňom elektrické pole v smere osi x, ktoré je rovnaké pre obidvoch pozorovateľov z dôvodov uvedených už skôr. V tomto prípade platí

$$E_x' = E_x \tag{6.122a}$$

Treba ešte ukázať, že aj zložky magnetického poľa v smere pohybu sú pre obidvoch pozorovateľov rovnaké. Za tým účelom možno uvažovať páskové vedenie šírky a uložené v smere osi y v rovine xy, ktorým tečie prúd I_y pozdĺž súradnice y ako na *obr. 6.31*. Magnetická indukcia od takého prúdu má medzi páskami smer osi x. Prúd vo vedení

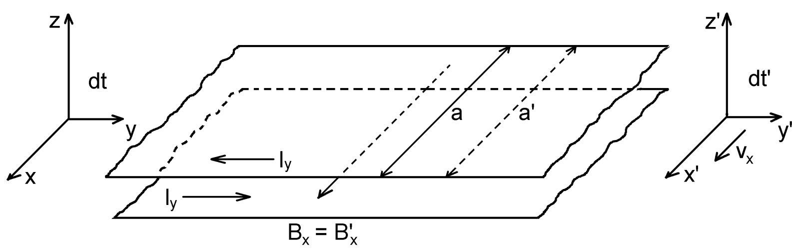
$$I_y = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \sigma v_y a$$

a zložka magnetickej indukcie v S – sústave je

$$B_x = \mu_0 \sigma v_y = \mu_0 \frac{I_y}{a} = \mu_0 \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Pozorovateľ v sústave S' pozoruje magnetické pole

$$B_x' = \mu_0 \frac{1}{a'}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t'}$$



Obr. 6.31

Pre neho sa ale dĺžka a skracuje na veľkosť

$$a' = a\sqrt{1-\beta^2}$$

a časový interval dt sa predlžuje na

$$\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

takže $a'\mathrm{d}t' = a\mathrm{d}t$ a teda

$$B_x' = B_x \tag{6.122b}$$

Odvodené výrazy možno teraz vyjadriť ako pozdĺžne a priečne zložky poľa pomocou vyjadrení (6.109) a (6.110). Tak pre pozdĺžne zložky elektrického a magnetického poľa dané výrazmi (6.122) platí

$$\boldsymbol{E}_{\parallel}' = \boldsymbol{E}_{\parallel} \qquad \boldsymbol{B}_{\parallel}' = \boldsymbol{B}_{\parallel} \tag{6.123}$$

Priečna zložka elektrického poľa s využitím výrazov (6.120) a (6.121) je tvaru

$$\boldsymbol{E}_{\perp}' = E_y'\boldsymbol{j} + E_z'\boldsymbol{k} = \frac{E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k} + (-v_x B_z\boldsymbol{j} + v_x B_y\boldsymbol{k})}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\boldsymbol{E}_{\perp} + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.124a}$$

a podobne priečna zložka magnetického poľa

$$\boldsymbol{B}_{\perp}' = \frac{\boldsymbol{B}_{\perp} - \dfrac{(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})_{\perp}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.124b}$$

Nakoniec prepíšeme transformačné vzťahy do formy:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \boldsymbol{E}'_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel} & \boldsymbol{B}'_{\parallel} = \boldsymbol{B}_{\parallel} \\[2ex] \boldsymbol{E}_{\perp}' = \dfrac{\boldsymbol{E}_{\perp} + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}} & \boldsymbol{B}_{\perp}' = \dfrac{\boldsymbol{B}_{\perp} - \dfrac{(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})_{\perp}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array}} \tag{6.125}$$

Výrazy (6.125) sú najvšeobecnejšie transformačné vzťahy medzi poliami v pevnej a v pohyblivej sústave. Možno si všimnúť, že ak $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\parallel} + \boldsymbol{B}_{\perp} = 0$, prechádzajú na výrazy (6.111), keď v pevnej sústave S niet magnetického poľa.

Nechcem, aby u čitateľa vznikol mylný dojem, že tieto transformácie sú dôležité iba pri extrémne vysokých t. j. relativistických alebo ultrarelativistických rýchlostiach blízkych rýchlostiam svetla, s ktorými sa teória relativity obyčajne spája. Takéto rýchlosti, časté vo fyzike elementárnych častíc, sa v bežnom živote nevyskytujú. Vzťahy však platia a majú závažné dôsledky aj v reálnom svete bežných nízkych rýchlostí. Ak $v \ll c$, tak $\beta \to 0$ a menovatele transformačných vzťahov možno považovať za jednotky. V tom prípade

$$\boldsymbol{E}'_{\perp} = \boldsymbol{E}_{\perp} + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_{\perp} \tag{6.126}$$

Celkové pole v priestore je súčtom pozdĺžnej a priečnej zložky ($\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'_{\parallel} + \boldsymbol{E}'_{\perp}$, atď.), a tak môžeme tiež napísať

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{6.127}$$

Ak sa v čiarkovanej sústave nachádza napr. bodový náboj q, bude naň pôsobiť sila

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}' = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{6.128}$$

Výraz (6.129) je nám už známa Lorentzova sila, teraz získaná ako dôsledok relativistickej transformácie.

Možný je aj iný veľmi dôležitý pohľad na výraz (6.126), resp. (6.127). V čiarkovanej sústave pozorovateľ vidí dve intenzity elektrického poľa. Jednu obyčajnú $\boldsymbol{E}$, ktorú pozoruje aj pozorovateľ v pevnej sústave, a druhú "neobyčajnú" $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, ktorá súvisí s magnetickým poľom a pohybom. Ak sa napríklad pozorovateľ posadí do čiarkovanej sústavy na *obr. 6.30* s kovovou tyčou v ruke v smere osi y, vznikne podľa vzťahu (6.120a) pozdĺž tyče popri intenzite E_y dodatočná intenzita elektrického poľa $-v_x B_z$, ktorá na tyči dĺžky l vytvorí elektrické napätie veľkosti $v_x B_z l$. Pretože čitateľ už nejakú fyzikálnu prípravu má, vznik napätia účinkom magnetického poľa a pohybu, musí v ňom evokovať spomienky na elektromagnetickú indukciu. Druhý člen vo výraze pre $\boldsymbol{E}'$ je skutočne magnetickým poľom indukovaná intenzita elektrického poľa a keby ju nebol v roku 1831 svojimi experimentmi objavil Michael Faraday, bol by ju možno zhruba o tridsať rokov neskôr objavil na písacom stole James C. Maxwell, alebo o ďalšie polstoročie neskôr Albert Einstein.

Všimnime si teraz druhý priečny výraz pre $\boldsymbol{B}'_\perp$. Ak $\beta \to 0$, potom

$$\boldsymbol{B}'_\perp = \boldsymbol{B}_\perp - \frac{(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})_\perp}{c^2} \tag{6.129}$$

a pre celkovú magnetickú indukciu

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}}{c^2} \tag{6.130}$$

Ako vidieť, aj magnetická indukcia v pohyblivej sústave sa skladá z dvoch častí. Z obyčajnej $\boldsymbol{B}$ a zo "záhadnej" časti $-(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E})/c^2$. Na prvý pohľad by sa zdalo, že vzhľadom na prítomnosť c^2 v menovateli je to bezvýznamný príspevok k magnetickej indukcii. Ak si ale uvedomíme, že v našom "kondenzátore" rádová veľkosť intenzity elektrického poľa E je σ/ε_0, potom rádová veľkosť tejto indukcie je $\mu_0 \sigma v$, čo už neznie tak presvedčivo o jeho bezvýznamnosti, pretože σv je veľkosť plošného prúdu na doskách. Čo teda možno povedať o jeho fyzikálnom význame? Dôležité je, že podľa toho člena **elektrické pole môže byť príčinou vzniku magnetického poľa**. Ak zároveň vezmeme do úvahy jav elektromagnetickej indukcie, potom môže vzniknúť svojrázny kolotoč – magnetické pole produkuje elektrické pole, to znovu produkuje magnetické pole, to znovu produkuje elektrické …, čo v konečnom dôsledku vedie na vznik elektromagnetických vĺn.

V odseku 6.3 sme zaviedli pojem posuvného prúdu, ktorého hustota vo vákuu je daná výrazom

$$\boldsymbol{J}_p = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Je to nejoulovský prúd, ktorý sa spolu s vodivým prúdom podieľa na tvorbe magnetického poľa a jeho účinok je vyjadrený zákonom celkového prúdu. Druhý člen na pravej strane výrazu (6.130) je práve vyjadrením účinku tohto posuvného prúdu, o čom sa možno presvedčiť podrobnejšou analýzou.

Na ilustráciu Lorentzových transformácií posúdime elektromagnetické polia základného elektrického objektu – polia bodového náboja q. Predpokladajme, že v sústave S sa náboj pohybuje rýchlosťou $-v_x$ spolu so sústavou S' a v čase $t = 0$ začiatky súradníc splývajú. V sústave S' je náboj nepohyblivý a pozorovateľ v nej vidí iba radiálne elektrické pole

$$\boldsymbol{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}$$

ktoré možno rozložiť na tri rovnako veľké zložky v smere súradnicových osí x', y', z', a žiadne magnetické pole. V pevnej sústave pozoruje pozorovateľ podľa vzťahov (6.111) v smere osi x elektrické pole veľkosti

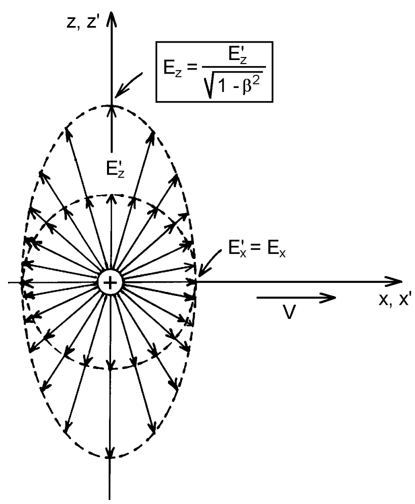
$$E_x = E'_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}$$

a v priečnych smeroch y a z polia

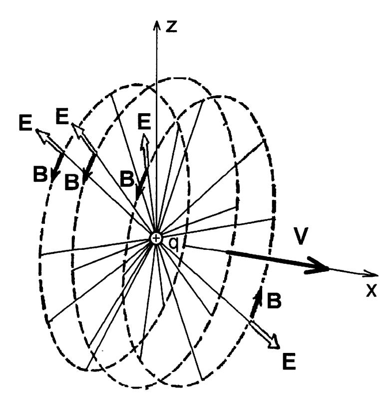
$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad\qquad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Obidve tieto zložky sú rovnaké a väčšie ako E_x, takže pôvodne guľové pole radiálnych siločiar v sústave S' sa zmení na elipsoidálne pole v sústave S ako na *obr. 6.32*. V sústave S pozorovateľ vidí podľa vzťahov (6.111) aj magnetické pole

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}_\perp$$



Obr. 6.32



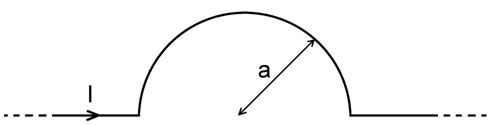
Obr. 6.33

kde $\boldsymbol{v} = v_x\, \boldsymbol{i}$ je rýchlosť, ktorou sa náboj q pohybuje v sústave S a $\boldsymbol{E}_\perp = E_y\, \boldsymbol{j} + E_z\, \boldsymbol{k}$ je priečne elektrické pole v sústave S. Magnetické pole je v tejto sústave tiež priečne a indukčné čiary majú tvar koaxiálnych kružníc s osou v smere pohybu náboja (pozri *obr. 6.33*). V súvislosti s týmto príkladom čitateľovi odporúčam riešiť tiež úlohu 187.

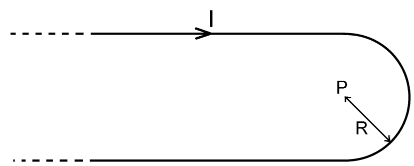
Záverom môžeme konštatovať, že Lorentzove transformácie polí, okrem iného pohľadu na elektrodynamiku nás doviedli k dvom základným princípom elektromagnetizmu – k elektromagnetickej indukcii a k posuvnému prúdu, bez ktorých si nevieme predstaviť dnešnú elektrickú energetiku a modernú komunikáciu prostredníctvom elektromagnetických vĺn. Nepoužili sme pri tom nič iné, iba Gaussov a Ampérov zákon na vyjadrenie elektrického a magnetického poľa dvojice nábojových plôch a samozrejme Lorentzove transformačné vzťahy pre súradnice a čas.

Úlohy 152 – 193

152. Nekonečný priamy vodič vytvára v istom mieste polkružnicu s polomerom a podľa *obr. 152*. Vodičom tečie prúd I. Vypočítajte magnetickú indukciu v strede polkružnice.



Obr. 152



Obr. 153

153. Nekonečný vodič je ohnutý do tvaru U podľa *obr. 153*. Polomer ohybu je R. Vodičom tečie prúd I. Vypočítajte magnetickú indukciu v bode P (v strede ohybovej kružnice) a určite jej smer.

154. Vypočítajte magnetickú indukciu budenú prúdom I v štvorcovej slučke so stranou a, v bode P na osi slučky vo vzdialenosti d od jej stredu (*obr. 154*).

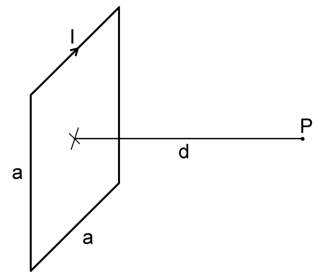
155. V laboratórnej praxi je často potrebné vysokohomogénne magnetické pole v relatívne veľkom objeme. Takéto pole možno vytvoriť vo veľmi dlhom solenoide, avšak veľmi dlhý solenoid je nepraktický a okrem toho priestor, kde je maximálna homogenita poľa (stred solenoidu) je zle prístupný. Vysokohomogénne pole možno vytvoriť aj sústavou dvoch tenkých axiálnych cievok (paralelných kruhových prúdov), ktoré sa nazývajú Helmholtzovými cievkami (*obr. 155*). Každá z cievok má n závitov. Preskúmajte magnetické pole v polovičnej vzdialenosti cievok na ich osi (bod O). Za tým účelom:

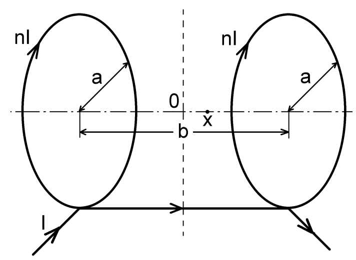
a) napíšte výraz pre magnetickú indukciu na osi cievok vo vzdialenosti x od bodu O,

b) predpokladajte, že $x \ll a, b$ (a – polomer cievok, b vzdialenosť cievok). Rozviňte výraz pre magnetickú indukciu do MacLaurinovho radu, v ktorom zanedbajte členy s mocninami vyššími ako x^2,

c) zistite ako treba voliť vzájomný súvis medzi a a b, aby v danom priblížení pole nezáviselo od x,

d) napíšte výraz pre magnetickú indukciu v bode O (a v jeho blízkom okolí).



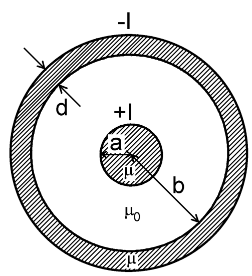


Obr. 154 *Obr. 155*

156. Tenký dielektrický disk (Rowlandov disk[1]) s polomerom R, nabitý plošným nábojom σ sa otáča okolo svojej rotačnej osi uhlovou rýchlosťou ω. Vypočítajte magnetickú indukciu na osi rotácie vo vzdialenosti z od stredu disku.

157. Vypočítajte magnetickú indukciu B v okolí dvoch priamych, paralelných, nekonečne dlhých vodičov vo vzájomnej vzdialenosti $2a$, ktorými tečie prúd I:
a) v obidvoch vodičoch v súhlasnom smere,
b) v obidvoch vodičoch v opačnom smere.

158. Koaxiálny kábel pozostáva z vnútorného valcového vodiča s polomerom a a hrubého plášťa s vnútorným polomerom b a s hrúbkou d (*obr. 158*). Materiál vodičov má permeabilitu $\mu = \mu_r\mu_0$, dutina kábla má permeabilitu $\mu = \mu_0$. Káblom tečie prúd I (vo vnútornom vodiči a v plášti v navzájom opačných smeroch). Vypočítajte magnetickú indukciu ako funkciu vzdialenosti od osi kábla.



Obr. 158

159. V okolí nekonečného solenoidu sa magnetické pole obyčajne považuje za nulové. V skutočnosti – v dôsledku špirálového stúpania závitov – existuje pozdĺžna zložka prúdu v solenoide, ktorá vytvára v okolí solenoidu slabé magnetické pole. Predpokladajte, že solenoid s polomerom a je navinutý z drôtu s polomerom δ, pričom $\delta \ll a$. Odhadnite pomer magnetickej indukcie na povrchu solenoidu a v jeho vnútri za predpokladu, že solenoidom tečie prúd I.

160. Solenoid dlhý 30 cm je zhotovený z drôtu s priemerom 0,2 mm s odporom 0,65 Ω/m. Na jeden milimeter pripadá 5 závitov a priemer solenoidu je 6 cm. Solenoid je pripojený na 24 V zdroj so zanedbateľným vnútorným odporom. Vypočítajte magnetickú indukciu v strede solenoidu a rozptýlený tepelný výkon v solenoide.

---

[1] Rowland, H. A., Amer. Journ. of Science **3,** XV, 30 – 38, 1878

161. V nekonečnom vodivom valci s polomerom a je vyvŕtaná valcová dutina, ktorej os je paralelná s osou valca (*obr. 161*). Valcom tečie prúd s konštantnou hustotou $\boldsymbol{J}$. Vypočítajte magnetickú indukciu v dutine.

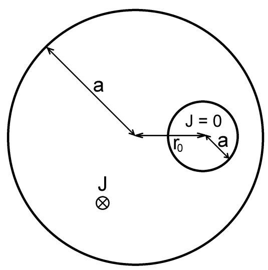
162. Vychádzajúc z Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

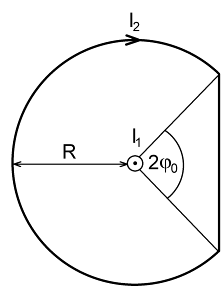
dokážte, že v ľubovoľnom bode P v okolí uzavretej prúdovej slučky l s prúdom I, možno magnetickú indukciu vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \operatorname{grad} \Omega = -\operatorname{grad}\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega\right) = -\operatorname{grad} V_m$$

kde Ω je priestorový uhol, pod ktorým slučku vidieť z bodu P.



Obr. 161



Obr. 163

163. V uzavretom obvode tvorenom časťou kružnice s polomerom R a priamym úsekom pod uhlom $2\varphi_0$ vzhľadom na stred kružnice (*obr. 163*) tečie prúd I_2. Kolmo na rovinu obvodu a stredom kružnice prechádza priamy vodič, ktorým tečie prúd I_1. Vypočítajte moment dvojice síl, pôsobiaci na obvod.

164. Vypočítajte magnetický moment dutej gule s polomerom R a s nábojom Q rovnomerne rozloženým na jej povrchu, ak sa guľa otáča s uhlovou rýchlosťou ω. Vypočítajte gyromagnetický pomer gule, t. j. pomer magnetického momentu k mechanickému momentu (moment hybnosti), ak celková hmotnosť gule je M.

165. Vypočítajte magnetický moment rotujúcej dielektrickej gule s polomerom R a s nábojom Q, rovnomerne rozloženým v objeme gule. Uhlová rýchlosť rotácie je ω. Vypočítajte gyromagnetický pomer gule, ak jej hmotnosť je M.

166. Zemské magnetické pole má vlastnosti magnetického poľa dipólu. Vypočítajte magnetický moment zemského magnetického dipólu, ak je známe, že na severnom magnetickom póle je magnetická indukcia $0{,}62.10^{-4}$ T. Aký ekvivalentný prúd by musel tiecť na rovníku pre dipól s vypočítaným momentom? Za polomer Zeme považujte hodnotu 6.10^6 m.

167. Podľa jednej zo zavrhnutých hypotéz o pôvode zemského magnetizmu je magnetické pole Zeme dôsledkom rovnomerne rozloženého náboja v celom objeme Zeme. Vychádzajúc z tejto hypotézy, vypočítajte objemovú hustotu náboja vo vnútri Zeme, ak magnetické pole na póle má vertikálny smer a veľkosť $0{,}62.10^{-4}$ T. Polomer Zeme je približne 6.10^6 m. Koľko neskompenzovaných elementárnych nábojov by obsahoval 1 m^3? Aká by bola intenzita elektrického poľa na povrchu Zeme v dôsledku existencie takýchto nábojov?

168. Koaxiálny kábel pozostáva z vnútorného dutého vodiča s polomerom $D/2$ = 1 cm a vonkajšieho vodiča s polomerom a = 5 cm. Hrúbka stien vodičov je zanedbateľne malá. Vnútorný vodič je obalený feritovou vrstvou hrubou d = 1 cm s relatívnou permeabilitou $\mu_r = \mu/\mu_0 = 50$. Zvyšok vnútra koaxiálneho kábla je vyplnený materiálom s permeabilitou $\mu_r = 1$ (*obr. 168*). Koaxiálnym káblom tečie prúd 1 A. Vypočítajte energiu magnetického poľa na meter dĺžky kábla. Koľko percent energie je uskladnených vo ferite? Takáto úprava kábla feritom zvyšuje jeho charakteristickú impedanciu (vlnový odpor).

169. Vypočítajte energiu magnetického poľa Zeme v celom jej nekonečnom okolí. Predpokladajte, že magnetické pole Zeme je poľom magnetického dipólu s indukciou na rovníku $3{,}1.10^{-5}$ T. Posúďte, či by výbuch atómovej bomby s energiou 1 megatony trinitrotoluénu (~$4{,}2.10^{15}$ J) vo vysokých vrstvách atmosféry mohol ovplyvniť magnetické pole Zeme.

170. Podľa Bohrovej teórie obieha elektrón v atóme vodíka po kruhovej dráhe s polomerom

$$a = \frac{h^2}{\pi\mu_0 c^2 m_e e^2} = 0{,}529.10^{-10}\ \text{m}$$

a s obežnou rýchlosťou

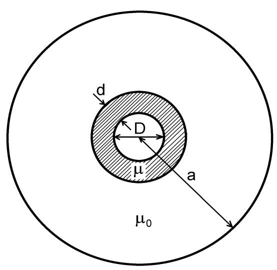
$$v = \frac{\mu_0 c^2 e^2}{2h} = 2{,}187.10^{6}\ \text{m/s}$$

kde e je náboj a m_e je hmotnosť elektrónu, $h = 6{,}626.10^{-34}$ J.s je Planckova konštanta, μ_0 je magnetická konštanta (permeabilita vákua) a c je rýchlosť svetla vo vákuu. Vypočítajte:

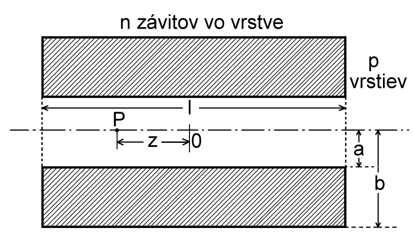
a) aký ekvivalentný prúd zodpovedá obiehajúcemu elektrónu v atóme,

b) aká je magnetická indukcia v mieste protónu,

c) aký je orbitálny (zviazaný s pohybom elektrónu okolo jadra) magnetický moment elektrónu, ktorý je atomárnou jednotkou magnetického momentu a nazýva sa Bohrov magnetón.



Obr. 168



Obr. 171

171. Hrubá cievka má p vrstiev drôtu, pričom v každej vrstve je n závitov. Cievka má dĺžku l, vnútorný polomer a, vonkajší polomer b (*obr. 171*). Vypočítajte magnetickú indukciu na osi cievky v bode P, vo vzdialenosti z od jej stredu.

172. Veľmi dlhý solenoid má n závitov na jednotku dĺžky. Nájdite miesto na osi solenoidu, v ktorom sila pôsobiaca na malý objem slabomagnetického materiálu je maximálna.

173. Vektor magnetickej indukcie je daný výrazom

$$\boldsymbol{B} = k\frac{\boldsymbol{J}_z \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

kde $\boldsymbol{J}_z$ je konštantný vektor v smere osi z, $\boldsymbol{r}$ je vektor kolmý na os z a k je konštanta. Vypočítajte rotáciu vektora $\boldsymbol{B}$.

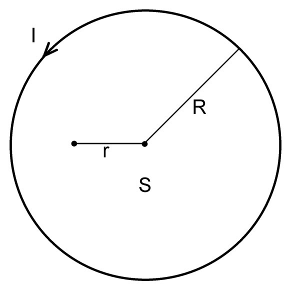
174. Vektor magnetickej indukcie v cylindrických súradniciach je daný výrazom

$$\boldsymbol{B} = k\boldsymbol{J}_z \times \boldsymbol{r}$$

kde $\boldsymbol{J}_z$ je konštantný vektor v smere osi z a k je konštanta. Vypočítajte rotáciu vektora $\boldsymbol{B}$.

175. Veľmi dlhý (nekonečne) solenoid s polomerom 3 cm je navinutý z tenkého drôtu s priemerom 0,3 mm tak, že závity sú tesne vedľa seba. Vypočítajte aké magnetické pole v solenoide spôsobí roztrhnutie drôtu, ak je známe, že materiál, z ktorého je drôt vyrobený má pevnosť v ťahu 2.10^8 N/mm^2.

176. Dielektrická guľa s hmotnosťou M nabitá rovnomerne v celom objeme nábojom Q sa otáča okolo jedného zo svojich priemerov uhlovou rýchlosťou ω. Guľa je umiestnená v magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$ tak, že smer poľa zviera s osou rotácie uhol ϑ. Pod účinkom magnetického poľa bude guľa vykonávať precesný pohyb okolo smeru magnetického poľa, podobne ako gyroskop v gravitačnom poli. Vypočítajte uhlovú rýchlosť precesie gule. Pri výpočte využite skutočnosť, že magnetický moment $\boldsymbol{m}$ rotujúcej gule je zviazaný s jej momentom hybnosti $\boldsymbol{L}$ vzťahom $\boldsymbol{m} = \gamma\boldsymbol{L}$, kde γ je gyromagnetický pomer (pozri úlohu 165).



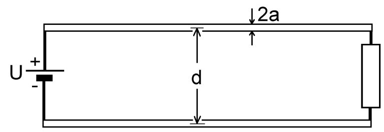
Obr. 177

177. Vypočítajte magnetickú indukciu ako funkciu vzdialenosti r od stredu kruhového závitu, v ktorom tečie prúd I (*obr. 177*). Porovnajte vypočítanú magnetickú indukciu s indukciou v strede závitu ($\mu_0 I/2R$).

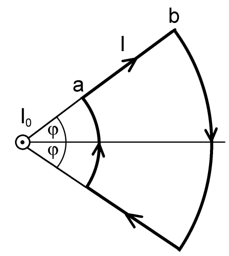
178. Vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$ formálne rovnako súvisí s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$, ako magnetická indukcia s prúdovou hustotou $\boldsymbol{J}$, t. j. rot$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ a rot$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}$. Aké tvrdenie týkajúce sa $\boldsymbol{A}$ zodpovedá tvrdeniu, že integrál po uzavretej dráhe l z magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ sa rovná μ_0-násobku celkového prúdu ohraničeného čiarou l? Preskúmajte magnetickú indukciu od prúdu v nekonečne dlhom valcovom vodiči pri konštantnej prúdovej hustote vo vodiči. Na základe uvedenej analógie nájdite vektorový potenciál nekonečne dlhého solenoidu, v ktorom $\boldsymbol{B}$ = konšt. vektor ako funkciu vzdialenosti od osi solenoidu. Všimnite si, že vektorový potenciál sa nerovná nule v oblasti, kde $\boldsymbol{B} = 0$ (v okolí solenoidu).

179. Dvojvodičové vedenie podľa *obr. 179* je zakončené odporom R (polomer vodičov je a, osová vzdialenosť d, $a \ll d$). Na vstup vedenia je pripojený zdroj s napätím U. Aký musí byť odpor R, aby magnetická sila medzi vodičmi bola kompenzovaná elektrickou silou?

180. V magnetickom poli veľmi dlhého priameho vodiča s prúdom I_0 sa nachádza obvod s prúdom I podľa *obr. 180*. Rovina obvodu je kolmá na vodič. Nájdite moment dvojice síl pôsobiaci na tento obvod.



Obr. 179



Obr. 180

181. Bodový náboj q sa pohybuje vo vákuu priamočiaro rovnomerne s rýchlosťou v. Využitím Maxwellovej rovnice pre cirkuláciu vektora $\boldsymbol{H}$ nájdite intenzitu magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ v ľubovoľnom bode P. Platí: $v \ll c$.

182. Doskový kondenzátor s doskami v tvare kruhov s polomerom b a vzdialenosťou dosiek l je nabitý na potenciálový rozdiel U a v čase $t = 0$ je prepojený odporom R (*obr. 182*).

a) Nájdite časovú závislosť napätia na kondenzátore.

b) Určite časovú závislosť intenzity elektrického poľa medzi doskami.

c) Určite časovú závislosť intenzity magnetického poľa medzi doskami vo vzdialenosti r od spojnice stredov dosiek, pričom $r < b$. Výpočet urobte z posuvného prúdu. Systém je vo vákuu a platí $b \gg l$.

183. Kondenzátor pozostávajúci z dvoch kruhových planparalelných dosiek polomeru a je nabitý nábojmi $\pm Q_0$. V čase $t = 0$ sa stredy dosiek prepoja tenkým vodičom (*obr. 183*), ktorého odpor R je tak veľký, že možno zanedbať indukčnosť systému. Nájdite časové a priestorové závislosti:

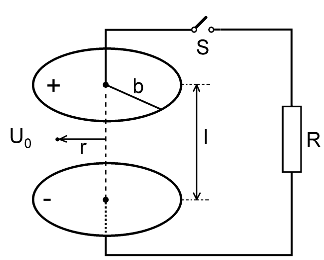
a) plošnej hustoty nábojov na doskách kondenzátora,

b) celkového náboja,

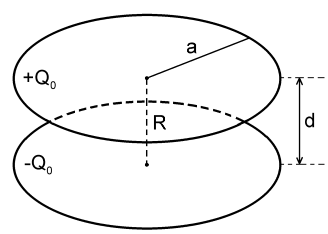
c) prúdu vodičom,

d) posuvného prúdu,

e) magnetickej indukcie.



Obr. 182



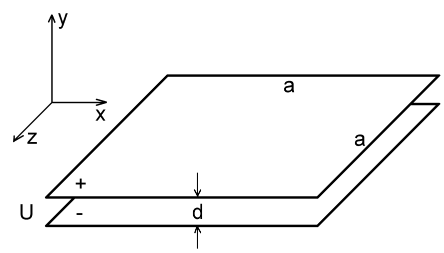
Obr. 183

184. Kondenzátor pozostáva z dvoch štvorcových dosiek so stranami dlhými $a = 20$ cm, uložených planparalelne s rovinou xz pravouhlého súradnicového systému podľa *obr. 184*. Vzdialenosť dosiek je $d = 2$ mm a kondenzátor je nabitý na potenciálny rozdiel $U = 300$ V.

a) Vypočítajte počet elektrónov na zápornej doske kondenzátora.

b) Pozorovateľ sa pohybuje rýchlosťou $0{,}6c$ v smere osi x. Vypočítajte v jeho sústave: rozmery kondenzátora, počet elektrónov na zápornej doske a intenzitu elektrického poľa v kondenzátore.

c) Odpovedzte na otázky bodu b) ak sa pozorovateľ pohybuje rýchlosťou $0{,}6c$ v smere osi y.



Obr. 184

185. Elektrické pole v laboratórnej sústave má zložky

$$E_x = E_0 \cos\varphi \qquad E_y = E_0 \sin\varphi \qquad E_z = 0$$

Nájdite elektrické a magnetické polia v sústave, ktorá sa pohybuje v smere osi y rýchlosťou v. Riešte numericky pre: $E_0 = 33$ V/m, $\varphi = 30°$, $v = 0{,}6c$.

186. Dva elektróny sa pohybujú po paralelných dráhach vo vzdialenosti r rýchlosťou v na jednej úrovni podľa *obr. 186*. Vypočítajte:

a) silu, ktorou elektróny na seba pôsobia v sústave pohybujúcej sa spolu s nimi,

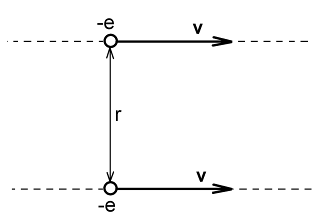
b) silu, ktorou na seba pôsobia v laboratórnej sústave.

Pretransformujte priamo silu vypočítanú podľa bodu a) do laboratórnej sústavy a porovnajte ju s výsledkom podľa bodu b). Aká bude sila v laboratórnej sústave pri malých rýchlostiach elektrónov ak $v \to c$?

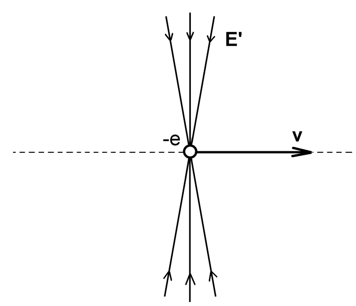
187. Pri ultrarelativistických rýchlostiach elektrónov, t. j. ak

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} >> 1$$

je elektrické pole elektrónu prakticky celé sústredené v rovine kolmej k smeru pohybu a v jeho blízkom okolí podľa *obr. 187*. Vo výraze pre elektrické pole pohybujúceho sa elektrónu



Obr. 186



Obr. 187

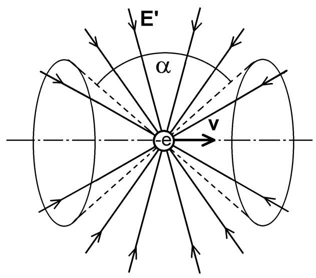
$$E' = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} \frac{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2\vartheta\right]^{3/2}} \qquad \{1\}$$

možno v tomto prípade položiť

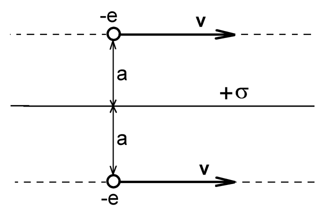
$$\vartheta = \pi/2 \pm \varepsilon$$

kde $|\varepsilon| \ll 1$. Dokážte, že v ultrarelativistickom prípade vzťah {1} prejde na tvar

$$E' = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\frac{\gamma}{(1+\gamma^2\varepsilon^2)^{3/2}} \qquad \{2\}$$



Obr. 188



Obr. 192

188. Mierou relativistického "stlačenia" siločiar elektrického poľa pohybujúceho sa náboja je uhol α medzi dvoma kónickými plochami podľa *obr. 188*, vymedzujúcimi polovicu toku elektrického poľa. Využitím výrazu {2} vypočítajte uhol α v ultrarelativistickom prípade.

189. V sústave *xyz* je dané elektrické pole a magnetické pole so zložkami E_y a B_z. Nájdite inerciálnu sústavu, v ktorej je:

a) elektrické pole nulové,

b) magnetické pole nulové.

Vypočítajte zložky polí v týchto sústavách.

190. Bodový náboj q je umiestnený vo vzdialenosti a od nekonečnej priamky nabitej dĺžkovým nábojom λ. Vypočítajte silu, ktorá pôsobí na náboj v laboratórnej sústave, v ktorej je náboj i priamka v pokoji a v sústave, ktorá sa pohybuje pozdĺž priamky rýchlosťou v. Náboje q a λ sú rovnakého znamienka.

191. Dokážte, že veličiny

a) $\boldsymbol{E}.\boldsymbol{B}$,

b) $E^2 - c^2B^2$

sú invariantné k špeciálnym Lorentzovým transformáciám.

192. Dva elektróny sa pohybujú rýchlosťou v vo vzdialenosti a po oboch stranách nekonečnej roviny nabitej plošným nábojom $+\sigma$ (*obr. 192*). Vypočítajte:

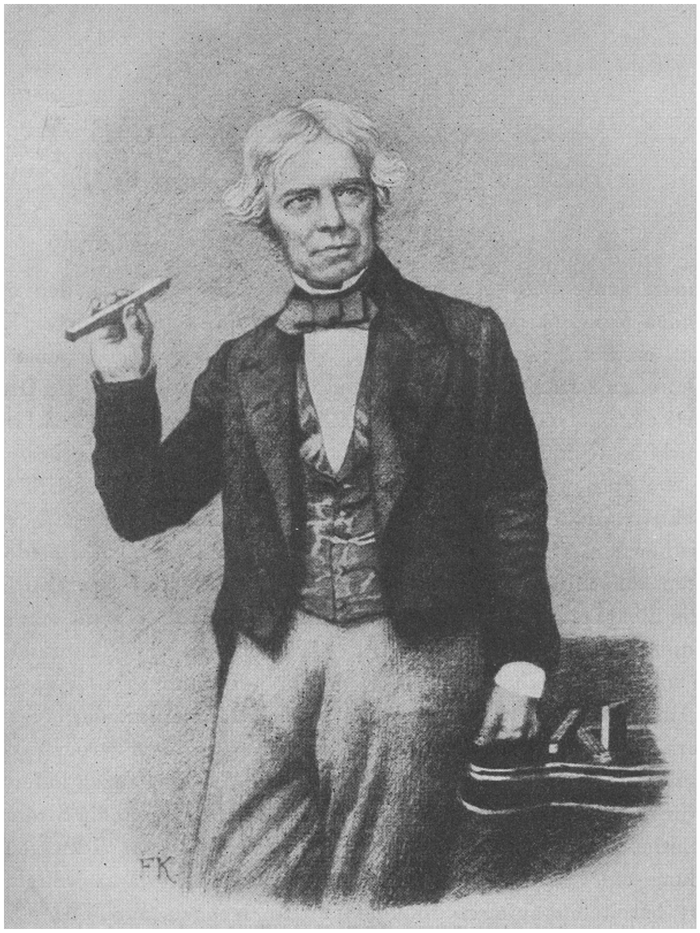
a) veľkosť plošného náboja, pri ktorom sila pôsobiaca na elektróny je nulová,

b) pomer plošných nábojov z prípadu a) pre elektróny s energiou 500 MeV a elektróny v pokoji.

193. Dve nekonečne dlhé paralelné tyče sú nabité nábojom s hustotou $\pm\lambda$ na jednotku dĺžky a umiestnené vo vzdialenosti d. Vypočítajte silu, ktorou na seba tyče pôsobia:

a) v sústave spojenej s tyčami,

b) v sústave pohybujúcej sa rýchlosťou v pozdĺž tyčí.



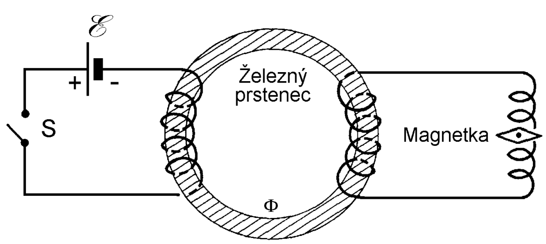
Michael FARADAY
(1791 Newington pri Londýne – 1867 Hampton Court)

7 ELEKTROMAGNETICKÁ INDUKCIA

7.1 EXPERIMENTÁLNE ZÁKLADY ELEKTROMAGNETICKEJ INDUKCIE

"Geheimnisvoll am lichten Tag
Lässt sich Natur des Schleiers nicht berauben,
Und was sie deinem Geist nicht offenbaren mag,
Das zwingst du ihr nicht ab mit Hebeln und mit Schrauben"
Goethe: "Faust"[1]

V roku 1831 vykonal anglický učenec Michael Faraday sériu pokusov, ktoré nadväzovali na pokusy jeho francúzskeho súčasníka André Marie Ampère, a ktorých cieľom bol výskum vzájomných súvislostí medzi prúdmi a magnetickými poliami. Ampère a pred ním aj Oersted svojimi experimentmi dokázali, že elektrický prúd je zdrojom magnetického poľa. Faraday ako skúsený experimentátor logicky očakával, že magnetické pole by mohlo byť zdrojom elektrického prúdu. S takýmto očakávaním vykonal množstvo experimentov, ktorých spoločná idea plynie z *obr. 7.1.* Na železnom prstenci sú navinuté dve cievky, z ktorých jedna je pripojená cez spínač S ku zdroju napätia $\mathscr{E}$ a druhá ku galvanometru – citlivému zariadeniu na meranie elektrických prúdov. Vo Faradayových experimentoch ako galvanometer slúžila malá dvojitá cievočka so zavesenou magnetkou v jej štrbine. Po zopnutí spínača tečie primárnou cievkou stály elektrický prúd, ktorý v cievke vytvorí magnetické pole. Železný prstenec "prenesie" prakticky celý indukčný tok prvej cievky do druhej, sekundárnej, a dalo by sa očakávať, že sa objaví "zrkadlový efekt" a v sekundárnej cievke vznikne elektrický prúd, ktorý galvanometer



Obr. 7.1

[1] Bo pretajomná príroda
si ani za dňa závoj strhnúť nedá,
čo duchu tvojmu sama zjavne nepodá,
to heverom a skrutkou nevyrveš jej, beda
Preložil M. M. Dedinský, 1966

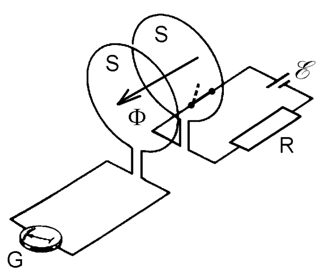
bude registrovať. Príroda sa však nezachovala podľa učencovho očakávania a predpokladaný prúd v sekundárnej cievke sa neobjavil. Faraday si ale všimol, že v okamihu zopnutia spínača galvanometer zareagoval krátkou výchylkou a pri vypnutí výchylkou opačného smeru. Tento okamih možno považovať za zrod veľkého objavu s obrovským praktickým dosahom – objav elektromagnetickej indukcie.

Po uvedenom pozorovaní urobil Faraday množstvo ďalších pokusov, ktorých výsledky možno zatriediť do nasledujúcich výpovedí:

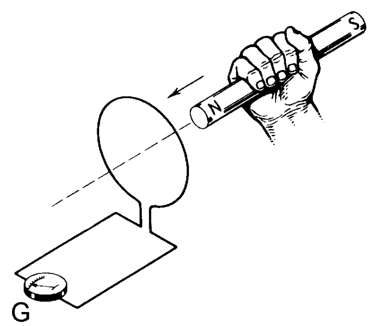
1. **V sekundárnom obvode na *obr. 7.1* bude tiecť prúd vtedy, ak sa konštantný prúd v primárnom obvode nahradí časovopremenným prúdom**, čo možno dosiahnuť napr. časovopremenným odporom $R(t)$ alebo jednoducho náhradou zdroja stáleho napätia, zdrojom s časovopremenným EMN $\mathscr{E}(t)$. V takých prípadoch bude indukčný tok železným prstencom časovopremenný, teda $\Phi = \Phi(t)$.

2. Ak sa železným prstencom pevne viazané obvody nahradia voľne viazanými obvodmi ako na *obr. 7.2*, bude indukčný tok obvodom s galvanometrom síce podstatne slabší, ale v obvode bude možno pozorovať množstvo ďalších prúdových efektov a to aj v prípade, ak zdroj EMN je v čase konštantný.

Prúd v obvode galvanometra potečie aj vtedy, ak
– obvody sa budú osovo vzďaľovať, alebo približovať;
– obvody sa budú pohybovať priečne, prípadne navzájom otáčať;
– jeden alebo obidva obvody sa budú deformovať tak, že sa budú meniť ich efektívne plochy *S*.



Obr. 7.2



Obr. 7.3

3. **Najzávažnejšia je skutočnosť, že v obvode s galvanometrom môže vzniknúť prúd aj bez prítomnosti primárneho prúdového obvodu**. Na *obr. 7.3* je znázornený obvod s galvanometrom v blízkosti ktorého sa pohybuje tyčový permanentný magnet.[1] Aj takýto magnet vytvára časovopremenný indukčný tok rovinou závitu a v závite vznikne elektrický prúd.

Všetky uvedené prípady vzniku prúdu v sekundárnom obvode majú jeden spoločný znak a to prítomnosť časovopremenného indukčného toku

$$\Phi(t) = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.1}$$

[1] Tyčový magnet je svojím magnetickým poľom ekvivalentný solenoidu s prúdom. Z jeho *N* konca (severný pól) magnetické indukčné čiary vystupujú a do *S* konca (južný pól) indukčné čiary vstupujú.

kde S je efektívna plocha obvodu s galvanometrom. Časová závislosť indukčného toku $\Phi(t)$ môže byť spôsobená niekoľkými faktormi. Môže to byť časovo premenná indukcia $\boldsymbol{B}(t)$, prípadne časovopremenný príspevok $\boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = B\mathrm{d}S \cos\varphi$ zapríčinený premenným uhlom $\varphi(t)$ medzi vektormi $\boldsymbol{B}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ alebo časovopremenná plocha $S(t)$ (tým, že sa obvod a následne aj jeho plocha v čase deformuje). Nie je vylúčená ani situácia, keď na zmenu indukčného toku pôsobia všetky faktory súčasne.

Faraday si tiež všimol, že veľkosť prúdu je úmerná rýchlosti časovej zmeny indukčného toku, teda veličine $\mathrm{d}\Phi(t)/\mathrm{d}t$. Keďže prúd v kovovom prúdovodiči je úmerný pôsobiacemu napätiu v obvode, možno pôsobenie časovej zmeny indukčného toku vyjadriť ekvivalentným indukovaným elektromotorickým napätím $\mathscr{E}_i$ v obvode, teda

$$\boxed{\mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}} \tag{7.2}$$

Výraz (7.2) je jednou z možných formulácií Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie, ktorý možno vyjadriť slovne:

Indukované elektromotorické napätie vo vodivom elektrickom obvode sa svojou veľkosťou rovná časovej zmene indukčného toku cez obvod a má smer daný Lenzovým zákonom.

Uvedená slovná definícia zákona má dva nedostatky. Nepodáva presnejšiu informáciu o "vodivom elektrickom obvode" a viaže sa na zatiaľ nevyslovený Lenzov zákon.

Definícia elektrického obvodu pre účely elektromagnetickej indukcie je jedna z najošemetnejších úloh spojených s indukovanými napätiami a treba sa jej venovať na osobitnom mieste. Jednoduchých prípadov je málo: napríklad je to kruhový rovinný závit, v ktorom indukované napätie súvisí s časovou zmenou indukčného toku Φ kruhovou plochou obopnutou závitom. Ak sa závit nahradí prstencovou cievkou s N závitmi, indukované napätie je N-násobne väčšie ako v jednom závite, pretože efektívna plocha je N-krát väčšia a teda

$$\mathscr{E}_i = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Podobné napätie sa indukuje v solenoide s N závitmi, ak sa nachádza v homogénnom magnetickom poli a pritom sa zanedbá vplyv indukčného toku vytváraného prívodmi k cievke. Aj v sekundárnom obvode na *obr. 7.1* sa indukuje napätie podľa vyššie uvedeného vzťahu, ak má sekundárny obvod N závitov.

Vo všetkých ostatných prípadoch, keď geometria obvodu a magnetické pole sú zložité funkcie súradníc, vznikajú problémy pri stanovení toho indukčného toku, ktorý je spojený so vznikajúcim indukovaným napätím a prúdom v obvode. Práve z týchto dôvodov sa elektromagnetické vlastnosti obvodov vyjadrujú parametrom "indukčnosť" prípadne "vzájomná indukčnosť", ktoré sú vzdialeným analógom pojmu kapacity. Výpočet indukčností nie je o nič jednoduchší ako výpočet indukčného toku, ale sú to veličiny, ktoré aspoň vieme spoľahlivo merať. Pojmy indukčnosti zavedieme neskôr.

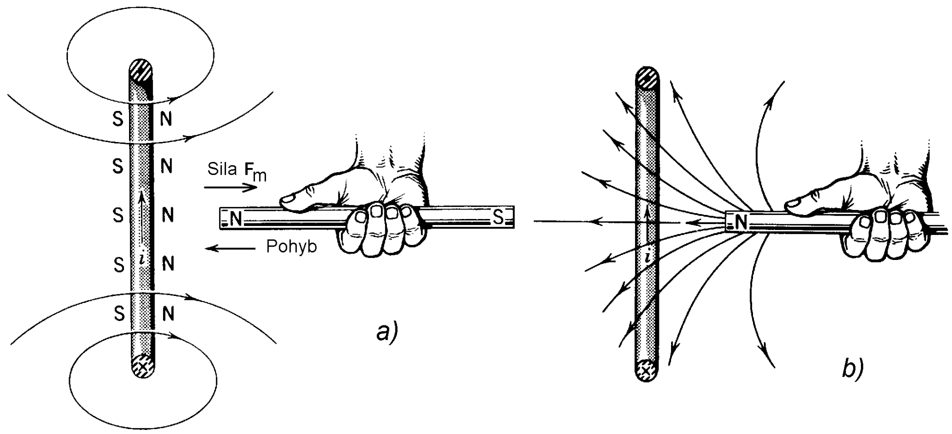
Z uvedených dôvodov treba výraz (7.2) chápať a interpretovať ako vyjadrenie fyzikálneho zákona, a nie ako vzorec, z ktorého možno niečo bezprostredne vypočítať.

7.2 LENZOV ZÁKON

Súbežne s Faradayom a nezávisle od neho robil výskumy vedúce k elektromagnetickej indukcii profesor Heinrich Friedrich Lenz (1804 – 1865) na petrohradskej akadémii. Lenzova najväčšia zásluha spočíva v tom, že jasne vyjadril smer pôsobenia indukovaného napätia v obvode.[1] Tento princíp je v podstate vyjadrením platnosti zákona zachovania energie v elektrodynamike a formálne vysvetľuje prítomnosť záporného znamienka v zákone elektromagnetickej indukcie. Lenzov zákon možno sformulovať takto:

Indukovaný prúd v obvode svojím magnetickým účinkom pôsobí proti zmene indukčného toku, ktorá ho vyvolala.

Zákon v uvedenom znení sa vzťahuje na indukovaný prúd, t. j. na uzavretý vodivý obvod. V prípade, ak je obvod otvorený, vyjadruje polaritu (smer pôsobenia) indukovaného napätia. Táto polarita určuje smer prúdu, ktorý by v obvode vznikol, ak by sa obvod uzavrel.



Obr. 7.4

Preskúmajme bližšie podstatu Lenzovho zákona s využitím ilustrácií na *obr. 7.4a, b*. Na *obr. 7.4a* je tyčový magnet, ktorého smer indukčných čiar ukazuje palec ruky (porovnaj s *obr. 7.4b*) a prsty ruky ukazujú smer prúdu v ekvivalentom solenoide, ktorý by nahradil magnet. Ak sa magnet bude pohybovať smerom k závitu, bude indukčný tok závitom vzrastať a podľa Faradayovho aj Lenzovho zákona musí v závite tiecť prúd i, ktorého smer je zrejmý z obidvoch obrázkov. S týmto prúdom je spojené magnetické pole závitu, ktoré smeruje proti poľu magnetu. Cirkulačný prúd v ekvivalentnom solenoide má opačný smer ako prúd v závite, takže závit musí na magnet (solenoid) pri jeho pohybe pôsobiť odpudivou silou $\boldsymbol{F}_m$. Zasúvanie magnetu do závitu je teda spojené s prácou vonkajšej sily, pričom sa táto práca premení na teplo v elektrickom odpore závitu. Zákon zachovania energie je pritom splnený.

[1] Faraday poznal tiež spôsob určenia smeru pôsobenia indukovaného napätia, ale jeho spôsob formulácie nebol tak jadrný ako Lenzov. Okrem uvedených dvoch učencov sa na objave elektromagnetickej indukcie zaslúžil aj americký fyzik Joseph Henry (1797 – 1878), ktorý však výsledky svojho výskumu nepublikoval.

Na proces vzniku indukovaného napätia a prúdu v závite sa možno dívať aj z hľadiska indukčného toku plochou závitu. Tento tok má tendenciu sa zachovávať, teda ak na začiatku je nulový (vzdialený magnet), bude sa snažiť zostať nulový pri akejkoľvek manipulácii s magnetom a pri približovaní magnetu závit bude cez svoju plochu vytvárať protitok (pozri *obr. 7.4a*) ako produkt vlastného prúdu.

Ak sa magnet bude zo závitu vyťahovať, indukčný tok závitom pochádzajúci od magnetu sa začne zmenšovať, to však vyvolá protitok plochou závitu (pole opačné ako na *obr. 7.4a*) a následne opačný prúd v závite. Odpudivá sila magnetu a závitu sa zmení na príťažlivú a práca vykonaná pri vyťahovaní magnetu sa znovu premení na teplo v odpore závitu. Pri tejto analýze Lenzovho zákona si možno čitateľ uvedomil, že sme súčasne analyzovali činnosť najjednoduchšieho indukčného stroja, v ktorom sa mechanická práca mení na elektrický prúd a súčasne na teplo.[1]

Kuriózne javy by v systéme magnet – závit vznikli vtedy, ak by Lenzov zákon neplatil, teda ak by vo výraze (7.2) bolo znamienko plus (+). Pri približovaní magnetu by vznikol závitom indukčný tok v smere toku magnetu. Tento tok by v závite vyvolal prúd opačného smeru ako na *obr. 7.4a,b* a magnet by bol do závitu vťahovaný. To by následne viedlo k ďalšiemu zväčšeniu indukčného toku … atď. Vznikla by tzv. kladná spätná väzba, v dôsledku ktorej by sa systém energeticky zrútil. Zákon zachovania energie by bol v takom prípade porušený.

7.3 TEORETICKÉ PRINCÍPY ELEKTROMAGNETICKEJ INDUKCIE

Naše doterajšie úvahy o zákone elektromagnetickej indukcie sa zakladajú na experimentálnom pozorovaní Faradaya, Lenza a Henryho. Zákon však možno teoreticky zdôvodniť aj pomocou výrazu pre Lorentzovu silu [pozri výraz (6.7)] alebo z Lorentzových transformačných vzťahov pre elektromagnetické polia [výraz (6.128)]. Tieto výrazy poskytujú ekvivalentnú intenzitu elektrického poľa, ktorá pôsobí na náboje pohybujúce sa v magnetickom poli. Ekvivalentná intenzita (ktorú môžeme nazvať vnútenou indukovanou intenzitou) v ľubovoľnom bode priestoru je daná výrazom

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{7.3}$$

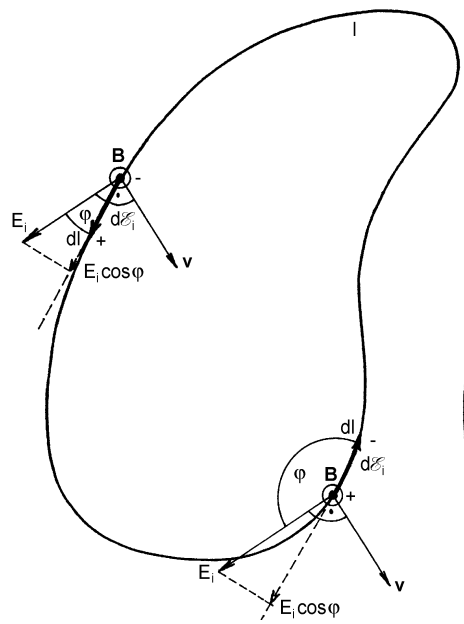
kde $\boldsymbol{v}$ je vektor rýchlosti náboja v danom bode priestoru a $\boldsymbol{B}$ je magnetická indukcia. Predpokladajme, že v takom magnetickom poli sa pohybuje vodivá kovová slučka l (pozri *obr. 7.5*). Slučka obsahuje elektróny, ktoré sa pod účinkom elektrického poľa daného výrazom (7.3) budú pohybovať, a vo vodiči vznikne elektrický prúd. V každom elementárnom úseku slučky d$\boldsymbol{l}$ vznikne indukované napätie

$$\mathrm{d}\mathscr{E}_i = \boldsymbol{E}_i \,.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = E_i \mathrm{d}l \cos\varphi = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}).\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{B}.(\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l})$$

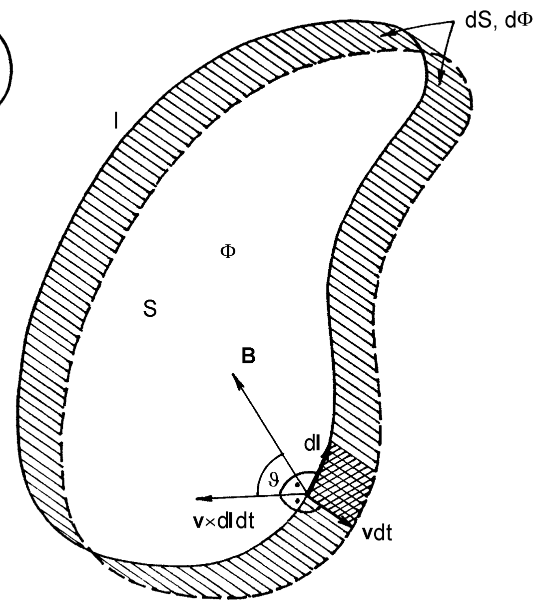
[1] V roku 1884 zákon podobný Lenzovmu vyslovil Henri L. Le Chatelier (1850 – 1936) pre termodynamické procesy, ktorý však má všeobecnejšiu platnosť a tým zahrňuje aj Lenzov zákon. Formulácia zákona je nasledovná: "Každé vonkajšie pôsobenie, ktoré vyvádza termodynamický systém z rovnováhy stimuluje v ňom také procesy, ktoré toto pôsobenie zoslabujú" (Comptes rendus, 99, 786 (1884)). Zákon teoreticky zdôvodnil v roku 1887 K. Braun. Pozri knihu Landau, L., Lifšic, E.: Statističeskaja fizika, M.-L., 1964 (Teoret. fizika, tom 5)

Na *obr. 7.5* sú znázornené dva elementy dl na rôznych miestach slučky so zodpovedajúcimi polaritami príspevkov d$\mathscr{E}_i$. V celej uzavretej (alebo aj neuzavretej) slučke l indukované napätie

$$\mathscr{E}_i = -\oint_l \boldsymbol{B}.(\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}) \tag{7.4}$$



Obr. 7.5



Obr. 7.6

Výraz (7.4) sa však vôbec nepodobá na vyjadrenie indukovaného napätia vzťahom (7.2). Treba si však uvedomiť, že vzťah (7.2) udáva indukované napätie ako dôsledok zmeny indukčného toku cez obvod, zatiaľ čo posledný vzťah udáva indukované napätie ako dôsledok pohybu obvodu (slučky) v magnetickom poli. Avšak aj v tomto prípade sa v čase mení indukčný tok slučkou, a teda obidva výrazy vyjadrujú rovnakú príčinu vzniku indukovaného napätia. Na dôkaz toho uvažujme ten istý obvod teraz však z iného pohľadu. Na *obr. 7.6* je obvod zobrazený v dvoch nekonečne blízkych časových okamihoch t a t + dt. V čase t je obvod v nejakej pozícii, preniká ním indukčný tok Φ a obvod ohraničuje plochu S. V čase t + dt preniká obvodom tok Φ + dΦ a obopnutá plocha sa zmenila na S + dS. Zmenu dS predstavujú vyšrafované pásiky. Vektorovou plôškou $\boldsymbol{v}\mathrm{d}t \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}$, na ktorej pôsobí vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$, preniká indukčný tok

$$\boldsymbol{B}.(\boldsymbol{v}\mathrm{d}t \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{B}.(\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l})\mathrm{d}t = B|\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}\mathrm{d}t| \cos \vartheta$$

Celková zmena indukčného toku dΦ je daná integrálom takých príspevkov pozdĺž celého obvodu l, teda

$$\mathrm{d}\Phi = \oint_l \boldsymbol{B}.(\boldsymbol{v}\times \mathrm{d}\boldsymbol{l})\mathrm{d}t = -\,\mathscr{E}_i \mathrm{d}t$$

kde sme využili výraz (7.4). Z tohto vzťahu priamo plynie výraz (7.2).

Indukované elektromotorické napätie $\mathscr{E}_i$ možno tiež zapísať ako integrál indukovanej intenzity $\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}$ pozdĺž obvodu l, teda

$$\mathscr{E}_i = \oint_l \boldsymbol{E}_i . \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l \boldsymbol{E}. \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

a indukčný tok

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}. \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

kde S je plocha ohraničená čiarou (obvodom) l. S využitím takýchto zápisov možno zákonu elektromagnetickej indukcie (7.2) dať najvšeobecnejší tvar

$$\boxed{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}} \tag{7.5}$$

Dôležité je upozorniť, že vzťah (7.5) platí nielen vo vodivom prostredí obvodu, ale aj v dielektriku, prípadne vo vákuu, kde čiara l je ľubovoľná myslená čiara. Výraz (7.5) je integrálna forma zákona elektromagnetickej indukcie. V dielektriku a vo vákuu možno odvodiť diferenciálny vzťah. Na ľavej strane vzťahu (7.5) použijeme Stokesovu vetu a na pravej strane deriváciu vložíme pod integrál, čo je možné, ak sa plocha S s časom nemení. Dostaneme rovnicu

$$\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Keďže integrácia na obidvoch stranách rovnice sa robí na tej istej hraničnej ploche S a rovnica platí pre ľubovoľné S, musia sa rovnať integrandy rovnice, teda musí platiť

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}} \tag{7.6}$$

Výraz (7.6) je diferenciálna forma zákona elektromagnetickej indukcie. Existuje ešte jedna, menej často uvádzaná forma zákona elektromagnetickej indukcie, ktorá spočíva na vyjadrení vektora magnetickej indukcie prostredníctvom vektorového potenciálu. Keďže $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$, možno rovnicu (7.6) uviesť na tvar

$$\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{7.7}$$

Rotácia výrazu (7.7) sa rovná nule, ak sa napríklad výraz v zátvorke rovná nule, t. j. ak

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{7.8}$$

Indukovaná intenzita v priestore je teda daná časovou deriváciou vektorového potenciálu. Tu však vektorový potenciál nie je daný riešením Poissonovej rovnice ako v magnetostatike (pozri odsek 2.12.3), ale riešením príslušných vlnových rovníc. Tieto úvahy však patria do inej časti elektromagnetizmu, a preto ich tu ďalej nebudeme rozvíjať. Čitateľovi sa v súvislosti s výrazom (7.8) odporúča vyriešiť úlohu 218.

Rovnica (7.7) má však ešte jedno riešenie. Rotácia výrazu v zátvorke (7.7) sa bude rovnať nule aj vtedy, ak výraz v zátvorke bude úmerný gradientu nejakej skalárnej funkcie, v tomto prípade skalárneho elektrického potenciálu V, teda ak

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} V$$

alebo

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{7.9}$$

Výraz (7.9) udáva celkovú intenzitu elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ vyjadrenú pomocou elektromagnetických potenciálov V a $\boldsymbol{A}$. Vo všeobecnosti má intenzita dve zložky – gradientovú, s ktorou sme sa oboznámili v elektrostatike a jej príčinou je samotná prítomnosť nábojov. Druhá zložka je indukovaná intenzita vyjadrená časovou zmenou vektora $\boldsymbol{A}$, ktorej pôvod treba vidieť v pohybe nábojov. Elektromagnetické potenciály sú dané riešením príslušných vlnových rovníc a tvoria obsah teórie elektromagnetického poľa. Magnetická indukcia je pritom daná už známym vzťahom

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$$

7.4 ZÁKLADNÉ APLIKÁCIE ZÁKONA ELEKTROMAGNETICKEJ INDUKCIE

Hovorí sa, že keď Faraday predložil výsledky svojich pokusov britskej kráľovskej spoločnosti (British Royal Society), učení členovia spoločnosti mu položili otázku: "Aký je z toho úžitok?" Faraday odpovedal protiotázkou: "A aký je úžitok z práve narodeného dieťaťa?"

V súčasnosti sa na svete ročne vyrobí (podľa údajov z roku 1992) asi $9{,}512.10^{19}$ joulov (J), čo je asi $2{,}642.10^{7}$ gigawatthodín (GWh) elektrickej energie, na princípe platnosti zákona elektromagnetickej indukcie[1]. Je to takmer celá svetová produkcia elektrickej energie, pretože všetky ostatné elektrické zdroje (galvanické články, akumulátory, slnečné batérie atď.) sú v tomto porovnaní energeticky bezvýznamné.

---

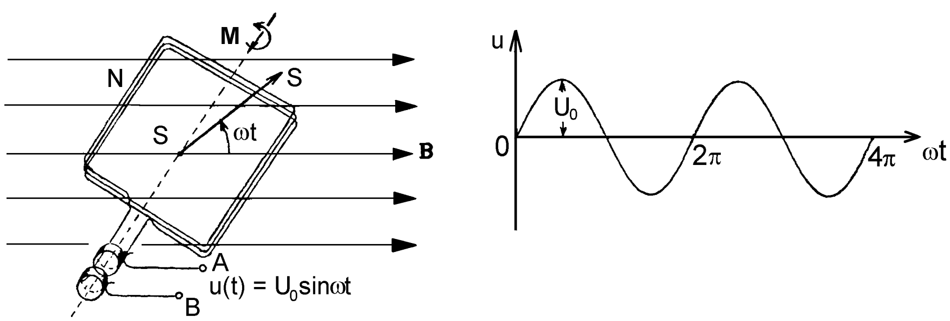
[1] Zdroj informácie: ABB, Asea Brown Boveri Ltd., Power Generation Segment, Marketing Department, 1000 Prospect Hill Road, Windsor, CT 06095-0500, USA

Základným objektom každej elektrárne je zložitý a výkonný generátor indukovaného elektromotorického napätia, poháňaný mechanickým, vodným alebo tepelným strojom. Princíp činnosti generátora je neobyčajne jednoduchý a možno ho pochopiť z *obr. 7.7a*. V magnetickom poli indukcie $\boldsymbol{B}$ sa okolo zvolenej osi otáča konštantnou uhlovou frekvenciou $\omega = 2\pi f$ (f je frekvencia) prstencová cievka s N závitmi a s plochou jedného závitu S. V istom okamihu t zviera normála k ploche cievky s vektorom magnetickej indukcie B uhol $\varphi(t) = \omega t$. Indukčný tok Φ prenikajúci cievkou je v každom okamihu t daný výrazom

$$\Phi(t) = NBS \cos \omega t$$

a na prívodoch k cievke sa podľa zákona elektromagnetickej indukcie (7.2) indukuje časovopremenné (striedavé) EMN

$$u(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \omega NBS \sin \omega t = U_0 \sin \omega t \tag{7.10}$$



a) *b*)

Obr. 7.7

Ako vidíme, časový priebeh napätia na cievke je sínusový, s amplitúdou $U_0 = \omega NBS$ a okamžitou fázou $\varphi = \omega t$ a je graficky znázornený na *obr. 7.7b*. Opísané zariadenie predstavuje najjednoduchší generátor striedavého napätia.

Pokiaľ výstupné svorky generátora nie sú zaťažené žiadnym odporom, teoreticky netreba na výrobu takého napätia žiadnu vonkajšiu energiu. Iná situácia nastane, ak sa generátor zaťaží odporom R (pozri náhradný obvod na *obr. 7.8*). Vo vinutí sa objaví časovopremenný striedavý elektrický prúd daný podľa Ohmovho zákona výrazom

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t \tag{7.11}$$

kde v R je zahrnutý aj vnútorný odpor zdroja, ktorým v tomto prípade je odpor vinutia cievky. Tento prúd vo vinutí treba udržiavať vonkajším točivým momentom

$$M(t) = Bm(t) \sin \varphi(t) = BNSi(t) \sin \omega t = \frac{U_0^2}{\omega R} \sin^2 \omega t$$

kde $m(t) = NSi(t)$ je magnetický moment prstencovej cievky [pozri výraz (6.88)]. Točivý stroj dodávajúci energiu musí teda pracovať s okamžitým mechanickým výkonom

$$p_m(t) = \omega M(t) = \frac{U_0^2}{R}\sin^2 \omega t = \frac{(\omega NBS)^2}{R}\sin^2 \omega t \tag{7.12a}$$

alebo so stredným výkonom za jednu periódu $T = 2\pi/\omega$

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T p_m(t)\mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{2R} = \frac{(\omega NBS)^2}{2R} \tag{7.12b}$$

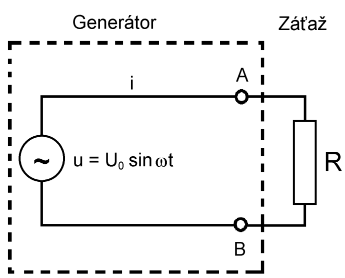
Na druhej strane okamžitý elektrický výkon $p_e(t)$ v odpore je daný Joulovým zákonom [pozri výrazy (5.30) až (5.33)], napr. výrazom

$$p_e(t) = u(t)i(t) = \frac{U_0^2}{R}\sin^2 \omega t \tag{7.13a}$$

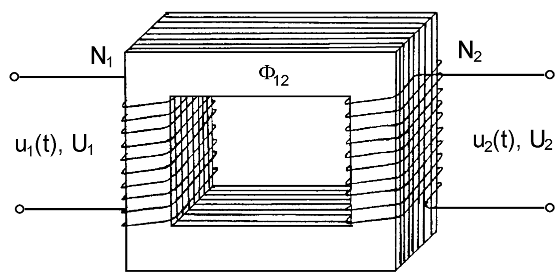
alebo stredný výkon

$$P_e = \frac{1}{T}\int_0^T p_e(t)\mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{2R} \tag{7.13b}$$

Vidíme, že výrazy (7.12) a (7.13) dávajú rovnaké hodnoty pre dodávaný mechanický výkon a odoberaný elektrický výkon, čo je v súhlase so zákonom zachovania energie a závermi plynúcimi z Lenzovho zákona. Skutočný užitočný elektrický výkon je však menší, pretože zariadenie, ako každý iný stroj, pracuje s účinnosťou, ktorá je vždy nižšia ako 1. Energetické siete v Európe pracujú na frekvencii $f = 50$ Hz s amplitúdou napätia jednej fáze na strane spotrebiteľa $U_0 = \sqrt{2}\ .\ 220\ \mathrm{V} \approx 311{,}1\ \mathrm{V}$.



Obr. 7.8



Obr. 7.9

Druhým dôležitým zariadením pracujúcim na princípe elektromagnetickej indukcie je elektrický výkonový transformátor. Transformátorom sa premieňa primárne (vstupné) napätie alebo prúd zdroja na sekundárnu (výstupnú) hodnotu po transformácii. Transformátor (*obr. 7.9*) pozostáva z dvoch cievok, primárnej a sekundárnej s počtami závitov N_1 a N_2. Cievky majú spoločné feromagnetické alebo feritové jadro, ktoré zaručuje, že prakticky celý indukčný tok $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ produkovaný jednou cievkou sa prenáša do druhej cievky. To je ideálny transformátor. V reálnom transformátore sa vždy nejaký indukčný tok rozptyľuje a časť energie sa spotrebuje na indukčný ohrev a hysterézne straty. Ak na vstupe ideálneho transformátora pôsobí časovo premenné napätie $u(t)$, vytvorí na svorkách primárnej cievky rovnako veľké protinapätie $-N_1 d\Phi_1/dt$, teda

$$u_1(t) = -N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -u(t)$$

Spoločný indukčný tok preniká N_2 závitov sekundárnej cievky a vytvorí na jeho svorkách napätie

$$u_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

Vydelením týchto výrazov dostaneme vzťah

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} \tag{7.14}$$

podľa ktorého pomer primárneho a sekundárneho okamžitého napätia na nezaťaženom transformátore sa rovná pomeru počtu závitov na primárnej a sekundárnej strane. Ak je budiace napätie sínusové, dané výrazom (7.10), potom pre pomer amplitúd U_1 a U_2 primárneho a sekundárneho napätia platí

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = p \tag{7.15}$$

Ak je ideálny transformátor na svojom sekundári uzavretý, potom výkon v primárnom obvode sa rovná výkonu v sekundárnom obvode, t. j. $U_1 I_1 = U_2 I_2$ a pre amplitúdy prúdov na vstupnej a výstupnej strane platí

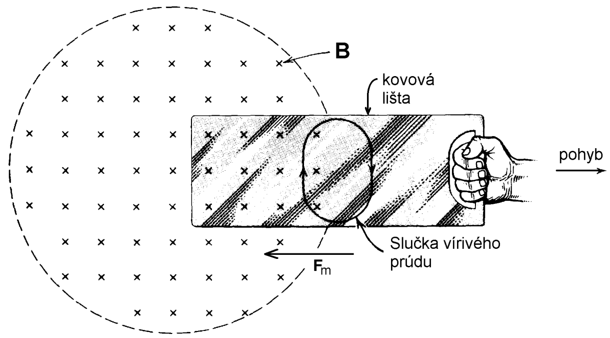
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{p} \tag{7.16}$$

Výrazy (7.15) a (7.16) platia iba pre ideálny transformátor. V reálnom transformátore s nenulovou všeobecnou záťažou je analýza zložitejšia.

Priamym dôsledkom zákona elektromagnetickej indukcie a Lenzovho zákona sú vírivé (Foucaultove) prúdy, vznikajúce v masívnych vodičoch, ktoré sú v časovo premennom magnetickom poli alebo sa pohybujú v konštantnom magnetickom poli. Na *obr. 7.10* sa kovová vodivá lišta vyťahuje z priestoru, v ktorom je magnetické pole. V oblasti zobrazenej slučky sa zmenšuje indukčný tok, v dôsledku čoho v slučke tečie prúd, ktorého magnetické pole bráni zmenšovaniu pôvodného poľa. Na prúdovú dráhu (a teda aj na kovovú lištu) pôsobí sila $\boldsymbol{F}_m$ smerujúca proti smeru pohybu.

Účinky vírivých prúdov sú mnohoraké a majú široké technické využitie. Známy je indukčný ohrev vodivých materiálov, rôzne systémy tlmenia meracích prístrojov, elektromagnetické brzdy a i. Vírivé prúdy vo feromagnetických jadrách transformátorov spôsobujú ich nežiadúci ohrev. Aby sa vírivé prúdy obmedzili na minimálnu mieru, vyrábajú sa jadrá z izolovaných železných plechov, čo zabráni vzniku veľkých slučiek vírivých prúdov (pozri *obr. 7.9*).

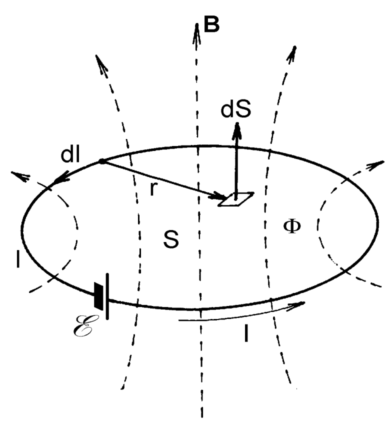
Uvedené príklady ani zďaleka nevyčerpávajú všetky možnosti aplikácie zákona elektromagnetickej indukcie. Ďalšie sú predmetom analýzy početných inžiniersko-technických monografií.



Obr. 7.10

7.5 SAMOINDUKCIA A VZÁJOMNÁ INDUKCIA. INDUKČNOSŤ A VZÁJOMNÁ INDUKČNOSŤ

Pri formulácii zákona elektromagnetickej indukcie sme konštatovali, že indukčný tok, ktorý je príčinou vzniku indukovaného napätia v obvode, sa vo väčšine prípadov ťažko počíta. Problém spočíva v tom, že pri zložitých prúdových obvodoch úlohu výpočtu magnetického indukčného toku nevieme ani matematicky sformulovať. Posúďme teraz výpočet indukčného toku z inej strany.



Obr. 7.11

Na *obr. 7.11* je znázornený jednoduchý prúdový obvod dĺžky l, v ktorom zdroj EMN $\mathscr{E}$, vytvára prúd I. Tento prúd budí v každom bode priestoru magnetické pole indukcie $\boldsymbol{B}$, ktoré možno vyjadriť Biotovým-Savartovým-Laplaceovým zákonom (pozri odsek 6.1.3).

Ak v priestore zvolíme plochu S, ktorej hranicu tvorí obvod l, potom magnetická indukcia v ľubovoľnom bode plochy je dané výrazom

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

kde význam symbolov je jasný z *obr. 7.11*. Indukčný tok Φ plochou S, ktorý vytvára toto magnetické pole, je podľa definície toku

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

po dosadení a úprave

$$\Phi = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \oint_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} . \mathrm{d}\boldsymbol{S} \right) I \tag{7.17}$$

Výpočet indukčného toku vyžaduje vykonať integrácie v zátvorke, ktoré môžu byť pri geometricky zložitejších obvodoch (toroidálnych a iných cievkach a pod.) veľmi zložité. Dôležité však je, že výraz (7.17) je jednoduchý lineárny vzťah medzi indukčným tokom Φ a prúdom I, ktorý ho produkuje. Koeficient úmernosti

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \oint_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} . \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.18}$$

sa nazýva **indukčnosť** obvodu. Je závislá iba od geometrie rozloženia prúdovodiča a vlastností prostredia, v ktorom je obvod "ponorený". V danom prípade je uvažovaný obvod vo vákuu, čo vyjadruje konštanta μ_0. S uvážením výrazu (7.18) možno pre indukčný tok obvodom napísať na prvý pohľad jednoduchý vzťah

$$\Phi = LI \tag{7.19}$$

v ktorom Φ je celkový indukčný tok viazaný s prúdom I. Pre obvody, ktorých geometria sa s časom nemení je L nezávislé od času, čo je veľmi dôležité, pretože v takom prípade časová zmena indukčného toku je daná jedine časovou zmenou prúdu v obvode.

Indukčnosť obvodu je jeho dôležitý elektrotechnický parameter a podľa výrazu (7.19) ju možno vyjadriť pomerom

$$L = \frac{\Phi}{I} \qquad [\mathrm{H}] \tag{7.20}$$

Meracou jednotkou indukčnosti je **1 henry (H)**, nazvanou na počesť amerického fyzika J. Henryho, pritom podľa posledného vzťahu

$$1\,\mathrm{H} = \frac{1\,\mathrm{Wb}}{1\,\mathrm{A}} = \frac{1\,\mathrm{V.s}}{1\,\mathrm{A}} = 1\,\Omega.\mathrm{s} = 1\,\mathrm{m}^2.\mathrm{kg.s}^{-2}.\mathrm{A}^{-2}$$

Definícia indukčnosti (7.20) je statická, a nemá veľký praktický význam, pretože statické indukčné toky obvodov sa nedajú jednoducho merať, a okrem toho také toky nie sú v praxi veľmi dôležité. Oveľa dôležitejšie sú časovo premenné toky, ktoré majú za následok vznik indukovaných EMN v obvode. Ak sa teda v obvode mení s časom indukčný tok ako dôsledok časových zmien prúdu, vznikne v obvode indukované protinapätie

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(LI) = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{7.21}$$

ak L = konšt. Napätie $\mathscr{E}_i$ sa nazýva samoindukované napätie a samotný jav, s ktorým súvisí, sa nazýva **samoindukciou**. Samoindukované napätie vzniká v každom elektrickom obvode, ak sa v ňom s časom mení elektrický prúd.

Na základe výrazu (7.21) možno napísať dynamickú definíciu indukčnosti

$$L = \frac{|\mathscr{E}_i|}{\left|\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|} \qquad [\mathrm{H}]$$

Podľa tejto definície sa indukčnosť obvodu číselne rovná absolútnej hodnote samoindukovaného napätia na ňom, ak sa v ňom mení prúd absolútnou rýchlosťou 1 A/s.

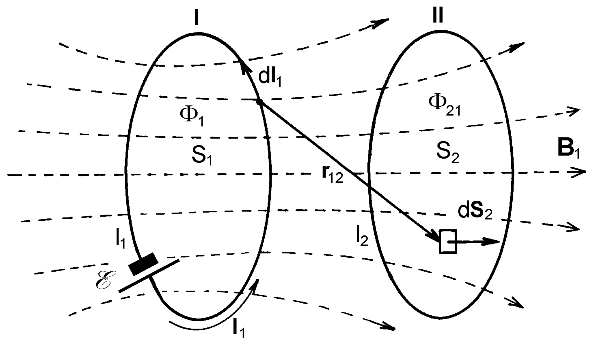
Praktická elektronika a elektrotechnika pracuje s indukčnosťami od zlomkov mikrohenry (μH), akými sú vysokofrekvenčné cievky, až do desiatok henry, ktoré predstavujú vinutia výkonných generátorov a elektrických motorov, prípadne ťažkých elektromagnetov. Indukčnosti sú spravidla realizované zvinutými prúdovodičmi, teda cievkami, avšak indukčnosť predstavuje každý kúsok aj nezvinutého prúdovodiča (pozri úlohu 205). Vo vysokofrekvenčnej prenosovej elektrotechnike majú osobitný význam indukčnosti (na jednotku dĺžky) dlhých dvojvodičových prenosových vedení, ktoré spolu s ich kapacitami (na jednotku dĺžky) určujú základné prenosové parametre vedenia (pre koaxiálny kábel bude indukčnosť vypočítaná v nasledujúcom odseku). Indukčnosti sú súčasťou každého rezonančného *LC* obvodu a sú dôležitou súčasťou elektrických filtrov.

Druhým dôležitým javom, ktorý treba osobitne analyzovať, je **vzájomná indukcia**. Na *obr. 7.12* sú znázornené dva obvody I a II, ktoré sú vo vzájomnej magnetickej väzbe. V obvode I pôsobí zdroj EMN $\mathscr{E}$, ktorý vytvára prúd I_1 a následne indukčný tok Φ_1. Časť Φ_{21} tohto toku preniká druhým obvodom II. Na ploche S druhého obvodu je magnetická indukcia B_1 daná integráciou podľa Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona. Indukčný tok Φ_{21}, ktorý preniká plochou S obvodu II je potom

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \boldsymbol{B}_1 . \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \oint_{l_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3} . \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \right) I_1 \tag{7.22a}$$

kde význam symbolov je jasný z *obr. 7.12*. Rovnakú úvahu možno urobiť, ak napäťový zdroj $\mathscr{E}$ preložíme z obvodu I do obvodu II. Prúd I_2 v obvode II vyvolá podobný indukčný tok Φ_{12} v obvode I

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \boldsymbol{B}_2 . \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_1} \oint_{l_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3} . \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \right) I_2 \tag{7.22b}$$



Obr. 7.12

Výrazy pre indukčné toky sú na výpočet takisto veľmi zložité, ale tiež majú jednoduchú vnútornú štruktúru.[1] Indukčný tok Φ_{21} druhým obvodom je priamo úmerný prúdu I_1 v prvom obvode a podobne tok Φ_{12} prvým obvodom je úmerný prúdu I_2 v druhom obvode. Konštanty úmernosti v zátvorkách závisia iba od formy a vzájomného rozloženia vodičov prvého a druhého obvodu, t. j. od dĺžky obvodov, od plôch obvodov a vzdialeností r elementov d$\boldsymbol{l}$ a d$\boldsymbol{S}$, ako aj vlastností prostredia, v ktorom sú obvody uložené (v danom prípade vákua sú tieto vlastnosti vyjadrené konštantou μ_0). Ak označíme

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \oint_{l_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3} . \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \tag{7.23a}$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_1} \oint_{l_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3} . \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \tag{7.23b}$$

potom výrazy pre toky prijmú jednoduché tvary

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1 \tag{7.24a}$$

$$\Phi_{12} = L_{12} I_2 \tag{7.24b}$$

Ukazuje sa, že koeficienty úmernosti L_{21} a L_{12} sú rovnaké. Môžeme sa o tom presvedčiť jednoduchou úvahou. Ak vyjadríme magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}_1$ pomocou vektorového potenciálu, možno pre indukčný tok Φ_{21} napísať

[1] V reálnych magneticky viazaných obvodoch sa výpočet toku komplikuje aj skutočnosťou, že "cesty" pre indukčné toky sú tvorené feromagnetickými materiálmi, takže μ_0 treba nahradiť s $\mu_0\mu_r$, kde μ_r (relatívna permeabilita) je veličina silne nelineárna a závislá od intenzity magnetického poľa H (pozri napr. *obr. 7.1* a odsek 8.4 o feromagnetizme).

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \boldsymbol{B}_1 . \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \int_{S_2} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_1 . \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \oint_{l_2} \boldsymbol{A}_1 . \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$$

kde sme využili Stokesovu vetu. Čitateľovi odporúčame do pozornosti skutočnosť vyjadrenú posledným výrazom, že dôležitá fyzikálna veličina – magnetický indukčný tok plochou S – sa dá vyjadriť aj pomocou vektorového potenciálu ako jeho dráhový integrál po obvode l plochy S, teda

$$\Phi = \oint_{l} \boldsymbol{A} . \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{7.25}$$

Vektorový potenciál $\boldsymbol{A}_1$ možno s ohľadom na výraz (6.37) vyjadriť tvarom

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r_{21}}$$

takže

$$\Phi_{21} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 . \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r_{21}} \right) I_1 \tag{7.26}$$

Výraz (7.26) je iným vyjadrením indukčného toku podľa (7.22a). Zátvorka výrazu (7.26) musí predstavovať koeficient L_{21}, ale vzhľadom na jej úplnú matematickú symetriu vzhľadom na obvody I a II musí súčasne predstavovať aj L_{12}, teda

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 . \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 . \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r_{21}} = L_{21} = L_{12} = M \tag{7.27}$$

Koeficient $L_{21} = L_{12} = M$ sa nazýva **koeficient vzájomnej indukcie** alebo jednoducho **vzájomná indukčnosť**. Výrazy (7.19) pre indukčný tok možno teda napísať v tvaroch

$$\Phi_{21} = M I_1 \tag{7.28a}$$

$$\Phi_{12} = M I_2 \tag{7.28b}$$

Vzájomná indukčnosť obvodov je rovnako dôležitý elektrotechnický parameter obvodov ako je indukčnosť samostatného obvodu. Jej statický definičný vzťah je

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} \tag{7.29}$$

Podľa tejto definície dva magneticky viazané obvody majú vzájomnú indukčnosť M danú výrazom (7.29), ak prúd I jedným z obvodov vytvorí magnetický indukčný tok Φ druhým obvodom. V praxi sú viazané obvody väčšinou statické, t. j. M nezávisí od času a je pre obvody konštantnou kladnou veličinou. Vzájomná indukčnosť sa rovnako ako indukčnosť meria v jednotkách henry.

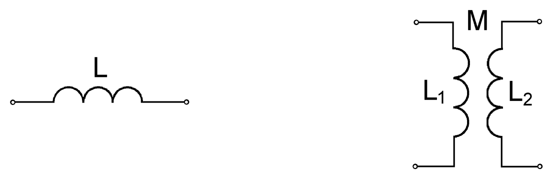
Ak prúd I_1 je časovo premenný a obvod II je otvorený, potom sa v ňom indukuje napätie

$$\mathscr{E}_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(MI_1) = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{7.30}$$

Výraz (7.30) umožňuje napísať dynamickú definíciu vzájomnej indukčnosti výrazom

$$M = \frac{|\mathscr{E}_{21}|}{\left|\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\right|} \qquad [\mathrm{H}] \tag{7.31}$$

Typickými vzájomnými indukčnosťami sú v praxi rôzne typy transformátorov. V elektrotechnických schémach sa indukčnosti L a vzájomné indukčnosti M zakresľujú symbolmi podľa *obr. 7.13*.



Obr. 7.13

Na záver tohto odseku dokážeme vzájomnosť koeficientov L_{21} a L_{12} na jednoduchom príklade. Na *obr. 7.14a,b* sú znázornené dva prúdovodiče v tvare kruhových koncentrických závitov I a II ležiacich v jednej rovine. Závity majú polomery R_1 a R_2, pričom platí že $R_1 \gg R_2$. Prúd I_1 závitom I (*obr. 7.14a*) vytvorí na osi v jeho strede a blízkom okolí magnetickú indukciu

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}$$

Magnetický indukčný tok malým závitom polomeru R_2 s plochou $S_2 = \pi R_2^2$ je

$$\Phi_{21} \approx B_1 S_2 = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} I_1$$

Z tohto výrazu vidíme, že

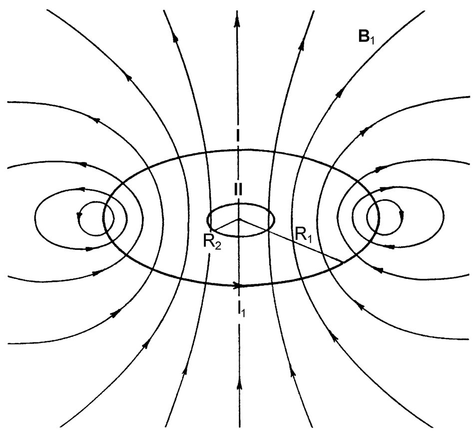
$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$$

Ak tečie prúd I_2 v závite II (*obr. 7.14b*) je situácia pri určení toku závitom I trochu zložitejšia. Na závit II sa však z veľkej diaľky $r \geq R_1$ možno dívať ako na prúdový závit s magnetickým momentom

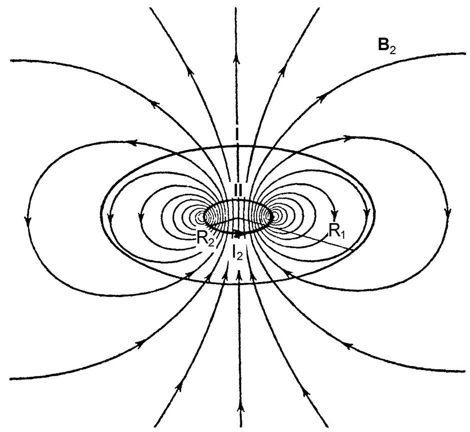
$$m = \pi R_2^2 I_2$$

Indukčný tok rovinou závitov možno rozdeliť na dve časti. Prvú časť toku tvoria indukčné čiary, ktoré sa uzatvárajú vo vnútri závitu I (pozri *obr. 7.14b*), neobopínajú závit I, a preto sa nepodieľajú na celkovom hľadanom toku Φ_{12}. Druhú časť toku tvoria indukčné čiary, ktoré obopínajú závit I, teda indukčné čiary, ktoré rovinu závitov pretínajú vo vzdialenostiach $r \geq R_1$. Je to dipólové pole v jeho ekvatoriálnej rovine

$$B_\vartheta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 I_2}{4\pi r^3}$$



Obr. 7.14a



Obr. 7.14b

pre $\vartheta = \pi/2$ [pozri výrazy (6.59)]. Toto pole treba integrovať po medzikružiach $\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}r$ v hraniciach $R_1 \leq r \leq \infty$ a dostaneme hľadaný indukčný tok, teda

$$\Phi_{12} = \int_{S_1} B_\vartheta \mathrm{d}S_1 = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 I_2}{2} \int_{R_1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} I_2$$

Z tohto výrazu plynie, že

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} = L_{21}$$

Vzájomná indukčnosť dvoch prúdovodičov v tvare koplanárnych koncentrických kruhových závitov, ktorých polomery spĺňajú podmienku $R_1 \gg R_2$ je teda

$$M = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \tag{7.32}$$

7.5.1 Výpočet indukčností a vzájomných indukčností

K výpočtu indukčnosti možno využiť vzťahy (7.18) a (7.20), k výpočtu vzájomných indukčnosti vzťahy (7.27) a (7.29). Možnosť využitia vzťahov (7.18) a (7.27) je vo väčšine prípadov iba teoretická, pretože nevieme vypočítať príslušné integrály. Druhým problémom je otázka relevantného indukčného toku. Výrazy (7.18) a (7.27) v podstate vychádzajú z BSL zákona a ten je formulovaný pre nekonečne tenké vodiče, takže magnetická indukcia priamo na povrchu takého vodiča je nekonečne veľká. Reálne prúdovodiče však majú nenulový polomer, čo znamená, že prúd je rozložený na priereze vodiča a magnetické pole vo vnútri nie je nekonečné, ale narastá lineárne od nuly na osi vodiča k jeho konečnej hodnote na povrchu [pozri výraz (6.66)]. Indukčný tok potrebný na výpočet indukčnosti je potom daný tokom vo vonkajšom priestore a tokom vo vnútri vodiča. Vnútorný tok vo vnútri prúdovodiča je vo väčšine prípadov nepatrný, a preto sa často zanedbáva. Pri výpočte toku sa vnútrajšok vodiča vylučuje, a tým sa súčasne vylúči problém singularity poľa na osi.

Indukčnosti a vzájomné indukčnosti sa najčastejšie počítajú z výrazov (7.20) a (7.29) tak, že sa určí tok zo známeho priebehu magnetickej indukcie a výsledok sa vydelí budiacim prúdom. Uvedieme niekoľko príkladov:

1. Indukčnosť na jednotku dĺžky nekonečného solenoidu s hustotou závitov n a polomerom R. V nekonečnom solenoide je magnetické pole homogénne s indukciou

$$B = \mu_0 n I$$

Táto indukcia preniká prierezovou plochou solenoidu $S = \pi R^2$, takže indukčný tok solenoidom je

$$\Phi = BS = \mu_0 n \pi R^2 I$$

Tento indukčný tok preniká každým z n závitov jednotkovej dĺžky solenoidu, teda

$$n\Phi = L'I$$

z čoho indukčnosť na jednotku dĺžky solenoidu

$$L' = \frac{n\Phi}{I} = \pi\mu_0 n^2 R^2 \qquad \text{[H/m]} \qquad (7.33)$$

Nekonečné solenoidy v praxi samozrejme neexistujú, výraz však možno s istou presnosťou použiť aj v prípade konečného dlhého a tenkého solenoidu. Ak má solenoid dĺžku l a celkový počet závitov $N = nl$ pričom $R \ll l$, potom jeho indukčnosť

$$L \approx L'l = \frac{\pi\mu_0 N^2 R^2}{l} \qquad (7.34)$$

Pre ľubovoľne dlhý solenoid je indukčnosť daná výrazom

$$L = k\frac{\pi\mu_0 N^2 R^2}{l} \qquad (7.35)$$

kde koeficient k pre rôzne hodnoty $l/(2R)$ je daný v tabuľke 8.

Tabuľka 8

$l/(2R)$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1	2	3	5	50
k	0,200	0,315	0,405	0,525	0,605	0,685	0,82	0,87	0,92	0,99

2. Indukčnosť kruhového závitu. Na prvý pohľad jednoduchý prúdový obvod – kruhový rovinný závit polomeru R vyrobený z valcového vodiča polomeru a – predstavuje pri výpočte jeho vlastnej indukčnosti veľké matematické problémy. Pre $R/a \gg 1$ je indukčnosť závitu daná súčtom vnútornej indukčnosti kruhového vodiča, ktorá podľa riešenia úlohy 205 má hodnotu

$$L_1 = 2\pi R L' = \mu_0 \frac{R}{4} \tag{7.36}$$

a indukčnosti spôsobenej indukčným tokom Φ plochou S kruhu polomeru $R - a$, teda indukčnosti

$$L_2 = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{I}\int_S B_z \, \mathrm{d}\, S$$

kde I je prúd v závite a

$$B_z = \frac{\mu_0 I R}{\pi(R^2 - r^2)} \mathrm{E}(k, \pi/2)$$

je magnetická indukcia v rovine závitu ako funkcia vzdialenosti r od stredu závitu. $\mathrm{E}(k,\pi/2)$ je úplný eliptický integrál druhého druhu, kde $k = r/R$ (pozri riešenie úlohy 177). Indukčnosť L_2 potom možno formálne vyjadriť v tvare

$$L_2 = 2\mu_0 R \int_0^{R-a} \frac{r}{R^2 - r^2} \mathrm{E}(k, \pi/2) \mathrm{d}r \tag{7.37}$$

Výpočet posledného integrálu je možný iba v numerickom tvare. V literatúre[1] sa však uvádza približný empirický výraz pre výpočet indukčnosti kruhového závitu v tvare

$$L_2 = \mu_0 R \left(\ln \frac{R}{a} + 0{,}329 \right) \tag{7.38}$$

Výrazy (7.36) a (7.38) platia iba pre nízke frekvencie a pre neferomagnetický vodič, ak možno zanedbať skinefekt.

3. Indukčnosť toroidálnej cievky s pravouhlou dutinou. Magnetická indukcia v dutine toroidálnej cievky s N závitmi a s prúdom I, ktorej rez je znázornený na *obr. 7.15* je daná výrazom

[1] Napr. Rint, C.: Handbuch für Hochfrequenz- und Elektro-Techniker, Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik GMBH Berlin-Borsigwalde 1952

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

pre $R_1 < r < R_2$. Indukčný tok "okienkom" $h \times (R_2 - R_1)$ toroidu sa vypočíta integráciou príspevkov $\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S$, kde $\mathrm{d}S = h\mathrm{d}r$, teda

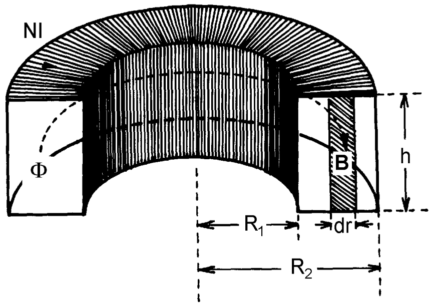
$$\Phi = \int_S B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 NhI}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 Nh}{2\pi} I \ln\frac{R_2}{R_1}$$

Indukčnosť toroidálnej cievky je potom

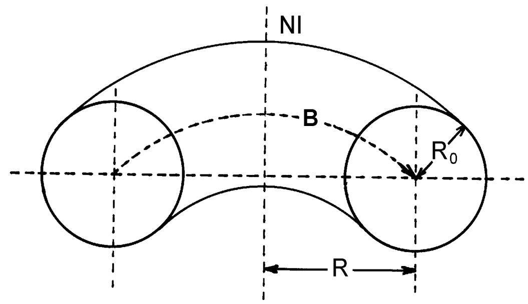
$$L = N\frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} \tag{7.39}$$

Čitateľovi odporúčam výpočtom dokázať, že indukčnosť toroidálnej cievky s N závitmi, s polomerom toroidu R a s kruhovou dutinou polomeru R_0, ako na *obr. 7.16*, je daná výrazom

$$L_2 = \mu_0 N^2\left(R - \sqrt{R^2 - R_0^2}\right) \tag{7.40}$$



Obr. 7.15



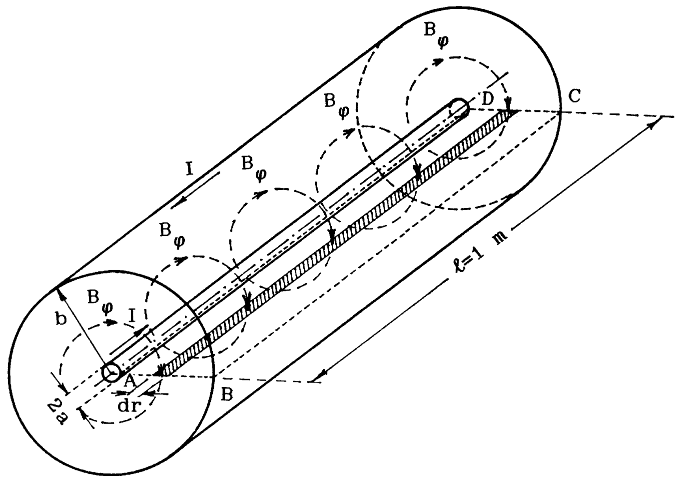
Obr. 7.16

4. Indukčnosť koaxiálneho kábla. Koaxiálny kábel je dvojvodičové vedenie určené predovšetkým na prenos elektromagnetických signálov pre potreby telekomunikácie. Pozostáva z centrálneho valcového vodiča a koaxiálneho plášťa, v ktorých tečie prúd I v protibežných smeroch. S prúdom je spojený indukčný tok v dutine kábla, teda kábel má indukčnosť, ktorá je jedným z jeho určujúcich prenosových parametrov (druhým parametrom je jeho kapacita). Magnetické pole v dutine kábla (pozri odsek 6.1.9) je jednoduché azimutálne pole s kruhovými indukčnými čiarami a je dané výrazom

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Tok tohto poľa v dutine kábla určuje jeho indukčnosť. Na *obr. 7.17* je znázornený úsek koaxiálneho kábla s vyznačenou plochou S obdĺžnika $ABCD$, ktorou treba indukčný tok počítať. Tok vo vnútri centrálneho vodiča a v plášti kábla sa pritom zanedbáva. Integráciou indukcie plochou S obdĺžnika $ABCD$ dostaneme pre tok výraz

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \ln\frac{b}{a}$$



Obr. 7.17

z čoho indukčnosť koaxiálneho kábla na jednotku jeho dĺžky

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad [\mathrm{H/m}] \qquad (7.41)$$

Treba si ešte uvedomiť, že z mechanických dôvodov musí byť dutina kábla vyplnená tuhým nevodivým materiálom s relatívnou permitivitou ε_r a relatívnou permeabilitou μ_r. Magnetické vlastnosti neferomagnetických materiálov sú v prevažnej miere porovnateľné s vlastnosťami vákua, preto relatívnu permeabilitu použitých materiálov v koaxiálnom kábli možno s dobrou presnosťou považovať za rovnú 1 a teda $\mu = \mu_0\mu_r \approx \mu_0$.

5. Vzájomná indukčnosť dvoch koaxiálnych solenoidov. Vzájomné indukčnosti sa najčastejšie počítajú tak, že sa vypočíta tok jednej cievky prenikajúci druhou a výsledok sa vynásobí počtom závitov druhej cievky. Ak napr. v nekonečne dlhom solenoide s polomerom R a s počtom n_1 závitov na jednotku dĺžky tečie prúd I_1, potom tok Φ_1 jedným závitom druhého koaxiálneho solenoidu s rovnakým polomerom a s n_2 závitmi na jednotku dĺžky je

$$\Phi_1 = \mu_0 n_1 \pi R^2 I_1$$

a tok n_2 závitmi druhého solenoidu

$$\Phi_{21} = n_2\Phi_1 = \mu_0 n_2 n_1 \pi R^2 I_1 = L_{21} I_1 = M I_1$$

z čoho vzájomná indukčnosť dvojice na jednotku dĺžky

$$M = \mu_0 n_2 n_1 \pi R^2 \tag{7.42}$$

Výraz (7.42) možno využiť na výpočet vzájomnej indukčnosti dvojice konečnej dĺžky rovnako, ako pri výpočte indukčnosti jedného solenoidu. Možno si pritom všimnúť, že

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \tag{7.43}$$

kde L_1, L_2 sú indukčnosti jednotlivých solenoidov.

6. Vzájomná indukčnosť dvoch toroidálnych cievok. Ak dve cievky s počtami závitov N_1, N_2 sú rovnomerne navinuté na spoločnom toroide ako na *obr. 7.15*, potom majú vzájomnú indukčnosť

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \tag{7.44}$$

k čomu vedú úvahy podobné ako v bode 3. tohto odseku.

7. Transformátor ako vzájomná indukčnosť. Ak primárnym obvodom transformátora na *obr. 7.9* tečie prúd I_1, potom pre pomer tokov viazaných s primárnymi N_1 a sekundárnymi N_2 závitmi platí

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_{21}} = \frac{L_1 I_1}{M I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

Podobne, ak prúd I_2 tečie sekundárnym vinutím, platí

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_{12}} = \frac{L_2 I_2}{M I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Z porovnania týchto výrazov plynú pre vzájomnú indukčnosť transformátora zaujímavé a v praxi užitočné vzťahy

$$M = L_1 \frac{N_2}{N_1} = L_2 \frac{N_1}{N_2} \tag{7.45}$$

a tiež vzťah

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} \tag{7.46}$$

Výrazy (7.45) a (7.46) budú využité pri analýze transformátora elektrického napätia ako transformátora odporu alebo presnejšie, impedancie. Treba zdôrazniť, že výrazy platia iba vtedy, ak cievky transformátora majú skutočne spoločný celkový indukčný tok. Ak však tok jednej cievky nepreniká celý závitmi druhej cievky, vzájomná indukčnosť je menšia ako tá, daná výrazom (7.43), a je

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \qquad\qquad 0 \le k \le 1 \tag{7.47}$$

kde k je koeficient väzby. Koeficient väzby sieťových výkonových transformátorov je blízky 1, pre vysokofrekvenčné transformátory napr. v pásmových filtroch má hodnoty cca 0,01, prípadne aj menej.

Obvody s indukčnosťami a vzájomnými indukčnosťami možno spájať. Spojenia môžu byť veľmi zložité, ak popri galvanickom spojení obvodov dochádza aj k ich magnetickej väzbe. Jednoduché spojenia možno urobiť s indukčnosťami, ktoré sú navzájom magneticky izolované (napríklad toroidálne cievky). Jednoduché úvahy ukazujú, že výsledná indukčnosť L_s sériového spojenia n indukčností má hodnotu

$$L_s = \sum_{i=1}^{n} L_i \tag{7.48a}$$

a pre indukčnosť L_p paralelného spojenia platí

$$\frac{1}{L_p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i} \tag{7.48b}$$

7.6 VPLYV SEKUNDÁRNEHO PRÚDU NA POMERY V PRIMÁRNOM OBVODE

Pri analýze vzájomnej indukcie sme sa doteraz úzkostlivo vyhýbali prípadu, keď sekundárny obvod, v ktorom sa indukuje napätie z primárneho obvodu, je vodivo uzavretý. Až takýto prípad plne preukáže účinok zákona elektromagnetickej indukcie, Lenzovho zákona a princípov vzájomnej indukcie.

Uvažujme dva obvody s indukčnosťami L_1 a L_2 v magnetickej väzbe vyjadrenej koeficientom M (pozri *obr. 7.18*). V sekundárnom obvode je spínač P.

Ak je spínač rozopnutý a v primárnom obvode je zapojený zdroj časovopremenného napätia $\mathscr{E}(t)$, potečie v primárnom obvode prúd I_1, ktorý na svorkách zdroja vytvorí protinapätie

$$\mathscr{E}_{i1} = -L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

V sekundárnom obvode na kontaktoch spínača je indukované napätie z primárneho obvodu

$$\mathscr{E}_{i2} = -M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

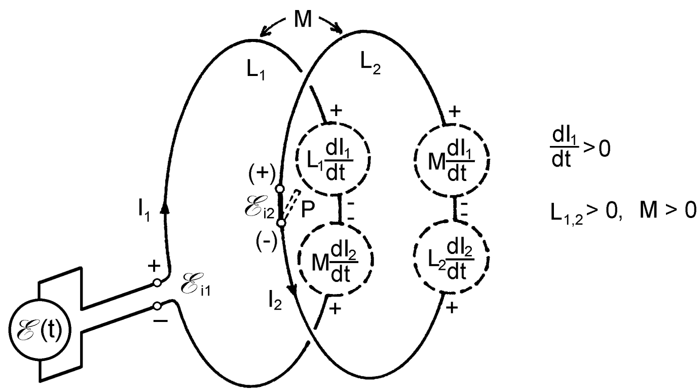
Iná situácia nastane, ak spínač P zapneme (tak ako na *obr. 7.18*; šípky indukovaných prúdov a polarity indukovaných napätí pozdĺž obvodov zobrazujú okamžitý stav pre

$\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}t > 0$). V sekundárnom obvode potečie prúd I_2, ktorý podľa Lenzovho pravidla vyvolá v obvode protinapätie

$$L_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

a v primárnom obvode indukované napätie

$$M \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$



Obr. 7.18

Výsledné indukované napätie na svorkách primárneho obvodu

$$\mathscr{E}_{i1} = -L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \tag{7.49a}$$

a "výstupné napätie" na skratovaných kontaktoch spínača P

$$\mathscr{E}_{i2} = L_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{7.49b}$$

Z rovnice (7.49b) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{L_2} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

a po dosadení do (7.49a) máme

$$\mathscr{E}_{i1} = -L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + \frac{M^2}{L_2} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

alebo $$\mathscr{E}_{i1} = -L_1' \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{7.50}$$

kde $$L_1' = L_1\left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) = L_1(1-k^2) < L_1 \tag{7.51}$$

a k je koeficient väzby obvodov. Zaujímavé výrazy (7.50) a (7.51) možno interpretovať nasledovne: Ak sa jeden z magneticky viazaných obvodov skratuje, indukčnosť druhého sa zmenší faktorom $(1 - k^2)$, t. j. zmenšia sa jeho induktívne schopnosti, a ak je väzba totálna (k = 1), druhý obvod úplne stratí indukčnosť a stane sa z neho obyčajný bezindukčný skrat alebo odpor. Takýto stav môže nastať napr. v sieťovom transformátore, ak vo vinutí vznikne medzizávitový skrat (elektrotechnici poznajú tento stav ako "závit nakrátko"). V skratovanom závite vznikne veľký indukovaný prúd a vzrastie tiež prúd vo zvyšku vinutia, pretože jeho indukčnosť, a tým aj indukované protinapätie sa znížia prakticky na nulu. To vedie k tepelnému preťaženiu a zničeniu transformátora.

V reálnych viazaných obvodoch sekundárny obvod samozrejme nebýva skratovaný, ale je do neho zaradený nejaký odpor, prípadne ďalšie prvky (kapacity, iné indukčnosti a pod.). Aj samotné vinutia majú istý nenulový odpor. Analýza činnosti obvodov je potom zložitejšia a pre harmonické striedavé prúdy bude jeden z prípadov predmetom odseku 9.8.4. V tejto súvislosti pozri tiež príklad 223.

7.7 ENERGETICKÉ ÚVAHY V OBVODE *RL*. ENERGIA MAGNETICKÉHO POĽA

Magnetické pole je nositeľom energie, čo plynie z jednoduchého faktu, že silovým pôsobením na magnety, solenoidy s prúdom, prípadne na iné cievky, magnetické pole koná prácu. Uvažujme jednoduchý obvod na *obr. 7.19*, v ktorom je zdroj EMN $\mathscr{E}$ zapojený v sérii s odporom R a cievkou (indukčnosťou) L. V čase $t = 0$ sa v obvode zapne spínač K, čím sa okruh galvanicky uzavrie a v obvode začne tiecť časovopremenný elektrický prúd $I = I(t)$. Na indukčnosti L vznikne samoindukované napätie

$$\mathscr{E}_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

ktoré spolu s napätím $\mathscr{E}$ pôsobí v obvode. Podľa II. Kirchhoffovho zákona súčet elektromotorických napätí v obvode sa rovná súčtu potenciálových spádov na odporoch (vnútorný odpor zdroja a odpor spojovacích vodičov zanedbáme), takže jednoducho

$$\mathscr{E} + \mathscr{E}_i = \mathscr{E} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI$$

alebo po úprave

$$\mathscr{E} = RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{7.52}$$

Výraz (7.52) je diferenciálnou rovnicou pre prúd v obvode, ale ten nie je predbežne predmetom nášho záujmu. Najprv sa budeme zaujímať o energetickú bilanciu v obvode, t. j. o to, ako sa v obvode spotrebuje energia zdroja. Za tým účelom rovnicu (7.52) vynásobíme s $I\mathrm{d}t$, kde $\mathrm{d}t$ je nekonečne krátky časový element. Tak dostaneme

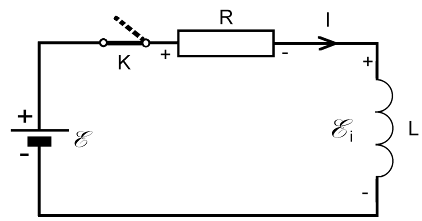
$$\mathscr{E}I\mathrm{d}t = RI^2\mathrm{d}t + LI\mathrm{d}I \tag{7.53}$$

Ľavá strana rovnice udáva energiu dodanú zdrojom do obvodu za čas $\mathrm{d}t$, teda

$$\mathrm{d}W = \mathscr{E}I\mathrm{d}t$$

Prvý člen na pravej strane rovnice (7.53)

$$\mathrm{d}W_R = RI^2\,\mathrm{d}t$$



Obr. 7.19

predstavuje energiu, ktorá sa za čas $\mathrm{d}t$ spotrebuje v odpore R na teplo. Nakoniec druhý člen na pravej strane rovnice

$$\mathrm{d}W_m = LI\mathrm{d}I$$

je časť energie, ktorá sa akumuluje v indukčnosti L vo forme magnetického poľa. Energia magnetického poľa závisí iba od indukčnosti (za predpokladu, že neexistuje magnetická väzba s inými indukčnosťami) a od prúdu v nej. Celková konečná energia je daná integrálom príspevkov $\mathrm{d}W_m$ od nulového prúdu, po konečný prúd I_0, teda

$$W_m = L\int_0^{I_0} I\mathrm{d}I = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Ak využijeme skutočnosť, že $LI_0 = \Phi$, potom energia magnetického poľa sa dá vyjadriť výrazmi[1]

$$W_m = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}\Phi I_0 \tag{7.54}$$

[1] Čitateľa upozorňujeme na formálnu podobnosť výrazu (7.54) a výrazu pre elektrickú energiu nabitého kondenzátora (3.37) $W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$. Stojí za povšimnutie formálna analógia $L \longleftrightarrow C$, $I_0 \longleftrightarrow U$, $\Phi \longleftrightarrow Q$.

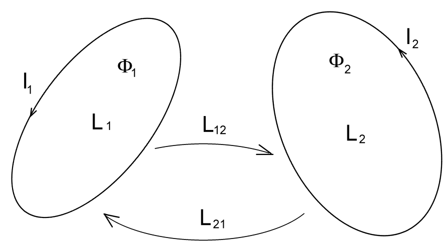
Platnosť posledného výrazu neskôr dokážeme ešte raz "vybíjaním" magnetickej energie cievky do odporu pri analýze prechodového javu v *RL* obvode.

Výraz (7.54) možno zovšeobecniť pre viac obvodov, ktoré sú magneticky zviazané. Uvažujme najprv dva obvody schematicky znázornené na *obr. 7.20*. Označme indukčnosti obvodov postupne $L_1 = L_{11}$ a $L_2 = L_{22}$, vzájomnú indukčnosť $M = L_{12} = L_{21}$. Predpokladajme, že obvodmi tečú prúdy I_1 a I_2. Tieto prúdy vytvoria jednotlivými obvodmi indukčné toky, menovite prvým obvodom indukčný tok

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_{11}I_1 + L_{12}I_2$$

a podobne druhým obvodom tok

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21} = L_{22}I_2 + L_{21}I_1$$



Obr. 7.20

Na základe výrazu (7.54) a platnosti zákona superpozície celkovú magnetickú energiu dvoch obvodov so vzájomnou magnetickou väzbou možno vyjadriť výrazom

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{2}\Phi_1 I_1 + \frac{1}{2}\Phi_2 I_2 = \\ &= \frac{1}{2}\left(L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + L_{21}I_2I_1 + L_{22}I_2^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} L_{ij}I_iI_j \end{aligned} \tag{7.55}$$

Výraz (7.55) možno zovšeobecniť na *n* obvodov, teda

$$W_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}I_iI_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i I_i \tag{7.56}$$

kde koeficient L_{ii} je indukčnosť *i*-tého obvodu, $L_{ij} = L_{ji}$ sú vzájomné indukčnosti *i*-tého a *j*-tého obvodu a

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}I_j \tag{7.57}$$

je celkový indukčný tok i-tým obvodom od vlastného prúdu I_i a ostatných $n - 1$ prúdov susedných obvodov. (Čitateľ si môže všimnúť formálnu podobnosť výrazov (7.56), (7.57) a zodpovedajúcich výrazov pre elektrickú energiu a potenciál sústavy bodových nábojov v odseku 3.7.1).

7.7.1 Hustota energie magnetického poľa

Podobne ako v elektrickom poli možno vyjadriť aj objemovú hustotu energie magnetického poľa v priestore. Na tento účel využijeme indukčnosť a magnetickú indukciu nekonečne dlhého solenoidu. Indukčnosť dĺžky l solenoidu prierezu S a hustoty n závitov je podľa výrazu (7.33)

$$L = \mu_0 n^2 S l$$

a magnetická indukcia v dutine solenoidu pri prúde I je

$$B = \mu_0 n I$$

z čoho prúd v solenoide

$$I = \frac{B}{\mu_0 n}$$

Energia magnetického poľa v objeme $\tau = Sl$ solenoidu je

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \tau = w_m \tau$$

z čoho hustota energie magnetického poľa

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2} \qquad (7.58)$$

Magnetické vlastnosti látkových prostredí sú vyjadrené ich permeabilitou μ, ktorá môže byť tenzorom a závisieť od intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$, prípadne aj od ďalších vplyvov (pozri odsek 6.2). Pre takéto prostredia je hustota energie magnetického poľa daná výrazom

$$w_m = \frac{\boldsymbol{B}.\boldsymbol{H}}{2} \qquad \left[\mathrm{J.m^{-3}}\right] \qquad (7.59)$$

Výraz (7.59) pre hustotu energie magnetického poľa je najvšeobecnejší, pretože platí dokonca aj pre látky s anizotropnými vlastnosťami a samozrejme aj pre vákuum. Svojou formou je podobný výrazu pre hustotu energie elektrického poľa

$$w_e = \frac{\boldsymbol{E}.\boldsymbol{D}}{2}$$

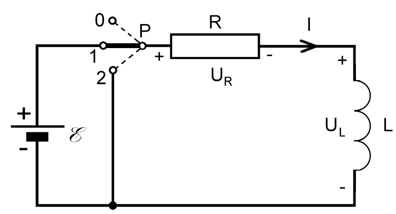
a obidve hustoty v súčte udávajú hustotu energie elektromagnetického poľa, teda

$$\boxed{w_{elmag} = \frac{\boldsymbol{E}.\boldsymbol{D}}{2} + \frac{\boldsymbol{B}.\boldsymbol{H}}{2}} \tag{7.60}$$

7.8 ELEKTRICKÝ PRÚD V OBVODE *RL*. PRECHODOVÝ JAV V OBVODE *RL*

V obvodoch, ktoré obsahujú popri odporoch aj indukčnosti, pôsobia tieto svojím indukovaným napätím proti pôsobiacim napäťovým zdrojom, a tak aj v prípade, ak je v obvode zaradený zdroj konštantného napätia $\mathscr{E}$, prúd v obvode po jeho zopnutí nie je v čase konštantný, ale k svojej stacionárnej hodnote sa blíži asymptoticky, a dosiahne ju teoreticky po nekonečne dlhom čase. Takýto proces sa nazýva prechodový jav *RL*.

Uvažujme obvod podľa *obr. 7.21*, v ktorom odpor R v sérii s indukčnosťou L možno prepínačom P pripojiť na zdroj konštantného napätia $\mathscr{E}$. Ak sa prepínač z polohy 0 prepne do polohy 1, zapojí sa do obvodu odporu a cievky zdroj, ak sa prepne do polohy 2, vyradí sa zdroj a obvod sa skratuje.



Obr. 7.21

Ak sa v čase $t = 0$ prepne prepínač z polohy 0 do polohy 1, obvodom začne tiecť prúd, pre ktorý podľa II. Kirchhoffovho zákona vyjadreného rovnicou (7.52), platí vzťah

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = \mathscr{E} \tag{7.61}$$

Z rovnice (7.61) pri zadaných pevných hodnotách L, R a $\mathscr{E}$ možno vypočítať prúd I ako funkciu času. V matematickej terminológii je (7.61) obyčajnou nehomogénnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu s konštantnými koeficientmi. K riešeniu treba zadať začiatočnú podmienku pre prúd. V okamihu zopnutia obvodu, pre $t = 0$, na indukčnosti vznikne protinapätie, ktoré je veľkosťou rovné $\mathscr{E}$ a prúd v prvom okamihu v obvode netečie. Metódou variácie konštánt dostaneme riešenie v tvare

$$I(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left[1 - \mathrm{e\,xp}\left(-\frac{R}{L}t\right)\right] = \frac{\mathscr{E}}{R}\left[1 - \mathrm{e\,xp}\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \tag{7.62}$$

kde

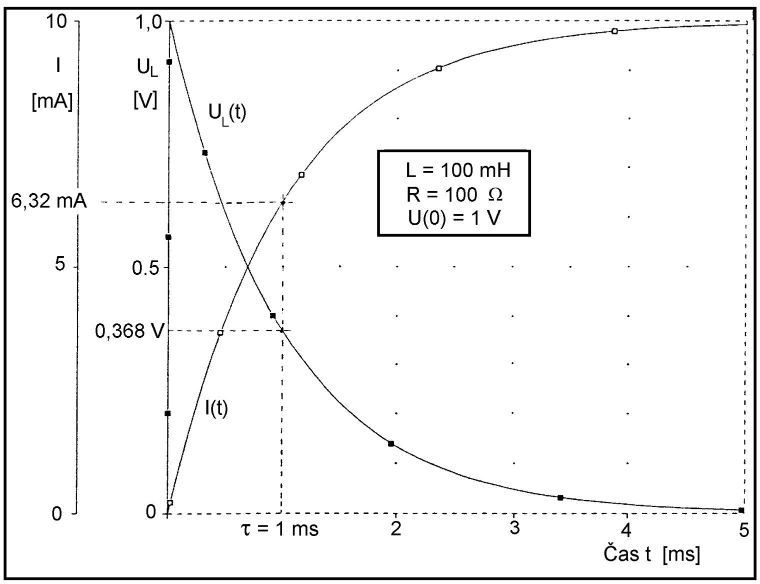
$$\tau = \frac{L}{R} \tag{7.63}$$

je časová konštanta obvodu závislá od jeho parametrov R a L. Číselne udáva čas, za ktorý prúd v obvode vzrastie z nulovej hodnoty na $(1 - e^{-1}) \approx 0{,}632$-tinu svojej ustálenej hodnoty, ktorú teoreticky dosiahne v čase $t \to \infty$. Veľké časové konštanty majú cievky (indukčnosti) spojené s malými odpormi, do ktorých treba zahrnúť aj odpor prúdovodiča, z ktorého je cievka navinutá.

Na odpore a indukčnosti (cievke) sú pritom napätia

$$U_R(t) = RI(t) = \mathscr{E}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \tag{7.64}$$

$$U_L(t) = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \mathscr{E}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{7.65}$$



Obr. 7.22

Časové priebehy prúdu v obvode a napätia na cievke sú graficky znázornené na *obr. 7.22*. Číselné hodnoty parametrov R a L sú udané v grafe, EMN zdroja $\mathscr{E} = U(0) = 1$ V. Časová konštanta obvodu.

$$\tau = \frac{L}{R} = 10^{-3}\ \text{s}$$

Z grafov vidíme, že prúd $I(t)$ v obvode s časom exponenciálne stúpa s časovou konštantou $\tau = 1$ ms a podobne stúpa aj napätie U_R (v grafe neznázornené). Napätie na indukčnosti U_L exponenciálne klesá s tou istou časovou konštantou. Asymptotou prúdu $I(t)$ je konštantný prúd $I_0 = \mathscr{E}/R = 10$ mA, aký sa v obvode ustáli teoreticky po nekonečne dlhom čase, prakticky však už po čase $5\tau = 5$ ms. Napätie na indukčnosti U_L sa asymptoticky blíži k nule. (V tejto súvislosti čitateľa upozorňujeme na alternatívny prechodový jav v obvode pozostávajúcom z odporu a kondenzátora – prechodový jav *RC*, ktorý má veľa formálnych podobností, a ktorý sme analyzovali v odseku 5.8).

Predpokladajme teraz, že obvod bol zopnutý podstatne dlhšie, ako je čas 5τ, keď prechodový jav prakticky doznel a prúd dosiahol svoju stacionárnu hodnotu $I_{st} = \mathscr{E}/R$. Prepnime v takomto čase prepínač *P* do polohy 2. V praxi môže viesť proces prepínania k nežiadúcim až tragickým dôsledkom.[1] V procese prepínania, po rozopnutí prúdu *I* v obvode a pred zopnutím obvodu do skratu, sa na cievke indukuje teoreticky nekonečne vysoké napätie úmerné $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t \to \infty$. Prakticky však pri rozopínaní vznikne medzi kontaktmi spínača elektrický oblúk, ktorý napätie obmedzí na istú konečnú hodnotu, závislú od veľkosti indukčnosti *L*. Toto napätie môže byť ešte stále tak vysoké, že sa cievka s veľkou indukčnosťou zničí elektrickým prierazom vinutia.

Nech v okamihu prepnutia prepínača $t = 0$. Okamžite po zopnutí obvodu magnetické pole cievky (ktoré začína klesať) sa snaží udržať prúd v obvode na rovnakej hodnote ako pred prepnutím. Nová začiatočná hodnota prúdu $I_0 = I_{st} = \mathscr{E}/R$, a prúd v obvode sa riadi rovnicou

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = 0 \tag{7.66}$$

Riešenie tejto diferenciálnej s uvedenou začiatočnou podmienkou rovnice je jednoduché

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{\mathscr{E}}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{7.67}$$

Prúd v obvode exponenciálne klesá s časovou konštantou τ, a napätie na odpore

$$U_R(t) = RI(t) = RI_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \mathscr{E}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{7.68}$$

klesá takisto. Napätie U_L na indukčnosti sa rovná zápornému indukovanému napätiu, teda

$$U_L = -\mathscr{E}_i = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -RI_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -\mathscr{E}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{7.69}$$

Vidíme, že v každom čase $U_R + U_L = 0$.

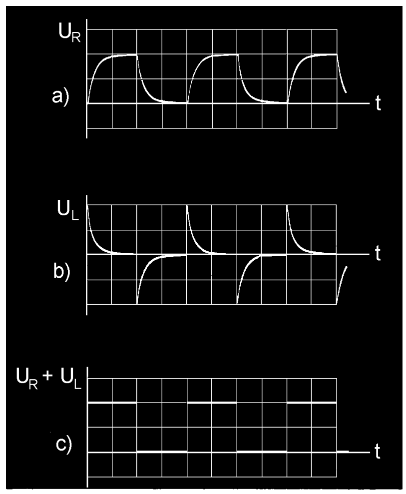
Prúd v obvode, v ktorom niet evidentných zdrojov elektromotorických napätí, okamžite vyvoláva otázku pôvodu energie, ktorá tento prúd vyvoláva. Zdrojom energie tu môže byť jedine magnetické pole, ktorého vonkajším prejavom je začiatočný prúd

[1] Purcell vo svojej učebnici dramaticky konštatuje: "... ľudia často zomierali pri vypínaní obvodov s veľkými indukčnosťami".

$I_0 = \mathscr{E}/R$ v čase $t = 0$. Tak, ako s časom zaniká prúd v obvode podľa výrazu (7.67), tak postupne zaniká aj s ním zviazané magnetické pole. Svoju energiu odovzdáva prostredníctvom prúdu do odporu R vo forme tepla. Presvedčíme sa o tom integráciou výkonu RI^2 v čase od $t = 0$ až do $t \to \infty$. Energia spotrebovaná v odpore R na teplo je

$$W_R = \int_0^\infty RI^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e\,xp}\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\mathrm{d}\,t = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Vidíme, že je to tá istá energia, ktorú malo magnetické pole na začiatku procesu, v čase $t = 0$.



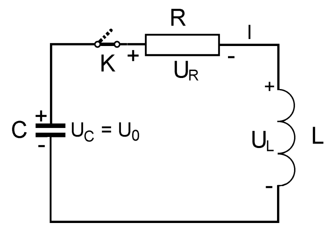
Obr. 7.23

Na *obr. 7.23* sú znázornené oscilografické záznamy napätí U_R, U_L a $U_R + U_L$ na prvkoch obvodu podľa *obr. 7.21*, ak zdroj jednosmerného napätia je nahradený generátorom obdĺžnikového napätia (pozri tiež odsek 5.8 a *obr. 5.29*, resp. *5.30*).

RL obvody sa podobne ako obvody *RC* využívajú v elektrotechnike predovšetkým ako sekcie reťazcových filtrov, menej často ako väzbové členy, integračné, resp. derivačné obvody a i. Treba mať na pamäti, že každá, hlavne väčšia indukčnosť, je navinutá dlhým prúdovodičom (drôtom), ktorý predstavuje i nezanedbateľný odpor a treba ju považovať za sériové spojenie R a L.

7.9 PRECHODOVÝ JAV V OBVODE *RLC*. VOĽNÉ KMITY V OBVODE *RLC*

Zaujímavé a z praktického hľadiska závažné elektrické javy vzniknú v obvode zostavenom sériovým spojením kapacity C, indukčnosti L a odporu R ako na *obr. 7.24*. Odpor môže byť do obvodu zaradený, ale častejšie predstavuje odpor vinutia cievky. Dielektrikum kondenzátora má tiež nejakú konečnú nenulovú vodivosť, obyčajne je však tak malá, že ju považujeme za nulovú. Ak je to však potrebné, vodivostné vlastnosti dielektrika sa vyznačujú paralelným odporom ku kondenzátoru, čo však riešenie obvodu skomplikuje.



Obr. 7.24

Predpokladajme, že kondenzátor C je pred zopnutím spínača K nabitý na napätie U_0. Ak v čase $t = 0$ zopneme spínač, začne sa v obvode rozvíjať prúd $I(t)$ a na jednotlivých prvkoch obvodu vznikajú napäťové spády (označená polarita napätí na *obr. 7.24* zodpovedá stavu ihneď po zapnutí spínača):

– na kondenzátore je náboj

$$Q(t) = U_0 C - \int_0^t I \mathrm{d}t$$

ktorý bezprostredne po zopnutí začína klesať a na kondenzátore je napätie

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\mathrm{d}t$$

– na indukčnosti sa začína indukovať napätie a napäťový spád na nej je

$$U_L(t) = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

– na odpore je napäťový spád podľa Ohmovho zákona

$$U_R(t) = RI$$

Algebraický súčet týchto napätí v obvode sa musí podľa II. Kirchhoffovho zákona rovnať nule, pretože v obvode nepôsobí nijaký zdroj napätia, teda

$$U_C - U_L - U_R = 0 \tag{7.70}$$

alebo

$$U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I\mathrm{d}t - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - RI = 0$$

Po jednej časovej derivácii a po úprave rovnica nadobudne tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} I = 0 \tag{7.71}$$

Je to rovnica pre prúd $I(t)$ v obvode po zopnutí kľúča K. Zaveďme v rovnici (7.71) substitúcie

$$\frac{R}{L} = 2\alpha \qquad\qquad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

čím prejde do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 I = 0 \tag{7.72}$$

Rovnice (7.71), resp. (7.72) sú obyčajné homogénne diferenciálne rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientmi a riešenie poslednej možno hľadať v tvare

$$I(t) = A\mathrm{e}^{\gamma t}$$

kde A je integračná konštanta a γ je riešenie charakteristickej rovnice

$$\gamma^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0$$

t. j.

$$\gamma_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \beta \tag{7.73}$$

kde

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \tag{7.74}$$

Všeobecné riešenie rovnice (7.72) má tvar

$$I(t) = A_1\,\mathrm{e}^{\gamma_1 t} + A_2\,\mathrm{e}^{\gamma_2 t} \tag{7.75}$$

kde A_1 a A_2 sú integračné konštanty, ktoré treba určiť zo začiatočných podmienok. V čase $t = 0$ je

$$I(0) = A_1 + A_2 = 0 \tag{7.76}$$

a tiež $U_R = 0$, takže podľa rovnice (7.70)

$$U_L(0) = L\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = U_C(0) = U_0$$

z čoho

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 = \frac{U_0}{L} \tag{7.77}$$

Riešením rovníc (7.76) a (7.77) s ohľadom na výrazy (7.73) a (7.74) pre integračné konštanty dostaneme

$$A_2 = -A_1 = \frac{U_0}{2\beta L}$$

a riešenie (7.75) prijme tvar

$$I(t) = \frac{U_0}{\beta L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\frac{\mathrm{e}^{\beta t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{2} \tag{7.78}$$

Charakter prúdu $I(t)$ závisí od vzájomného pomeru parametrov R, L a C obvodu. Podľa toho treba rozlišovať tri špeciálne prípady:

1. Prípad, ak odpor R v obvode je veľký, taký že

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{kr}$$

čo zodpovedá podmienke

$$\alpha > \omega_0$$

a β je reálne, kladné. V takom prípade sa výraz pre prúd $I(t)$ dá napísať v tvare

$$I(t) = \frac{U_0}{\beta L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sinh \beta t \tag{7.79}$$

2. Prípad, ak odpor spĺňa podmienku

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{kr}$$

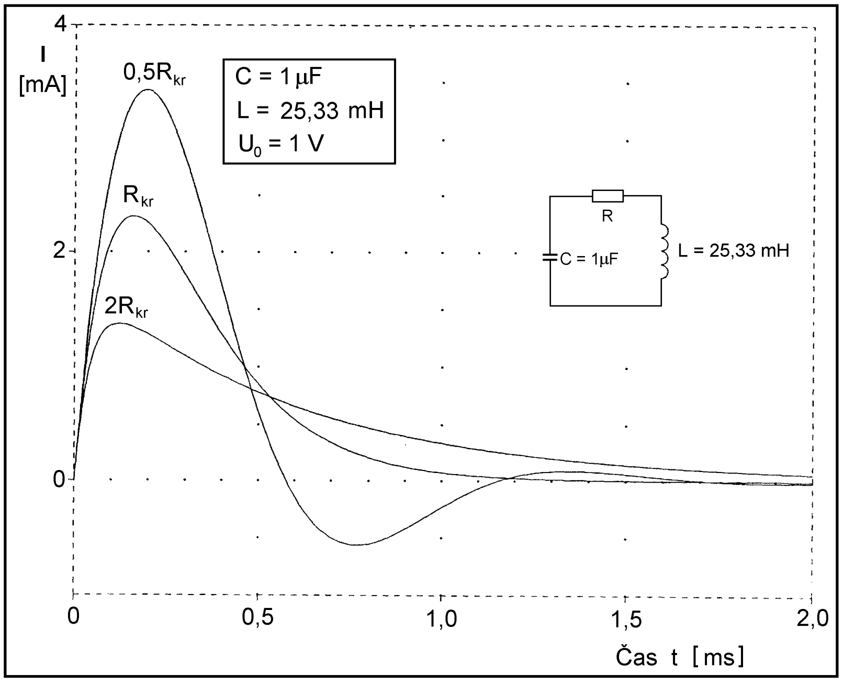
alebo ak $\alpha = \omega_0$, t. j. $\beta = 0$. Limitným prechodom $\beta \to 0$ vo výraze (7.78) dostaneme pre prúd výraz

$$I(t) = \frac{U_0}{\beta L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\, t \tag{7.80}$$

Prípady 1. a 2. prúdových priebehov, keď $R \geq R_{kr}$ sa nazývajú aperiodický (neperiodický) a aperiodický kritický priebeh. Vyznačujú sa prúdovým nábehom s maximom prúdu a následným relaxačným útlmom prúdu k jeho nulovej hodnote. Na *obr. 7.25* sú pre dané číselné hodnoty parametrov C, L a začiatočného napätia na kondenzátore $U_C(0) = 1$ V graficky znázornené časové priebehy prúdu pre $R = 2R_{kr}$ (aperiodický) a $R = R_{kr}$ (aperiodický kritický). Vidieť, že kritický priebeh je priebeh s najrýchlejším útlmom bez toho, aby prúd zmenil smer. V grafe je aj priebeh prúdu pre $R = 0{,}5R_k$, ktorý už nie je daný výrazmi (7.79), resp. (7.80), pretože preň $R < R_{kr}$. Vyznačuje sa prúdovým prekmitom v opačnom smere.

3. Posledný, najdôležitejší prípad nastáva, ak odpor R je tak malý, že je splnená podmienka

$$R < R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$



Obr. 7.25

takže $\alpha < \omega_0$, a tým pádom β je imaginárne číslo, teda

$$\beta = \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \mathrm{j}\omega$$

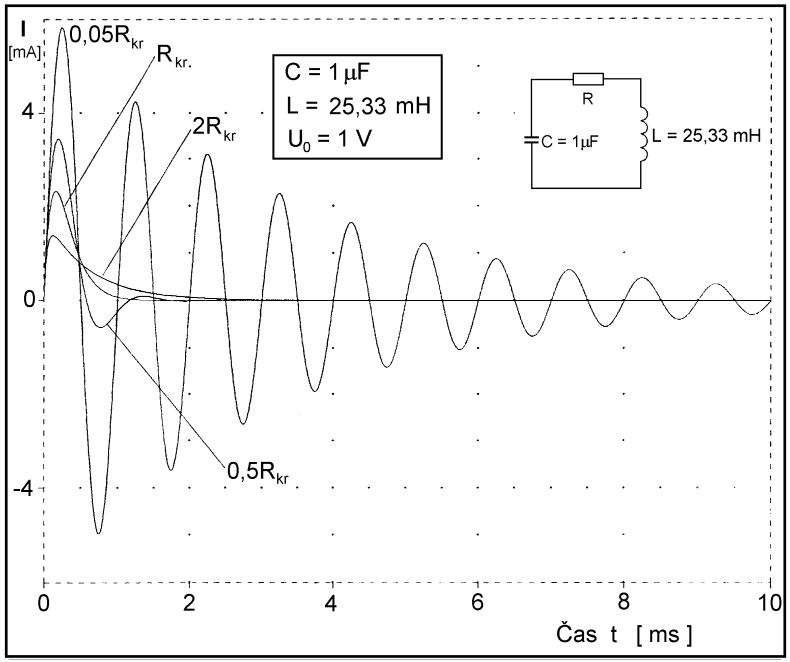
V takom prípade prúd v obvode je daný výrazom

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}} = \frac{U_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t \tag{7.81}$$

kde

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{7.82}$$

Podľa vzťahu (7.81) prúd má charakter tlmených kmitov s kruhovou frekvenciou ω danou zložitou závislosťou (7.82) od všetkých parametrov obvodu. Je to periodický priebeh prúdu v obvode. Na *obr. 7.26* sú znázornené časové priebehy prúdov v obvode pre niekoľko hodnôt odporu R. Dva priebehy pre odpory $R = 0{,}5R_{kr}$ a $R = 0{,}05R_{kr}$ sú periodické priebehy s exponenciálne zanikajúcou amplitúdou, zvyšné dva sú aperiodické, už analyzované v predchádzajúcom bode.



Obr. 7.26

Veličina

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad [\mathrm{s}^{-1}] \qquad (7.83)$$

sa nazýva konštanta útlmu a určuje rýchlosť zániku kmitov v obvode.

Venujme teraz pozornosť limitnému prípadu prúdu, ak $R \to 0$. Zo vzťahu (7.83) vidieť, že útlm klesá k nule a tlmený periodický priebeh prúdu v obvode sa zmení na netlmený. Aj keď takýto prípad je prakticky nereálny, vyšetríme ho podrobnejšie, pretože pomôže pochopiť fyzikálne procesy, ktoré v obvode prebiehajú.

Kruhová frekvencia kmitov v netlmenom obvode je daná jednoduchým výrazom

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad [\mathrm{rad.s}^{-1}] \qquad (7.84)$$

alebo frekvencia

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad [\mathrm{Hz}] \qquad (7.85)$$

kde T je perióda kmitov. Posledný výraz je známy Thomsonov vzorec. Vzťah pre prúd (7.81) prejde na jednoduchý tvar

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega_0 L}\sin \omega_0 t = \omega_0 C U_0 \sin \omega_0 t = I_0 \sin \omega_0 t \qquad (7.86)$$

kde $$I_0 = \frac{U_0}{\omega_0 L} = \omega_0 C U_0 \tag{7.87}$$

je amplitúda prúdu v obvode. Napätie na indukčnosti

$$U_L(t) = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \omega_0 L I_0 \cos\omega_0 t = U_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = U_0 \sin\omega_0\left(t + \frac{T}{4}\right) \tag{7.88a}$$

a na kapacite

$$\begin{aligned} U_C(t) &= U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 \cos\omega_0 t = \\ &= U_0 \sin\omega_0\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = U_0 \sin\omega_0\left(t + \frac{T}{4}\right) = U_L(t) \end{aligned} \tag{7.88b}$$

kde U_0, t. j. začiatočné napätie na kondenzátore, je súčasne amplitúdou napätia na kondenzátore aj cievke. Pomer amplitúdy napätia U_0 a amplitúdy prúdu I_0 je charakteristický parameter obvodu

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R_{kr}}{2} \tag{7.89}$$

ktorý sa nazýva **charakteristický odpor obvodu**.[1]

Sledujme teraz fázové pomery napätí a prúdu v obvode. Vidíme, že sínusový prúd $I(t)$ (7.86) zaostáva za napätiami U_L na indukčnosti (7.88a) a U_C na kapacite (7.88b) vo fáze o $-\pi/2$, takže fázový posuv napätia oproti prúdu je $\varphi_L = \varphi_C = \pi/2$, alebo v čase o štvrťperiódu, teda $t_L = t_C = T/4$. Časové priebehy prúdu $I(t)$ (7.86) a napätí $U_L = U_C$ (7.88) sú graficky znázornené na *obr. 7.27*. Pre dané hodnoty parametrov v grafe je perióda kmitov

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 10^{-3}\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{ms}$$

takže časový posuv priebehov je $t_L = t_C = 250\ \mu\mathrm{s}$.

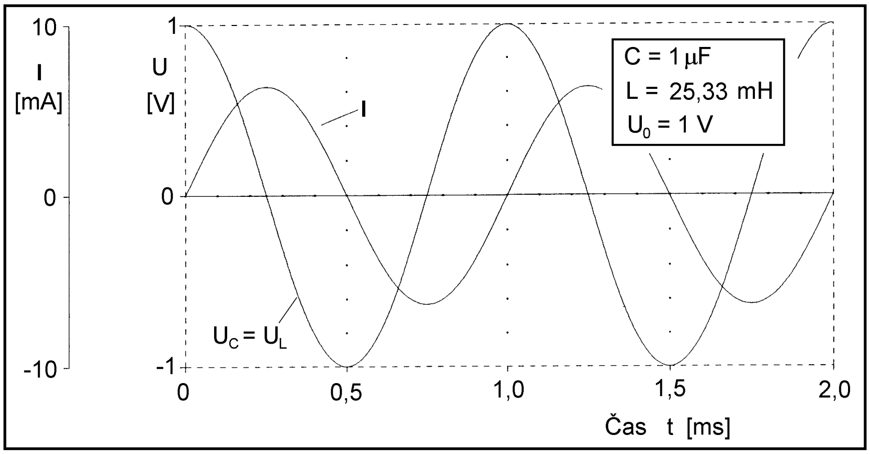
Zaujímavá je tiež analýza energetickej bilancie v obvode. Periodickým prúdom cez indukčnosť sa bude kondenzátor periodicky nabíjať a vybíjať. Energia sa teda bude "prelievať" z kondenzátora do cievky a naopak. Energia magnetického poľa cievky je daná výrazom

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{1}{2} L\, I_0^2 \sin^2\omega_0 t = W_0 \sin^2\omega_0 t \tag{7.90a}$$

a energia elektrického poľa kondenzátora

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C U^2(t) = \frac{1}{2} C\, U_0^2 \cos^2\omega_0 t = W_0 \cos^2\omega_0 t \tag{7.90b}$$

[1] Pojem "charakteristický odpor" sa často nesprávne zamieňa s pojmom "vlnový odpor" dlhého vedenia, ktorý je vyjadrený formálne rovnakým výrazom [pozri odsek 11.6.3, výraz (11.98)].

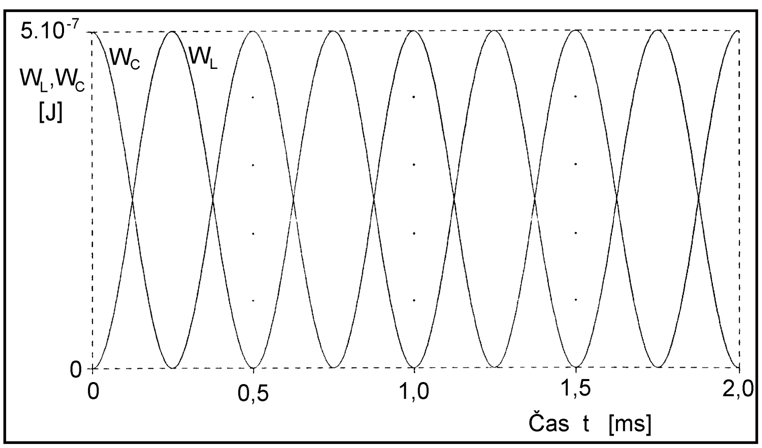


Obr. 7.27

kde $U(t) = U_L(t) = U_C(t)$ a

$$W_0 = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} C U_0^2$$

je maximálna hodnota (amplitúda) energie v cievke a v kondenzátore. Z výrazov (7.90) vidno, že energia sa skutočne každú štvrťperiódu "prelieva" z kondenzátora do cievky a naopak. Energia sa v obvode nespotrebuje a obvod kmitá teoreticky nekonečne dlho. Pre hodnoty parametrov L = 25,33 mH a C = 1 μF a so začiatočným napätím na kondenzátore U_C = 1 V sú časové priebehy energií na kondenzátore a cievke graficky znázornené na *obr. 7.28*. Maximálne hodnoty energií na jednotlivých prvkoch sú $W_0 = 5.10^{-7}$ J = 0,5 μJ.



Obr. 7.28

7.9.1 Kvalita kmitavého obvodu

Ak je odpor R nenulový, analýza procesov v RLC obvode je zložitejšia. Amplitúda prúdu v obvode a amplitúdy napätí na jeho prvkoch exponenciálne klesajú v dôsledku postupnej disipatívnej nevratnej premeny časti energie na teplo v odpore. Fázový posuv medzi prúdom a napätiami v obvode už nie je $\pi/2$ a závisí od všetkých parametrov obvodu. V tejto súvislosti odporúčam čitateľovi analyzovať úlohu 221.

Dôležitým druhotným parametrom RLC obvodu popri jeho frekvencii danej výrazom (7.82) a konštante útlmu podľa výrazu (7.83) je bezrozmerný parameter Q, ktorý sa nazýva **činiteľ akosti** alebo **faktor kvality** obvodu (často nazývaný jednoducho **kvalita**). Tieto parametre plne opisujú vlastnosti RLC obvodu a ich význam spočíva v tom, že ich možno elektrotechnickými, resp. elektronickými metódami merať. Kvalita kmitavého obvodu je definovaná ako 2π-násobok pomeru energie W akumulovanej v obvode (v jeho indukčnosti a kapacite) v istej perióde k energii W_R rozptýlenej vo forme tepla vo všetkých odporoch obvodu počas tej istej periódy T, teda

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_R} \tag{7.91}$$

Ak uvážime, že tepelná energia $W_R = P_R T$, kde P_R je stredný tepelný výkon v odpore R, možno výraz pre kvalitu napísať v tvare

$$Q = \frac{2\pi}{T}\frac{W}{P_R} = \omega \frac{W}{P_R} \tag{7.92}$$

Kvalita obvodu je priamo úmerná frekvencii kmitov ω, akumulovanej energii W v obvode a nepriamo úmerná strednému stratovému výkonu P_R v obvode. Táto definícia kvality nás stavia pred niekoľko problémov, pri riešení ktorých nám pomôže *obr. 7.29*. Na obrázku sú pre už analyzovaný obvod z *obr. 7.24* pri hodnote odporu $R = 0{,}05R_{kr} = 15{,}9\ \Omega$ znázornené časové závislosti akumulovanej celkovej energie $W(t) = W_C(t) + W_L(t)$ a stratového výkonu $p(t) = RI^2(t)$. Pri pohľade na grafy čitateľa určite napadne otázka: Ktorú hodnotu energie W treba dosadiť do výrazu pre Q, keď sa táto pozdĺž periódy zložito mení? Stredný výkon P_R za periódu je tiež veličina závislá od času a počíta sa integráciou okamžitého výkonu $p(t)$ závislého od prúdu, ktorého amplitúda klesá a za periódu má dve rôzne veľké absolútne maximá. Vidíme však, že amplitúda prúdu v obvode klesá ako funkcia $e^{-\alpha t}$, amplitúda akumulovanej energie musí klesať ako $e^{-2\alpha t}$. Pomer W/P_R vo výraze (7.92) sa bude s dobrou presnosťou rovnať času Δt, za ktorý akumulovaná energia W v obvode klesne na 1/e-tinu, teda

$$\frac{W}{P_R} = \Delta t = \frac{1}{2\alpha}$$

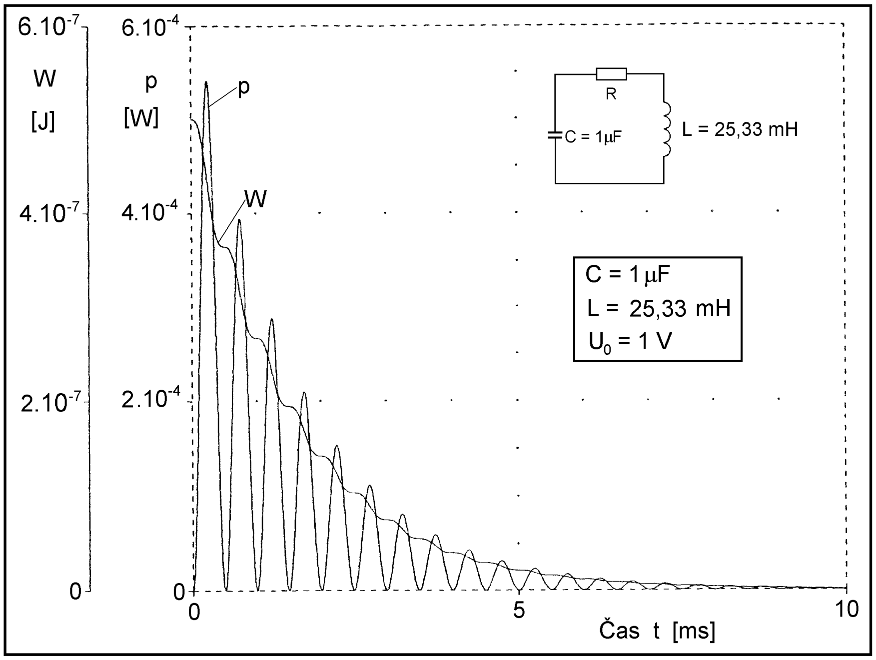
takže kvalita

$$Q = \omega \frac{W}{P_r} = \omega \Delta t = \frac{\omega}{2\alpha} = \omega \frac{L}{R} \tag{7.93}$$

Aj keď takýto postup nezodpovedá celkom presne definícii kvality, umožňuje ju pomerne jednoducho vyjadriť pomocou primárnych parametrov *L*, *C*, *R* a vo všetkých reálnych prípadoch, keď je *R* dostatočne malé, získať dobré výsledky.

Ak vo výraze (7.93) za ω dosadíme podľa (7.82) a využijeme (7.89), dostaneme pre kvalitu výraz

$$Q = \omega \frac{L}{R} = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{R_0^2}{R^2} - \frac{1}{4}} \tag{7.94}$$



Obr. 7.29

Pomer charakteristického odporu R_0 k reálnemu odporu obvodu *R*

$$\frac{R_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = Q_0 \tag{7.95}$$

je kvalita vztiahnutá na frekvenciu kmitov netlmeného obvodu $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, takže

$$Q = \sqrt{Q_0^2 - \frac{1}{4}} \tag{7.96}$$

Na základe definície (7.92) hornou hranicou kvality *Q* je jej nekonečná hodnota, keď $R \to 0$, pritom aj $Q_0 \to \infty$. Taký obvod je netlmený a kmity sa v ňom zachovávajú nekonečne dlho.

Dolnou hranicou kvality je nula, vtedy $Q_0 = 1/2$ a $R = 2R_0 = R_{kr}$. Je to kritická hodnota odporu, nad ktorou obvod prestáva kmitať. Popri kvalite sa niekedy zavádza aj jej prevrátená hodnota

$$d = \frac{1}{Q} \tag{7.97}$$

nazývaná **stratový faktor** obvodu. Konštanta útlmu α obvodu sa pomocou kvality dá vyjadriť výrazmi

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{\omega}{2Q} = \frac{\omega_0}{2Q_0} = \frac{\omega}{2}d \tag{7.98}$$

Zo vzťahu vidieť, že konštanta útlmu klesá k nule vtedy, ak kvalita rastie do nekonečna a naopak, rastie nad všetky medze, ak kvalita klesá k nule.

Obvody *LCR* sa používajú v elektronike ako rezonančné systémy v oscilátoroch kmitov vysokých a veľmi vysokých frekvencií, sú súčasťami rôznych filtrov, ich kvality môžu byť do $\cong 4.10^2$. V oblasti centimetrových elektromagnetických vĺn, ktorým zodpovedajú frekvencie z pásma okolo $f \cong 10^{10}$ Hz = 10 GHz sa ako kmitavé systémy používajú dutinové rezonátory s kvalitami až niekoľko tisíc.

Ako príklad vypočítame kvalitu a frekvenciu obvodu na *obr. 7.24.* Pre číselnú hodnotu

$$R = 0{,}05R_{kr} = 0{,}05\,.\,2\,.\sqrt{\frac{L}{C}} = 0{,}05\,.\,318\ \Omega = 15{,}91\ \Omega$$

má obvod kvalitu zodpovedajúcu frekvencii kmitom netlmeného obvodu

$$Q_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 10$$

a skutočnú kvalitu

$$Q = \sqrt{Q_0^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{10^2 - 0{,}25} = 9{,}991 \approx Q_0$$

Frekvencia kmitov netlmeného obvodu

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1\,000\ \text{Hz}$$

a frekvencia reálneho obvodu

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 998{,}76\ \text{Hz}$$

V elektronike sa zriedkakedy pracuje z obvodmi, ktorých kvalita je nižšia ako vypočítaných 10. Na základe vzťahov (7.94) až (7.96), ako aj posledného číselného príkladu v takých prípadoch s dobrou presnosťou platí

$$Q \approx Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R} \tag{7.99}$$

Frekvencia kmitov obvodu je pritom $\omega \approx \omega_0$.

Úlohy 194 – 223

194. Kovová tyč dĺžky l = 1 m sa otáča okolo osi, ktorá je kolmá na tyč a prechádza 1/3-nou jej dĺžky, uhlovou rýchlosťou ω = 4 rad/s. V smere osi otáčania je naložené magnetické pole s indukciou B = 0,1 T. Vypočítajte indukované napätie medzi koncami tyče.

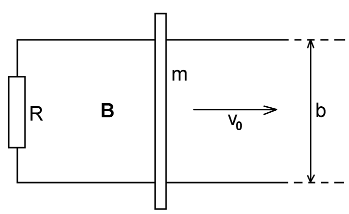
195. Kovová tyč dĺžky l_0 upevnená na jednom konci, vykonáva precesný pohyb s kruhovou frekvenciou ω okolo smeru homogénneho magnetického poľa indukcie B, pod uhlom precesie ϑ. Vypočítajte indukované elektromotorické napätie medzi koncami tyče.

196. Kovová tyč s hmotnosťou m sa môže bez trenia pohybovať po dvoch paralelných vodičoch uložených vo vzdialenosti b a na jednom konci spojených odporom R (*obr. 196*). Odpor vodičov a tyče je zanedbateľný. Kolmo k rovine vodičov je naložené homogénne magnetické pole indukcie B. V čase t = 0 je tyči udelená rýchlosť v_0.

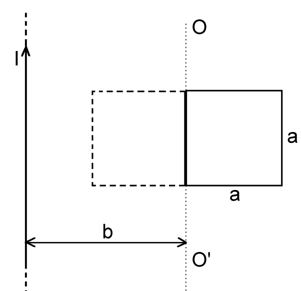
a) Určite dobu, počas ktorej sa tyč bude pohybovať.

b) Akú dráhu pritom tyč prejde?

c) Na čo sa premení začiatočná kinetická energia tyče? Riešte číselne pre m = 0,01 kg, b = 0,1 m, R = 10 Ω, B = 1 T, v_0 = 0,1 m/s.



Obr. 196



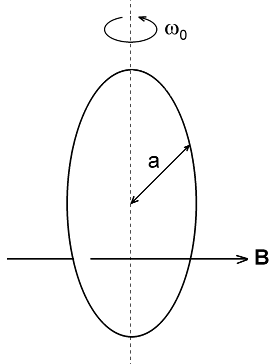
Obr. 197

197. Štvorcový kovový rámček so stranou a a nekonečne dlhý vodič s prúdom I ležia v jednej rovine ako na *obr. 197*. Rámček sa otočil okolo osi OO' o 180°. Nájdite celkový náboj Q, ktorý pretečie rámčekom, ak jeho odpor je R.

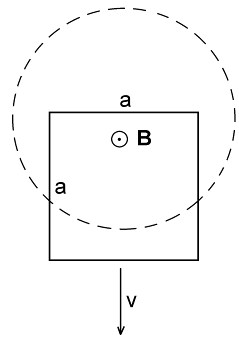
198. Medený prstenec s polomerom a je uložený v stálom magnetickom poli s indukciou B (*obr. 198*). V čase t = 0 bola prstencu udelená uhlová rýchlosť ω_0. Nájdite čas, za ktorý uhlová rýchlosť prstenca klesne na 1/e-tinu začiatočnej hodnoty! Konduktivita medi je $\sigma = 5{,}8.10^7$ S/m, jej hustota ρ = 8 900 kg/m^3, magnetická indukcia $B = 2.10^{-2}$ T.

199. Štvorcový kovový rámček so stranou a sa nachádza medzi pólmi magnetu v magnetickom poli indukcie B podľa *obr. 199*. Spodná strana rámčeka je mimo magnetického poľa. V istom okamihu je rámček uvoľnený a začne padať smerom dole. Nájdite časovú závislosť rýchlosti v rámčeka. Ak rýchlosť bude závisieť exponenciálne od času, nájdite charakteristický čas závislosti a limitnú hodnotu rýchlosti, ktorou by sa rámček pohyboval po nekonečne dlhom čase. Všimnite si, že rýchlosť nezávisí od geometrických rozmerov rámčeka, iba od jeho konduktivity, hustoty a magnetickej indukcie B. Riešte číselne pre rámček z hliníka s konduktivitou σ = 3,5.10^7 S/m a hustotou ρ = 2 700 kg/m^3 v magnetickom poli B = 1 T.

200. Morský prúd má rýchlosť 2 uzlov (približne 1 m/s) v miestach, kde vertikálna zložka magnetického poľa Zeme je 0,35.10^{-4} T. Konduktivita vody v týchto miestach je 0,4 S/m. Predpokladajte, že okrem elektrického poľa viazaného na pohyb vodnej masy inej horizontálnej zložky elektrického poľa vo vode niet. Vypočítajte veľkosť horizontálnej zložky hustoty prúdu vo vode.

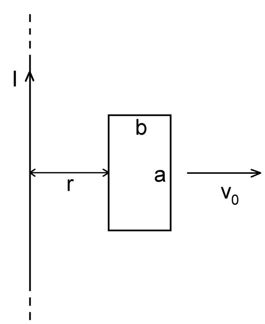


Obr. 198

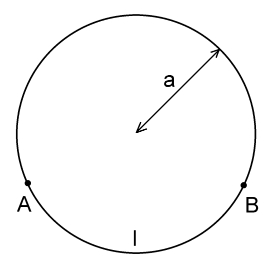


Obr. 199

201. Nekonečným priamym vodičom na *obr. 201* tečie prúd I. Od vodiča sa konštantnou rýchlosťou v_0 vzďaľuje štvoruholníková slučka o stranách a a b. Za predpokladu, že odpor slučky je dosť veľký, takže prúd v nej možno zanedbať, vypočítajte indukované elektromotorické napätie v slučke ako funkciu vzdialenosti r. Určite smer indukovaného elektromotorického napätia.



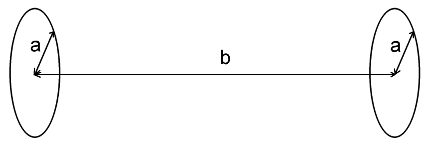
Obr. 201



Obr. 202

202. Kruhovou slučkou na *obr. 202* z odporovo homogénneho materiálu s celkovým odporom R preniká časovopremenný indukčný tok $\Phi = -\mathscr{E}t$ ($\mathscr{E}$ – konštanta, t – čas). Mimo slučky je indukčný tok nulový. Aké napätie sa nameria ideálnym voltmetrom na oblúku medzi bodmi A a B?

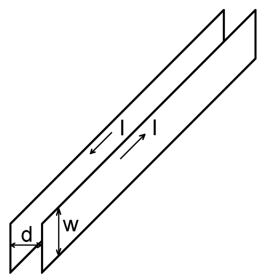
203. Vypočítajte vzájomnú indukčnosť dvoch kruhových závitov s polomermi a, uložených paralelne so stredmi na jednej osi vo vzdialenosti b (*obr. 203*). Predpokladajte, že $a \ll b$.



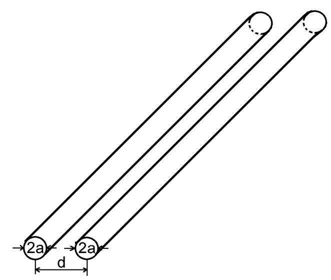
Obr. 203

204. Rovinný závit s plochou S uzavretý galvanometrom s vnútorným odporom R_i sa v homogénnom magnetickom poli indukcie B otočí tak, že plošný vektor $\boldsymbol{S}$ pôvodne v smere poľa bude smerovať kolmo na smer poľa. Aký náboj pretečie galvanometrom pri tomto otáčaní?

205. Vypočítajte vnútornú indukčnosť na jednotku dĺžky valcového priameho vodiča s permeabilitou $\mu = \mu_0$.



Obr. 206

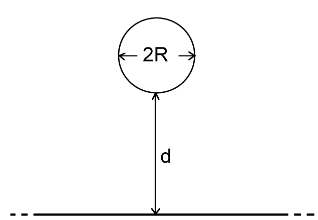


Obr. 207

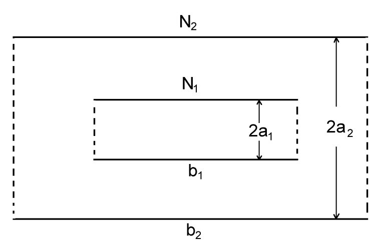
206. Páskové vedenie pozostáva z dvoch vodivých tenkých pásikov so šírkou w, uložených paralelne vo vzdialenosti d, pričom $w \gg d$ (*obr. 206*). Vypočítajte indukčnosť na jednotku dĺžky takého vedenia.

207. Vypočítajte indukčnosť na jednotku dĺžky dvojlinky podľa *obr. 207* za predpokladu, že $d \gg a$, takže možno zanedbať indukčný tok vo vnútri vodičov.

208. Vypočítajte indukčnosť na jednotku dĺžky vedenia pozostávajúceho z valcového vodiča o polomere R, umiestneného nad nekonečnou vodivou rovinou vo výške $d \gg R$ (*obr. 208*). Rovina slúži ako spätný vodič. (**Poznámka**: použite metódu zrkadiel podobnú ako v elektrickom poli.)



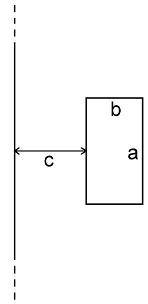
Obr. 208



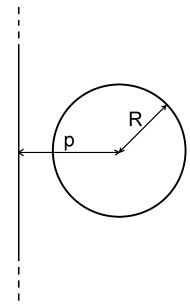
Obr. 209

209. Na *obr. 209* je znázornený solenoid s polomerom a_1 a dĺžkou b_1 vložený do veľmi dlhého solenoidu s polomerom a_2 a dĺžkou b_2. Vnútorný solenoid má N_1 závitov a vonkajší N_2 závitov. Vypočítajte vzájomnú indukčnosť solenoidov.

210. Vypočítajte vzájomnú indukčnosť nekonečného priameho vodiča a štvoruholníkovej slučky, ktorej rozmery a uloženie sú zrejmé z *obr. 210*.

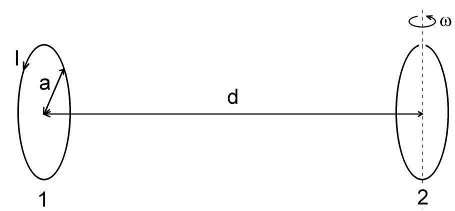


Obr. 210



Obr. 211

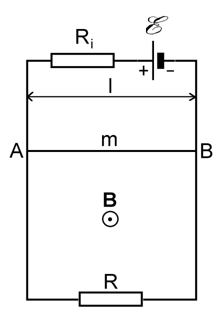
211. Vypočítajte vzájomnú indukčnosť nekonečného priameho vodiča a kruhového závitu s polomerom R. Priamy vodič a závit ležia v jednej rovine, pričom kolmá vzdialenosť stredu závitu od vodiča je $p > R$ (*obr. 211*).



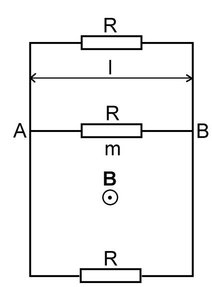
Obr. 212

212. V kruhovom závite 1 s polomerom a tečie prúd I (*obr. 212*). Druhý taký istý závit 2 je umiestnený na osi prvého vo vzdialenosti d, pričom $d \gg a$. Roviny závitov sú paralelné. Druhý závit sa otáča okolo jedného zo svojich priemerov uhlovou rýchlosťou ω. Vypočítajte indukované elektromotorické napätie v druhom závite za predpokladu, že tento je rozpojený.

213. Po dvoch vertikálnych vodičoch spojených dole odporom $R = 2\ \Omega$ a hore zdrojom EMN $\mathscr{E} = 1{,}9$ V s vnútorným odporom $R_i = 2\ \Omega$ kĺže bez trenia vodič AB, ktorého dĺžka je $l = 10$ cm a hmotnosť $m = 10$ g (*obr. 213*). Sústava sa nachádza v magnetickom poli indukcie $B = 1$ T, kolmom na rovinu obrazca. Nájdite ustálenú rýchlosť vodiča AB v gravitačnom poli zanedbajúc trenie a odpor pohybujúceho sa vodiča.



Obr. 213



Obr. 214

214. Po dvoch vertikálnych vodičoch spojených hore a dole odpormi R = 0,01 Ω môže bez trenia kĺzať vodič AB, ktorého dĺžka je l = 100 cm, hmotnosť m = 100 g a odpor R = 0,01 Ω (*obr. 214*). Sústava sa nachádza v magnetickom poli s indukciou B = 1 T. Nájdite maximálnu rýchlosť, ktorú nadobudne vodič pri svojom páde v gravitačnom poli Zeme.

215. Dlhá kovová páska z neferomagnetického materiálu sa pohybuje rovnomerne v magnetickom poli indukcie B = 0,18 T rýchlosťou v = 6,28.10^5 m/s. Vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ sú navzájom kolmé a ležia v rovine pásky. Vypočítajte plošnú hustotu nábojov na páske, ktoré vzniknú v dôsledku jej pohybu v magnetickom poli.

216. Dutý dielektrický valec s vnútorným polomerom r_1 a vonkajším polomerom r_2 sa rovnomerne otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo svojej geometrickej osi. V smere tejto osi je naložené magnetické pole indukcie B. Relatívna permitivita materiálu valca je ε_r. Vypočítajte:

a) objemovú hustotu viazaných nábojov vo valci,
b) celkový objemový viazaný náboj na jednotku dĺžky valca,
c) hustotu plošných viazaných nábojov na vnútornej a vonkajšej ploche valca,
d) celkový plošný viazaný náboj na jednotku dĺžky,
e) súčet nábojov z bodu b) a d).

217. Vo vnútri veľmi dlhého solenoidu je súosovo vložená malá plošná cievočka s počtom závitov N = 400 a plochou závitu S = 10 cm^2, v ktorej tečie prúd i = 0,5 sinωt [A], ω = 500 rad/s. Dĺžková hustota závitov solenoidu je n = 5 000 m^{-1}. Vypočítajte napätie indukované v solenoide.

218. Elektróny v betatróne sa pohybujú po kruhovej dráhe s polomerom R pod vplyvom cylindricky symetrického magnetického poľa, kolmého na rovinu dráhy elektrónov. Os symetrie magnetického poľa je totožná s osou symetrie dráhy elektrónov. Elektróny sú urýchľované zvyšovaním hodnoty magnetickej indukcie.

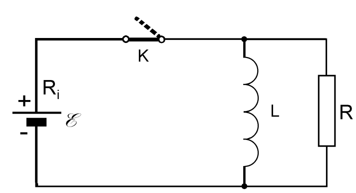
a) Nájdite indukované elektrické pole na kruhovej dráhe elektrónov pri časovej zmene magnetického poľa dB/dt. Pre tento prípad považujte magnetické pole za homogénne.

b) Dokážte, že k tomu, aby polomer dráhy elektrónov zostal konštantný, je potrebné, aby zmena poľa dB_R na polomere R bola rovná d $\overline{B}$ /2, kde $\overline{B}$ je stredná hodnota magnetickej indukcie na ploche obopnutej dráhou elektrónov.

219. Cievka, ktorá má odpor 0,01 Ω a indukčnosť 0,5 mH je v istom okamihu pripojená na 12 V batériu so zanedbateľným vnútorným odporom.

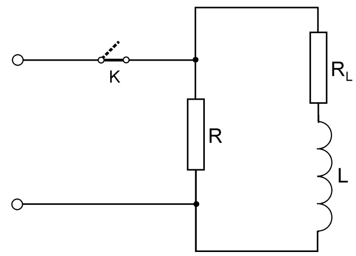
a) Za aký čas prúd v tomto obvode dosiahne 90 % svojej maximálnej hodnoty?
b) Aká energia je v tom čase nazhromaždená v magnetickom poli cievky?
c) Aká celková energia bola do tohto času dodaná zdrojom?

220. Vypočítajte celkový náboj, ktorý prejde odporom R v zapojení na *obr. 220* po zapnutí kľúča K.



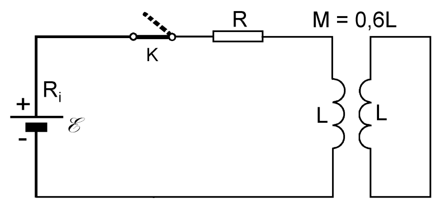
Obr. 220

221. Elektromagnet s indukčnosťou L = 1 H je napájaný prúdom I = 10 A. Aby sa predišlo elektrickému prierazu izolácie vinutia (a prípadnému smrteľnému ohrozeniu osôb v blízkosti) v dôsledku vysokého indukovaného elektromotorického napätia, ktoré vznikne pri náhodnom prerušení prúdového obvodu elektromagnetu, pripája sa paralelne k vinutiu magnetu kondenzátor, ktorý stlmí začiatočný napäťový náraz pri prerušení obvodu. Vypočítajte kapacitu kondenzátora, ktorý stlmí začiatočný napäťový náraz na svorkách elektromagnetu na 10 kV, za predpokladu, že odpor vinutia možno zanedbať. Aké bude indukované napätie na svorkách elektromagnetu pri danej kapacite, ak odpor vinutia je R = 1 Ω?



Obr. 222

222. Z dôvodov uvedených v úlohe 221 sa niekedy veľké indukčnosti reprezentované čistou indukčnosťou L a jej odporom R_L premosťujú na svorkách zdroja odporom R (*obr. 222*), ktorý stlmí začiatočné napätie na indukčnosti v prípade odopnutia zdroja. Vypočítajte koľkokrát prevýši maximálne napätie na indukčnosti U_{max} napätie zdroja U_0 v prípade jeho odpojenia.



Obr. 223

223. V zapojení podľa *obr. 223* vypočítajte časové závislosti prúdov I_1 a I_2 v primárnom a sekundárnom obvode po zopnutí kľúča K. Sekundárny obvod má nulový odpor.

8 MAGNETIZMUS LÁTOK

Viď Božie dielo,
lebo kto môže narovnať to,
čo On skrivil?

Kazateľ 7, 13

Pojednanie o magnetizme látok by sme mohli začať podobnou otázkou, akú sme položili v úvode 4. kapitoly o elektrických vlastnostiach dielektrík, či totiž magnetické pole interaguje s látkami, a odpoveď by bola tiež pozitívna: "Pole, v tomto prípade magnetické, vplýva na magnetický stav látok, a naopak, látky ovplyvňujú magnetické pole". Táto vzájomná interakcia je však, oproti elektrickému pôsobeniu, oveľa zložitejšia a to vyžaduje rozdeliť magnetické javy na viacero skupín. Sú to**: diamagnetizmus, paramagnetizmus, feromagnetizmus, ferimagnetizmus a antiferomagnetizmus**. Látky, ktoré sme doteraz nazývali vodiče a dielektriká, treba teda podľa ich magnetických vlastností rozdeliť na látky **diamagnetické, paramagnetické, feromagnetické, ferimagnetické a antiferomagnetické**. Z magnetického pohľadu majú spoločný názov – **magnetiká**.

Jednotlivé typy magnetizmu budeme analyzovať v osobitných odsekoch. Aby sme si však uvedomili rozsah a hĺbku problematiky, uvedieme hneď na úvod základné charakteristické črty jednotlivých typov magnetizmu.

Diamagnetické sú také látky, ktoré "sa bránia" vplyvu vonkajšieho magnetického poľa. V ich štruktúre sú mechanizmy vyvolávajúce vznik protipoľa, takže výsledná magnetická indukcia v nich je menšia ako indukcia tých istých zdrojov (teda tých istých prúdov) vo vákuu. Možno teda očakávať, že jav diamagnetizmu nejakým spôsobom súvisí s elektromagnetickou indukciou a s Lenzovým zákonom.

Paramagnetické látky sa vyznačujú tým, že v svojej štruktúre majú elementárne magnetíky na atomárnej úrovni, ináč povedané, látka obsahuje elementárne magnetické dipóly, ktoré sa vo vonkajšom poli orientujú do jeho smeru.[1] Táto skupina látok nám pripomína dielektriká s orientačnou polarizáciou, lenže zatiaľ čo v dielektriku sa elektrické pole orientáciou dipólov zoslabí, v paramagnetiku sa magnetická indukcia naopak, zosilní. Z toho plynie, že nemá zmysel hľadať analógiu medzi elektrickým a magnetickým poľom, pretože tá nie je väčšia ako je analógia medzi elektrickým a magnetickým dipólom – majú síce niektoré formálne podobné vonkajšie prejavy, ale to je všetko.

Interakcia magnetického poľa s paramagnetikami a s diamagnetikami je slabá, čo sa kvantitatívne vyjadruje ako veľmi malá absolútna hodnota magnetickej susceptibility χ, ktorá je mierou magnetickej polarizovateľnosti látky. Z týchto dôvodov sa niekedy paramagnetiká a diamagnetiká označujú spoločným názvom – **slabomagnetické látky**. Výraznejší paramagnetizmus prejavuje iba kvapalný kyslík pri teplote 90 K = –183 °C, vtedy je však látka v nezvyčajných termodynamických podmienkach.

[1] Treba znovu zdôrazniť, že magnetický dipól je v skutočnosti malý kruhový prúd.

Dôležitou vlastnosťou slabomagnetických látok je linearita ich magnetických prejavov. Vzťah medzi budiacim poľom, ktorým je intenzita magnetického poľa $\boldsymbol{H}$, a magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$ v látke, je v širokom rozsahu dosiahnuteľných hodnôt lineárny. Ak je slabomagnetická látka štrukturálne, a tým aj magneticky izotropná, možno jej magnetické vlastnosti vyjadriť púhym číslom. Analýza makroskopických magnetických polí v takých prostrediach sa nijako nelíši od analýzy vo vákuu a výsledky sa líšia iba číselným bezrozmerným súčiniteľom.

Z hľadiska praktického využitia slabomagnetických látok, napr. v elektrotechnike, sa ich magnetické vlastnosti takmer vždy ignorujú a vlastnosti látky sa nahradzujú magnetickými vlastnosťami vákua.

Diamagnetickú zložku má permeabilita všetkých látok. Záleží iba na tom, či v prítomnosti napr. paramagnetických prímesí v danej látke nakoniec neprevážì paramagnetizmus nad diamagnetizmom.

Feromagnetické látky sa svojimi magnetickými vlastnosťami diametrálne odlišujú od diamagnetík a paramagnetík. Z prírodných látok k nim patrí šesť prvkov, z toho tri kovy – železo (Fe), kobalt (Co) a nikel (Ni) a pri nízkych teplotách tri vzácne zeminy – gadolínium (Gd), dysprózium (Dy) a samárium (Sm). Okrem nich bolo pripravených veľké množstvo zliatin so špeciálnymi feromagnetickými vlastnosťami. Existuje ešte jedna skupina látok s podobnými vlastnosťami ako feromagnetiká – sú to ferimagnetické látky (nazývané tiež **ferity**), umelo vyrobené keramiky na báze oxidov železa. **Všetky tieto látky sa vyznačujú veľmi silnou magnetizáciou a zachovávajú si magnetický stav aj bez vonkajšieho poľa**. Pre tieto ich vlastnosti sa nazývajú tiež **silnomagnetické látky**. Feromagnetiká a ferimagnetiká sú látky magneticky veľmi nelineárne, a naviac vykazujú hysterézu – nejednoznačnú závislosť magnetizácie od budiaceho poľa.

Tieto neobyčajné fyzikálne vlastnosti feromagnetík vyvolávajú tušenie, že teoretická analýza feromagnetizmu je veľmi zložitá, čo je pravda, a problematika patrí v skutočnosti do oblasti kvantovej a štatistickej fyziky. Na druhej strane, a na rozdiel od slabomagnetických látok, sú feromagnetiká dôležité technické materiály. Ich existencia je predpokladom pre priemyselnú výrobu elektrickej energie na princípe elektromagnetickej indukcie, využívajú sa v elektronike, pri výrobe rôznych elektronických súčiastok a zariadení, ako sú reproduktory, relé, magnetické pamäti, tvoria základ pre výrobu médií na záznam obrazu, zvuku a v iných oblastiach ľudskej činnosti. Bez feromagnetík si elektrotechniku a elektroniku jednoducho nevieme predstaviť.

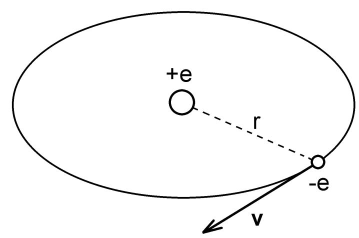
Fyzikálnu podstatu makroskopického magnetizmu látok treba hľadať v magnetizme základných stavebných kameňov látok – v atómoch, a preto ďalší odsek venujeme magnetickým vlastnostiam atómov.

8.1 MAGNETICKÉ VLASTNOSTI ATÓMOV

Elementárnymi nositeľmi magnetických vlastností v látkach sú atómy. Z magnetického hľadiska sú atómy zložité elektrodynamické systémy, ktorých vlastnosti možno dostatočne presne opísať iba metódami kvantovej teórie. My pri našich úvahách budeme vychádzať z predstavy, ktorú začiatkom minulého storočia v rámci svojej poloklasickej a polokvantovej teórie atómu vyslovil dánsky teoretický fyzik Niels Bohr (1885 – 1962). Je to predstava o planetárnom modeli atómu. Podľa tejto predstavy atóm pozostáva z relatívne masívneho, elektricky kladne nabitého jadra tvoreného protónmi a neutrónmi s celkovým nábojom *Ze* (*Z* – atómové číslo, *e* – náboj protónu), a zo *Z* záporných elektrónov s nábojmi $-e$ obiehajúcich okolo jadra po uzavretých stabilných dráhach (orbitách) konštantnou obežnou rýchlosťou v podobne, ako planéty okolo Slnka. Nebudeme pátrať po tom, prečo je to tak, na tieto otázky odpovedá atómová fyzika.

Voľný atóm je elektricky neutrálny, pretože jeho celkový náboj je nulový a voľný atóm nevykazuje ani elektrický dipólový moment. O tejto skutočnosti sme hovorili na začiatku 4. kapitoly o dielektrických vlastnostiach materiálov. Iná je situácia v atóme z hľadiska jeho magnetického poľa. Elektricky neutrálny atóm vytvára v svojom okolí magnetické pole a toto pole má dipólový charakter. Elektróny obiehajúce okolo jadra predstavujú slučkové prúdy a pohybujúci sa elektrón na jednej elektrónovej dráhe s polomerom r vytvára elektrický prúd so strednou hodnotou

$$\bar{I} = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$



Obr. 8.1

kde $T = 2\pi r/v$ je perióda obehu elektrónu okolo jadra po kruhovej dráhe s polomerom r. Atóm s jedným elektrónom (vodíkový atóm) je znázornený na *obr. 8.1.* S takýmto kruhovým prúdom sa spája magnetický dipól, ktorý má **magnetický moment** veľkosti

$$m = \bar{I}S = \bar{I}\pi r^2 = \frac{evr}{2} \qquad [\mathrm{A.m^2}] \qquad (8.1)$$

Na druhej strane, s pohybom elektrónu po kruhovej dráhe je spojený tiež moment hybnosti L alebo mechanický moment veľkosti

$$L = m_e r v \qquad [\mathrm{m^2.kg.s^{-1} = J.s}] \qquad (8.2)$$

kde m_e je hmotnosť elektrónu. Magnetický moment možno potom vyjadriť pomocou jeho momentu hybnosti v tvare

$$m = \frac{e}{2m_e} L \qquad (8.3)$$

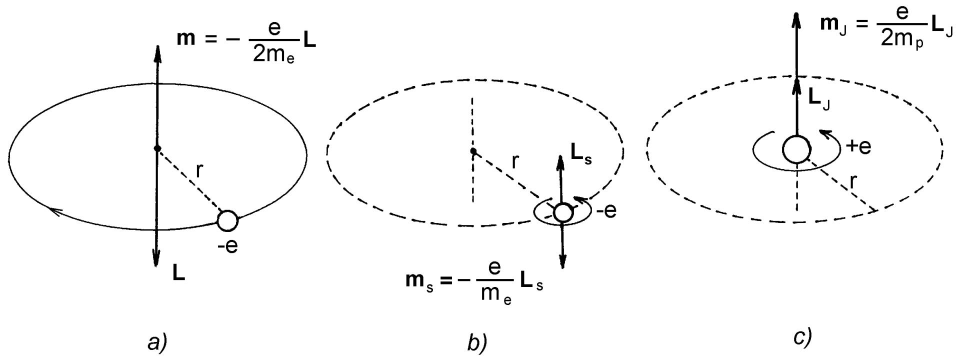
Keďže magnetický moment a moment hybnosti sú vektory $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{L}$, možno pre ne napísať aj vektorový vzťah

$$\boldsymbol{m} = -\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L} = -\gamma\boldsymbol{L} \tag{8.4}$$

kde

$$\gamma = \frac{|\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{L}|} = \frac{e}{2m_e} \tag{8.5}$$

je pomer magnetického a mechanického momentu nazývaný **magnetomechanický pomer** (niekedy menej výstižne nazývaný **gyromagnetický pomer**). Vidíme, že magnetický a mechanický moment sú navzájom opačné a smerujú kolmo na rovinu elektrónovej dráhy (pozri *obr. 8.2a*). Možno si všimnúť, že konštanta úmernosti medzi mechanickým a magnetickým momentom atómu vo vzťahu (8.3) obsahuje iba univerzálne konštanty, teda aj magnetomechanický pomer γ podľa (8.5) je univerzálnou konštantou. V tejto súvislosti je pozoruhodné, že vzťah (8.4) odvodený na základe klasických predstáv je rovnaký, ako vzťah, ktorý plynie z kvantovej mechaniky. Lenže tu sa končí všetka zhoda klasickej a kvantovej fyziky.



Obr. 8.2

Experimenty a kvantová teória ukazujú, že mechanický moment elektrónu na atómovej dráhe nemôže byť daný klasickým výrazom (8.2), podľa ktorého sa môže spojito meniť so zmenou rýchlosti v. Na elektrón v atóme sa nemožno pozerať ako na klasický objekt s definovanou rýchlosťou. Moment hybnosti je v skutočnosti kvantovaná veličina, ktorá môže nadobúdať iba diskrétne hodnoty dané výrazom

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)} \tag{8.6}$$

kde $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}055.10^{-34}$ J.s je Planckova konštanta (kvantum momentu hybnosti) a l je bezrozmerné celočíselné orbitálne kvantové číslo, ktoré môže nadobúdať hodnoty 0, 1, 2, …

Nie je možné na tomto mieste zachádzať do kvantovej fyziky, a preto sa tu obmedzíme iba na uvedenie tých faktov, ktoré sú bezprostredne potrebné pre pochopenie atómového magnetizmu. Tieto fakty Vám budú zdôvodnené neskôr, a dôkladnejšie. Ak dosadíme výraz (8.6) do výrazu (8.3), potom pre veľkosť magnetického momentu elektrónovej orbity dostaneme výraz

$$m_l = -\frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{l(l+1)} = -\mu_B\sqrt{l(l+1)} \tag{8.7}$$

z ktorého vidieť, že aj magnetický moment elektrónovej dráhy je kvantovaný. Najmenšie kvantum elektrónového magnetického momentu

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}274\,041.10^{-24}\ \mathrm{A.m^2}$$

sa volá **Bohrov magnetón**.

Orbitálnym pohybom elektrónov okolo jadra atómový magnetizmus zďaleka nie je vyčerpaný. Elektrón na atómovej dráhe má ešte vlastný magnetický moment m_s, ktorý súvisí s jeho vlastným momentom hybnosti L_s, ktorý sa nazýva spin (anglický názov pre "vrtenie, otáčanie"). Podľa klasických predstáv spin je rotačný moment hybnosti elektrónu. Klasická predstava spinu však úplne zlyháva, ak pripustíme, že elektrón je bodová častica (pozri odsek 1.2). Spin elektrónu preto treba považovať za čisto kvantovomechanickú vlastnosť, ktorá nemá v klasickej fyzike vysvetlenie. Teória a experimenty ukazujú, že spinový moment je

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} \tag{8.8}$$

kde s je bezrozmerné spinové kvantové číslo, ktoré môže nadobudnúť iba jednu hodnotu

$$s = \frac{1}{2} \tag{8.9}$$

Vzťah medzi spinovým a magnetickým momentom plynie z kvantovej fyziky a je tvaru

$$m_s = -\frac{e}{m_e}L_s = -\frac{e\hbar}{m_e}\sqrt{s(s+1)} = -\mu_B\sqrt{3} \tag{8.10}$$

Aj spinový magnetický moment elektrónu smeruje proti momentu hybnosti (spinu) (pozri *obr. 8.2b*).

Ak si uvedomíme, že atóm vo všeobecnosti obsahuje viac elektrónov, potom jeho výsledný magnetický moment musí byť výsledkom vektorového zloženia spinových i orbitálnych momentov a výsledok tohto zloženia sa v kvantovej mechanike vyjadruje bezrozmerným **Landého *g*-faktorom** alebo jednoducho *g*-faktorom. Výsledný elektrónový magnetický moment atómu je vyjadrený výrazom

$$\boldsymbol{m}_{ls} = -g\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L}_{ls} \tag{8.11}$$

Landého faktor môže nadobúdať hodnoty od 1 – pre čiste orbitálny magnetický moment atómu, ak sa spinový moment ruší – po 2, ak magnetický moment atómu je výlučne spinový.

Ani tým však magnetické vlastnosti atómu nie sú vyčerpané. Ukazuje sa, že aj atómové jadro (v prípade vodíka protón) má rotačný moment hybnosti (spin) $\boldsymbol{L}_j$, a keďže je to elektricky nabitý objekt, musí mať aj magnetický moment $\boldsymbol{m}_j$. Žiaľ, aj tento moment možno opísať iba kvantovomechanickými prostriedkami a pre vodíkové jadro (protón) je daný výrazom

$$\boldsymbol{m}_j = g_j \frac{e}{2m_p} \boldsymbol{L}_j \tag{8.12}$$

kde g_j = 5,585 54 je g-faktor pre protón a m_p je hmotnosť protónu. Jadrový magnetický moment na rozdiel od elektrónového má rovnaký smer ako jeho spin (pozri *obr. 8.2c*). V analógii s Bohrovým magnetónom možno aj pre protón definovať atómovú jednotku magnetického momentu μ_J. Jej číselná hodnota je

$$\mu_J = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5{,}050\,804.10^{-27}\ \mathrm{A.m^2} \tag{8.13}$$

a nazýva sa **jadrový magnetón**. Vidíme, že jadrový magnetón je zhruba 1836 krát menší ako Bohrov magnetón, pretože o toľkokrát je väčšia hmotnosť protónu oproti hmotnosti elektrónu. Jadrový magnetizmus v atóme je teda veľmi slabý a na celkovej elektromagnetickej energii atómu sa prejaví iba nepatrnými kvantovými skokmi. Aj slabý jadrový magnetizmus sa dá dnes efektívne skúmať metódou, ktorá sa nazýva metóda jadrovej magnetickej rezonancie, známa pod skratkou JMR, alebo NMR (nuclear magnetic resonance) a pritom je len málo slabých kvantovomechanických efektov, ktoré majú taký obrovský praktický význam, ako práve jadrový magnetizmus. Na princípe NMR boli vyvinuté zariadenia – **počítačové NMR tomografy**, ktorými možno neinvazívne vyšetrovať tkanivá ľudského tela "in vivo" neporovnateľne precíznejšie ako metódami RTG, a bez škodlivého röntgenového žiarenia. O jadrovej magnetickej rezonancii bude podrobnejšie pojednané v odseku 8.5.4.

Ak má byť magnetický obraz atómu úplný, treba s počudovaním povedať, že aj neutrón má magnetický moment

$$\boldsymbol{m}_n = -g_n \frac{e}{2m_n} \boldsymbol{L}_n \tag{8.14}$$

kde g_n = 3,86 je neutrónový g-faktor, $m_n \approx m_p$ je hmotnosť neutrónu a $\boldsymbol{L}_n$ je moment hybnosti (spin) neutrónu. Možno, že táto skutočnosť nie je až taká prekvapujúca, ak si uvedomíme, že neutrón má svoju elektromagnetickú štruktúru, a teda nie je to nijaká elektricky neutrálna častica (pozri odsek 1.2, *obr. 1.2*).

Ak zhrnieme naše poznatky o magnetických vlastnostiach atómu vidíme, že atóm je veľmi zložitý dynamický systém so zložitým vnútorným magnetickým poľom. Treba tiež pripomenúť, že v súvislosti s Pauliho princípom majú dráhové a spinové momenty v atóme tendenciu navzájom sa kompenzovať. Preto iba niektoré atómy sú paramagnetické. Paramagnetický nemôže byť napr. atóm, ktorý má párny počet elektrónov, pretože jeho dráhové a spinové momenty sa kompenzujú. Taký atóm môže prejavovať iba diamagnetizmus a slabý jadrový paramagnetizmus, hoci aj tu sú výnimky. Treba si tiež uvedomiť, že naše úvahy sa týkali izolovaného atómu, čo je neprirodzený stav, pretože atómy v prírode (s výnimkou inertných plynov) vstupujú do vzájomných väzieb a vytvárajú molekuly.

V nasledujúcom odseku budeme tvoriť makroskopickú teóriu magnetizmu látok. Z našich úvah o magnetizme atómov bude dôležitá iba skutočnosť, že na každý atóm, molekulu, prípadne iný agregát v látke, sa možno pozerať ako na jeden slučkový prúd, teda jeden magnetický dipól, lepšie povedané, jeden magnetický moment.

8.2 MAKROSKOPICKÁ TEÓRIA MAGNETIZMU LÁTOK

8.2.1 Vektor magnetizácie

V tomto odseku budeme predpokladať makroskopický objem spojitého magnetika, ktoré pozostáva z elementárnych magnetických "dipólov" dostatočne malých tak, že ľubovoľne malý objem $\mathrm{d}\tau$ obsahuje dostatočne veľký počet slučiek (dipólov) s momentom $\boldsymbol{m}$ a v látke sa neprejavuje jej magnetická "zrnitosť". Za predpokladu, že materiál nemá žiadnu magnetickú predhistóriu a nenachádza sa vo vonkajšom magnetickom poli, nebude navonok prejavovať žiadne magnetické vlastnosti, pretože možno predpokladať, že momenty v látke sú rozložené štatisticky rovnomerne do všetkých smerov a ich účinky sa v priestore aj v čase navzájom kompenzujú v dôsledku tepelného pohybu.

Čitateľ môže namietať, že z našej analýzy takým postupom vylúčime diamagnetické látky, ktoré sme v úvode nespájali s pojmom magnetických momentov. V makroskopickej teórii však zmenšenie magnetického poľa v diamagnetikách môžeme vyjadriť prítomnosťou magnetických momentov nasmerovaných proti vektoru magnetickej indukcie.

Ak vložíme látku do magnetického poľa s indukciou $\boldsymbol{B}$, budú mať jej dipóly pod účinkom točivého momentu $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ tendenciu natočiť sa do smeru vektora $\boldsymbol{B}$.[1] Miera usporiadania momentov do smeru poľa bude závisieť od veľkosti poľa $\boldsymbol{B}$ v látke. V konečnom dôsledku sa v látke vytvorí istá "polarizácia" momentov úmerná množstvu a veľkosti jednotlivých momentov a objemu. Vektorový súčet magnetických momentov na jednotku objemu definuje vektorovú veličinu

$$\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\sum_i \boldsymbol{m}_i}{\Delta \tau} \qquad [\mathrm{A.m^{-1}}] \tag{8.15}$$

ktorá sa nazýva magnetizácia alebo vektor magnetizácie $\boldsymbol{M}$. Vidno, že výraz (8.15) vlastne udáva vektorovú objemovú hustotu magnetických momentov. V nezmagnetizovanom prostredí sú jednotlivé momenty štatisticky nasmerované do všetkých možných smerov, a v tom prípade $\boldsymbol{M} = 0$. V prípade identických momentov $\boldsymbol{m}$ vo zvolenom smere s objemovou koncentráciou n možno magnetizáciu vyjadriť jednoducho ako

$$\boldsymbol{M} = n\boldsymbol{m} \tag{8.16}$$

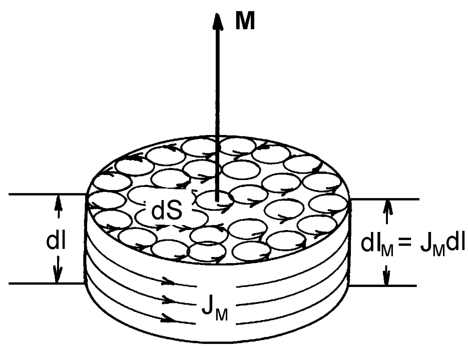
a v prípade spojitého rozloženia momentov tiež

[1] Situácia je podobná ako pri vložení látky do elektrického poľa $\boldsymbol{E}$, keď na dipóly s elektrickým momentom $\boldsymbol{p}$ pôsobí točivý moment $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$.

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m}}{\mathrm{d}\tau} \tag{8.17}$$

Predpokladajme, že zo zmagnetizovaného materiálu bol "vyrezaný" elementárny valček ako na *obr. 8.3*. Výška valčeka je dl a prierez dS, takže jeho objem je dτ= dSdl. Vektor magnetizácie $\boldsymbol{M}$ splýva s osou valčeka. Valček obsahuje elementárne (atomárne) slučkové prúdy, ktoré pri danej orientácii vektora $\boldsymbol{M}$ tečú v priečnej (azimutálnej) rovine valčeka proti smeru hodinových ručičiek. V objeme valčeka sa tieto prúdy navzájom rušia a na plášti valčeka tečie plošný prúd J_M. Tento atomárny cirkulačný prúd v zmagnetizovaných látkach predpokladal už Ampère v čase, keď o látkach ešte neexistovala atomárna predstava. Je to celkom reálny prúd, ktorý však nie je prístupný meraniu, a tak, ako sme v dielektriku definovali pojem viazaných nábojov, pre cirkulačné Ampérove prúdy v látke definujeme pojem viazané prúdy. Veličina J_M má teda význam plošnej hustoty viazaných prúdov v jednotkách A/m. Dáme tento prúd do súvisu s vektorom magnetizácie $\boldsymbol{M}$. Na zmagnetovaný valček sa možno pozerať ako na magnetický dipól s momentom veľkosti dm = dI dS = J_M dl dS. Podľa výrazu (8.17) veľkosť vektora magnetizácie v nekonečne malom objeme dτ= dS dl je

$$M = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = \frac{J_M \mathrm{d}l\mathrm{d}S}{\mathrm{d}l\mathrm{d}S} = J_M \tag{8.18}$$



Obr. 8.3

Vektor magnetizácie sa teda veľkosťou rovná plošnej hustote cirkulačného viazaného prúdu, ktorý valček azimutálne obteká.[1] Pre lepšie pochopenie súvisu (8.18) môže pomôcť nasledovný príklad: *Nekonečne dlhá tyč (napr. veľmi dlhý feromagnetický prút) bola zmagnetizovaná tak, že vo vnútri je konštantná magnetizácia M v smere osi tyče. Treba určiť magnetickú indukciu v tyči.*

Riešenie je veľmi jednoduché. Na zmagnetizovanej tyči tečie priečne po jej povrchu cirkulačný viazaný plošný prúd $J_M = M$. Možno sa na ňu teda dívať ako na nekonečne dlhý solenoid s plošným prúdom $nI = J_M = M$ (n je počet závitov na jednotku dĺžky solenoidu, I je prúd v jeho vinutí). Magnetická indukcia v tyči je teda

[1] Podobným spôsobom bol zavedený súvis medzi objemovou hustotou viazaných nábojov σ_v a vektorom polarizácie $\boldsymbol{P}$ ($P_n = \sigma_v$).

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 M$$

Ak by bolo na tyči ešte vinutie s prúdom, magnetická indukcia by sa zväčšila o príspevok od tohto prúdu. V prípade feromagnetického prúta by sa ale situácia veľmi skomplikovala, pretože prúd by nelineárne ovplyvnil aj magnetizáciu M.

8.2.2 Ampérov zákon pre látkové prostredie

Dospeli sme do situácie, keď možno odpovedať na otázku, akú magnetickú indukciu možno očakávať v látkovom prostredí, ktoré je pod účinkom magnetického poľa voľných (prístupných, merateľných) prúdov. Pri odpovedi možno vychádzať z platnosti Ampérovho zákona (pozri odsek 6.1.6), podľa ktorého dráhový integrál po uzavretej dráhe z magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ je úmerný prúdu I, ktorý dráha obopína, teda

$$\oint_l \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I \tag{8.19}$$

Pri jeho odvodení sme prúdy nijako nešpecifikovali, ani neobmedzovali. Dôležité bolo iba to, že predstavujú pohyb nábojov. V látkovom prostredí existujú aj viazané atómové prúdy, ktoré sa musia tiež podieľať na tvorbe magnetickej indukcie. K prúdu I na pravej strane rovnice (8.19) treba pripočítať aj celkový viazaný prúd I_M, ktorý je tiež obopnutý čiarou l, a ktorý súvisí s vektorom magnetizácie $\boldsymbol{M}$ v látke. Rovnica (8.19) prijme teda tvar

$$\oint_l \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 (I + I_M) \tag{8.20}$$

Toto je Ampérov zákon pre látkové prostredia. V tomto tvare má skôr teoretický význam, pretože prúd I_M je nemerateľný viazaný prúd. Na vyjadrenie I_M využijeme úvahy predchádzajúceho odseku a magnetický obvod s prúdom na *obr. 8.4a*. Dutina toroidálnej cievky s prúdom I_0 a počtom závitov N je naplnená homogénnym izotropným magnetikom. Stredná dĺžka toroidu je $l = 2\pi r_0$. V magnetiku vznikne magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ s indukčnými čiarami v tvare kružníc. Obopnutý prúd stojaci na pravej strane poslednej rovnice je N závitov s prúdom I_0, teda

$$I = NI_0$$

a viazaný prúd I_M, ktorý s nejakou plošnou hustotou J_M obteká toroidálne magnetikum po jeho plášti podobne ako reálny prúd v závitoch vinutia a po celej dĺžke l toroidu. Tento prúd sa zrejme dá vyjadriť integrálom

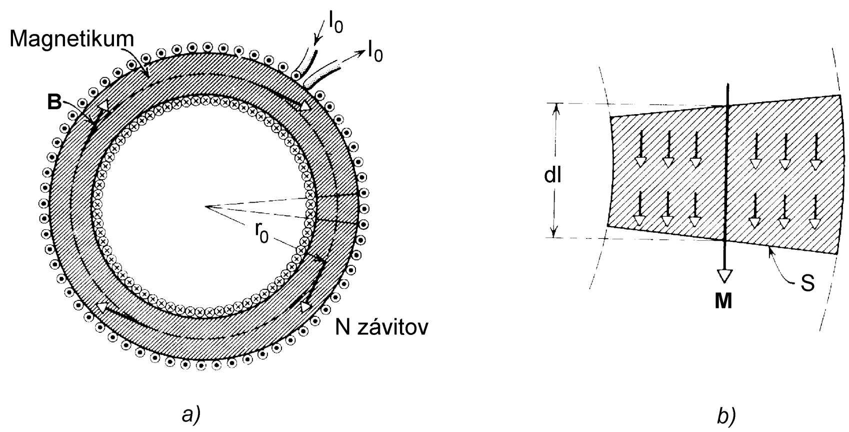
$$I_M = \oint_l J_M \mathrm{d}l$$

Ak uvážime, že $J_M \mathrm{d}l = M\mathrm{d}l = \boldsymbol{M}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ (pozri *obr. 8.4b*, kde je zobrazený nekonečne krátky úsek dl oblúku toroidu), potom výraz pre I_M nadobudne tvar

$$I_M = \oint_l \boldsymbol{M}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

Po dosadení tohto vyjadrenia do výrazu (8.20) dostaneme Ampérov zákon (integrálny tvar) pre magnetikum

$$\oint_l \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\left(I + \oint_l \boldsymbol{M}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \right) \tag{8.21}$$



Obr. 8.4

Rovnicu možno prepísať do všeobecnejšieho diferenciálneho tvaru, ak voľný prúd I vyjadríme integrálom prúdovej hustoty $\boldsymbol{J}$ cez celú plochu S ohraničenú čiarou l, t. j.

$$I = \int_S \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

a na dráhové integrály použijeme Stokesovu vetu. Po úprave dostaneme diferenciálny tvar Ampérovho zákona pre magnetikum

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{J} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}) \tag{8.22}$$

V zátvorke na pravej strane je súčet objemovej prúdovej hustoty $\boldsymbol{J}$ voľných prúdov a objemovej prúdovej hustoty

$$\boldsymbol{J}_M = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{M} \tag{8.23}$$

viazaných prúdov[1].

[1] V dielektriku bola vyjadrená objemovú hustotu viazaných nábojov $\rho_v = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}$, ale to nie sú tie náboje, ktoré vytvárajú viazané prúdy.

8.2.3 Vektor H

Ampérov zákon (8.21) možno upraviť na iný dôležitý tvar

$$\oint_l \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \right) . \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \tag{8.24}$$

Zvláštnosť výrazu (8.24) spočíva v tom, že integrál po uzavretej dráhe nejakého magnetického vektora (v zátvorke) sa nerovná ničomu inému, iba voľnému (prístupnému) prúdu I v magnetickom prostredí, a nezávisí od prostredia. Označme tento vektor symbolom $\boldsymbol{H}$, teda

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \tag{8.25}$$

Vektor sa nazýva **vektor intenzity magnetického poľa** $\boldsymbol{H}$, a zaviedli sme ho už v odseku 6.2 pre vákuum (kde $\boldsymbol{M} = 0$). Ak vo výraze (8.24) urobíme náhradu podľa (8.25) dostaneme Ampérov zákon vo formálne jednoduchom tvare

$$\oint_l \boldsymbol{H} . \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \tag{8.26}$$

Interpretácia vektora $\boldsymbol{H}$ robí rovnaké problémy ako vektora $\boldsymbol{D}$. Možno mať k nemu podobné výhrady, aké sme vzniesli v teórii dielektrík proti vektoru $\boldsymbol{D}$ (odsek 4.2). Aj tento vektor je výsledkom zloženia dvoch iných vektorov a jeho fyzikálny význam nie je okamžite zrejmý. Jeho rozmer a jednotka je A/m, čo je rozmer a jednotka plošného prúdu. Napriek všetkým výhradám, praktický význam vektora $\boldsymbol{H}$ je neporovnateľne väčší ako vektora $\boldsymbol{D}$. Integrál $\boldsymbol{H}$ po uzavretej dráhe podľa rovnice (8.26) závisí iba od voľných dráhou obopnutých prúdov tečúcich napr. vo vinutiach cievok, a tie dokážeme merať ampérmetrami. Vektor $\boldsymbol{D}$ takúto vlastnosť nemá, pretože hustotu voľných nábojov ρ, ktorá s ním súvisí, merať nevieme.

Ako príklad vypočítame intenzitu magnetického poľa v toroidálnej cievke na *obr. 8.4a*. Intenzita $\boldsymbol{H}$ má smer pozdĺž $\boldsymbol{B}$, resp. $\boldsymbol{M}$ a na polomere r_0 má hodnotu plynúcu z (8.26)

$$H = \frac{NI_0}{l} = \frac{I}{l}$$

Vo vnútri toroidálnej cievky, v magnetiku, podľa vzťahu (8.25) teda platí

$$H = \frac{NI_0}{l} = \frac{B}{\mu_0} - M$$

Pokiaľ sa určí súvis magnetizácie M s H, resp. B, dokážeme odpovedať na otázku, aká je magnetická indukcia v toroide.

Uvedený príklad svedčí o tom, že ak je magnetické pole v látke dôsledkom vonkajších magnetizačných prúdov, vektor ***H*** je veľmi užitočný, až natoľko, že vzťah (8.25) sa často píše v tvare

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{8.27}$$

ako keby nie vektor ***B***, ale vektor ***H*** bol základným vektorom magnetizmu. Ak niekedy hovoríme že "vektor ***B*** závisí od ***H***" obyčajne máme na mysli skutočnosť, že magnetická indukcia ***B*** je produkovaná voľnými prúdmi, ktoré sú zdrojom vektora ***H***. Okrem toho magnetizácia ***M*** v látke sa nespája s vektorom ***B***, ale sa predpokladá, že ju indukuje vektor ***H***, teda v skutočnosti magnetizujúce vonkajšie prúdy, čo je vcelku logický prístup. Preto sa zavádza vzťah

$$\boldsymbol{M} = \chi\boldsymbol{H} \tag{8.28}$$

kde χ je bezrozmerný koeficient nazývaný magnetická susceptibilita. Takýto vzťah však musíme hodnotiť ako empirický a treba sa k nemu ešte vrátiť. Ak však výraz (8.28) dosadíme do (8.27) dostaneme nový empirický vzťah

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(1 + \chi)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} \tag{8.29}$$

kde

$$\mu_r = 1 + \chi \tag{8.30}$$

je bezrozmerná **relatívna permeabilita** magnetika a

$$\mu = \mu_0\mu_r \qquad [\mathrm{H.m^{-1}}] \tag{8.31}$$

permeabilita magnetika. Aj posledné výrazy potrebujú komentár.

Posúďme teraz vlastnosti vektora intenzity magnetického poľa ***H*** v spontánne zmagnetizovanom prostredí, ktoré je bez prítomnosti vonkajších magnetizujúcich prúdov. Takýmto prostredím je napríklad permanentný magnet, feromagnetický alebo ferimagnetický materiál, v ktorom bol vybudený stály magnetický moment. Je zrejmé, že v takom prípade v rovnici (8.26) $I = 0$ a rovnica má tvar

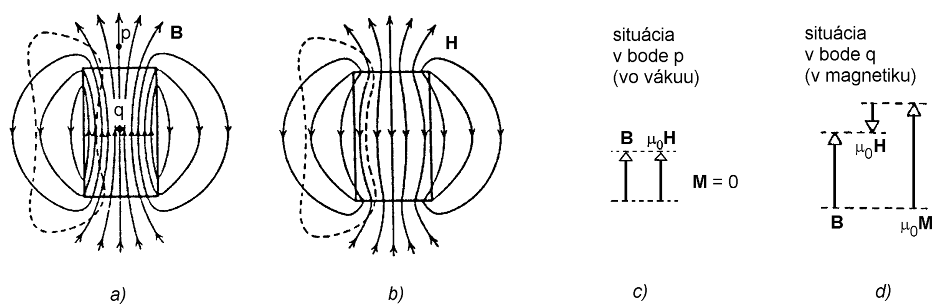
$$\oint_l \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{8.32}$$

Ak nejde o triviálny prípad, keď $\boldsymbol{H} = 0$ všade, potom také pole musí mať vlastnosti elektrostatického poľa s intenzitou ***E***, pre ktorú platí

$$\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

Lenže elektrostatické pole je potenciálové pole, ktoré má svoje zdroje v elektrických nábojoch. Magnetické pole také zdroje nemá, pretože žiadne magnetické náboje neexistujú. V prípade permanentných magnetov sa teda fyzikálny význam vektora ***H*** úplne stráca a má význam iba formálnej veličiny podľa vzťahu (8.25).

Aby sme toto tvrdenie dokázali, uvažujme tyčový permanentný magnet, ktorý je zdrojom nenulového magnetického poľa indukcie $\boldsymbol{B}$ znázorneného indukčnými čiarami vo vnútri a v okolí magnetu, ako na *obr. 8.5a*. Treba zdôrazniť, že zdrojom tohto poľa nie je voľný prúd, ale viazané atomárne prúdy v magnete. Indukčné čiary $\boldsymbol{B}$ sú uzavreté, spojité a zachovávajú jeden smer obehu. Pole indukcie $\boldsymbol{B}$ je presne také, ako pole krátkeho solenoidu s plošným prúdom nI_0 rovným plošnej hustote cirkulačného prúdu v štruktúre látky. Integrál po uzavretej (čiarkovanej) dráhe je nenulový a je úmerný obopnutému viazanému cirkulačnému prúdu. Iná je situácia s poľom $\boldsymbol{H}$. Pre pole $\boldsymbol{H}$ musí platiť rovnica (8.32), čo vyžaduje aby na uzavretej čiare na *obr. 8.5b* vektor $\boldsymbol{H}$ menil smer. Skutočne – vo vonkajšom priestore (vo vákuu v bode p), kde $\boldsymbol{M} = 0$ je $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0$, teda $\boldsymbol{H}$ má smer vektora $\boldsymbol{B}$ a vo vnútri magnetu (v bode q) $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{M}$ a má smer proti vektoru $\boldsymbol{B}$ (pozri tiež diagramy na *obr. 8.5c,d*). Vo vonkajšom priestore je pole vektora $\boldsymbol{H}$ podobné ako pole $\boldsymbol{B}$ a jednoducho $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$. Ale vo vnútri magnetu sa polia $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{H}$ diametrálne líšia, už napríklad len tým, že majú opačný smer. Zatiaľ čo pole $\boldsymbol{B}$ je tam fyzikálnou realitou, pole $\boldsymbol{H}$ nemá priamy fyzikálny obsah.[1]



Obr. 8.5

Čo sa týka "magnetických nábojov", ak by existovali, potom by museli byť plošne rozložené na čelách magnetu a z nich by vystupovali alebo do nich vstupovali magnetické siločiary $\boldsymbol{H}$. Úloha výpočtu poľa $\boldsymbol{H}$ by bola formálne rovnaká ako úlohy v elektrostatike spojené s výpočtom $\boldsymbol{E}$. Magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$ v okolí magnetu (vo vákuu alebo vo vzduchu) sa potom určí ako $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$. Skutočne sa takým spôsobom formálne riešia magnetostatické problémy spojené s vonkajšími poliami permanentných magnetov. Možno ukázať, že ak platí rovnica (8.32), potom intenzita magnetického poľa musí byť daná výrazom

$$\boldsymbol{H} = -\mathrm{grad}\,\varphi_m$$

kde $\varphi_m = V_m/\mu_0$ [2] (v jednotkách [A]) je magnetický skalárny potenciál pre intenzitu poľa $\boldsymbol{H}$, ktorý je daný riešením Laplaceovej rovnice

$$\Delta\varphi_m = 0$$

[1] Pomocou experimentov pri ktorých rýchle nabité častice alebo pomalé neutróny prenikali zmagnetizovaným železom sa dokázalo, že ich pohyb sa tam riadi účinkom poľa $\boldsymbol{B}$ a nie $\mu_0\boldsymbol{H}$ (pozri učebnicu [5]).

[2] Pozri tiež výrazy (6.47a,b).

pri daných hraničných podmienkach pre φ_m. Tieto okolnosti vysvetľujú, prečo začiatky teórie magnetizmu boli spojené s magnetickým poľom $\boldsymbol{H}$. Aj dnes odborníci, ktorí pracujú v problematike permanentných magnetov, uprednostňujú tento praxou osvedčený postup. Napriek tomu, že vektor $\boldsymbol{H}$ je takto rozporne hodnotený, vystupuje v jednej z Maxwellových rovníc [pozri ďalej rovnicu (8.37)]

V prípade, keď sú voľné prúdy v magnetiku rozložené objemovo s hustotou $\boldsymbol{J}$, možno dať výrazu (8.26) diferenciálnu formu. Už viackrát použitou matematickou procedúrou dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{8.33}$$

V prípade, ak sa v látkovom prostredí s časom mení elektrické pole, treba k pravej strane rovnice pridať hustotu posuvného prúdu (pozri odsek 6.3)

$$\boldsymbol{J}_p = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \boldsymbol{J}_{pol} \tag{8.34}$$

kde

$$\boldsymbol{J}_{pol} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{8.35}$$

je objemová hustota polarizačného prúdu v prostredí spojená s posúvaním elektrických dipólových centier v látke. Na pravej strane rovnice (8.33) treba nahradiť prúdovú hustotu $\boldsymbol{J}$ celkovou hustotou prúdu

$$\boldsymbol{J}_c = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_p = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{8.36}$$

a rovnica (8.33) prejde na tvar

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{8.37}$$

Niekedy sa nazýva **zákon celkového prúdu**, a ako sme už uviedli v odseku 6.3, je to posledná zo série Maxwellových rovníc.

Vráťme sa teraz k empirickým vzťahom (8.28) a (8.29) pre vektory magnetizácie $\boldsymbol{M}$ a magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$. Súčinitele χ, μ_r a μ určujú magnetické vlastnosti látok. Podľa hodnôt týchto súčiniteľov delíme látky na:

a) **diamagnetické látky**, pre ne $\chi < 0$, $\mu_r < 1$. Pre veľkú väčšinu týchto látok je μ_r veľmi blízke jednotke, a v širokom rozsahu magnetických indukcií je to konštanta;

b) **paramagnetické látky**, pre ne $\chi > 0$, $\mu_r > 1$. Aj pre tieto látky je μ_r blízke jednotke, závislé od teploty a v širokom rozsahu magnetických indukcií zostáva konštantou.

Vo vákuu $\chi = 0$, $\mu_r = 1$ a $\mu = \mu_0$.

Väčšina slabomagnetických látok z bodov a) a b) majú magnetické vlastnosti blízke vlastnostiam vákua, a preto pri ich elektrotechnických aplikáciách sa takmer vždy predpokladá, že ich relatívna permeabilita sa s dobrou presnosťou rovná 1.

V tabuľke 9 je na ilustráciu uvedených niekoľko slabomagnetických látok s ich magnetickými susceptibilitami χ.

Tabuľka 9

Diamagnetiká	$-\chi.10^6$	Paramagnetiká	$\chi.10^6$
Voda	9	Hliník	24
Kuchynská soľ	14	Titán	71
Ortuť	29	Platina	264
Zlato	36	Urán	400
Bizmut	166	Kyslík (kvapalný)	3 620

Najzložitejšia je tretia skupina látok. Sú to:

c) **feromagnetické látky**, ktorých $\chi \gg 1$, $\mu_r \gg 1$ a môžu dosahovať hodnôt rádu 10^3 až 10^5. Okrem toho χ a μ v celom rozsahu magnetizácie silne závisia od magnetujúceho poľa $\boldsymbol{H}$, od teploty, a ich momentálny stav závisí od predchádzajúceho stavu. Táto vlastnosť feromagnetík sa nazýva hysteréza. Výpočtové úlohy spojené s feromagnetikami sa takmer nikdy nedajú riešiť analyticky, ale iba približnými numerickými metódami s využitím siete ich hysteréznych slučiek. Teória feromagnetizmu patrí do oblasti kvantovej fyziky a fyziky tuhých látok. Do širšej skupiny feromagnetík možno zahrnúť aj ferimagnetiká, ktoré majú podobné magnetické vlastnosti s tým rozdielom, že z elektrického hľadiska sú to polovodiče alebo dielektriká. Príklady feromagnetických a ferimagnetických látok uvedieme v odseku venovanom feromagnetizmu.

Na záver tohto odseku sú v tabuľke 10 sumarizované základné vzťahy medzi magnetickými vektormi $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{H}$.[1]

8.2.4 Magnetické pole na rozhraní dvoch prostredí. Hraničné podmienky

Pri riešení praktických problémov spojených s magnetickými poliami treba zodpovedať na otázku, aké vlastnosti majú vektory magnetického poľa na rozhraní dvoch magnetík. Ak sa vo všeobecnosti hľadajú riešenia Maxwellových rovníc, alebo riešenia Laplaceovej rovnice pri magnetostatických problémoch, ktoré sú z matematického hľadiska diferenciálnymi rovnicami, jednoznačnosť riešenia predpokladá znalosť vlastností riešenia na daných hraničných plochách.

Predpokladajme teda, že magnetické pole existuje v priestore, v ktorom dve látky s rôznymi magnetickými vlastnosťami tvoria rozhranie. Relatívne permeability látok sú μ_{r1} a μ_{r2}, rozhraním pre všeobecnosť tečie voľný plošný prúd $\boldsymbol{J}_s$ kolmo za nákresňu (pozri

[1] V časti odbornej literatúry sa popri vektore magnetizácie $\boldsymbol{M}$ (alebo namiesto neho) zavádza ďalší magnetizačný vektor $\boldsymbol{J}$, ktorý sa nazýva vektor magnetickej polarizácie a s vektorom $\boldsymbol{M}$ súvisí vzťahom $\boldsymbol{J} = \mu_0\boldsymbol{M}$. Jeho jednotkou je tesla (T). S vektorom $\boldsymbol{J}$ sa potom spája magnetický dipólový moment (podľa Coulomba) $\boldsymbol{m}_C = \mu_0 I\boldsymbol{S}$, ktorý sa meria v jednotkách Wb.m (!), kde jednotka magnetického indukčného toku Wb predstavuje jednotku "magnetického náboja". Vektor $\boldsymbol{J}$ teda udáva objemovú hustotu dipólových momentov $\boldsymbol{m}_C$. Keďže nevidím osobitný dôvod na používanie týchto vektorov, v mojom pojednaní ich nezavádzam. Fyzikálny význam vektora $\boldsymbol{J}$ je sporný a vektor $\boldsymbol{m}_C$ je vyslovený anachronizmus. Dnes platná norma STN ISO 31-5 z roku 1997 vektor $\boldsymbol{m}_C$ medzi veličinami SI-sústavy už neuvádza.

obr. 8.6), $\boldsymbol{n}_0$ je jednotkový vektor normály k rozhraniu. Označme vektory magnetickej indukcie bezprostredne na rozhraní zhora a zdola v bode 0 symbolmi $\boldsymbol{B}_1$ a $\boldsymbol{B}_2$, vektory

Tabuľka 10

Názov	Symbol	Pôvod
Magnetická indukcia	$\boldsymbol{B}$	všetky prúdy
Intenzita magnetického poľa	$\boldsymbol{H}$	iba voľné prúdy
Magnetizácia	$\boldsymbol{M}$	iba viazané prúdy

Definičný výraz pre $\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ alebo $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$	(6.6) (6.87)
Všeobecný vzťah medzi troma vektormi	$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \mu_0\boldsymbol{M}$	(8.27)
Ampérov zákon pre látkové prostredie	$\oint_l \boldsymbol{H}.\,dl = I$	(8.26)
Empirické vzťahy pre niektoré látky*	$\boldsymbol{B} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H}$ $\boldsymbol{M} = \chi\boldsymbol{H} = (\mu_r - 1)\boldsymbol{H}$	(8.29) (8.28)

*Iba pre diamagnetické a paramagnetické látky, pre ktoré sú χ a μ_r konštanty nezávislé od $\boldsymbol{H}$.

intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}_1$ a $\boldsymbol{H}_2$. Pre vektory poľa na rozhraní nevieme zadať nijaké podmienky, môžeme to však urobiť pre ich zložky. Rozložme preto vektory magnetickej indukcie na normálové zložky B_{n1} a B_{n2} a ich tangenciálne zložky B_{t1} a B_{t2}. Okolo bodu 0 možno zvoliť nekonečne nízky valec s osou kolmo na rozhranie a s podstavou dS. Zo všeobecnej platnosti rovnice

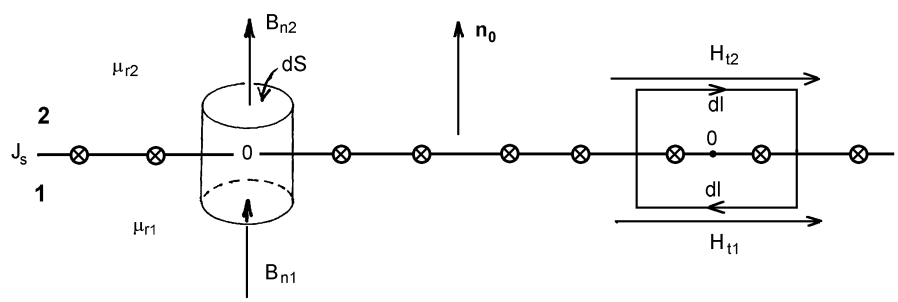
$$\oint_S \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

plynie, že tok plochou valčeka sa rovná nule, čo pre normálové zložky znamená, že

$$B_{n2}\mathrm{d}S - B_{n1}\mathrm{d}S = 0$$

alebo

$$B_{n2} - B_{n1} = 0 \tag{8.38}$$



Obr. 8.6

Normálová zložka vektora $\boldsymbol{B}$ je teda na rozhraní spojitá, bez ohľadu na to, či rozhraním tečie prúd alebo nie.

Podobne rozložíme na rozhraní vektor $\boldsymbol{H}$ na normálovú a tangenciálnu zložku. V dôsledku všeobecnej platnosti rovnice

$$\oint_l \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I$$

na nekonečne malom obdĺžniku so stranami dl pozdĺž rozhrania (pozri *obr. 8.6*) platí

$$H_{t1}\mathrm{d}l - H_{t2}\mathrm{d}l = J_s\mathrm{d}l$$

alebo

$$H_{t1} - H_{t2} = J_s \tag{8.39}$$[1]

Rozdiel tangenciálnych zložiek intenzity magnetického poľa sa rovná plošnej hustote prúdu na rozhraní, ktorý je na zložky poľa kolmý. Ak prúd rozhraním netečie, sú tangenciálne zložky na rozhraní spojité, t.j. ak $J_s = 0$, potom

$$H_{t1} - H_{t2} = 0 \tag{8.40}$$

Vzťahy (8.38) a (8.39) sú hľadané **hraničné podmienky** ktoré možno uviesť vo všeobecnom vektorovom tvare

$$\boldsymbol{n}_0.(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 \tag{8.41a}$$

$$\boldsymbol{n}_0 \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{J}_s \tag{8.41b}$$

Uvedené hraničné podmienky platia ako pre statické, tak aj pre časovopremenné magnetické polia a vo všeobecnosti sa považujú za súčasť sústavy Maxwellových rovníc.

Ak na rozhraní netečie prúd ($J_s = 0$), potom pre indukčné čiary možno odvodiť zákon ich lomu podobne, ako sme to urobili pre elektrické siločiary na rozhraní dvoch dielektrík (odsek 4.5).

Jedno z prakticky dôležitých rozhraní je rovinné alebo mierne zakrivené rozhranie medzi nevodivým neferomagnetickým magnetikom (napr. vzduchom alebo aj vákuom) a dobre vodivým neferomagnetickým kovom, v ktorom tečú elektrické prúdy veľmi vysokej frekvencie. Z teórie elektromagnetických vĺn plynie, že v dobre vodivom prostredí (napr. v medenom drôte) vysokofrekvenčný prúd tečie prakticky iba vo veľmi tenkej vrstve pri povrchu a do vnútra vodiča prúdová hustota rapídne klesá. Tento jav sa nazýva **povrchový jav** alebo **skinefekt** a bude analyzovaný v odseku 11.5. Z praktického hľadiska možno tento prúd nahradiť povrchovým plošným prúdom J_s. Vo vodiči je prúdová hustota nulová, a nulové je tam aj magnetické pole. Ak týmto dobre vodivým prostredím je na *obr. 8.6* prostredie 1, potom v rovniciach (8.41) je

$$\boldsymbol{B}_1 = 0 \qquad\qquad \boldsymbol{H}_1 = 0$$

---

[1] Prísne vzaté, pri odvodení druhej hraničnej podmienky treba vychádzať z rovnice $\oint_l \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I + I_p$, kde I_p je posuvný prúd. Hustota posuvného prúdu má však objemový charakter a keďže zvolený obdĺžnik limitne obopína nulovú plochu, posuvný prúd sa neuplatní.

a rovnice prijmú tvar $$\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{B}_2 = 0 \tag{8.42a}$$

$$\boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{J}_s \tag{8.42b}$$

alebo

$$B_{n2} = 0 \tag{8.43a}$$

$$H_{t2} = J_s \tag{8.43b}$$

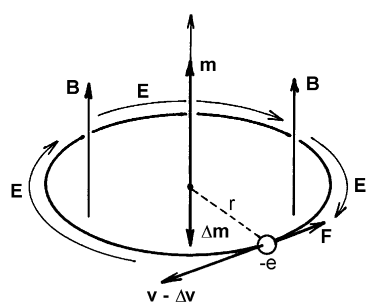
Podľa týchto rovníc vysokofrekvenčné magnetické pole na povrchu dobrého vodiča má iba tangenciálnu zložku a jeho intenzita H_t sa rovná plošnému prúdu J_s. Vektory $\boldsymbol{H}_t$ a $\boldsymbol{J}_s$ sú navzájom na seba kolmé a spĺňajú vzťah (8.42b). Tieto skutočnosti sú veľmi dôležité pre konštruktérov rôznych mikrovlnných zariadení.

8.3 MIKROSKOPICKÁ TEÓRIA DIAMAGNETIZMU A PARAMAGNETIZMU

8.3.1 Diamagnetizmus

K pochopeniu fyzikálnej podstaty diamagnetizmu sa musíme znovu obrátiť k atómovej štruktúre látok. Budeme si všímať, ako pôsobí vonkajšie magnetické pole na atóm, presnejšie na jeho jednu vybranú elektrónovú orbitu zobrazenú na *obr. 8.7*. Predpokladajme, že v priestore atómu vzniká magnetická indukcia, ktorá zo svojej začiatočnej nulovej hodnoty dosiahne hodnotu $\boldsymbol{B}$ v smere rotačnej osi z vybranej obežnej dráhy elektrónu s polomerom r. V procese narastania magnetickej indukcie rastie aj indukčný tok $\Phi = BS$ kruhovou plochou obopnutou atómovou dráhou $S = \pi r^2$. Rýchlosť nárastu toku plochou S je teda

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\pi r^2 B) = \pi r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \tag{8.44}$$



Obr. 8.7

Takáto zmena indukčného toku plochou dráhy musí podľa zákona elektromagnetickej indukcie indukovať pozdĺž dráhy intenzitu elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ vyznačenú na obrázku šípkami a danú výrazom

$$\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Smer intenzity $\boldsymbol{E}$ plynie z Lenzovho pravidla. Posledný výraz môžeme prepísať na tvar

$$2\pi rE = -\pi r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

z čoho

$$E = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \tag{8.45}$$

Intenzita daná výrazom (8.45) bude na elektrón pôsobiť silou $\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E}$ (pri danom smere intenzity bude elektrón silou spomaľovaný). Sila súvisí s časovou zmenou hybnosti, teda

$$m_e \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{er}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

z čoho

$$\mathrm{d}v = -\frac{er}{2m_e}\mathrm{d}B$$

Vidíme, že zmena rýchlosti dv elektrónu na jeho dráhe je úmerná zmene magnetickej indukcie dB a nezávisí od časového intervalu v akom zmeny prebiehajú. Ak integrujeme obidve strany rovnice

$$\int_v^{v-\Delta v} \mathrm{d}v = \frac{er}{2m_e}\int_0^B \mathrm{d}B$$

dostaneme výraz

$$\Delta v = -\frac{er}{2m_e}B \tag{8.46}$$

ktorého fyzikálny zmysel je nasledovný: Ak plochou ohraničenou dráhou elektrónu vznikne indukčný tok s konečnou hodnotou magnetickej indukcie B, potom rýchlosť v elektrónu klesne o hodnotu Δv danú výrazom (8.46). S týmto znížením rýchlosti môžeme spojiť indukovaný moment $\Delta\boldsymbol{m}$ v opačnom smere ako je smer vektora $\boldsymbol{m}$. Indukovaný moment má hodnotu

$$\Delta m = \frac{er\Delta v}{2} = -\frac{e^2 r^2}{4m_e}B \tag{8.47}$$

a smeruje vždy proti smeru vektora $\boldsymbol{B}$ (dokonca pre ľubovoľné znamienko náboja). Toto je podstata diamagnetizmu! Látky s takými atómami budú z nehomogénneho magnetického poľa vytláčané. Práve toto pozoroval Faraday v roku 1846 na prvku bizmut (Bi) a látky s podobnými vlastnosťami nazval diamagnetické.

Možno namietať, že pri odvodení výrazu pre $\boldsymbol{E}$ sme vo vzťahu (8.44) neoprávnene vybrali spod derivácie polomer r. Dá sa však dokázať, že ak $\Delta v \ll v$ (čo je pri dosiahnuteľných B dobre splnené), polomer r sa pri naložení poľa B nezmení, pretože odstredivá sila od zmeny rýchlosti Δv elektrónu a dostredivá magnetická sila na elektrón spôsobená indukciou B sa navzájom kompenzujú (dôkaz tejto skutočnosti necháme na čitateľa).

Skutočný "diamagnetický" moment Δm pre celý atóm bude zrejme iný (ale nie principiálne iný) ako udáva výraz (8.47). Atóm má Z elektrónov s rôznymi polomermi atómových dráh a môžeme predpokladať guľovú symetriu rozloženia orientácie osí dráh. Presný vzťah pre diamagnetický moment atómu sa od uvedeného výrazu líši iba tým, že r^2 treba nahradiť s

$$\sum_Z \langle r^2 \rangle$$

kde $\langle r^2 \rangle$ je stredný kvadratický polomer atómovej dráhy a sčítava sa cez Z elektrónov atómu. V menovateli treba 4 nahradiť s 6, čo plynie zo stredovania. Presný výraz pre dodatočný diamagnetický moment atómu je tvaru

$$\Delta\boldsymbol{m} = -\frac{e^2}{6m_e}\sum_Z \langle r^2 \rangle \boldsymbol{B} \tag{8.48}$$

Rovnaký výraz poskytuje aj kvantová teória, ak sa $\langle r^2 \rangle$ interpretuje ako stredná kvadratická vzdialenosť od stredu atómu pre dané pravdepodobnostné rozdelenie elektrónovej hustoty.

Ak koncentrácia atómov v látke je n, potom magnetizácia spojená s momentami podľa (8.48) je

$$\boldsymbol{M} = n\Delta\boldsymbol{m} = -\frac{ne^2}{6m_e}\sum_Z \langle r^2 \rangle \boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 ne^2}{6m_e}\sum_Z \langle r^2 \rangle \boldsymbol{H}$$

Z čoho bezrozmerná veličina – diamagnetická susceptibilita – je daná výrazom

$$\chi = \frac{M}{H} = -\frac{\mu_0 ne^2}{6m_e}\sum_Z \langle r^2 \rangle = -5{,}9.10^{-15} n \sum_Z \langle r^2 \rangle \tag{8.49}$$

Z výrazu (8.49) vidieť, že diamagnetizmus látok je jav univerzálny pre všetky atómy látky, závisí od teploty cez koncentráciu atómov n.

Zavedená susceptibilita je bezrozmerná, ale je úmerná objemovej koncentrácii atómov, a preto sa výraz (8.50) interpretuje ako objemová susceptibilita. Vydelením χ hustotou látky ρ dostaneme hmotovú susceptibilitu $\chi_m = \chi/\rho$ v jednotkách m^3/kg, pretože jednotka hmotnosti (1 kg) zaberá objem $(1/\rho)$ m^3. Podobne molárna susceptibilita $\chi_M = 10^{-3}\, M\chi_m$ v jednotkách m^3/kilomol. M je atómová alebo molekulárna hmotnosť v gramoch. Faktor 10^{-3} je z dôvodu, že χ sa vzťahuje na kilomol látky.

Aby bol zmätok dokonalý, v niektorých tabuľkách sú susceptibility ešte stále udávané v cgsm jednotkách, pričom v tuhých látkach a v kvapalinách dosahujú objemové susceptibility (na cm^3) hodnoty rádu 10^{-6} (v plynoch oveľa menšie pre oveľa nižší počet atómov na jednotku objemu).

V SI-sústave je objemová susceptibilita (na m^3) väčšia o faktor 4π, a teda je rádu 10^{-5}. Hodnoty susceptibilít v tabuľke 9 sú objemové susceptibility v SI-sústave.

V kovoch, v ktorých sú prítomné voľné elektróny je situácia zložitejšia, pretože v magnetickom poli Lorentzova sila ovplyvňuje translačný pohyb elektrónov a to vedie k dodatočnej diamagnetickej susceptibilite, ktorá pri bežných magnetických poliach je konštantná. Výraz pre túto dodatočnú susceptibilitu odvodil ruský teoretický fyzik Lev D. Landau (1908 – 1968)[1] v tvare

$$\chi_d = -\mu_0 \frac{e^2}{12\pi m^*}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{1/3} \tag{8.50}$$

kde m^* je efektívna hmotnosť vodivostných elektrónov a n je ich koncentrácia. Tento typ diamagnetizmu sa nazýva **Landauov diamagnetizmus** a je známy aj v polovodičoch.

Tie isté vodivostné elektróny v kove majú aj paramagnetický príspevok k susceptibilite. Ak uvážime, že voľný elektrón má moment hybnosti (spin) a jemu zodpovedajúci magnetický moment veľkosti Bohrovho magnetónu μ_B (pozri odsek 8.1), budú sa tieto momenty podľa pravidiel kvantovej mechaniky orientovať pozdĺž smeru magnetického poľa a budú prispievať k paramagnetickej susceptibilite látky členom, ktorý je daný výrazom[2]

$$\chi_p = \mu_0 \frac{3ng^2\mu_B^2}{8W_F} \tag{8.51}$$

kde g je Landého g-faktor a W_F je Fermiho hladina. Tento typ magnetizmu sa nazýva **Pauliho paramagnetizmus** [Wolfgang Pauli (1900 – 1958) – rakúsky teoretický fyzik] a dá sa experimentálne skúmať metódou elektrónovej paramagnetickej rezonancie (EPR), o ktorej sa krátko zmienime v odseku 8.5.4.

Pre voľné elektróny v kovoch $m^* = m_e$, $g = 2$ a $W_F = (3\pi^2 n)^{2/3}\hbar^2/(2m_e)$. V takom prípade sa Pauliho susceptibilita rovná trojnásobku absolútnej hodnoty Landauovej susceptibility, teda $\chi_p = 3\,|\chi_d|$.

Na záver tohto odseku ako príklad uvedieme výpočet objemovej susceptibility zlata s využitím výrazov (8.49) až (8.51). Hustota zlata $\rho = 19\,320$ kg/m^3, Avogadrovo číslo $N_A = 6{,}022\,5.10^{26}$ kmol^{-1}, atómová hmotnosť zlata $m_m = 196{,}966\,5$ kg/kmol, takže koncentrácia atómov v zlate

$$n = N_A \frac{\rho}{m_m} = 5{,}906\,84\,.\,10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$$

Atómové číslo zlata $Z = 79$ a ako odhad pre $\langle r^2\rangle$ zoberieme hodnotu blízku kvadrátu Bohrovho polomeru, konkrétne $0{,}75a_0$, teda

$$\sum_Z \langle r^2\rangle = Z.\langle r^2\rangle = 79\ .\ (0{,}75a_0)^2 = 1{,}244\ .\ 10^{-19}\ \mathrm{m^2}$$

---

[1] Landau, L. D., Z. Phys., Bd. **64**, N. 7 – 8, S. 629 (1930)

[2] Pozri napr. Kittel, C.: Introduction to solid state physics, J. Wiley and Sons, New York 1971

Dosadením týchto hodnôt do výrazu (8.49) dostaneme pre elektrónovú objemovú diamagnetickú susceptibilitu zlata hodnotu $\chi = -43{,}36.10^{-6}$. Príspevok Landauovho diamagnetizmu vypočítaný podľa výrazu (8.50) je $\chi_d = -3{,}6.10^{-6}$ a od Pauliho paramagnetizmu podľa výrazu (8.51) $\chi_p = 3\left|\chi_d\right| = 10{,}8.10^{-6}$. Celková susceptibilita zlata je teda

$$\chi_c = \chi + \chi_d + \chi_p = -36{,}16.10^{-6}$$

Výsledok, ktorý sme dostali, sa prakticky rovná experimentálnej hodnote v tabuľke 9. Zhoda experimentálnych a teoretických výsledkov svedčí o tom, že naša predstava o jave diamagnetizmu odpovedá realite. Je tiež známe, že magnetické merania susceptibilít sú najpresnejšou metódou experimentálneho stanovenia strednej hodnoty $\langle r^2 \rangle$. V uvedenom príklade je touto hodnotou $(0{,}75a_0)^2$.

8.3.2 Paramagnetizmus

Ako sme už konštatovali, paramagnetizmus (odhliadnuc od Pauliho paramagnetizmu vodivostných elektrónov) prejavujú také látky, ktorých atómy, ióny alebo molekuly majú nenulový permanentný magnetický moment. Takých látok je veľa, rovnako ako tých, ktoré moment nemajú, a sú teda diamagnetické. Príčina paramagnetizmu môže byť rôzna. Jedným z dôvodov môže byť nepárny počet elektrónov v atóme, takže je v ňom nespárený, teda nevykompenzovaný orbitálny alebo spinový moment, a tak je prvok paramagnetický. Toto však nemusí byť pravidlom, pretože napr. niektoré dvojatómové molekuly zložené s atómov s párnym počtom elektrónov sú napriek tomu paramagnetické, ako napr. kyslík O_2. Paramagnetické sú napr. ióny prechodných prvkov ako Mn^{2+}, vzácnych zemín ako Gd^{3+}, aktinidov ako U^{4+} a i. U väčšiny kovov vonkajšie elektróny opúšťajú jednotlivé atómy, čím z nich vzniknú diamagnetické ióny. Uvoľnené elektróny sa môžu voľne pohybovať a nazývajú sa vodivostné elektróny. Ich paramagnetizmus a diamagnetizmus sme analyzovali v predchádzajúcom odseku.[1] Niekoľko typických paramagnetík je uvedených v tabuľke 9.

Bez vonkajšieho magnetického poľa sú magnetické momenty paramagnetickej látky, v dôsledku chaotického tepelného pohybu, vystredované na nulu, a teda stredná magnetizácia v látke je nulová. Energia tepelného pohybu pri absolútnej teplote T sa rádovo rovná hodnote kT (k je Boltzmannova konštanta). Keď sa na látku naloží vonkajšie magnetické pole s indukciou $\boldsymbol{B}$, majú dipóly látky pod účinkom točivého momentu tendenciu zaujať smer poľa zodpovedajúci jeho minimálnej potenciálnej energii. Potenciálna energia dipólu s momentom $\boldsymbol{m}$ v poli magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ je $-\boldsymbol{m}.\boldsymbol{B}$ (pozri odsek 6.4.1). Táto energia je v porovnaní s tepelnou energiou veľmi malá, napriek tomu však dôjde k istému usporiadaniu dipólov do smeru poľa $\boldsymbol{B}$. V látke vznikne nenulová magnetizácia $\boldsymbol{M}$ v smere $\boldsymbol{B}$, čo zodpovedá kladnej magnetickej susceptibilite. Ukážeme neskôr, že v bežných poliach pri teplote blízkej izbovej, teda pre pomer B/T dostatočne malý, je

[1] V tomto odseku budeme hovoriť iba o elektrónovom paramagnetizme. Jadrový paramagnetizmus ako veľmi slabý efekt (rádovo tisíckrát slabší ako elektrónový para- a diamagnetizmus) nebudeme uvažovať (pozri tiež odsek 8.5.4). Treba si uvedomiť, že látka s jadrovým paramagnetizmom môže byť diamagnetická (ako príklad môže poslúžiť voda – H_2O, kde paramagnetické sú dva vodíkové protóny).

magnetizácia nepriamo úmerná teplote. Túto skutočnosť experimentálne potvrdil v roku 1895 francúzsky fyzik Pierre Curie (1859 – 1906), ktorý zistil, že v bežných poliach $\boldsymbol{B}$ a pri teplotách T blízkych izbovým, je magnetizácia $\boldsymbol{M}$ úmerná magnetickej indukcii $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ a nepriamo úmerná teplote, teda

$$\boldsymbol{M} = \frac{C'}{T}\boldsymbol{B} = \frac{C}{T}\boldsymbol{H} = \chi\boldsymbol{H}$$

kde C' a C sú konštanty. Rovnica je známa ako **Curieho zákon**, a často sa píše v tvare pre susceptibilitu

$$\chi = \frac{C}{T} \tag{8.52}$$

Pre veľmi silné polia a nízke teploty, keď pomer B/T je veľký, vzťah medzi intenzitou magnetického poľa a magnetizáciou nezostáva lineárny. V látke dochádza postupne k nasýteniu a magnetizácia M speje ku konštantnej maximálnej hodnote M_{max}, kedy všetky magnetické momenty smerujú pozdĺž magnetizujúceho poľa $\boldsymbol{B}$, resp. $\boldsymbol{H}$.

Teoretický výklad Curieho zákona podal v roku 1905 Paul Langevin (1872 – 1946) na základe klasickej Boltzmannovej štatistiky. Matematický postup, ktorý pri tom využil, je ten istý, ktorý sme uviedli pri výpočte elektrickej susceptibility dielektrík s orientačnou polarizáciou (odsek 4.8.3), a preto ho tu uvedieme iba skrátene. Magnetický dipól s momentom $\boldsymbol{m}$ nachádzajúci sa v magnetickom poli $\boldsymbol{B}$ má potenciálnu energiu $W = -\boldsymbol{m}.\boldsymbol{B} = -mB\cos\vartheta$, kde ϑ je uhol, ktorý zvierajú vektory $\boldsymbol{m}$ a $\boldsymbol{B}$. Podľa klasickej štatistiky počet momentov s energiou W zodpovedajúcou uhlom z intervalu od ϑ po $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$ je

$$\mathrm{d}n = b\,\mathrm{e}^{-\frac{W}{kT}} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \tag{8.53}$$

kde b je konštanta, ktorú možno určiť normovaním, t. j. integráciou výrazu (8.53) cez všetky možné hodnoty energie. Táto integrácia musí dať počet momentov n na jednotku objemu (koncentráciu dipólov). Pre náš prípad

$$\mathrm{d}n = b\,\mathrm{e}^{\frac{mB}{kT}\cos\vartheta} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \tag{8.54}$$

a integráciou tohto výrazu od 0 po π dostaneme hodnotu n. Zložka dipólového momentu do smeru $\boldsymbol{B}$ na každý atóm je $m\cos\vartheta$, a teda stredná komponenta na atóm je $\overline{m}$. Magnetizácia jednotkového objemu paramagnetika je potom daná výrazom

$$M = n\overline{m} = m\int_0^{\pi} \cos\vartheta\,\mathrm{d}n$$

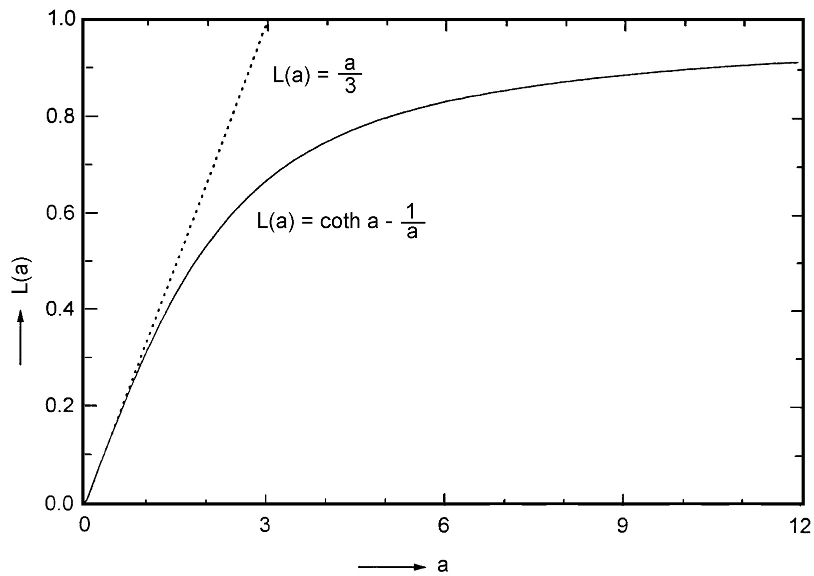
Z toho výrazu môžeme vyjadriť

$$\frac{\overline{m}}{m} = \frac{M}{nm} = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\vartheta\, b\,\mathrm{e}^{\frac{mB}{kT}\cos\vartheta} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}{\displaystyle\int_0^{\pi} b\,\mathrm{e}^{\frac{mB}{kT}\cos\vartheta} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}$$

zaviesť substitúciu $\qquad \dfrac{mB}{kT} = a \qquad$ a $\qquad \cos\vartheta = x$

takže nakoniec dostaneme výraz

$$\frac{M}{nm} = \frac{\int\limits_{-1}^{+1} x\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x} = \operatorname{cotgh} a - \frac{1}{a} = L(a) \qquad (8.55)$$



Obr. 8.8

Výsledkom integrácie je Langevinova funkcia $L(a)$, ktorej priebeh v závislosti od a je graficky znázornený na *obr. 8.8*. Pre veľké hodnoty a (veľký pomer B/T) sa hodnota funkcie blíži k jednotke, t. j. stredný moment $\overline{m}$ v smere poľa sa rovná hodnote individuálneho momentu m. Je to stav nasýtenia (saturácie), keď sú všetky dipóly nasmerované pozdĺž vektora $\boldsymbol{B}$. V prípade, že $a \ll 1$, t. j. ak $mB \ll kT$, možno Langevinovu funkciu nahradiť lineárnym výrazom

$$L(a) \approx \frac{a}{3}$$

Z výrazu (8.55) plynie, že

$$\frac{M}{nm} = L(a) \approx \frac{mB}{3kT}$$

alebo

$$M = \frac{nm^2}{3kT} B = \frac{\mu_0 nm^2}{3kT} H \qquad (8.56)$$

Výraz (8.56) udáva magnetizáciu paramagnetickej látky umiestnenej v slabom poli pri izbových teplotách. Z tohoto výrazu pre bezrozmernú veličinu – paramagnetickú susceptibilitu – plynie

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 nm^2}{3kT} \qquad (8.57)$$

Je to tá istá susceptibilita, ktorú objavil P. Curie, a ktorá je daná výrazom (8.52), ak vezmeme do úvahy, že Curieho konštanta je

$$C = \frac{\mu_0 nm^2}{3k}$$

Vo výraze (8.57) je jedinou atomárnou neznámou magnetický moment m, ktorý možno určiť meraním susceptibility v závislosti od $1/T$ v oblasti, kde a je malé. Vo všeobecnosti sú magnetické momenty paramagnetík rádu 10^{-23} A.m^2, sú teda rádovo rovné Bohrovmu magnetónu. Objemové susceptibility (na m^3) paramagnetických tuhých látok pri izbových teplotách, tých, ktoré spĺňajú Curieho zákon, sú $\approx +10^{-3}$. Paramagnetizmus je teda podstatne silnejší, ako diamagnetizmus, ktorý je však v látke vždy prítomný.

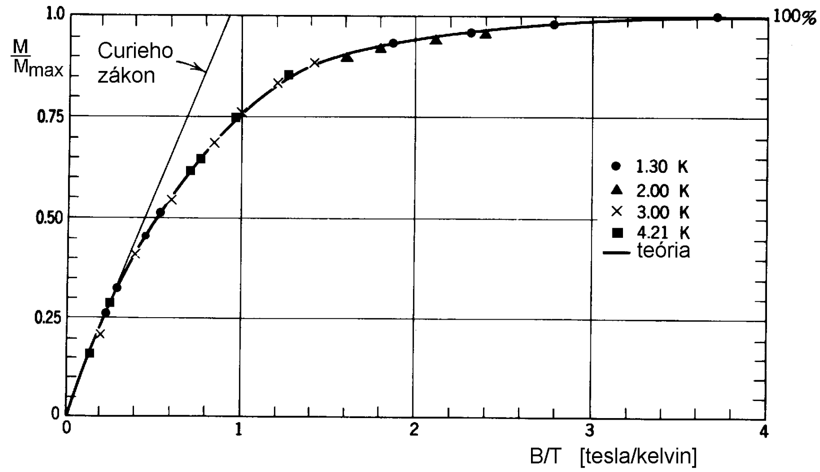
Prísne vzaté, Langevinova teória je použiteľná iba pre plyny, v ktorých dipóly sú dostatočne ďaleko od seba, takže možno zanedbať ich vzájomnú interakciu. V tuhých látkach môže byť táto interakcia značná a mnohé látky vyhovujú modifikovanému Curie-Weissovmu vzťahu

$$\chi = \frac{C}{T - \Theta} \qquad (8.58)$$

kde Θ je Weissova konštanta charakteristická pre tú-ktorú látku; môže byť kladná alebo záporná. Rovnica (8.58) platí iba pre $T > |\Theta|$ a pre mnohé látky niet jednoduchého vzťahu, ktorý by opisoval variácie susceptibility v širokom rozsahu teplôt.

Na záver tohto odseku je na *obr. 8.9* znázornená zaujímavá grafická závislosť M/M_{max} od pomeru B/T pre rôzne teploty u paramagnetickej soli $CrK(SO_4)_2.12H_2O$ (kryštalický síran draselno chromitý).[1] U tejto látky nositeľom paramagnetizmu sú ióny chrómu Cr^{3+}, ostatné ióny (K^+, SO_4^{2-}) a molekuly vody sú diamagnetické. 99,5 %-né nasýtenie nastane v obrovskom poli B = 5 T pri extrémne nízkej teplote T = 1,3 K. Pre ľahšie dosiahnuteľné podmienky B = 1 T a teplotu T = 10 K je pomer B/T = 0,1 [T/K]. Pre tento a menší pomer B/T je Curieho zákon dobre splnený. Krivka, ktorá prechádza experimentálnymi bodmi na obrázku, bola vypočítaná na základe modernej kvantovej teórie. Vidíme, že výborne súhlasí s experimentom.

[1] Z meraní W. E. Henryho podľa knihy: Resnick, R. – Halliday, D.: Physics, J. Wiley & Sons, Inc. New York, London, Sydney 1966.



Obr. 8.9

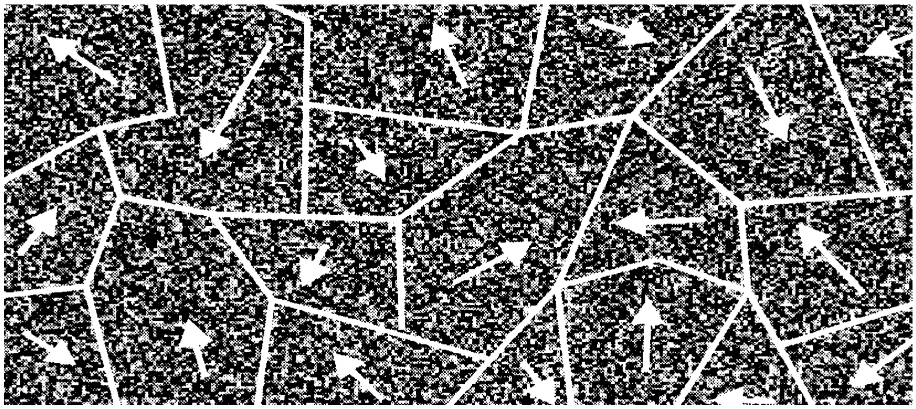
8.4 FENOMENOLOGICKÁ TEÓRIA FEROMAGNETIZMU

Prvé, čo treba v súvislosti s feromagnetizmom povedať je, že je to kooperatívny jav a vzniká v látke (a nie v jej atómoch) ako dôsledok špecifického pôsobenia medzi paramagnetickými atómami alebo aj inými prímesami v kryštalickej mriežke. Svedčí o tom aj tá skutočnosť, že feromagnetické látky zahriate nad kritickú Curieho teplotu T_C prechádzajú do paramagnetického stavu. Ich susceptibilita pre teploty $T > T_C$ je daná výrazom

$$\chi = \frac{C}{T - T_C} \tag{8.59}$$

(Curieho-Weissov zákon). Pre reprezentanta tejto skupiny – železo – je Curieho teplota T_C = 1 043 K = 773 °C. Pod touto teplotou je železo feromagnetické, nad ňou paramagnetické. Vo feromagnetickom stave sa medzi magnetickými momentmi atómov látky objavuje zvláštny typ väzby nazvanej výmenná väzba, ktorá prinúti magnetické momenty v relatívne veľkej, až makroskopickej oblasti orientovať sa do jedného smeru. Tieto oblasti spontánnej magnetizácie sa nazývajú magnetické domény. V magnetických doménach sú všetky elementárne momenty usporiadané a vytvárajú jeden relatívne veľký magnetický moment celej domény. Dôležité je, že k spontánnej magnetizácii a vzniku domén dochádza bez akéhokoľvek vplyvu vonkajšieho magnetického poľa. Výmenná väzba zodpovedná za vznik a existenciu domén je výlučne kvantový efekt a nedá sa vysvetliť pomocou klasickej fyziky.

Ak teplota feromagnetického materiálu klesne pod Curieho bod T_C, prestáva preň platiť výraz (8.59) a jeho správanie sa diametrálne mení. Pôsobením spomínaných kvantových efektov vzájomnej výmeny vznikajú magnetické domény. Magnetické momenty domén bez prítomnosti vonkajšieho magnetického poľa sú štatisticky rozložené do všetkých smerov, a látka, pokiaľ predtým nebola vystavená pôsobeniu magnetických polí, zostáva makroskopicky nezmagnetizovaná. Na *obr. 8.10* je schematicky znázornená doménová štruktúra nezmagnetizovaného feromagnetika, šípkami sú vyznačené smery magnetizácie domén. Rozmery domén sú v rozsahu 10^{-4} až 10^{-1} mm.



Obr. 8.10

Bude nás zaujímať, ako sa vzorka feromagnetického materiálu bude správať, ak ju budeme magnetizovať. Predpokladajme, že vzorka je toroidálneho tvaru a je na nej navinutá cievka ako na *obr. 8.4a*, ktorou tečie prúd, ktorý možno meniť. Prúd vytvorí v toroide magnetizujúce pole intenzity H, v dôsledku ktorého vznikne vo feromagnetiku magnetizácia M a v konečnom dôsledku magnetická indukcia B.[1] Závislosti magnetickej indukcie B alebo magnetizácie M od intenzity magnetického poľa H sa nazývajú **magnetizačné krivky** a poskytujú plnú informáciu o technických vlastnostiach feromagnetík. Experimentálne snímanie magnetizačných kriviek opíšeme inde, tu sa pokúsime o ich fyzikálnu interpretáciu.

Na *obr. 8.11* je schematicky ilustrovaná zmena doménovej štruktúry feromagnetika v procese jeho prvotného magnetovania. Zodpovedajúca závislosť zobrazená na obrázku je magnetizačná krivka $M – H$, **krivka prvotnej magnetizácie**. Závislosť M od H, je silne nelineárna a formálne ju možno zapísať v tvare

$$M = M(H)$$

Magnetizujúce pole H sa ovláda magnetizujúcim prúdom. Priebeh magnetickej indukcie B je potom tiež daný formálnym vzťahom

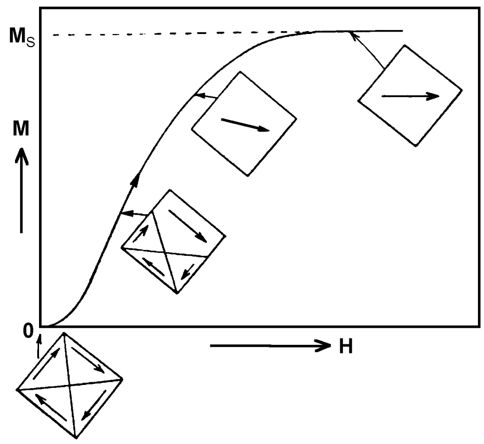
$$B = \mu_0 H + \mu_0 M(H) \tag{8.60}$$

Pre feromagnetikum je charakteristické, že prvý člen $\mu_0 H$ na pravej strane je vo väčšine prípadov v oblasti technického sýtenia (veľkých zmien magnetizácie podmienených

[1] Budeme predpokladať, že makroskopické vektory $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{H}$ vo feromagnetiku ležia pozdĺž jednej priamky, a v ďalšom budeme udávať iba ich absolútne hodnoty.

magnetizačným prúdom) zanedbateľný a celá magnetická indukcia je daná druhým členom $\mu_0 M(H)$, ktorý je veľký a silne nelineárny. Možno teda približne napísať

$$B \approx \mu_0 M(H) \tag{8.61}$$



Obr. 8.11

Krivka na *obr. 8.11* je teda súčasne obrazom závislosti B od H. Vráťme sa však na začiatok závislosti do bodu 0. V tomto bode má feromagnetická vzorka formálne štyri rovnaké domény, ktorých magnetické momenty sa navzájom rušia, teda $M = 0$ a aj $B = 0$. So zvyšovaním H sa domény postupne "zlievajú" (odborne sa to nazýva "posuv doménových stien"), až v celej vzorke zostane iba jedna doména, ktorá sa nakoniec plne natočí do smeru poľa H. V tom okamihu je proces technického sýtenia vzorky ukončený, magnetizácia dosahuje hodnotu technického nasýtenia M_s a ďalej nerastie. Pre ilustráciu možno uviesť, že v typických feromagnetických materiáloch sa hodnota indukcie nasýtenia B ~ 1,5 T dosiahne v poli H niekoľkých stoviek A/m, ktoré by vo vákuu alebo v paramagnetiku, resp. diamagnetiku, vytvorilo indukciu len rádovo 10^{-4} T.

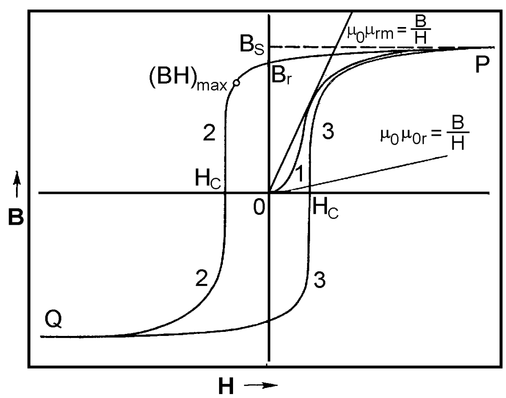
Po skončení technického sýtenia je ďalší rast magnetizácie v materiáli spojený už iba s orientáciou atómových alebo iónových momentov, ktoré v dôsledku chaotického tepelného pohybu ešte neboli zorientované do smeru M, teda proces podobný ako v paramagnetikách. Takáto magnetizácia je fyzikálna a možno ju ďalej zvyšovať znižovaním teploty k veľmi nízkym hodnotám. Končí sa teoreticky pri teplote absolútnej nuly. Nárast M touto procedúrou je však tak malý, že v praktických aplikáciách feromagnetík nehrá žiadnu úlohu. Hodnota M_s na magnetizačnej krivke nezostane konštantná, ale bude mierne narastať.

Magnetická indukcia B v oblasti nasýtenia je daná predovšetkým veľkou hodnotou $\mu_0 M_s$ a malým príspevkom $\mu_0 H$. Ak sa H bude ďalej zvyšovať, bude nepatrne a lineárne narastať príspevok $\mu_0 H$ a magnetizácia M rastie v tej miere, v ktorej ešte H môže ovplyvniť orientáciu atómových momentov.

8.4.1 Hysterézna slučka

Obráťme teraz smer magnetizácie a znižujme hodnotu H. Objavíme pri tom ďalšiu zvláštnosť feromagnetizmu, že magnetizácia M, prípadne magnetická indukcia B, nebudú pri spätnom chode sledovať krivku prvotnej magnetizácie.

Na *obr. 8.12* je znázornená závislosť magnetickej indukcie B vo vzorke od intenzity H, ak sa vzorka magnetuje cyklicky z bodu P do bodu Q a naspäť do bodu P. Krivka 1 zodpovedá krivke prvotnej magnetizácie vzorky od nuly až do stavu nasýtenia B_s. Pri znižovaní hodnoty H k nule klesá magnetická indukcia po novej magnetizačnej krivke 2 a po dosiahnutí $H = 0$, keď sa prúd vo vinutí rovná nule, je vo vzorke **zvyšková (remanentná) indukcia** B_r, ktorá môže byť ešte stále blízka hodnote saturácie B_s. V tejto situácii by sme mohli z toroidu odstrániť vinutie a mali by sme kruhový permanentný magnet. Ak sa teraz zmení smer magnetizačného prúdu a H sa bude zvyšovať v zápornom smere, bude indukcia klesať po krivke 2 k nulovej hodnote. Tú dosiahne, keď je intenzita poľa $H = H_c$. Je to **koercitívna intenzita**, pri ktorej vo vzorke zanikne predchádzajúca magnetická indukcia. Permanentné magnety musia mať vysokú koercitívnu intenzitu, aby bol magnet odolný proti demagnetizovaniu. Ďalšie zvyšovanie H v opačnom smere vedie k nárastu indukcie do saturácie, ale v opačnom smere. Ak sa v bode Q smer chodu H znovu zmení, bude indukcia rásť pozdĺž krivky 3 až do východiskovej začiatočnej saturácie v bode P. Celá uzavretá krivka 2 – 3 sa nazýva hysterézna slučka. Vidno z nej, že zmeny magnetickej indukcie B vo feromagnetiku zaostávajú za zmenami magnetujúceho poľa H.



Obr. 8.12

Závislosť prvotnej magnetizácie a s ňou spojená závislosť indukcie od intenzity magnetického poľa sa často vyjadrujú kontradikčnými vzťahmi

$$M = \chi H \approx \mu_r H$$

resp.

$$B = \mu_0 \mu_r H \tag{8.62}$$

Všetka nelinearita materiálu je teraz skrytá v relatívnej permeabilite μ_r, ktorá je zložitou funkciou H. Z posledných dvoch výrazov vyplýva, že

$$\mu_r \approx \frac{M}{H} \tag{8.63}$$

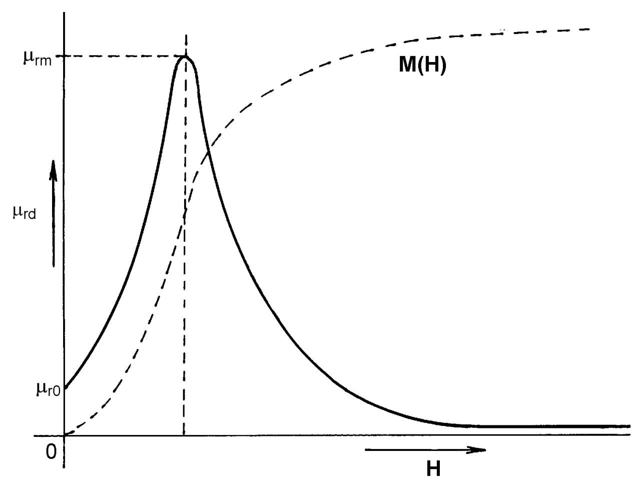
alebo

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} \tag{8.64}$$

Na *obr. 8.12* sú znázornené dve priamky, ktorých smernice $\mu_0\mu_r = B/H$ udávajú hodnoty μ_r. Plochá priamka dáva začiatočnú minimálnu hodnotu relatívnej permeability μ_{0r} v bode 0 krivky 1, druhá, strmá priamka, udáva permeabilitu v bode jej dotyčnice ku krivke 1. Je to maximálny pomer B/H, a teda v tomto bode je maximálna aj permeabilita μ_{rm}. Pri ďalšom zvyšovaní H bude μ_r klesať ku hodnote 1.

Je zrejmé, že v mnohých dynamických aplikáciách feromagnetík, keď sa hodnoty H a B menia v malých intervaloch, takto zavedená relatívna permeabilita neodráža zodpovedajúco vlastnosti materiálu. Pre takéto použitie feromagnetík treba zaviesť pojem diferenciálnej (dynamickej) permeability, definovanej výrazom

$$\mu_{rd} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H} \tag{8.65}$$

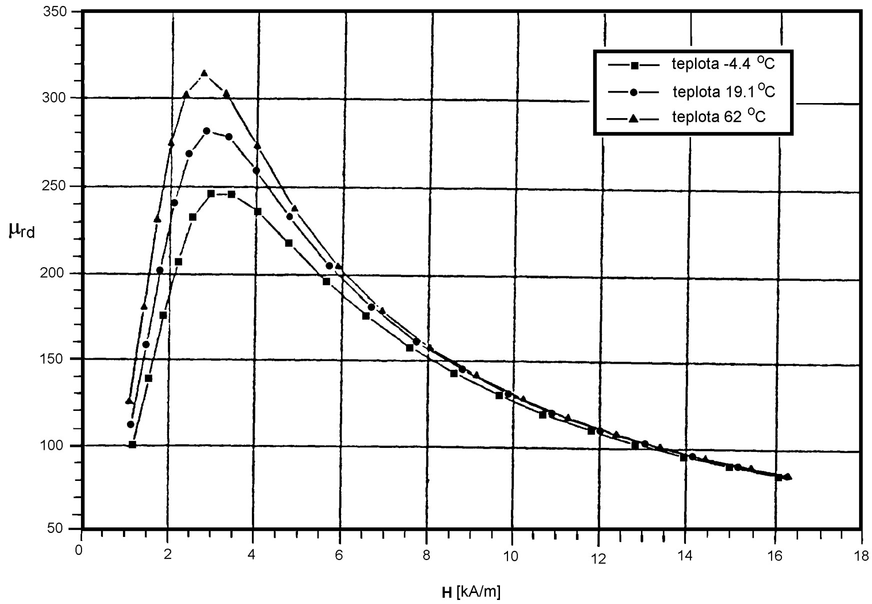


Obr. 8.13

Jej hodnotu možno dostať grafickým alebo numerickým derivovaním krivky 1 na *obr. 8.12*. Závislosť μ_{rd} od H je znázornená na *obr. 8.13*. Začína pri hodnote blízkej nule, prechádza maximom pri maximálnej strmosti krivky 1 a potom klesá k nule. Začiatočná hodnota permeability μ_{r0} je tiež daná výrazom (8.65). Pre čisté železo maximum μ_{rm} dosahuje hodnôt blízkych 10^4. Na *obr. 8.14* sú znázornené experimentálne získané závislosti μ_{rd} od magnetizujúceho poľa H, pre rôzne teploty v stavebnej oceli.[1]

[1] Závislosti na *obr. 8.14* až *8.16* boli získané pri experimenálnom skúmaní magnetoelastického javu v stavebnej oceli na Katedre rádiofyziky MFF UK Bratislava (Jaroševič, A. Magnetoelastic Method of Stress Measurement in Steel, J. Holnicki-Szulc and J. Rodellar (eds.), Smart Structures, 107-114).

Zobrazená hysterézna slučka na *obr. 8.12* je v skutočnosti iba limita tých slučiek, ktoré by vznikli, ak by sa vzorka magnetizovala neúplne, t. j. magnetizácia a indukcia by nedosahovali saturačných hodnôt. Na *obr. 8.15* je zobrazená dynamicky snímaná závislosť indukcie B od intenzity H v stavebnom železe tak, že magnetická intenzita sa menila periodicky a jej amplitúda sa zväčšovala z nulovej hodnoty až do stavu technického nasýtenia. Magnetizácia je nereverzibilná a krivka sa nikde nepretína.



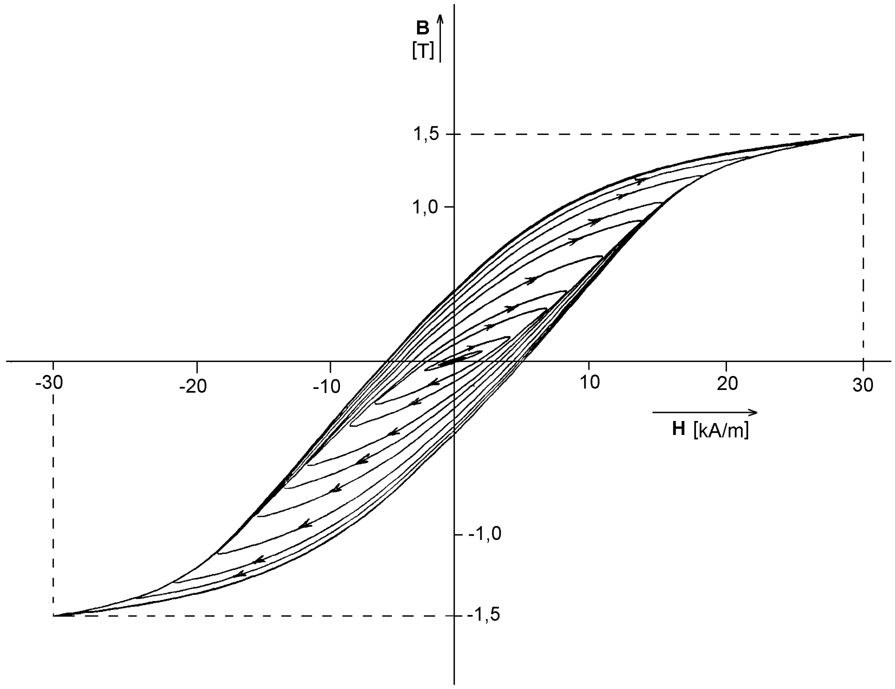
Obr. 8.14

Zavedené permeability nemajú veľkú praktickú hodnotu, pretože zriedkakedy sa pracuje s feromagnetickým materiálom v oblasti jeho krivky prvotnej magnetizácie. Častejšie sa materiál magnetuje striedavým poľom väčšej alebo menšej amplitúdy a magnetizácia prebieha pozdĺž "minoritných" hysteréznych slučiek posadených na istú statickú hodnotu intenzity alebo indukcie. Strmosť týchto slučiek je menšia ako strmosť krivky prvotnej magnetizácie. Tieto slučky možno vidieť na *obr. 8.16* a vznikajú tak, že hodnota intenzity sa v nejakom bode vráti späť o hodnotu ΔH_1, resp. ΔH_2. Magnetická indukcia sa týmto vráti o hodnotu ΔB_1, prípadne o ΔB_2. Prírastky $\Delta B/\Delta H$ definujú inkrementálnu permeabilitu[1]

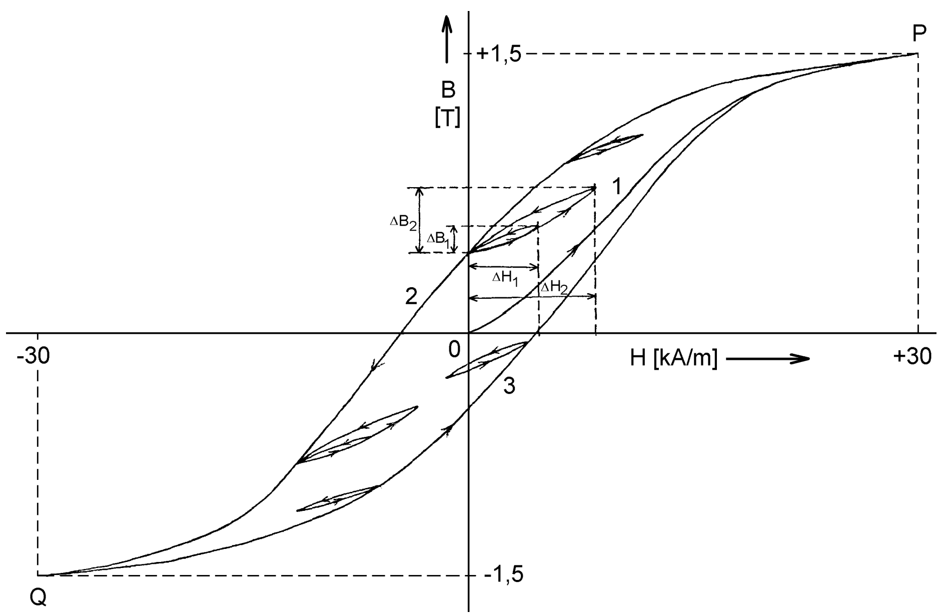
$$\mu_{ink} = \mu_{rv} + \mu_{irv} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\Delta B}{\Delta H} \tag{8.66}$$

kde μ_{rv} je reverzibilná (vratná) a μ_{irv} je ireverzibilná (nevratná) časť inkrementálnej permeability. Pre malé ΔH nenastávajú nevratné zmeny v magnetickej doménovej štruktúre a μ_{ink} sa rovná μ_{rv}. Práve táto inkrementálna permeabilita určuje napr. indukčnosť tlmiviek s feromagnetickým jadrom.

[1] Jiles, D. C.: Introduction to Magnetism and Magnetic Materials, Chapman & Hall 1995



Obr. 8.15



Obr. 8.16

Ak je feromagnetický materiál podrobený premagnetizovávaniu, je tento proces spojený so spotrebou energie zdroja magnetizačného prúdu. Môžeme to ukázať na magnetizovaní feromagnetického toroidálneho prstenca, na ktorom je toroidálne navinutá cievka s N závitmi (pozri napríklad *obr. 8.4*). Ak je stredná dĺžka prstenca l, potom prúd I v cievke je viazaný s intenzitou magnetického poľa H podľa Ampérovho zákona vzťahom

$$I = \frac{Hl}{N}$$

V prípade, že sa prúd s časom mení, bude sa meniť aj intenzita magnetického poľa v prstenci a následne aj magnetická indukcia B. V dôsledku takejto zmeny bude sa v prstenci s časom meniť indukčný tok Φ a na svorkách cievky vznikne indukované protinapätie veľkosti

$$U_{ind} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = NS\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

kde S je prierezová plocha prstenca. Súčin prúdu a indukovaného napätia udáva elektrický výkon P zdroja, s ktorým sa jeho energia W_e spotrebuje na magnetizáciu prstenca, teda

$$P = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t} = IU_{ind} = SlH\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

Ak označíme $Sl = \tau$ objem prstencovej feromagnetickej vzorky, potom malá zmena magnetizačnej energie je daná výrazom

$$\mathrm{d}W_e = P\mathrm{d}t = \tau H\mathrm{d}B$$

a objemová hustota tejto energie

$$\mathrm{d}W = \frac{\mathrm{d}W_e}{\tau} = H\mathrm{d}B$$

Integráciou týchto príspevkov po uzavretej hysteréznej slučke z bodu Q ($-B_{max}$) na *obr. 8.12* do bodu P ($+B_{max}$) a späť do bodu Q dostaneme celkové energetické straty (hysterézne straty) na jednotku objemu a na jeden magnetizačný cyklus

$$W = \oint_{-B_{\max}}^{+B_{\max}} H\mathrm{d}B \qquad [\mathrm{J.m^{-3}}] \tag{8.67}$$

Hodnota integrálu (8.67) je daná práve plochou hysteréznej slučky v jednotkách B a H. Hysterézne straty sú väčšie u magneticky tvrdých materiálov, ktoré majú široké hysterézne slučky, oproti stratám v magneticky mäkkých materiáloch, ktorých slučky sú úzke. To je v súhlase s tým, čo sme už povedali o fyzikálnych vlastnostiach magneticky tvrdých a mäkkých materiálov. Keďže slučky sú cyklované raz za periódu, hysterézne straty rastú lineárne s frekvenciou prúdu.

Okrem hysteréznych strát vo feromagnetických materiáloch vznikajú pri striedavom magnetovaní aj straty spojené s vírivými prúdmi, ktoré boli analyzované v časti 7.4. Tam bolo tiež povedané, aké opatrenia treba urobiť na ich zníženie. Problém vírivých prúdov neexistuje vo feritoch, ktoré sú nevodivé.

8.4.2 Magnetostrikcia a magnetoelastický jav

Proces magnetizovania feromagnetík je spojený so zmenami ich lineárnych rozmerov a objemu. Tento jav sa nazýva magnetostrikcia. Pozoroval ju už v roku 1841 anglický fyzik James P. Joule[1] (1818 – 1889), k jeho podrobnejšiemu skúmaniu však došlo až v päťdesiatych rokoch tohto storočia. Ukazuje sa, že vo feromagnetickej látke ochladenej pod Curieho teplotu T_C vzniknú okrem spontánnej magnetizácie aj spontánne mriežkové mechanické napätia, ktoré sa nazývajú spontánna magnetostrikcia. Mriežkové deformácie spôsobené "feromagnetickým poriadkom" sú podľa Joula zdrojom rozmerových zmien feromagnetika. Tak, ako sa pod účinkom magnetizujúceho poľa mení smer magnetizácie, mení sa aj smer mriežkových deformácií. Zmena lineárnych rozmerov feromagnetika sa vyjadruje saturačnou magnetostrikčnou konštantou λ_{si}, ktorá je mierou relatívneho predĺženia alebo skrátenia i-tého rozmeru vzorky pri jej zmagnetizovaní od nuly až po stav jej magnetickej saturácie. Typické hodnoty λ pozdĺž kryštalografických osí sú[2]

pre Fe	$\lambda_{100} = 20{,}7.10^{-6}$	a	$\lambda_{111} = 21{,}2.10^{-6}$
pre Ni	$\lambda_{100} = -45{,}9.10^{-6}$	a	$\lambda_{111} = -24{,}3.10^{-6}$

S magnetostrikciou sú spojené mnohé javy, ktoré sa prejavujú zmenou tvaru hysteréznej slučky, a ktoré vplývajú na magnetický príspevok k voľnej energii, resp. ovplyvňujú také technologické parametre látky, ako sú magnetické straty a i. Dnes sú známe materiály, ktorých magnetostrikčná konštanta λ_{si} dosahuje hodnôt až 1600.10^{-6}. Na princípe magnetostrikcie sa vyrábajú magnetostrikčné filtre a hyperzvukové meniče. Magnetostrikcia sa dá využiť v spojení s optickými metódami na veľmi presné meranie magnetickej indukcie (až do presnosti rádu pT = 10^{-12} T).

K magnetostrikcii obrátený jav dostal názov magnetoelastický jav. Mechanické napätia pôsobiace na zmagnetované feromagnetikum ovplyvnia magnetické parametre materiálu (jeho magnetizáciu, magnetické straty a i.), čo sa tiež prejaví na tvare hysteréznej slučky, teda na magnetizačných krivkách. Dnes sú vyvinuté vysokocitlivé a presné metódy merania zmien týchto magnetických parametrov, čo spätne umožňuje nedeštruktívne merať mechanické napätia v rôznych častiach strojných zariadení, stavebných konštrukcií, v prostriedkoch cestnej, železničnej a leteckej dopravy a i.[3] Nezanedbateľný je aj vedecký prínos poznávania takých štrukturálne zložitých materiálov, ako sú feromagnetiká.

---

[1] Joule, J. P., Sturgeon's Annals of Electricity 8, 219 (1842); Joule, J. P., Phil. Mag. **30**, 76 (1847)

[2] Lee, E. W., Rep. Prog. Phys. **18**, 184 (1955)

[3] Jaroševič, A., Fabo, P., Kyška, R., Hatala, M. (1992) Vorspannungmessungen an Baukonstruktion, Braunschweiger Bauseminar, Braunschweig, Germany November 1992, Heft **97**, 71-82

8.4.3 Klasifikácia feromagnetických materiálov a ich výroba

Feromagnetické materiály sa podľa technického použitia delia na dve skupiny:

1. **magneticky mäkké materiály**, ktoré majú vysokú permeabilitu, ľahko sa magnetizujú aj demagnetizujú, to znamená, že ich koercitívna intenzita je relatívne nízka a hysterézna slučka je úzka;

2. **magneticky tvrdé materiály** s relatívne nízkou permeabilitou, ktoré sa ťažko magnetizujú aj demagnetizujú, majú teda vysokú koercitívnu intenzitu a širokú, takmer obdĺžnikovú hysteréznu slučku.

Látky z prvej skupiny sa používajú hlavne pri výrobe elektrických motorov a transformátorov, z druhej pri výrobe permanentných magnetov. V magneticky mäkkých feromagnetických materiáloch sa doménové steny posúvajú a preklápajú pomerne ľahko, takže magnetizácia sa môže značne meniť pri malých zmenách magnetizujúceho poľa. Taký materiál musí byť veľmi čistý a čo najhomogénnejší, bez nepravidelností v kryštalickej štruktúre. Musí byť tiež zbavený všetkých vnútorných mechanických napätí. Technológia spracovania materiálov spočíva v žíhaní materiálu a v jeho pomalom ochladzovaní tak, aby sa atómy látky usadili v zodpovedajúcich polohách kryštalickej mriežky.

Na druhej strane, magneticky tvrdé materiály musia mať pevné doménové steny, odolné proti posúvaniu a rotácii, čo sa dá dosiahnuť vytvorením mriežkových porúch a nečistotami. Feromagnetické materiály s prísadami sa nahrievajú na vysokú teplotu a prudko sa v oleji ochladzujú, čím sa v štruktúre vytvoria potrebné vnútorné mechanické napätia. Zásadný obrat vo výrobe tvrdých feromagnetických materiálov nastal v roku 1932, keď japonský technológ T. Mishima[1] tepelným opracovaním zliatiny železa, niklu, hliníka a kobaltu pripravil tvrdý feromagnetický materiál známy pod názvom ALNICO (pozri tabuľku 12 a *obr. 8.18*). Tento materiál v jeho mnohých variáciách sa používa dodnes na výrobu permanentných magnetov.

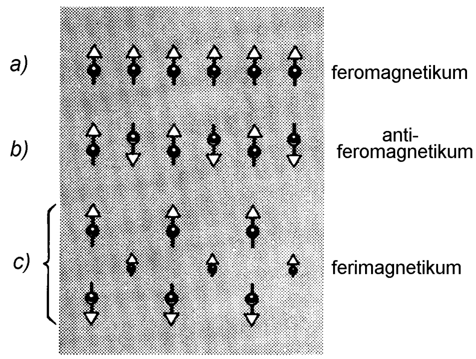
Permanentné magnety sa vyrábajú tiež zlisovaním veľmi jemných feromagnetických práškov. Ak sú častice prášku dostatočne malé, potom každá častica je jednou doménou bez vnútorných doménových stien. Magnet možno magnetizovať a demagnetizovať iba rotáciou magnetického momentu celej častice. Vhodným tvarom a vnútornou štruktúrou častíc sa dá dosiahnuť taká anizotropia vlastností, že rotácia magnetizácie je možná iba o 180°. To je spojené s vyššou koercitívnou intenzitou v materiále. Dobrý permanentný magnet vyžaduje prášky s vysokou saturačnou magnetizáciou M_s a usporiadané tak, aby "ľahké" smery magnetizácie boli paralelné. Vyžaduje sa tiež vysoká Curieho teplota.

S feromagnetizmom sú úzko spojené ďalšie dva už spomínané typy magnetizmu, a to antiferomagnetizmus a ferimagnetizmus. V antiferomagnetických látkach, akou je napr. MnO_2, už spomínaná výmenná väzba spôsobuje antiparalelné zoskupovanie magnetických momentov zobrazené na *obr. 8.17b* (pre porovnanie je na *obr. 8.17a* zobrazené zorientované feromagnetikum). Také látky vykazujú navonok veľmi malý výsledný magnetizmus. Ak sa nahrejú nad istú – **Néelovu teplotu**, výmenná väzba vymizne a látky sa stávajú paramagnetické.

Ferimagnetické látky, ktorých reprezentantom je železný ferit, obsahujú dva rôzne magnetické ióny (v danom prípade Fe^{2+} a Fe^{3+}). Výmenná väzba vedie k takému usporiadaniu iónov, aké je znázornené na *obr. 8.17c*. Vonkajšie magnetické vlastnosti ferimagnetík ležia medzi vlastnosťami feromagnetík a antiferomagnetík. Pri zvyšovaní teploty

[1] Mishima, T., U.S. Patent 2 027 966, Ohm, **19,** 353 (1932)

ferimagnetika výmenná väzba pri istej teplote vymizne a látka stratí makroskopické magnetické vlastnosti. Ferimagnetiká majú jednu vynikajúcu elektrickú vlastnosť, že sú prakticky nevodivé, sú to teda veľmi dobré dielektriká. Táto ich vlastnosť ich predurčuje na použitie v striedavých, hlavne vysokofrekvenčných magnetických poliach, bez nebezpečia vzniku indukovaných prúdov a nežiaducich Jouleových strát vo ferimagnetiku.



Obr. 8.17

V tabuľke 11 je uvedených niekoľko vybraných magneticky mäkkých materiálov s ich zložením a magnetickými parametrami. Všetky, okrem feritov, sú pripravované žíhaním pri teplotách v rozsahu 800 °C až 1 300 °C, supermalloy vo vodíkovej atmosfére, a presne kontrolovaným ochladzovaním. Permalloy a supermalloy sa po magnetickej príprave nesmú mechanicky opracovávať (napr. ohýbať). Sú to mimoriadne magneticky mäkké materiály. K ich magnetickému nasýteniu dochádza už pri desatinách A/m. Používajú sa v malých jadrách elektromagnetických mechanizmov (nízkoprúdových transformátoroch, magnetických zosilňovačoch, krokových motoroch a i.) pracujúcich na nízkych frekvenciách do rádu 10 kHz pri slabých magnetických poliach.

Magneticky mäkké ferity sú pripravované spekaním kysličníkov železa s prímesami a majú úzku, takmer obdĺžnikovú hysteréznu slučku. Sú to vlastne keramiky a ich rezistivita je veľmi vysoká.

Magneticky tvrdé materiály sa takmer výlučne používajú na výrobu permanentných magnetov. Permanentné magnety umožňujú získať stabilné magnetické polia, často s väčšou indukciou a pri menšom objeme ako pomocou elektromagnetov.

V tabuľke 12 sú uvedené parametre niektorých typických magneticky tvrdých materiálov. Niekoľko závislostí B – H v druhom kvadrante hysteréznych slučiek, nazývaných demagnetizačné krivky (pozri *obr. 8.12*), pre vybrané materiály je zobrazených na *obr. 8.18*.[1]

[1] Dáta (s výnimkou Nd-Fe-B magnetu) sú prevzaté z knihy Nesbitt, E. A., Wernick, J. H.: Rare Earth Permanent Magnets, Bell Laboratories Murray Hill, New Jersey, Academic Press New York and London 1973

Tabuľka 11

Magneticky mäkké materiály

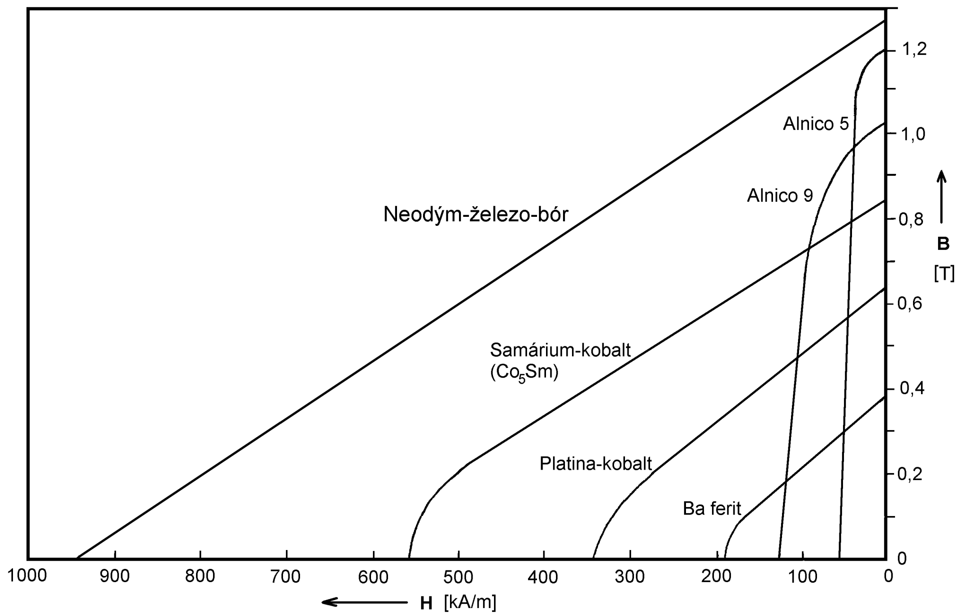
Názov – zloženie (%)	B_s[T]	μ_{ro}	μ_{rm}	H_c[A/m]	ρ[1] [μΩ.cm]
Technické železo – armco (prímesí 0,2, zvyšok Fe)	2,16	150	5 000	80	10
Kremičité železo (4 Si, zvyšok Fe)	1,97	500	7 000	40	60
Permalloy (68 Ni, zvyšok Fe)	1,30	1 200	$2{,}5.10^3$	2,4	20
Supermalloy (5 Mo, 79 Ni, zvyšok Fe)	0,79	10^5	10^6	0,16	60
Permendur V (49 Co, 2 V, zvyšok Fe)	2,40	800	4 500	140	26
Ni-Zn ferit (48,5 Fe_2O_3, 35,5 ZnO, 16,0 NiO)	0,1965	5 000	7 560	4,0	10^8
Mn-Mg ferit (37,8 Fe_2O_3, 28,1 MgO, 34,1 MnO)	0,19	4,8	500	110	10^{12}

[1] ρ je rezistivita materiálov

Tabuľka 12

Magneticky tvrdé materiály

Názov – zloženie (%)	B_r [T]	H_c [kA/m]	$(BH)_{max}$ [kJ/m^3]
Chrómová oceľ (3,5 Cr, 1 C, 0,5 Mn, zvyšok Fe)	0,95	5,30	2,30
Kobaltová oceľ (40Co, 0,7 C, 5 W, 4,25 Cr, zvyšok Fe)	1,0	19,30	8,20
Alnico 5 (8 Al, 15 Ni, 24 Co, 3 Cu, zvyšok Fe)	1,2	57,30	39,80
Alnico 9 (7Al, 15Ni, 35 Co, 4 Cu, 5 Ti, zvyšok Fe)	1,04	127,40	67,60
Platina – kobalt (76,7 Pt, 23,3 Co)	0,6	342,30	75,60
Lisovaný Fe mikroprášok	0,45	37,80	6,80
Báryový ferit – orientovaný ($BaO.6Fe_2O_3$)	0,37	195,50	27,90
Samárium – kobalt (prášok Co_5Sm, spekanie 60 hm. % Sm + 40 hm. % Co)	0,84	557,00	127,30
Sintrovaný Nd-Fe-B magnet	1,27	940,00	300,00



Obr. 8.18

8.4.4 Permanentné magnety

Popri remanentnej indukcii B_r a koercitívnej intenzite H_c sa materiál hodnotí pomocou akostného faktoru $(BH)_{max}$, ktorý zodpovedá bodu na hysteréznej slučke v jej druhom kvadrante (pozri *obr. 8.12*). Tento bod udáva maximálnu hustotu magnetickej energie v zmagnetovanom materiále. Pre hlbšie pochopenie tohto pojmu treba urobiť všeobecnejšiu úvahu o magnetických poliach produkovaných permanentnými magnetmi. Permanentný magnet, podobne ako elektromagnet, slúži na produkciu silných magnetických polí v definovanom voľne prístupnom objeme v priestore magnetu, napr. v štrbine medzi pólmi magnetu na *obr. 8.19* (uzavretý železný toroid zmagnetovaný pozdĺž jeho kruhovej osi by asi nemal veľký praktický význam). V praxi požadované magnetické indukcie bývajú v rozsahu 0,1 až 10 T v objeme, ktorý sa mení od 10^{-4} m^3 až do mnohých kubických metrov, napr. vo veľkých urýchľovačoch alebo v zariadeniach vysokoteplotnej plazmy. Hustota energie magnetického poľa v štrbine magnetu je podľa odseku 7.7.1 daná výrazom

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_0.\boldsymbol{H}_0$$

a podobne v jadre magnetu

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}.\boldsymbol{H}$$

Energia magnetického poľa v štrbine magnetu je

$$\left(\frac{1}{2}B_0H_0\right)\tau_0$$

kde $\tau_0 = Sl_0$ je objem štrbiny. Predpokladá sa, že vektory $\boldsymbol{B}_0$ a $\boldsymbol{H}_0$ sú paralelné a pole nemá rozptyl. Energia štrbiny súvisí s magnetickou energiou magnetických momentov feromagnetika, teda s energiou magnetizovaného feromagnetika. Súvis energií možno získať jednoduchou úvahou. Z hraničných podmienok plynie, že na čelnej ploche S pólového nadstavca platí

$$B_0S = BS$$

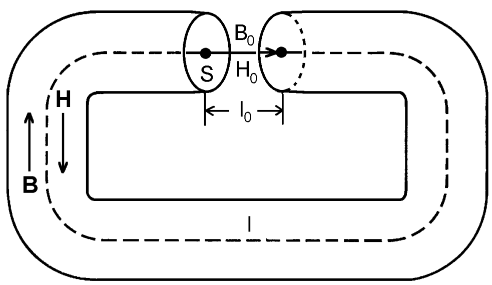
a pre uzavretú dráhu v magnete, vyznačenú čiarkovane, podľa Ampérovho zákona platí

$$\oint_l \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = H_0l_0 + Hl = 0$$

kde l_0 je časť dráhy v štrbine a l je dráha v jadre magnetu. Pravá strana rovnice sa rovná nule, pretože $I = 0$. Kombináciou posledných dvoch rovníc dostaneme

$$\left(\frac{1}{2}B_0H_0\right)\tau_0 = -\left(\frac{1}{2}BH\right)\tau \tag{8.68}$$

kde $\tau = Sl$ je objem jadra magnetu. Tento dôležitý vzťah udáva, že pri danom objeme τ magnetu bude energia v štrbine maximálna, ak súčin BH má maximálnu hodnotu.

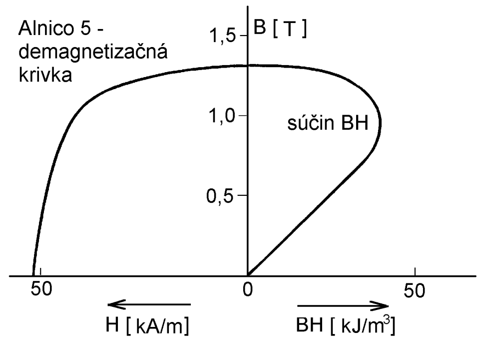


Obr. 8.19

Závislosť súčinu BH v magnete od indukcie B pre typický materiál Alnico 5 je znázornená na *obr. 8.20* spolu s **demagnetizačnou krivkou**. Vo vnútri magnetu má intenzita magnetického poľa H opačný smer ako indukcia B, preto je na pravej strane vzťahu (8.68) znamienko mínus. Veľkosť demagnetizačného poľa závisí od tvaru magnetu a šírky jeho štrbiny, ktoré musia byť zvolené tak, aby sa materiál nachádzal v bode, v ktorom je BH maximálne. Spravidla je tento bod blízky hodnote B_rH_c.

V praxi je energia magnetu vždy menšia ako hodnota daná výrazom (8.68) pretože magnet má vždy istý rozptyl indukcie. Najlepší tvar magnetu je taký, ktorý zaručuje, že súčin BH v každom jeho bode je blízky k maximálnej hodnote. Keďže súčin BH je pre materiál charakteristický, magnetická energia v štrbine je úmerná objemu magnetu.

Moderné magnetické materiály majú veľmi vysoký faktor $(BH)_{max}$ a vysokú koercitívnu intenzitu, čo vidieť z tabuľky 12 alebo z *obr. 8.18*. Takými sú najmä magnety na báze vzácnych zemín (napr. Co_5Sm). Vynikajúcim materiálom je aj zliatina Pt-Co, je však veľmi drahá, a preto sa používa iba na špeciálne účely (napr. na fokusáciu elektrónového zväzku v permaktrónoch a p.). Vývoj materiálov na permanentné magnety pokračuje. V roku 1985 prišli na trh sintrované vysokokvalitné magnety zloženia neodým-železo-bór s parametrami H_c = 940 kA/m a $(BH)_{max}$ = 300 kJ/m^3.[1] Tieto magnety predstavujú súčasnú špičku v technológii výroby magnetov.



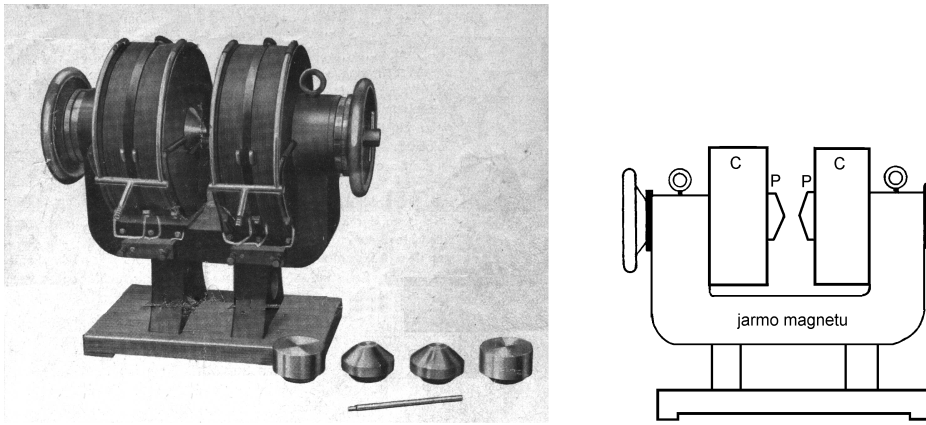
Obr. 8.20

8.4.5 Elektromagnety

Ak treba dosiahnuť magnetické pole väčšie, ako umožňujú permanentné magnety alebo sa vyžaduje možnosť meniť indukciu, používajú sa elektromagnety. Elektromagnet pozostáva z feromagnetického jadra a z vinutia s veľkým počtom závitov medeného drôtu, ktorým preteká elektrický prúd. Vinutia elektromagnetov s veľkými prúdmi sú často chladené vodou. Elektromagnetom možno dosiahnuť indukcie do cca 2,5 T. Indukcia je obmedzená saturačnou magnetizáciou M_s použitého feromagnetika, z ktorého je vyrobené jarmo elektromagnetu. Na výrobu jarma elektromagnetu sa používajú magneticky mäkké materiály s vysokou hodnotou M_s. Pólové nadstavce elektromagnetu (feromagnetické zakončenie magnetického obvodu smerom do štrbiny) sú vyrobené z ušľachtilých homogénnych mäkkých ocelí (napr. permendur, pozri tab. 11). Na *obr. 8.21* je znázornený laboratórny elektromagnet typu Weiss, s premennou vzdialenosťou pólových nadstavcov *P* a vinutím rozdeleným do dvoch veľkých cievok *C*.

Pozrime sa teraz, ako možno určiť magnetickú indukciu v štrbine elektromagnetu v závislosti od prúdu vo vinutí, od geometrie magnetu a magnetických vlastností jadra. Na *obr. 8.22* je znázornený jednoduchý elektromagnet pozostávajúci z mäkkého feromagnetického jadra podobného tvaru ako permanentný magnet na *obr. 8.19*, na ktorom je navinutá cievka s *N* závitmi. Budeme predpokladať, že štrbina magnetu je taká úzka, že je splnená podmienka $l_0 \ll l$, okrem toho priemer pólových nadstavcov $D \gg l_0$. V takom prípade magnetická indukcia B_0 aj B je kolmá na čelá pólových nadstavcov a jej rozptyl

[1] Magnetic Development Ltd, Magnet House, Blackworth Industrial Estate, Highworth, Swindon, UK

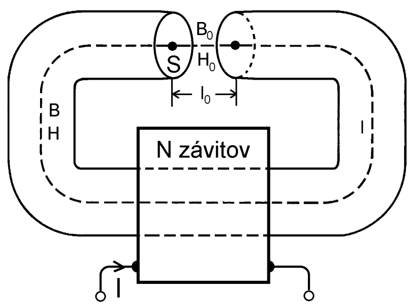


a) *b)*

Obr. 8.21

zo štrbiny možno zanedbať (pole indukcie B v štrbine i v jadre je homogénne a jadro tvorí tokovú trubicu). Pre uzavretú dráhu po prerušovanej čiare cez jadro a štrbinu možno podľa Ampérovho zákona písať

$$\oint_{l_C} \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = H_0 l_0 + Hl = NI \tag{8.69}$$



Obr. 8.22

kde $l_c = l_0 + l$ je celková dĺžka uzavretej dráhy, I je prúd vo vinutí elektromagnetu. Na čelách pólových nadstavcov je splnená hraničná podmienka pre normálové magnetické indukcie B a B_0, teda

$$B = B_0$$

V štrbine magnetu je vzduch, a preto tam platí

$$B_0 = \mu_0 H_0 = B$$

Ak v rovnici (8.69) dosadíme za H_0, dostaneme

$$\frac{l_0}{\mu_0} B + lH = NI \tag{8.70}$$

V rovnici (8.70) sú dve neznáme B a H v jadre magnetu, ostatné veličiny sú známe. K riešeniu rovnice potrebujeme ďalší vzťah medzi B a H. Takýto analytický vzťah však neexistuje. Ak sa možno uspokojiť s nejakou strednou konštantnou permeabilitou $\mu_0\mu_r =$ $= B/H$ na nejakom intervale magnetovania materiálu, potom týmto vzťahom je

$$B = \mu_0\mu_r H \tag{8.71}$$

a riešenie sústavy rovníc (8.70) a (8.71) je algebraické tvaru

$$B = \mu_0\mu_r H = \frac{\mu_0\mu_r NI}{l_0\mu_r + l} = B_0 \tag{8.72}$$

a

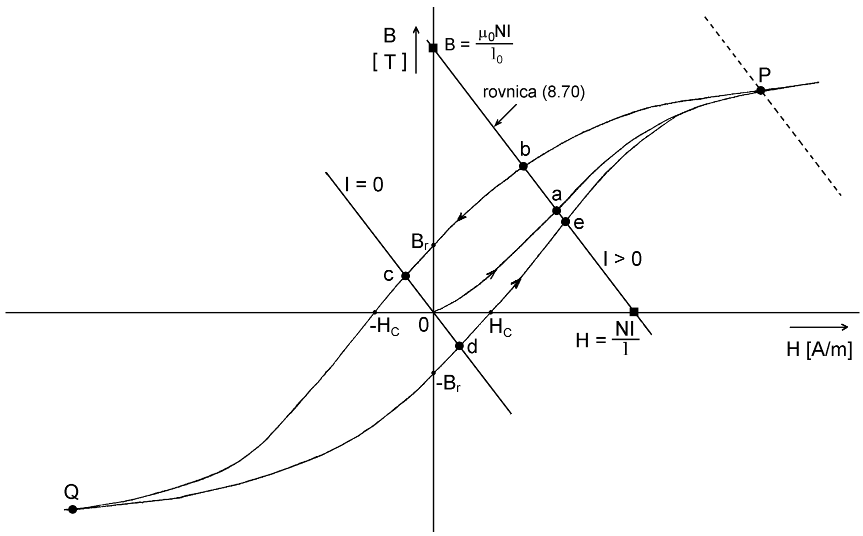
$$H = \frac{B}{\mu_0\mu_r} = \frac{NI}{l_0\mu_r + l} \tag{8.73a}$$

V štrbine je intenzita magnetického poľa

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\mu_r NI}{l_0\mu_r + l} \tag{8.73b}$$

Magnetická indukcia v štrbine a v jadre elektromagnetu je teda rovnaká ($B_0 = B$), zatiaľ čo intenzita magnetického poľa v štrbine je μ_r-krát väčšia ako v jadre ($H_0 = \mu_r H$).

V prípade, ak sa vyžaduje vyššia presnosť, funkčným vzťahom medzi B a H v jadre sú magnetizačné krivky, resp. hysterézna slučka a problém poľa v jadre a v štrbine treba riešiť graficky. Na *obr. 8.23* je znázornená hysterézna slučka v súradniciach $B - H$ a lineárny vzťah (8.70) medzi B a H pre konštantný kladný prúd I. Je to priamka so smernicou $-l/l_0$. Možnými riešeniami nášho problému sú všetky body, v ktorých sa priamka pretína so všetkými možnými magnetizačnými a hysteréznymi krivkami. Na obrázku je znázornená krivka prvotnej magnetizácie a limitná hysterézna slučka získaná premagnetovaním jadra do nasýtenia. Ak je jadro práve vyrobené, bez magnetickej predhistórie, pri prvotnom zvýšení prúdu na hodnotu I vzrastie H a B v jadre na hodnotu určenú priesečníkom a. Ak zvýšime prúd dostatočne vysoko, tak aby sa materiál dostal do nasýtenia v bode P, a potom ho znovu znížime na hodnotu I, dostaneme sa do bodu b, ktorému zodpovedá iná dvojica B a H. Ak prúd znížime na nulu, bude v materiále a v štrbine magnetu magnetická indukcia daná hodnotou B v bode c. Je to bod, v ktorom by sme vinutie z magnetu mohli odstrániť a mali by sme slabý permanentný magnet s hodnotou indukcie $B < B_r$ a zodpovedajúcim demagnetizačným poľom $-H$. Ak by mal magnet nulovú štrbinu $l_0 = 0$, indukcia v jadre by bola B_r a intenzita $H = 0$. Ak zmeníme smer prúdu a budeme jeho hodnotu zvyšovať, dostaneme sa do nasýtenia v opačnom smere v bode Q. Znížením prúdu na nulu sa dostaneme do bodu d, keď je elektromagnet znovu permanentným magnetom, ale opačne magnetovaným. Ďalším zvýšením prúdu na pôvodnú začiatočnú hodnotu I sa dostaneme do bodu e, ktorému zodpovedá ďalšia možná dvojica hodnôt B a H. Vidíme, že rôznym spôsobom magnetovania jadra môžeme v elektromagnete dosiahnuť množstvo hodnôt indukcií pri tom istom prúde. Magnetizácia a indukcia je jednoznačná iba v oblastiach nasýtenia nad bodmi P a Q. Možno si tiež všimnúť, že ak je prúd konštantný, magnetická indukcia je v istom rozsahu nepriamo úmerná šírke štrbiny.



Obr. 8.23

Na koniec tohto odseku sa treba ešte dotknúť otázky maximálnych magnetických indukcií, ktoré možno dosiahnuť v permanentných magnetoch a v elektromagnetoch s feromagnetickým jadrom. Tieto maximálne magnetické indukcie sú obmedzené maximálnou magnetizáciou v oblasti nasýtenia M_s a im zodpovedajúcim saturačným magnetickým indukciám $B_s \sim \mu_0 M_s$. Ako vidieť z tabuliek 11 a 12, neexistujú prirodzené ani pripravené feromagnetiká, ktoré by mali vyššie B_s ako cca 2,5 T, a to je aj medza najvyšších magnetických indukcií vo feromagnetikách. Ak treba vytvoriť vyššie magnetické indukcie, dá sa to teoreticky iba vo vzduchových cievkach, napr. vo vnútri solenoidu, v ktorom magnetická indukcia je (v prípade dlhého solenoidu) daná výrazom

$$B = \mu_0 nI$$

kde I je prúd v solenoide a n je počet závitov na jednotku jeho dĺžky. Magnetická indukcia v solenoide je priamo úmerná prúdu vo vinutí, ten je však obmedzený maximálnou prípustnou prúdovou hustotou, nad ktorou sa vinutie začne neprípustne zohrievať. Spravidla sa v solenoide práve z týchto dôvodov nedajú dosiahnuť také statické magnetické indukcie ako vo feromagnetoch. Možno v nich však dosiahnuť veľmi vysoké impulzné indukcie.

Vysoké statické magnetické indukcie, až cca 20 T, možno dosiahnuť v supravodivých magnetoch, ktorých podstatu tvorí supravodivý solenoid s veľkým prúdom udržiavaným veľmi nízkou teplotou supravodiča (pozri odsek 8.5).

8.4.6 Magnetické obvody

V prípade, keď je pre feromagnetický materiál prijateľné lineárne priblíženie dané výrazom (8.71), možno vzťah (8.69) prepísať do tvaru

$$\oint_{l_c} \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = NI = B\left(\frac{l_0}{\mu_0} + \frac{l}{\mu_0\mu_r}\right)$$

alebo

$$\oint_{l_c} \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = NI = \Phi\left(\frac{l_0}{\mu_0 S} + \frac{l}{\mu_0\mu_r S}\right) \qquad (8.74)$$

$\Phi = BS$ je indukčný tok prierezom S. Veličiny v poslednej zátvorke majú rozmer recipročného henry (H^{-1}) a svojou štruktúrou sa podobajú na výraz pre elektrický odpor úseku l vodiča s prierezom S, ak sa urobí zámena $\sigma \Leftrightarrow \mu$. Možno teda definovať veličinu

$$R_m = \frac{l}{\mu S} \qquad [\mathrm{H}^{-1}] \qquad (8.75)$$

ktorá sa nazýva **magnetický odpor** alebo **reluktancia** časti magnetického obvodu, ktorým tečie indukčný tok $\Phi = BS$. Prevrátená hodnota magnetického odporu $G_m = 1/R_m$ [H] sa nazýva **magnetická vodivosť**, alebo **permeancia**. V analógii s elektrickými obvodmi možno súčiny typu ΦR_m nazvať "magnetické napätie", a súčiny NI **magnetomotorické napätie** (*MMN*) $\mathscr{M}$ s jednotkou A.[1] Ľavá strana rovnice (8.74) je teda magnetomotorické napätie v magnetickom obvode

$$\mathscr{M} = \oint_{l_c} \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = NI \qquad [\mathrm{A}] \qquad (8.76)$$

ktoré pôsobí v uzavretom magnetickom obvode pozdĺž čiary l_c. Rovnicu (8.74) možno teda napísať v tvare

$$\mathscr{M} = \Phi(R_{m0} + R_m) = \Phi R_{mc} \qquad (8.77)$$

ktorý sa formálne podobá na Ohmov zákon pre uzavretý obvod. Rovnicu (8.77) odvodili v roku 1886 bratia J. a E. Hopkinson a po nich sa nazýva **zákon Hopkinsonovcov**. Ľubovoľne zložitý systém magnetických tokov možno na základe výrazu (8.77) modelovať elektrickou sieťou a pri formálnej analógii s Ohmovým zákonom využiť na riešenie metódy elektrickej obvodovej analýzy. Treba pri tom urobiť zámeny:

$$\text{EMN zdroja } \mathscr{E} \Leftrightarrow \text{MMN zdroja } \mathscr{M}$$

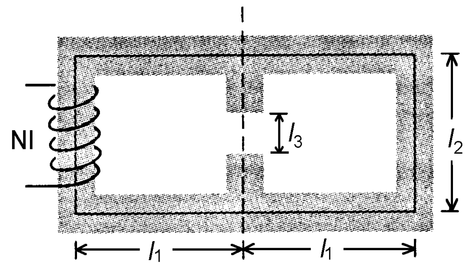
$$\text{elektrický odpor } R = \frac{l}{\sigma S} \Leftrightarrow \text{magnetický odpor } R_m = \frac{l}{\mu S}$$

[1] V MKSA sústave jednotiek bol jednotkou magnetomotorického napätia ampérzávit [Az] = [A], ktorý výstižne vyjadroval veľkosť veličiny NI. S týmto pojmom sa stretneme aj dnes vo výrobe transformátorov, tlmiviek alebo elektrických motorov. SI sústava však tento užitočný pojem a jednotku nepozná.

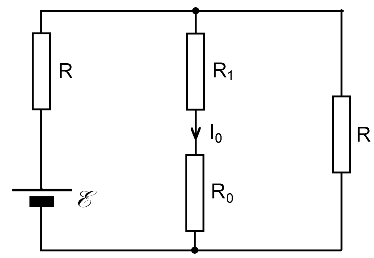
elektrický prúd $I \Leftrightarrow$ indukčný tok Φ

Na ilustráciu metódy môže poslúžiť nasledujúci príklad:

Na obr. 8.24 je znázornený magnetický obvod, pre ktorý sú dané tieto numerické údaje: počet závitov $N = 150$, *prúd vo vinutí* $I = 1$ A, *rozmery jadra* $l_1 = l_2 = 10$ cm, *dĺžka štrbiny* $l_3 = 1$ cm, *permeabilita materiálu* $\mu = 3\,000\mu_0$. *Treba vypočítať magnetickú indukciu v štrbine. Okrajové efekty a rozptyl magnetickej indukcie možno zanedbať.*



Obr. 8.24



Obr. 8.25

Riešenie: Magnetický obvod možno modelovať elektrickým zapojením podľa *obr. 8.25*, kde

$$\mathscr{E} \Leftrightarrow \mathscr{M} = NI$$

$$R \Leftrightarrow R_m = \frac{2l_1 + l_2}{\mu S} \qquad R_1 \Leftrightarrow R_{m\,1} = \frac{l_2 - l_3}{\mu S} \qquad R_0 \Leftrightarrow R_{m0} = \frac{l_3}{\mu_0 S}$$

Pre prúd I_0 odpormi R_1 a R_0 (ktoré modelujú magnetické odpory obidvoch pólových nadstavcov a štrbiny) platí

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R + 2R_1 + 2R_0}$$

takže analogický indukčný tok pólovými nadstavcami a štrbinou je

$$\Phi = BS = \frac{\mathscr{M}}{R_m + 2R_{m1} + 2R_{m0}}$$

alebo

$$B = \frac{3\,000\mu_0 NI}{2l_1 + 3l_2 - 2l_3 + 6\,000\, l_3} = 9{,}35.10^{-3}\ \mathrm{T}$$

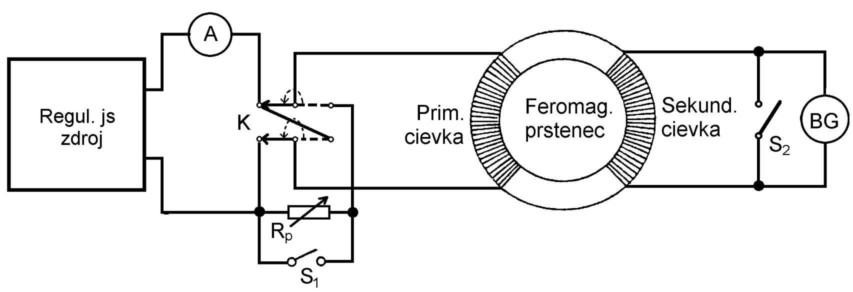
Treba si všimnúť, že v magnetických obvodoch najväčšie magnetické odpory majú neferomagnetické (vzduchové a iné) štrbiny, ktoré rozhodujúcim spôsobom obmedzujú indukčné toky. Naopak, feromagnetiká majú najmenšie odpory. Tak napr. v poslednom výraze možno prvé tri členy v menovateli (súvisiace s odpormi R_m a R_{m1}) zanedbať, čo podstatne neovplyvní výsledok. Magnetické odpory R_m a R_{m1} sú totiž oveľa menšie ako odpor R_{m0}.

8.4.7 Experimentálne snímanie magnetizačných kriviek a hysteréznej slučky

8.4.7.1 Balistická metóda

Pre zobrazenie magnetizačných a hysteréznych kriviek materiálu treba určiť v jeho vnútri veličiny B a H v závislosti od magnetizujúceho prúdu a potom závislosť B na H znázorniť graficky. Na tieto účely sa ako vzorka feromagnetického materiálu najlepšie hodí tenký prstenec alebo toroid, ktorého stredný priemer je podstatne väčší ako rozdiel vonkajšieho a vnútorného priemeru. Ak je toroid magnetovaný pozdĺž jeho vytvárajúcej kružnice, neexistuje v ňom demagnetizujúce pole (nemá otvorené konce), a preto je tento tvar vzorky na meranie najvýhodnejší. Absolútne merania magnetizačných kriviek na toroidálnej vzorke robil už v roku 1873 americký fyzik H. A. Rowland.[1] Elektrické zapojenie na meranie je znázornené na *obr. 8.26*. Základným prvkom zapojenia je prstencová (toroidálna) vzorka, na ktorej je tesne a rovnomerne navinutá sekundárna cievka s veľkým počtom závitov N_s a na nej primárna magnetizačná cievka s N_p závitmi hrubšieho medeného drôtu. Primárna cievka sa cez komutátor K, premenný odpor R_p a ampérmeter A pripája k regulovateľnému jednosmernému napájaciemu zdroju. Regulovateľný zdroj umožňuje nastaviť ľubovoľný magnetizačný prúd I kontrolovaný ampérmetrom a komutátorom možno meniť smer prúdu v primárnej cievke. Ak primárnou cievkou tečie prúd I, v toroide je intenzita magnetického poľa

$$H = \frac{NI}{l}$$



Obr. 8.26

kde l je dĺžka stredovej kružnice prstenca. Spínačom S_1 možno meniť prúd v skokoch ΔI pri predchádzajúcom vhodnom nastavení hodnoty odporu R_p, a tým meniť aj intenzitu poľa o hodnotu ΔH. Pri komutácii prúdu sa mení H na $-H$, teda o $\Delta H = 2H$. K sekundárnej cievke je pripojený fluxmeter alebo balistický galvanometer BG kalibrovaný na meranie

[1] Rowland, H. A., Amer. Journ. of Science **30** (1878)

impulzného náboja. Kvôli ochrane možno galvanometer spínačom S_2 kedykoľvek skratovať. Princíp merania spočíva v tom, že každá zmena intenzity poľa ΔH v toroide vedie k zmene indukčného toku $\Delta\Phi$. Zmena $\Delta\Phi$ indukuje v sekundárnej cievke napätie a následne impulzný prúd I cez galvanometer. Galvanometer meria integrálny náboj

$$Q = \int_0^t I_{ind}\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{\mathscr{E}_{ind}}{R}\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int_0^t \mathrm{d}\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R} \tag{8.78}$$

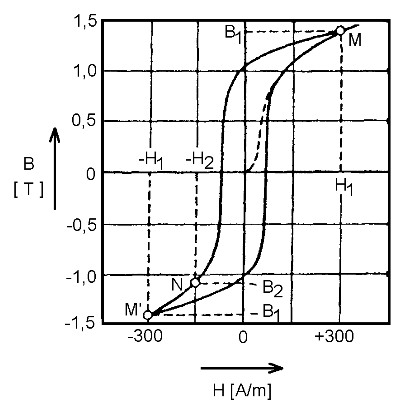
kde R je celkový odpor obvodu sekundárnej cievky a

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = N_s S \Delta B$$

je celková zmena indukčného toku N_s závitmi sekundárnej cievky s prierezom S. ΔB je zmena indukcie zodpovedajúca zmene ΔH. Kombináciou posledných dvoch výrazov dostaneme pre zmenu indukcie výraz

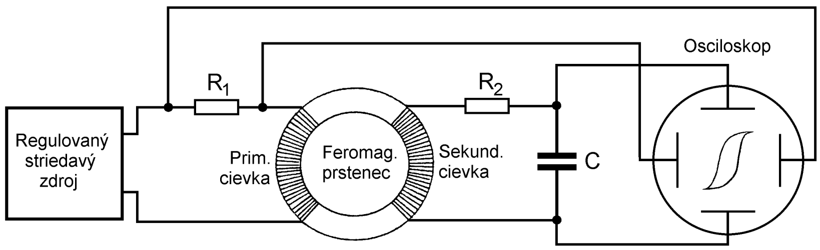
$$\Delta B = \frac{R}{N_s S} Q = kQ \tag{8.79}$$

kde k je konštanta zariadenia.



Obr. 8.27

Samotný postup merania je nasledujúci: Vzorku treba najprv dôkladne demagnetizovať, pretože balistická metóda je založená na meraní zmien indukcie ΔB. Najvhodnejšie je pre tento účel nahradiť jednosmerný zdroj zdrojom striedavým, skratovať galvanometer spínačom S_2, zvýšiť v obvode striedavý prúd až do oblasti nasýtenia a z tejto hodnoty ho pozvoľne znížiť na nulu. Skúsenosti ukazujú, že takáto demagnetizácia nemusí viesť vždy k úplnému potlačeniu remanentného magnetizmu. Spoľahlivú demagnetizáciu možno dosiahnuť iba nahriatím vzorky nad Curieho teplotu. Po demagnetizovaní vzorky sa k zariadeniu pripojí jednosmerný zdroj a nastaví sa intenzita poľa na hodnotu H_1 zodpovedajúcu bodu M na *obr. 8.27*. Komutátorom sa zmení smer intenzity H a na galvanometri sa odčíta údaj úmerný zmene magnetickej indukcie, teda hodnota $2B_1$, z čoho sa určí B_1. Tým sú určené body M a M' na *obr. 8.27.* Na určenie bodu N sa zmení hodnota H_1 komutáciou prúdu pri vhodnej hodnote odporu R_p na hodnotu $-H_2$ a zodpovedajúci údaj galvanometra sa odčíta od hodnoty B_1, čím dostaneme hodnotu $-B_2$ v bode N. Takto postupne, zmenou H_2, možno získať potrebný počet bodov hysteréznej slučky. Podľa literárnych prameňov možno pri balistickej metóde dosiahnuť presnosť merania 0,1 %.



Obr. 8.28

8.4.7.2 Dynamické snímanie hysteréznej slučky

Na rýchle orientačné snímanie hysteréznej slučky slúži dynamická metóda, pri ktorej sa využíva zapojenie zobrazené na *obr. 8.28*. Primárna cievka na feromagnetickej vzorke sa napája striedavým prúdom vhodnej amplitúdy cez odpor R_1. Striedavé napätie z odporu sa privádza na horizontálny vstup osciloskopu. Zo sekundárnej cievky sa indukované napätie cez jednoduchý R_2C integrátor privádza na vertikálny vstup osciloskopu. Na obrazovke osciloskopu sa takto zobrazí kompletná hysterézna slučka. Test magnetického materiálu touto metódou nie je tak presný ako pri predchádzajúcej metóde, je však rýchly, a preto sa využíva hlavne pri priemyselnej kontrole výroby feromagnetík.

8.5 Meranie magnetických polí

8.5.1 Indukčné metódy

Aj keď sme sa v našom pojednaní nevenovali meraniu a meracím metódam elektrických veličín, domnievam sa, že meranie magnetickej indukcie si zaslúži pozornosť, pretože ide o fyzikálne meranie vyžadujúce dostatočne veľkú experimentálnu zručnosť, čo je zrejmé najmä z opisu snímania hysteréznych slučiek.

Pomerne jednoduché je meranie striedavých harmonických magnetických polí, na ktoré možno využiť zákon elektromagnetickej indukcie. K meraniu je potrebná malá plochá prstencová cievočka s N závitmi a s definovanou plochou závitu S. Cievočka sa pripojí k voltmetru s vysokým vstupným odporom (elektronický voltmeter) a vloží sa do priestoru magnetického poľa tak, aby os cievky bola paralelná so smerom vektora magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$. Ak magnetické pole má amplitúdu B a časový priebeh $B = B_0 \cos \omega t$ so známou kruhovou frekvenciou ω, indukčný tok cievkou je $\Phi = NSB = NSB_0 \cos \omega t$ a indukované napätie v cievke, merané voltmetrom je

$$\mathscr{E}_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -NS\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \omega SNB_0 \sin \omega t = U_0 \sin \omega t$$

kde U_0 je amplitúda napätia meraná voltmetrom. Amplitúda magnetickej indukcie je teda

$$B_0 = \frac{U_0}{\omega SN} \tag{8.80}$$

To isté experimentálne usporiadanie možno použiť aj na meranie časovo stálych magnetických polí B, ak vhodným spôsobom zaistíme, aby sa indukčný tok $N\boldsymbol{S}.\boldsymbol{B}$ v čase menil. Ak sa cievočka v poli otáča so známou uhlovou rýchlosťou ω_0 okolo niektorého z jej priemerov, potom súčin $N\boldsymbol{S}.\boldsymbol{B} = NSB \cos \omega_0 t$ a voltmeter bude merať striedavé napätie s amplitúdou U_0. Magnetická indukcia bude daná podobným výrazom ako (8.80), teda

$$B = \frac{U_0}{\omega_0 SN} \tag{8.81}$$

Ďalšia metóda merania B využíva balistický galvanometer alebo fluxmeter a má veľa spoločného s metódou snímania hysteréznej slučky. Ak už opísanú cievočku pripojíme k balistickému galvanometru a presunieme ju z miesta, kde sú magnetická indukcia, a teda aj indukčný tok nulové, do miesta, kde magnetická indukcia je B a indukčný tok cievkou je $\Phi = NSB$, pretečie balistickým galvanometrom náboj Q daný podobným výrazom ako je (8.78), teda

$$Q = \int_0^t I_{ind}\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{\mathscr{E}_{ind}}{R}\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int_0^\Phi \mathrm{d}\Phi = \frac{\Phi}{R}$$

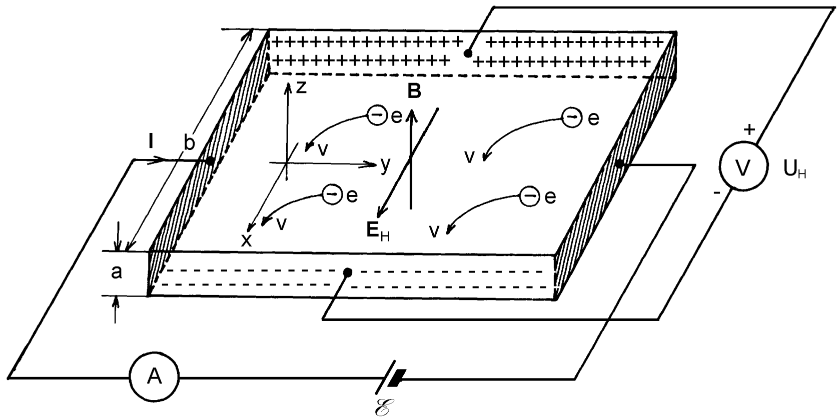
kde R je celkový odpor uzavretého obvodu galvanometra, teda jeho vstupný odpor plus v sérii odpor cievky s prívodnými vodičmi. Z tejto rovnice pre absolútnu hodnotu magnetickej indukcie dostaneme

$$B = \frac{QR}{NS} \tag{8.82}$$

Treba pripomenúť, že vzhľadom na nenulovú plochu závitov cievky S, a nie úplne homogénne magnetické pole, sú namerané hodnoty B pri všetkých metódach strednými hodnotami indukcie na ploche S.

8.5.2 Hallov jav

Pohodlná a presná metóda na meranie magnetických polí je založená na jave, ktorý v roku 1879 objavil americký fyzik, Rowlandov žiak, E. H. Hall. Jav je zaujímavý a dôležitý nielen z hľadiska merania magnetických polí, ale aj preto, že v čase keď bol objavený, nebol známy ani elektrón a pritom podstata javu spočíva na elektrónovej, resp. dierovej vodivosti kovov a polovodičov.



Obr. 8.29

Na *obr. 8.29* je k platničke z vodivého materiálu daných rozmerov cez dobre vodivé plošné kontakty pripojený cez ampérmeter zdroj napätia $\mathscr{E}$. Platnička môže byť z kovu alebo polovodiča (napr. indium antimonid alebo indium arzenid – známe *n*-typy polovodičov), jej rádové rozmery sú 1 mm × 1 mm. Na bočných stenách platničky sú naspájkované napäťové kontakty, ku ktorým sa pripája citlivý voltmeter. Platnička je uložená v magnetickom poli s indukciou *B*, ktorého smer je znázornený na obrázku. Ak platničkou tečie prúd elektrónov *I*, potom jeho hustota je

$$J = nev = \frac{I}{ab}$$

kde *n* je koncentrácia nosičov náboja (v danom prípade elektrónov), *e* je elementárny náboj, *v* je driftová rýchlosť nosičov a *ab* je priečny prierez platničky. Prúdová hustota má smer kladnej osi *y*, nosiče náboja sa však pohybujú v smere –*y*. Rýchlosť *v* nosičov náboja

$$v = \frac{I}{neab}$$

je úmerná prúdu platničkou. Okrem sily pozdĺž osi *y*, ktorou na elektrón pôsobí elektrické pole zdroja napätia $\mathscr{E}$, bude naň pôsobiť aj magnetická sila

$$F = evB$$

smerujúca v kladnom smere osi *x*, ktorá bude elektróny zatláčať k prednej stene platničky. V rovnovážnom stave bude hustota elektrónov väčšia pri prednej stene ako pri zadnej, kde vznikne nedostatok elektrónov (a teda vznikne kladný náboj). V dôsledku takého rozloženia náboja vznikne v objeme platničky intenzita elektrického poľa E_H v smere osi *x*, ktorá sa rovná vB, teda

$$E_H = vB$$

Pole E_H sa nazýva Hallovým poľom a kompenzuje účinok magnetickej sily *F* na elektróny. Medzi prednou a zadnou stenou platničky na šírke *b* vznikne Hallovo napätie U_H, ktorého veľkosť je

$$U_H = bE_H = \frac{I}{nea}B = R_H\frac{I}{a}B \qquad (8.83)$$

Toto napätie meria voltmeter v obvode. $R_H = 1/ne$ je Hallova konštanta, veličina charakteristická pre konkrétny materiál. Konštanta R_H môže byť kladná alebo záporná v závislosti od toho, či je materiálom vodič typu n (teda obyčajný vodič, prípadne polovodič typu n) alebo polovodič typu p, v ktorom nosičmi voľných nábojov sú kladné diery. Polarita Hallovho napätia takto závisí od typu polovodiča a Hallov jav môže slúžiť k experimentálnemu určeniu typu vodivosti polovodivej látky.

Z výrazu (8.83) plynie, že koncentrácia voľných nosičov náboja je

$$n = \frac{IB}{eaU_H} \qquad (8.84)$$

Veličiny na pravej strane výrazu (8.84) sú merateľné, takže výraz umožňuje určiť koncentráciu voľných elektrónov v kove. V tabuľke 13 sú uvedené koncentrácie vodivostných elektrónov pre niektoré kovy. Údaje boli vypočítané z nameraného Hallovho napätia s využitím výrazu (8.84) v známom magnetickom poli B. Koncentrácie boli určené aj inými, teoretickými metódami. Z tabuľky vidno, že pre jednomocné kovy je zhoda experimentálnych a teoretických údajov dosť dobrá.

Pre viacmocné kovy, železo a iné silnomagnetické materiály je výraz (8.84) nepoužiteľný. Pre takéto materiály treba Hallov jav interpretovať na základe kvantovej teórie, ktorá dáva výsledky porovnateľné s experimentom.

Tabuľka 13

Kov	Koncentrácia n [10^{28} m^{-3}]	
	experiment	teória*
Li	3,7	4,8
Na	2,5	2,6
K	1,5	1,3
Cs	0,80	0,85
Cu	11	8,4
Ag	7,4	6,0
Au	8,7	5,9

* predpokladá sa jeden voľný elektrón na atóm

Využitie Hallovho javu na meranie magnetických polí sa zakladá na využití výrazu (8.83). Ak je známa konštanta R_H pre použitú vzorku (platničku) a jej rozmery, zmeraním prúdu I vzorkou a Hallovho napätia U_H hodnota magnetickej indukcie plynie z výrazu

$$B = \frac{aU_H}{R_H I} \qquad (8.85)$$

8.5.3 Kvantový Hallov jav

V roku 1980 objavil Klaus von Klitzing kvantový Hallov jav.[1] Ako Hallove vzorky použil von Klitzing polovodičové heteroštruktúry, konkrétne kremíkový FET v poliach s vysokou indukciou B až 20 T pri veľmi nízkych teplotách T cca 1,5 K a menej a pri prúde $I = 1$ A. Ukázalo sa, že za takých extrémnych podmienok Hallovo napätie U_H nerastie s magnetickou indukciou B lineárne podľa výrazu (8.83), ale vykazuje platá, na ktorých U_H zostáva konštantné. Ešte prekvapujúcejšie je, že Hallov odpor $\mathscr{R}_H$ definovaný výrazom

$$\mathscr{R}_H = \frac{U_H}{I}$$

je na týchto platách kvantovaný. Odpovedajúca Hallova vodivosť $\mathscr{G}_H = 1/\mathscr{R}_H$ je daná kvantami vodivosti e^2/h, takže

$$\mathscr{G}_H = \frac{e^2}{h} i$$

kde h je Planckova konštanta a i je celé číslo nadobúdajúce hodnoty $i = 1, 2, 3, \ldots$ Existuje teda kvantum elektrického odporu s veľkosťou

$$\mathscr{R}_0 = \frac{h}{e^2} = 25\,812{,}807\,58\ \Omega$$

ktoré sa od roku 1990 považuje za normál odporu. V roku 1982 dostal K. von Klitzing za svoj objav Hewlet-Packardovu cenu a v roku 1985 Nobelovu cenu.

8.5.4 Jadrová magnetická rezonancia a elektrónová paramagnetická rezonancia

Jedna z najpresnejších dnes známych metód merania magnetických polí je metóda založená na kvantovomechanickom jave, ktorý sa nazýva jadrová magnetická rezonancia (v skratke JMR, alebo NMR – nuclear magnetic resonance).[2] Treba hneď na začiatok povedať, že meranie magnetických polí metódou NMR je iba jej "vedľajším produktom", pretože má oveľa závažnejšie použitie vo fyzikálnom, chemickom a biologickom výskume, ale predovšetkým v medicíne, kde **počítačové NMR-tomografy** spôsobili revolúciu v diagnostike rôznych onemocnení. Technika jadrovej magnetickej rezonancie bola vyvinutá v roku 1946 nezávisle dvoma skupinami amerických fyzikov. Boli to F. Bloch, W. W. Hansen, M. E. Packard zo Stanfordskej univerzity a E. M. Purcell, H. C. Torrey, R. V. Pound z Harvardskej univerzity v USA.[3] O neobyčajnom význame NMR svedčí aj skutočnosť, že Bloch a Purcell dostali za svoje objavné práce už v roku 1952 Nobelovu cenu.

---

[1] Von Klitzing, K., Dorda, G., Pepper, M., Phys. Rev. Lett. **45,** 494 (1980)
[2] Pozri napr. Rákoš, M.: Rádiospektroskopické metódy, Alfa Bratislava 1988
[3] Bloch, F., Hansen, W. W., Packard, M. E., Phys. Rev. **70**, 474 (1946)
Purcell, E. M., Torrey, H. C., Pound, R. V., Phys. Rev. **69**, 37 (1946)

Ako už bolo povedané na začiatku tejto kapitoly, jadrový magnetizmus (presnejšie povedané jadrový paramagnetizmus) je jav veľmi slabý, až natoľko, že sa nedá statickými metódami pozorovať, a to ani pri veľmi nízkych teplotách. Je to možné iba rezonančným zvýraznením efektu.

JMR – jednou vetou povedané – je selektívna rezonančná absorpcia vysokofrekvenčnej elektromagnetickej energie súborom jadrových magnetických momentov (spinov) uložených v stálom silnom magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$. Podľa tejto definície látka prostredníctvom svojich atómových jadier (ako príklad môžu slúžiť protóny vodíkov v obyčajnej vode), je schopná prijať (absorbovať) energiu elektromagnetického poľa selektívne pri istej frekvencii závislej od $\boldsymbol{B}$. Úlohou experimentu je tieto frekvencie a absorpciu merať.

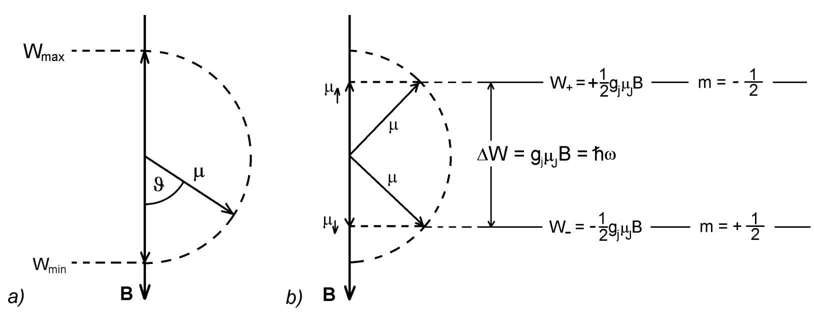
Predpokladajme teda, že medzi pólmi silného permanentného magnetu alebo elektromagnetu s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$ sa nachádza látka s paramagnetickými jadrami (pozri odsek 8.1). Nech touto látkou je obyčajná, chemicky trochu upravená voda v ampulke, a uvažovanými jadrami sú vodíkové jadrá, teda protóny. Z magnetického hľadiska sa každý takýto protón správa ako magnetický dipól s magnetickým momentom $\boldsymbol{m}_j = \boldsymbol{\mu}$, ktorý podľa výrazu (8.12) súvisí s mechanickým momentom (momentom hybnosti) $\boldsymbol{L}_j$ vzťahom

$$\boldsymbol{\mu} = g_j \frac{e}{2m_p} \boldsymbol{L}_j \tag{8.86}$$

Keby bol protón klasickým malým magnetíkom, v danom magnetickom poli by sa snažil nasmerovať pozdĺž tohto poľa tak, že uhol medzi vektormi $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{\mu}$ by bol nulový ($\vartheta = 0$ – na *obr. 8.30a* smerom dole). Vonkajším pôsobením by sme mohli uhol ϑ zväčšovať, a tak spojito meniť a zväčšovať aj potenciálnu energiu dipólu podľa vzťahu

$$W = -\boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{B} = -\mu B \cos\vartheta \tag{8.87}$$

z hodnoty $W_{min} = -\mu B$ ($\vartheta = 0$) až po hodnotu $W_{max} = \mu B$ ($\vartheta = \pi$).



Obr. 8.30

Protón však nie je klasickým magnetíkom. S ním spojený mechanický moment $\boldsymbol{L}_j$ je kvantovaný, jeho veľkosť je daná hodnotou

$$L_j = \hbar\sqrt{I(I+1)}$$

kde I vo všeobecnosti je celočíselné alebo poločíselné **spinové kvantové číslo**, ktoré v prípade protónu má hodnotou $I = 1/2$. Nekladieme si za úlohu pokúšať sa vysvetliť prečo je to tak. Spomínali sme to už na začiatku tejto kapitoly, a ak sa čitateľ s týmto faktom nestretol v stredoškolskej fyzike, stretne sa s ním pri štúdiu jadrovej fyziky, alebo kvantovej mechaniky. Magnetický moment protónu má potom podľa výrazu (8.86) veľkosť

$$\mu = g_j \frac{e\hbar}{2m_p}\sqrt{I(I+1)} = g_j\mu_J\sqrt{I(I+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}g_j\mu_J$$

kde $\mu_J = e\hbar/(2m_p)$ je už spomínaný jadrový magnetón. Voľný protón môže zaujať v priestore ľubovoľný smer, nie však náš protón v magnetickom poli. Ten môže – a to je ďalšie prekvapenie kvantovej mechaniky – v tomto poli zaujať iba dve orientácie, a to také, že priemet magnetického momentu do smeru poľa má dve hodnoty

$$\mu_{\downarrow} = g_j\mu_J m_+ = +\frac{1}{2}g_j\mu_J \tag{8.88a}$$

alebo

$$\mu_{\uparrow} = g_j\mu_J m_- = -\frac{1}{2}g_j\mu_J \tag{8.88b}$$

kde $m_- = -1/2$ a $m_+ = +1/2$ sú dve možné hodnoty **magnetického kvantového čísla m**. Orientácie magnetického momentu μ zodpovedajúce projekciám $\mu_{\uparrow}$ a $\mu_{\downarrow}$ sú znázornené na *obr. 8.30b*.

Vzhľadom na dve možné orientácie magnetického momentu môže mať protón v magnetickom poli tiež iba dve hodnoty potenciálnej energie dané výrazmi

$$W_+ = -\mu_{\uparrow}B = +\frac{1}{2}g_j\mu_J B \tag{8.89a}$$

$$W_- = -\mu_{\downarrow}B = -\frac{1}{2}g_j\mu_J B \tag{8.89b}$$

ktoré sú znázornené hladinami energie na *obr. 8.30b*. Prechod dipólu z jednej energetickej hladiny na druhú vyžaduje zmenu energie dipólu o hodnotu $\Delta W = W_+ - W_-$ a je možný iba prijatím (absorpciou) alebo vyslaním (emisiou) elektromagnetického kvanta $\hbar\omega$, čiže musí platiť

$$W_+ - W_- = \Delta W = g_j\mu_J B = \hbar\omega$$

Z výrazu plynie, že žiarenie musí mať kruhovú frekvenciu

$$\omega = \frac{g_j\mu_J}{\hbar}B = \gamma_p B \tag{8.90}$$

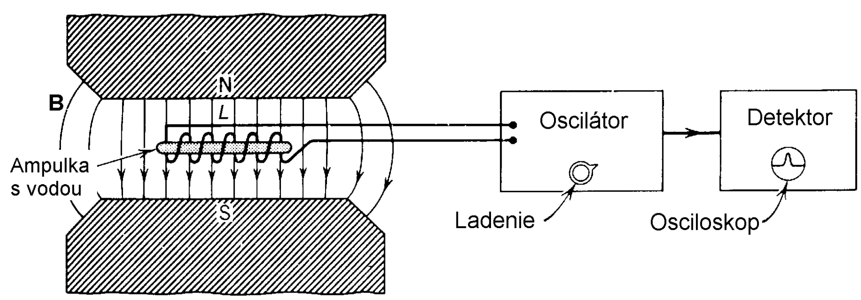
kde
$$\gamma_p = \frac{g_j\mu_J}{\hbar} = g_j\frac{e}{2m_p} = 2{,}675\,136\,61.10^8\ \mathrm{T^{-1}.s^{-1}} \tag{8.91}$$

je magnetomechanický (gyromagnetický) pomer protónu (g_j = 5,585 54). Jednoduchý výraz (8.90) je základným vzťahom, ktorý vystupuje pri jadrovej magnetickej rezonancii a jeho interpretácia je nasledovná:

Absorbcia (alebo emisia) elektromagnetického žiarenia systémom identických neinteragujúcich jadrových magnetických momentov môže nastať iba na rezonančnej kruhovej frekvencii ω, danej výrazom (8.90), ktorá lineárne závisí od magnetickej indukcie B a od vlastností jadier (v danom prípade protónov). Pri inej frekvencii žiarenie s protónmi prakticky neinteraguje. Rezonančná frekvencia žiarenia je pomerne nízka a napr. v poli B = 1 T bude v systéme uvažovaných protónov indukovať prechody medzi energetickými hladinami elektromagnetické pole s frekvenciou

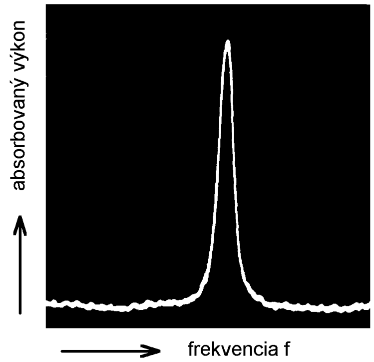
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\gamma_p B}{2\pi} = 42{,}577 \text{ MHz} \tag{8.92}$$

Veda, ktorá sa zaoberá skúmaním energetických prechodov medzi energetickými hladinami elektrónov, atómov a molekúl a využíva vzťah $\Delta W = \hbar\omega$ sa nazýva spektroskopia. Podľa frekvencie sa spektroskopia delí na gama, UF, optickú, IČ, mikrovlnovú a vysokofrekvenčnú spektroskopiu. Jednotlivým frekvenčným pásmam zodpovedajú stále menšie rozdiely ΔW, a teda nižšie frekvencie. Vidíme, že aj JMR patrí do spektroskopie a podľa vzťahu (8.92) je súčasťou vysokofrekvenčnej spektroskopie, kde sa skúmajú najjemnejšie energetické prechody atómov.



Obr. 8.31

Najjednoduchšie zariadenie na experimentálne pozorovanie JMR je spektrometer JMR znázornený na *obr. 8.31.* Pozostáva zo silného magnetu, z generátora elektromagnetických kmitov (obyčajný *LC*-oscilátor) v oblasti desiatok až stoviek MHz, detektora a registračného zariadenia. Kmity oscilátora treba vhodne naviazať na ampulku s vodou. Obyčajne sa na ampulku – ako je to znázornené na obrázku – navinie cievka L, ktorá je súčasťou rezonančného LC obvodu oscilátora, a vloží sa do poľa B tak, aby os cievky bola kolmá na smer magnetickej indukcie B. V experimente sa mení frekvencia f generátora (alebo hodnota indukcie B) dovtedy, kým pre protóny nie je splnená rezonančná podmienka (8.90) alebo (8.92). V okamihu rezonancie sa zníži kvalita rezonančného obvodu, čo má za následok pokles amplitúdy napätia generátora. Pokles je na druhej strane úmerný absorbovanej elektromagnetickej energii protónmi vody. Tento absorbovaný výkon možno elektronicky pohodlne registrovať. Výstupným registračným zariadením môže byť osciloskop alebo zapisovač.



Obr. 8.32

Na *obr. 8.32* je osciloskopický záznam signálu JMR vo vode s prídavkom paramagnetických iónov Fe^{3+}. Oscilogram pochádza od Bloembergena a i.[1] z prvých prác o JMR. Paramagnetické ióny vo vzorke vody skracujú relaxačné časy protónov, aby v systéme jadrových momentov nedochádzalo k saturácii, pretože inak by sa absorpcia elektromagnetickej energie zastavila a signál by zanikol.[2] Absorbcia v osciloskopickom zázname je funkciou frekvencie a vidno, že nenastáva pri jedinej frekvencii danej výrazom (8.92), ale v istom konečnom pásme (rezonančná krivka má konečnú nenulovú šírku). Triviálnou príčinou toho je nedokonalá homogenita vonkajšieho magnetického poľa cez objem ampulky, takže jednotlivé protóny sa nachádzajú v rôznom poli B a rezonančná podmienka je rozmazaná. Závažnejšie príčiny pre konečnú šírku čiary sú vnútorné magnetické polia v látke od iných susedov protónu a interakcie medzi nimi, ako aj relaxácia, bez ktorej by pozorovanie JMR nebolo možné.

JMR je veľmi efektívna výskumná metóda. Už krátko po jej objave boli pomocou nej zmerané magnetické momenty mnohých atómových jadier. Napríklad magnetický moment protónu sa zmeria tak, že sa určí rezonančná frekvencia protónov ω a nezávislým meraním (napr. Hallovou sondou) sa zmeria magnetická indukcia B. Zo vzťahu (8.90) sa vypočíta gyromagnetický pomer γ_p a pomocou neho s využitím výrazov (8.91) a (8.88), sa vypočíta projekcia momentu do smeru poľa

$$|\mu_\uparrow| = |\mu_\downarrow| = \frac{1}{2}\gamma_p\hbar = 1{,}410\,44.10^{-26}\ \mathrm{A.m^{-2}} \tag{8.93}$$

V kontexte experimentálnych skúmaní JMR je meranie magnetických polí, kvôli ktorému sme vlastne jav JMR analyzovali, takmer triviálne. V rezonancii protónov vo vode treba iba zmerať frekvenciu f generátora a magnetickú indukciu B vypočítame zo vzťahu

$$B = \frac{2\pi}{\gamma_p} f = 2{,}348\,665\,725.10^{-2} f \qquad [\mathrm{T; MHz}] \tag{8.94}$$

---

[1] Bloembergen, N., Purcell, E. M., Pound, R. V., Phys. Rev. **73**, 679 (1948)

[2] Práve táto okolnosť zabránila C. J. Gorterovi objaviť JMR o niekoľko rokov skôr. Pozri Gorter, C. J., Miβglückter Versuch zur Kerninduktion (Absorption), Physica **3,** 995 (1936); Gorter, C. J., Broer, L. F., Negative result of an attempt to observe nuclear magnetic resonance in solids, Physica **9**, 591 (1942)

ktorý plynie zo vzťahu (8.90). Pri danej presnosti γ_p, presnosť merania B závisí iba od presnosti merania frekvencie, ktorá je dnes veľmi vysoká.

*****

Rezonanciu podobného charakteru ako JMR možno pozorovať aj na elektrónoch v látkach. Jav je známy pod menom **elektrónová paramagnetická rezonancia** (EPR), alebo **elektrónová spinová rezonancia** (ESR). EPR experimentálne objavil v roku 1944 ruský vedec E. K. Zavojskij.[1] Rezonanciu možno pozorovať iba na nespárených elektrónoch, takých, ktorých spinový magnetický moment nie je vykompenzovaný momentom iného elektrónu. Bez ohľadu na toto ohraničenie existuje množstvo látok, v ktorých rezonancia je možná. Sú to napr. ióny prechodných prvkov, prímesi v polovodičoch, poruchy kryštalickej mriežky (farebné centrá), vodivostné elektróny v kovoch, voľné radikály v organických zlúčeninách a mnohé iné. **EPR je** podobne ako JMR **selektívna (rezonančná) absorpcia elektromagnetickej energie systémom elektrónových spinov v magnetickom poli**. Rezonančná podmienka je rovnaká ako pri JMR, teda je to podmienka typu (8.90), kde však gyromagnetický pomer protónu γ_p treba nahradiť gyromagnetickým pomerom voľného elektrónu s faktorom $g = 2$, teda

$$\gamma_e = -g\frac{e}{2m_e} = -1{,}756.10^{11} \quad \mathrm{T}^{-1}.\mathrm{s}^{-1}$$

V magnetickom poli indukcie $B = 1$ T rezonancia podľa výrazu (8.92) nastane pri frekvencii

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\gamma_e B}{2\pi} = 27{,}95 \text{ GHz}$$

teda v oblasti, ktorú nazývame mikrovlnová oblasť elektromagnetického spektra. Táto skutočnosť vyžaduje aj celkom odlišnú experimentálnu metodiku – zatiaľ čo pri JMR sa využívajú elektronické zariadenia s obvodmi so sústredenými parametrami, v metodike EPR sa používajú vlnovody, dutinové rezonátory, mikrovlnové detektory a pod. Ako generátory sa zvyčajne používajú reflexné klystróny.

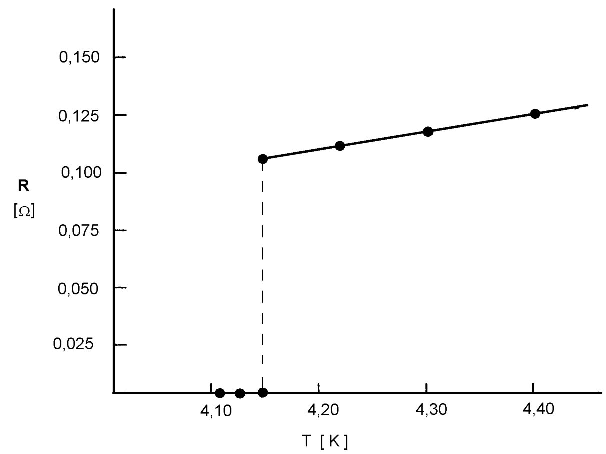
Využitie EPR je mnohostranné – v chémii napr. umožňuje štruktúrnu analýzu, v biológii a v medicíne sa využíva pri výskume karcinogénnych látok (voľné radikály!) a i. EPR možno využiť podobne ako JMR na meranie magnetických polí, avšak presnosť merania je oveľa nižšia ako pri JMR v dôsledku oveľa väčšej šírky rezonančnej čiary EPR. Nemenej dôležité je aj to, že JMR-magnetometer je malý a jednoduchý prístroj oproti odpovedajúcemu robustnému mikrovlnovému EPR zariadeniu.

---

[1] Zavojskij, E. K., Doktorskaja dissertacija, Moskva, FIAN, 1944; J. Phys. USSR **9**, 245, 1945

8.6 SUPRAVODIVOSŤ

V roku 1911, tri roky po skvapalnení hélia, objavil holandský fyzik H. Kamerlingh--Onnes[1] supravodivosť. Tento neočakávaný a fascinujúci jav, ktorý sa pozoruje na niektorých kovoch a zliatinách, vyvolal veľký záujem vedeckej komunity a mal za následok intenzívny teoretický a experimentálny výskum.

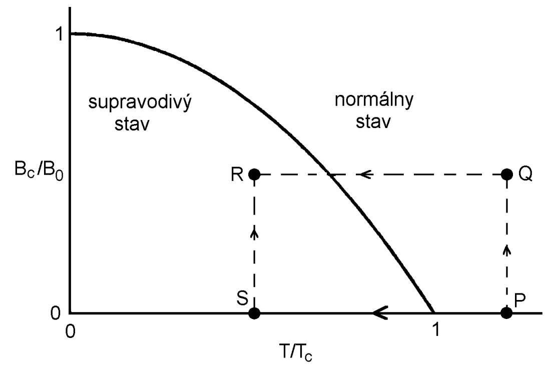


Obr. 8.33

Meraním elektrického odporu ortuti pri teplote niekoľkých kelvinov Kamerlingh--Onnes zistil, že pri kritickej teplote T_c = 4,15 K klesne zrazu elektrický odpor ortuti na nulu. Na *obr. 8.33* je graficky znázornená závislosť elektrického odporu ortuti v okolí jej kritickej teploty. Ďalší výskum ukázal, že prechod do supravodivého stavu vykazujú aj ďalšie kovy a zliatiny. Nejde pri tom o nejaký pokles odporu k malým nemerateľným hodnotám, ale o vymiznutie odporu pri zmene teploty menšej ako desaťtisícina stupňa (pre monokryštály). Merania ukázali, že ak supravodič pod kritickou teplotou má nejaký odpor, musí byť jeho rezistivita menšia ako 10^{-25} Ω.m, čo je o mnoho rádov nižšie, ako napr. rezistivita vysoko čistej medi (~10^{-12} Ω.m) pri rovnakej teplote. Meď však nie je supravodičom. Kritické teploty T_c, pri ktorých klasické supravodiče prechádzajú do supravodivého stavu sú charakteristické konštanty a sú v rozsahu 0,5 K až 20 K. Ak sa zo supravodivého materiálu vyrobí prstenec a ochladí sa pod kritickú teplotu, možno v ňom elektromagnetickou indukciou vybudiť elektrický prúd, ktorý v ňom bude cirkulovať aj niekoľko rokov.

Kamerlingh-Onnes predpovedal, že vlastnosť nulového odporu bude možné využiť na výrobu supravodivých cievok vhodných na produkciu veľmi silných magnetických polí, rádovo až desiatok tesla (T). V roku 1914 objavil ďalší efekt, že supravodivosť sa rozruší prítomnosťou magnetického poľa, ak je magnetická indukcia väčšia ako istá kritická hodnota B_c závislá od materiálu a jeho teploty. Pre väčšinu materiálov závislosť B_c od teploty T je s presnosťou na niekoľko percent daná výrazom

[1] Kamerlingh-Onnes, H., Comm. Phys. Lab., Univ. Leyden, No. **119**, 120, 122 (1911)



Obr. 8.34

$$B_c = B_0\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right] \tag{8.95}$$

Táto závislosť je znázornená grafom na *obr. 8.34*. Pri hodnote $(T/T_c) = 0{,}5$ je hodnota B_c pre olovo asi o 2,2 % vyššia a pre cín asi o 3 % nižšia, ako udáva závislosť na obrázku. Pod parabolou na *obr. 8.34* sa látky nachádzajú v supravodivom stave a nad ňou v normálnom vodivom stave. Fázový prechod medzi normálnym a supravodivým stavom, ktorý je pre $B = 0$ v čistých vzorkách veľmi ostrý, závisí od tvaru a orientácie vzorky v nenulovom magnetickom poli. Je to dôsledok demagnetizačných efektov. Prechod zostáva ostrým, ak je magnetické pole vo vzorke homogénne.

Tabuľka 14

Prvok	Teplota T_c [K]	Magnetická indukcia B_0 [T]
Zn	0,875	0,005 4
Cd	0,56	0,003 0
Hg	4,15	0,041 2
Al	1,18	0,010 5
Ga	1,09	0,005 1
In	3,40	0,029 3
Tl	2,39	0,017 1
Sn (biely)	3,72	0,030 9
Pb	7,19	0,080 3

Je zaujímavé, že supravodivý stav sa zruší aj vlastným magnetickým poľom prúdu, ktorý tečie supravodičom, ak tento dosiahne istú prahovú hodnotu. Naopak, každej hodnote teploty $T < T_c$ zodpovedá maximálny prípustný prúd, ktorý ešte nezmení supravodivý stav materiálu na normálny vodivý stav. Táto okolnosť sa musí brať do úvahy pri konštrukcii supravodivých magnetov.

V tabuľke 14 sú uvedené niektoré prvky vykazujúce supravodivosť s ich kritickými teplotami T_c a kritickými magnetickými indukciami B_0 pre $T \to 0$.

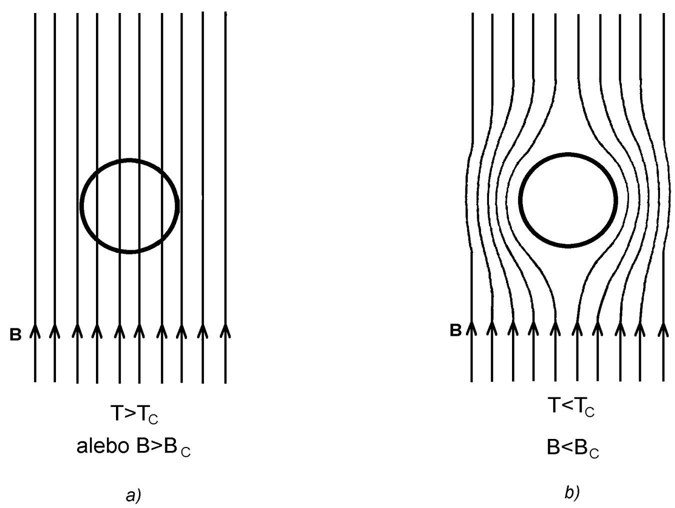
Dvadsaťdva rokov po objave supravodivosti Meissner a Ochsenfeld[1] v roku 1933 experimentálne dokázali, že supravodiče sú súčasne ideálne diamagnetiká, že zo svojho vnútra "vytláčajú" magnetické pole. Tento jav je ilustrovaný na *obr. 8.35* a nazýva sa Meissnerov jav. Ak sa na vzorku supravodiča pri teplote $T > T_c$ naloží magnetické pole B, napr. prechodom z bodu P do bodu Q na *obr. 8.34*, bude pole prenikať materiálom ako na *obr. 8.35a.* Ak sa teraz vzorka ochladí a prejde z bodu Q do bodu R, pri dosiahnutí kritickej teploty bude pole zo vzorky úplne vytlačené ako na *obr. 8.35b*. Interné pole B_i sa teda rovná nule, takže

$$\mu_0 H + \mu_0 M = B_i = 0$$

z čoho

$$\frac{M}{H} = \chi = -1 \tag{8.96}$$

H je intenzita magnetizujúceho poľa a M je magnetizácia. Vidíme, že v supravodivom stave je vzorka skutočne perfektným diamagnetikom so susceptibilitou $\chi = -1$. Treba zdôrazniť, že táto principiálne nová vlastnosť supravodičov nie je dôsledkom ideálnej elektrickej vodivosti materiálu, pretože ak vo vnútri materiálu je intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E} = 0$, z Maxwellovej rovnice rot $\boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}_i/\partial t$ plynie iba to, že magnetická indukcia $\boldsymbol{B}_i$ = konšt., avšak v supravodiči je magnetická indukcia nulová. Maxwellove rovnice samy osebe nestačia na úplný opis supravodiča.

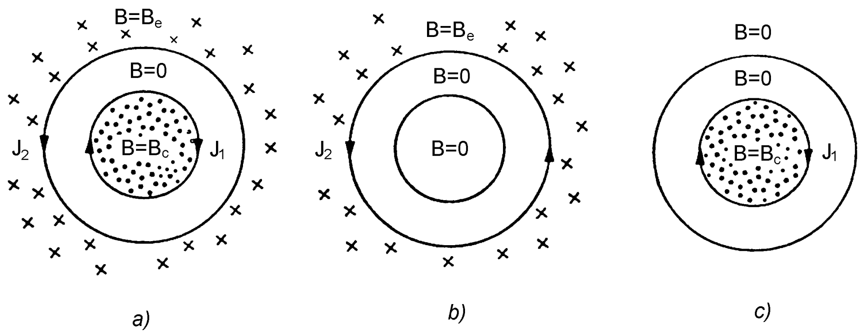


Obr. 8.35

Iný spôsob prechodu z bodu P do bodu R je cez bod S, pričom sa vzorka najprv ochladí do bodu S a potom sa zvýši magnetické pole do bodu R, teda na hodnotu menšiu ako B_c. Indukcia vo vnútri zostane nulová. Možno teda konštatovať, že pri akomkoľvek prechode z bodu P do bodu R bude magnetická indukcia v supravodiči nulová.

[1] Meissner, W., Ochsenfeld, R., Naturwiss. **21**, 787 (1933)

Iný názorný príklad Meissnerovho javu je demonštrovaný na *obr. 8.36*. Dutý valec (v Meissnerovom a Ochsenfeldovom experimente z olova) sa umiestní do magnetického poľa indukcie B_e paralelného s osou valca. Ak sa zmenou teploty alebo poľa dosiahne supravodivý stav, vymizne pole v telese valca a v jeho dutine "zamrzne" pole $B = B_c$ zodpovedajúce bodu prechodu valca do supravodivého stavu (stav na *obr. 8.36a*). Ak sa však valec najprv ochladí pod bod prechodu a potom sa naň naloží pole B, zostane vnútrajšok valca a jeho dutina bez magnetického poľa (stav na *obr. 8.36b*). Tieto dva procesy zodpovedajú prechodom *PQR* a *PSR* v diagrame na *obr. 8.34*.



Obr. 8.36

Aj keď sa supravodič považuje za perfektné diamagnetikum, jeho diamagnetizmus nemá atomárny pôvod ako v normálnych diamagnetikách, ale je to dôsledok elektrónových prúdov v supravodiči. Tieto prúdy vyvolajú v jeho vnútri také pole, ktoré kompenzuje vplyv vonkajšieho magnetického poľa. "Vytláčanie" magnetického poľa zo supravodiča je v skutočnosti jeho kompenzácia poľom prúdov v supravodiči. Tak napríklad, ak má byť pole vo vnútri vzorky a v dutine na *obr. 8.36b* nulové, potom po obvode valca musí tiecť plošný prúd (pozri odsek 6.1.9)

$$J_2 = -\frac{B_e}{\mu_0}$$

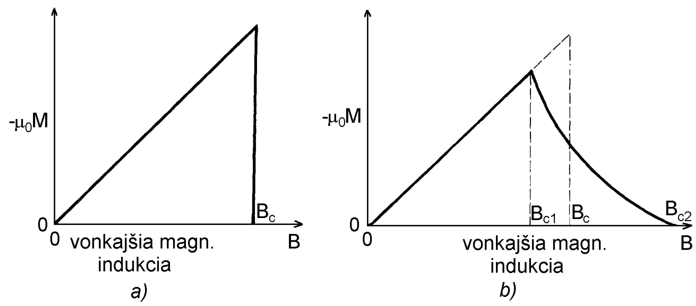
ktorý zruší externé pole B_e vo valci a v dutine. Podobne v situácii na *obr. 8.36a* po vnútornom obvode valca tečie plošný prúd s hustotou

$$J_1 = +\frac{B_c}{\mu_0}$$

Ak sa dutý valec ochladí do supravodivého stavu za prítomnosti magnetickej indukcie veľkosti B_c a externé pole sa potom zruší, vznikne situácia znázornená na *obr. 8.36c*. V dutine $B = B_c$, zatiaľ čo všade inde $B = 0$. Pole v dutine je práve tak veľké, aké by produkoval plošný prúd J_1. Tento prúd sa nazýva "perzistentný (trvalý) prúd". Skutočnosť, že magnetická indukcia vo valci zostáva v supravodivom stave konštantná bez ohľadu na zmeny vonkajších polí, svedčí o tom, že supravodič perfektne odtieňuje ako magnetické, tak aj elektrické polia.

Povrchové plošné prúdy v supravodičoch sú analogické viazaným prúdom v obyčajných magnetikách, ktoré boli diskutované v odseku 8.2, s tým rozdielom, že sú to reálne prúdy. O viazaných prúdoch sme predpokladali, že majú plošný charakter, teda tečú v nekonečne tenkej vrstve. Reálne prúdy na povrchu supravodiča v nekonečne tenkej vrstve by museli mať nekonečnú povrchovú plošnú hustotu, čo je neprijateľné. Bratia F. a H. London dokázali,[1] že prúd v supravodiči tečie s objemovou hustotou, ktorá s hĺbkou exponenciálne klesá do vnútra supravodiča. Takisto klesá smerom do supravodiča aj magnetická indukcia. Charakteristické hĺbky s poklesom prúdu a magnetického poľa na 1/e-tinu povrchovej hodnoty sú napr. rádu 10^{-8} m.

Fyzikálnu teóriu supravodivosti vytvorili americkí fyzici J. Bardeen, L. M. Cooper a J. R. Schrieffer[2] na Univerzite v Illinois v roku 1956 a táto teória je dnes známa pod skratkou BCS. Autori za jej vytvorenie dostali v roku 1972 Nobelovu cenu za fyziku.[3]



Obr. 8.37

BCS teória supravodivosti vychádza z experimentálneho faktu perfektnej vodivosti a perfektného diamagnetizmu supravodičov. Je to kvantovo-štatistická teória založená na kooperatívnom správaní sa elektrónovej "kvapaliny" v supravodiči. Základným predpokladom supravodivosti je tvorba viazaných elektrónových dvojíc (Cooperových párov), v dôsledku ktorých elektrónová kvapalina nadobúda vlastnosti supratekutosti. Páry sa tvoria pôsobením zvláštnych príťažlivých síl medzi elektrónmi. Zvyčajne sa tieto sily spájajú s kmitmi kryštalickej mriežky, ktoré existujú aj pri nulovej absolútnej teplote ($T = 0$). Vďaka elektrostatickej interakcii nábojov elektrónu a iónov mriežky v okolí každého elektrónu sa režim kmitov mriežky mení, čo vyvoláva dodatočnú silu pôsobiacu na druhý elektrón. Z hľadiska kvantovej teórie sa tieto sily objavujú v dôsledku výmeny elektrónov s fonónmi – kvantami kmitov mriežky. Sily sú vždy príťažlivé a môžu prevyšovať bezprostredné coulombovské odpudzovanie elektrónov. V takom prípade materiál môže vykazovať supravodivosť.

Doteraz sme analyzovali vlastnosti supravodivých materiálov, v ktorých je magnetická indukcia nulová až po bod prechodu B_c. Vzťah medzi naloženým poľom a "magnetizáciou" je v nich daný výrazom (8.96), z ktorého plynie, že

$$-\mu_0 M = B \tag{8.97}$$

Táto závislosť je graficky znázornená na *obr. 8.37a* a materiály s daným správaním sa nazývajú supravodiče typu I na rozdiel od skupiny materiálov predovšetkým zliatin, ktorých

[1] London, F., London, H., Proc. R. Soc., A139, 71 (1935); Physica **2**, 341 (1935)
[2] Bardeen, J., Cooper, L. N., Schrieffer, J. R., Phys. Rev. **108**, 1175 (1957)
[3] Bardeen spolu s Brattainom a Shockleym dostali v roku 1956 Nobelovu cenu aj za objav a vývoj tranzistora.

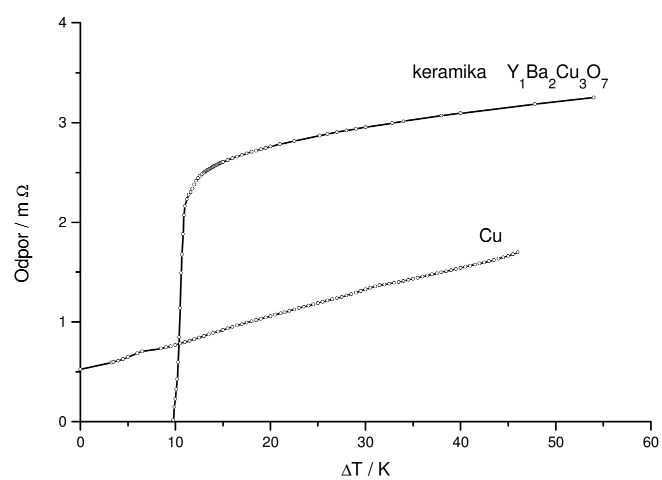
správanie ilustruje *obr. 8.37b*. Sú to supravodiče typu II. Aj v týchto supravodičoch je magnetická indukcia nulová až po prvú kritickú hodnotu indukcie B_{c1}; nad touto hodnotou začína pole prenikať do materiálu, ale vzorka zostáva supravodivá až po druhú kritickú hodnotu indukcie B_{c2}. Nad touto hodnotou pole úplne preniká do materiálu, ktorý sa stáva normálnym vodičom. Prechodové kritické teploty T_c a kritické magnetické indukcie B_{c2} niektorých vybraných supravodičov typu II sú uvedené v tabuľke 15.

Mnohé zliatiny majú značný technický význam, pretože ich kritické teploty sú relatívne vysoké a kritické magnetické indukcie veľmi vysoké, ako to vidieť z tabuľky 15. Niektoré z nich (Nb_3Sn) sa používajú na konštrukciu supravodivých magnetov, v ktorých možno udržiavať vysoké magnetické polia pri relatívne nízkych nákladoch.

Tabuľka 15

Materiál	Teplota T_c [K]	Magnetická indukcia B_{c2} [T]
V	5,4	0,14
Nb	9,5	0,19
NbTi	16,0	12
Nb_3Sn	18,1	22,5
V_3Ga	14,0	19,5
V_3Si	16,8	22,5

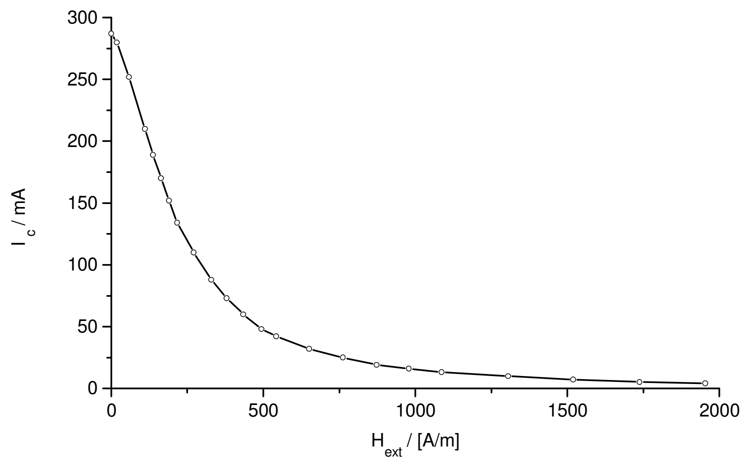
V šesťdesiatych rokoch pri pokusoch vyrobiť vodivé keramiky sa zistilo, že niektoré keramiky po ochladení na teplotu kvapalného dusíka (78 K) vykazujú perfektný diamagnetizmus (čo sa prejavuje napríklad aj tak, že sa malé vzorky vznášajú – levitujú – v magnetickom poli). Tento poznatok viedol k domnienke, že vzorky sú pri tejto relatívne vysokej teplote supravodivé. Ďalšie výskumy, hlavne v osemdesiatych rokoch a až doteraz ukázali, že niektoré keramiky, ako napr. $Y_1Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$ ($0 \leq \delta \leq 0{,}3$) sú skutočne supravodivé, aj keď typ a charakter vodivosti je stále predmetom výskumu.



Obr. 8.38

Takéto materiály sa nazývajú vysokoteplotné supravodiče. Na *obr. 8.38* je graficky znázornená závislosť odporu vzorky keramiky $Y_1Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$ od teploty.[1] Z teplotnej závislosti odporu keramiky vidieť, že jej odpor pri teplote T = 78 + ΔT = 88 K klesá k nule (v daných experimentoch s rozlíšením na $\pm 10^{-6}$ Ω). Pre porovnanie je v grafe vynesená aj teplotná závislosť odporu medenej vzorky (s normálnou vodivosťou) v rovnakom teplotnom intervale. Vidieť, že obidve vzorky sa správajú úplne rozdielne. Na *obr. 8.39* je grafická závislosť kritického prúdu I_c supravodivou keramikou od naloženej intenzity magnetického poľa H_{ext}.

Aj keď začiatočná eufória vo výskume vysokoteplotných supravodičov opadla, výskum je stále intenzívny, a hľadajú sa materiály s vysokou kritickou teplotou.



Obr. 8.39

8.6.1 Josephsonov jav

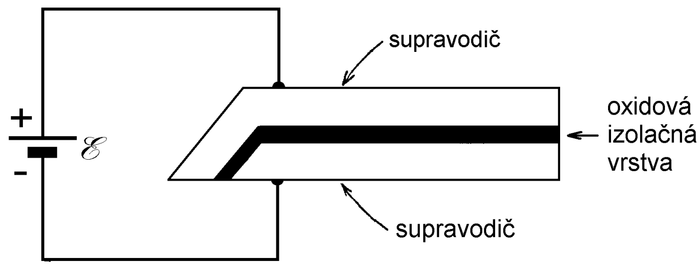
Ak sú dve vrstvy supravodičov oddelené tenkou izolačnou oxidovou vrstvou (hrubou asi 2 nm) a na štruktúru sa pripojí zdroj elektrického napätia $\mathscr{E}$ (*obr. 8.40*), vznikne v elektrickom obvode neočakávaný prúdový kvantový jav, ktorý v roku 1962 predpovedal a v roku 1963 objavil anglický fyzik Brian D. Josephson a podľa neho sa nazýva **Josephsonov jav**[2] (v roku 1973 dostal za svoj objav Nobelovu cenu). Napriek tomu, že je v obvode izolačná vrstva, ktorá tvorí mostík, tečie obvodom jednosmerný prúd so striedavou zložkou, ktorej frekvencia je

$$f = \frac{2e}{h}\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}}{\Phi_0} \qquad (8.98)$$

---

[1] Grafické závislosti zobrazené na *obr. 8.38* a *8.39* boli získané pri skúmaní vysokoteplotnej supravodivosti (Jaroševič, A., Kundracik, F. – nepublikované, Katedra rádiofyziky MFF UK Bratislava)

[2] Josephson, B. D., Physics Letters, **1**, 251 (1962)

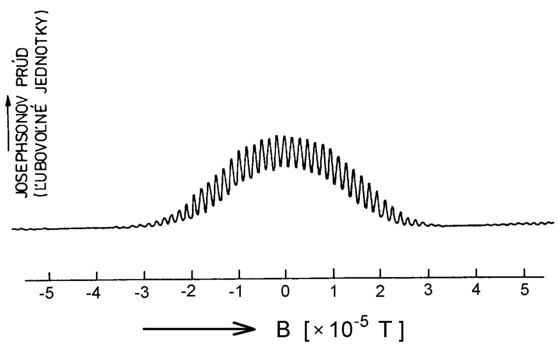


Obr. 8.40

Frekvencia nezávisí od druhu supravodiča ani oxidu, iba od naloženého napätia $\mathscr{E}$. Keďže frekvenciu možno merať s vysokou relatívnou presnosťou (cca 10^{-12}), umožňuje jav veľmi presne definovať napäťový štandard. Veličina

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2{,}067\,833\,637.10^{-15}\,\mathrm{Wb} \tag{8.99}$$

je elementárne kvantum magnetického toku.



Obr. 8.41

Ak sa dva Josephsonove mostíky zapoja paralelne a v oblasti medzi mostíkmi sa vybudí magnetické pole, vznikne zariadenie ktoré je známe pod názvom SQUID (superconducting quantum interference device). Prúdy obidvoch vetiev spolu interferujú a priebeh výsledného prúdu v závislosti od magnetickej indukcie je graficky znázornený na *obr. 8.41*.[1] Vidíme, že amplitúda prúdu v rozsahu magnetických polí cca $\pm 3.10^{-5}$ T veľmi citlivo reaguje na zmeny magnetického poľa. Takýmto spôsobom možno registrovať zmeny magnetickej indukcie veľkosti ~10^{-10} T. SQUID je dnes najcitlivejší známy magnetometer.

[1] Jaklevic, R. C., Lambe, J., Silver, A. H., Mercereau, J. E., Phys. Rev. Letters 12, 159 (1964)

8.7 MAXWELLOVE ROVNICE A KLASICKÁ ELEKTRODYNAMIKA

"Formulácia týchto rovníc bola vo fyzike najväčšou udalosťou od Newtonových čias"
Albert Einstein: Evolúcia fyziky

"Bol to Boh, čo písal tieto riadky …"
L. Boltzmann: Prednášky o Maxwellovej teórii elektriny a svetla.

Analýzou magnetizmu látok sme dospeli k vrcholnému bodu našej teórie elektromagnetizmu, sme pripravení sumarizovať výsledky jednotlivých odsekov, a znovu poukázať na vzájomné súvislosti, ktoré platia medzi jednotlivými veličinami klasickej elektromagnetickej teórie.

V elektromagnetizme sa definujú štyri vektory elektromagnetického poľa. Sú to:
$\boldsymbol{E}$ – vektor intenzity elektrického poľa v jednotkách V. m^{-1},
$\boldsymbol{B}$ – vektor magnetickej indukcie v jednotkách T,
$\boldsymbol{D}$ – vektor elektrickej indukcie v jednotkách A . s . m^{-2},
$\boldsymbol{H}$ – vektor intenzity magnetického poľa v jednotkách A . m^{-1}.

Tieto štyri vektory spolu s objemovou hustotou náboja ρ (A . s . m^{-3}) a prúdovou hustotou $\boldsymbol{J}$ (A . m^{-2}) sú zviazané štyrmi Maxwellovými rovnicami, ktoré predstavujú štyri základné zákony elektromagnetizmu. Na týchto zákonoch stojí celá stavba klasickej elektrodynamiky. Sú to nasledovné – v integrálnom a diferenciálnom tvare napísané – zákony:

I. **Faradayov zákon:** *Indukované elektromotorické napätie na uzavretej krivke l v dielektriku alebo vo vodiči sa rovná zápornej časovej zmene indukčného toku ľubovoľnou plochou S ohraničenou krivkou l. Lokálnou vlastnosťou poľa je skutočnosť, že rotácia intenzity elektrického poľa* $\boldsymbol{E}$ *v ľubovoľnom bode priestoru sa rovná zápornej časovej zmene vektora magnetickej indukcie* $\boldsymbol{B}$*. Matematicky sú tieto vlastnosti elektromagnetického poľa vyjadrené rovnicami*

$$\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}.d\boldsymbol{S} \qquad\qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

II. **Ampérov zákon:** *Magnetomotorické napätie na uzavretej krivke l v priestore s magnetikami sa rovná celkovému voľnému prúdu I nábojov pretekaných ľubovoľnou plochou S ohraničenou krivkou l a celkovému posuvnému prúdu reprezentovanému plošným integrálom časovej zmeny vektora elektrickej indukcie* $\boldsymbol{D}$ *na ploche S. Lokálnou vlastnosťou poľa je skutočnosť, že rotácia vektora intenzity magnetického poľa* $\boldsymbol{H}$ *v ľubovoľnom bode priestoru sa rovná súčtu vektora prúdovej hustoty* $\boldsymbol{J}$ *tečúcich nábojov a prúdovej hustoty posuvného prúdu* $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$*. Matematicky sú tieto vlastnosti elektromagnetického poľa vyjadrené rovnicami*

$$\oint_l \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad\qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

III. **Gaussov zákon v elektrine:** *Tok vektora elektrickej indukcie* ***D*** *uzavretou plochou S sa rovná celkovému voľnému náboju Q uzavretému plochou S. Lokálnou vlastnosťou vektora* ***D*** *je skutočnosť, že jeho divergencia v ľubovoľnom bode priestoru sa rovná objemovej hustote* ρ *voľného náboja v tomto bode. Matematicky sú tieto vlastnosti elektrického poľa vyjadrené rovnicami*

$$\oint_S \boldsymbol{D}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \qquad\qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho$$

IV. **Gaussov zákon v magnetizme:** *Tok vektora magnetickej indukcie* ***B*** *uzavretou plochou S sa vždy rovná nule. Lokálnou vlastnosťou magnetického poľa je skutočnosť, že jeho divergencia z ľubovoľného bodu priestoru sa rovná nule. Matematicky sú tieto vlastnosti magnetického poľa vyjadrené rovnicami*

$$\oint_S \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad\qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$$

Vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ sú zviazané s elektromagnetickými potenciálmi V a $\boldsymbol{A}$ vzťahmi

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad\qquad \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

V elektrostatike a v magnetostatike sú všetky časové derivácie rovné nule.

Základnými vektormi elektromagnetického poľa sú vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$, pretože tie určujú elektromagnetickú (Lorentzovu) silu

$$\boldsymbol{F}_{elmag} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

kde $\boldsymbol{v}$ je rýchlosť pohybujúceho sa náboja q. Častica s relativistickou hmotnosťou m sa v takomto silovom polí bude pohybovať podľa Newtonovej pohybovej rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

kde $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ je hybnosť častice.

Na rozhraní dvoch prostredí 1 a 2 platia pre vektory $\boldsymbol{E}_{1,2}$, $\boldsymbol{D}_{1,2}$, $\boldsymbol{B}_{1,2}$, a $\boldsymbol{H}_{1,2}$ hraničné podmienky

$$\boldsymbol{n}_0 \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \qquad\qquad \boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0$$

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma \qquad\qquad \boldsymbol{n}_0 \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{J}_s$$

kde σ je plošný náboj na rozhraní v jednotkách C/m^2, $\boldsymbol{J}_s$ plošný prúd rozhraním v jednotkách A/m a $\boldsymbol{n}_0$ je jednotkový vektor smerujúci kolmo z prostredia 1 do prostredia 2.

V látkových prostrediach sú vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{H}$ viazané materiálovými vzťahmi

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} \qquad\qquad \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

ε_r je relatívna permitivita a μ_r je relatívna permeabilita. Sú to bezrozmerné látkové parametre a môžu byť číslami (pre lineárne, izotropné materiály), tenzormi (pre anizotropné materiály), alebo môžu závisieť od $\boldsymbol{E}$, príp. $\boldsymbol{B}$ (v nelineárnych materiáloch).

Veličina μ_0 je magnetická konštanta (permeabilita vákua) a má presnú, definičnú hodnotu

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$$

Veličina ε_0 je elektrická konštanta (permitivita vákua) a má hodnotu

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \approx 8{,}854.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$$

kde

$$c = 299\,792\,458\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

je rýchlosť svetla vo vákuu.

V elektromagnetickom poli sa materiál elektricky a magneticky polarizuje. Vektor elektrickej polarizácie $\boldsymbol{P}$ a vektor magnetizácie $\boldsymbol{M}$ sú dané výrazmi

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \kappa \boldsymbol{E} \qquad\qquad \boldsymbol{M} = \chi \boldsymbol{H}$$

kde

$$\kappa = \varepsilon_r - 1 \qquad\qquad \chi = \mu_r - 1$$

sú bezrozmerná elektrická a magnetická susceptibilita. V odporovo lineárnych prostrediach platí Ohmov zákon (diferenciálny tvar)

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \qquad \text{alebo} \qquad \boldsymbol{E} = \rho \boldsymbol{J}$$

kde σ je konduktivita a $\rho = 1/\sigma$ je rezistivita materiálu.

Elektrické náboje sa v prírode zachovávajú, čoho matematickým vyjadrením je rovnica kontinuity elektrického prúdu

$$\oint_S \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad \text{alebo} \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Podľa rovnice kontinuity prúd tečúci uzavretou plochou S sa rovná časovému úbytku náboja Q uzavretého plochou alebo v ľubovoľnom bode prúdového poľa sa divergencia prúdovej hustoty rovná časovému úbytku hustoty náboja ρ.

V elektromagnetickom poli je sústredená energia s objemovou hustotou

$$w = w_{el} + w_{mag} = \frac{\boldsymbol{E}.\boldsymbol{D}}{2} + \frac{\boldsymbol{B}.\boldsymbol{H}}{2}$$

Úlohy 224 – 230

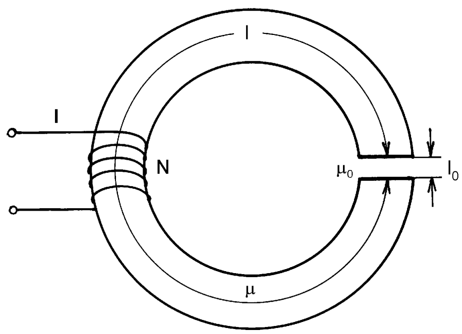
224. Susceptibilita jedného kilomolu hélia je $-2{,}4.10^{-8}$. Dokážte, že to zodpovedá hodnote stredného kvadratického polomeru $1{,}22\,a_0^2$ každej orbity v héliovom atóme, kde a_0 je polomer prvej Bohrovej dráhy vo vodíkovom atóme.

225. Susceptibilita jedného kilomolu látky $NiK_2(SO_4)_2.6H_2O$ je

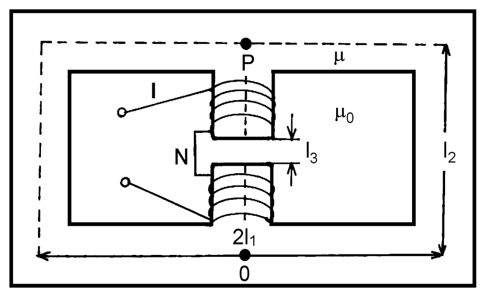
$$\chi = 1{,}6.10^{-2}\,.\,1/T$$

Za predpokladu, že diamagnetický príspevok je zanedbateľný a paramagnetické príspevky sú iba od iónov Ni^{2+}, vypočítajte permanentný dipólový moment pripadajúci na každý Ni^{2+} ión.

226. Na prstenci z mäkkého železa podľa *obr. 226* je navinutých $N = 150$ závitov drôtu, ktorým tečie prúd $I = 5$ A. Prstenec má štrbinu širokú $l_0 = 5$ mm a stredný obvod prstenca je $l = 25$ cm. Pri danom sýtení je permeabilita materiálu prstenca $3\,000\,\mu_0$. Vypočítajte B a H v štrbine prstenca. Rozptyl indukčného toku je zanedbateľný.



Obr. 226



Obr. 227

227. Pre magnetický obvod podľa *obr. 227* platí: počet závitov $N = 150$, prúd vo vinutí $I = 1$ A, šírka štrbiny $l_3 = 1$ cm, $\mu = 1\,000\,\mu_0$, rozmery obvodu $l_1 = l_2 = 10$ cm. Vypočítajte B a H v štrbine. Rozptyl magnetického indukčného toku je zanedbateľný.

228. Na železný prstenec s vnútorným polomerom $R = 10$ cm a vonkajším polomerom $R_1 =$ $= 12$ cm je navinutých 20 závitov drôtu. Využitím magnetizačnej krivky B–H materiálu prstenca podľa *obr. 228* vypočítajte veľkosť prúdu vo vinutí, potrebného pre vytvorenie magnetickej indukcie $B = 1{,}2$ T v strede prierezu prstenca.

229. Anglický fyzik Lord Rayleigh (1842 – 1919) ukázal, že pre nízke hodnoty magnetickej indukcie je hysterézna slučka s koncovými bodmi $\pm B_0$, $\pm H_0$ daná rovnicami

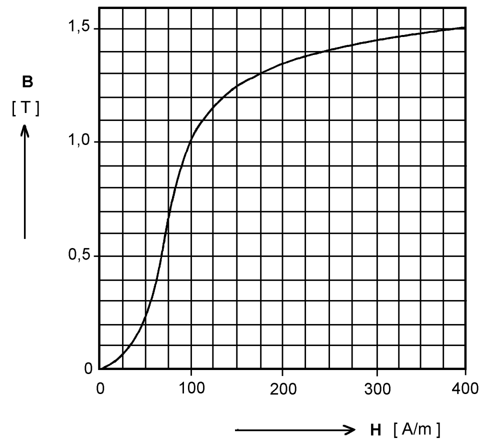
$$B = \mu H + \frac{1}{2}\alpha(H_0^2 - H^2) \qquad \text{(horná polovica slučky)}$$

$$B = \mu H - \frac{1}{2}\alpha(H_0^2 - H^2) \qquad \text{(dolná polovica slučky)}$$

kde $\mu = B_0/H_0$. Dokážte, že hysterézne straty na jednotku objemu vzorky a na jeden magnetizačný cyklus (reprezentované plochou slučky) sú

$$W = \frac{4}{3} a H_0^3$$

Tento výraz platí iba pre nízke hodnoty B_0 (v železe pod hodnotou asi 0,05 T). Pri vyšších hodnotách W sa mení približne s mocninou $B_0^{1,6}$, podľa Steinmetzovho empirického vzťahu.



Obr. 228

230. Pri meraní Hallovho napätia v kovovom sodíku sa ukázalo, že intenzita Hallovho elektrického poľa je 2 500 μV/m pri hustote prúdu v sodíku 10^7 A/m^2 a kolmom magnetickom poli 1 T. Určite objemovú hustotu vodivostných elektrónov v sodíku a porovnajte ju s počtom atómov sodíka na jednotku objemu. Hustota sodíka je ρ = 970 kg/m^3 a atómová hmotnosť M = 23.

9 STRIEDAVÉ ELEKTRICKÉ PRÚDY

9.1 CHARAKTERISTIKY STRIEDAVÝCH ELEKTRICKÝCH PRIEBEHOV

V tejto kapitole sa budeme zaoberať vlastnosťami elektrických napätí a prúdov, ktoré sa menia v čase. Trieda takýchto elektrických priebehov je veľmi široká, budeme sa preto zaoberať iba niektorými vybranými prúdovými a napäťovými priebehmi, ktoré majú najväčší technický význam. S niektorými časovopremennými priebehmi sme sa zoznámili už v predchádzajúcich častiach nášho pojednania. Boli to napríklad prechodové javy v obvode, v ktorom sa nabíja, prípadne vybíja kondenzátor (prechodový jav v *RC* obvode – pozri odsek 5.8) alebo prechodové javy v *RL*, prípadne *RLC* obvodoch (pozri odseky 7.8 a 7.9). Spoločným znakom týchto časových priebehov bola ich nestacionárnosť – prúdy a napätia sa exponenciálne blížili k nejakej stacionárnej hodnote.

Dôležitou triedou časovopremenných napätí a prúdov sú periodické napäťové a prúdové priebehy, ktoré sú z matematického hľadiska periodické funkcie času $y(t)$. Periodickou je taká funkcia času, ktorej hodnoty sa v časových intervaloch T pravidelne opakujú. Pre takúto funkciu teda platí

$$y(t) = y(t + nT) \tag{9.1}$$

kde n je celé číslo. Časový interval T sa nazýva perióda funkcie. Periodické prúdy a napätia majú veľký technicky význam, pretože s periodickými striedavými prúdmi pracuje napríklad elektrická energetika. Rovnako dôležité sú periodické elektrické procesy v obvodovej elektronike, ktorá sa zase využíva v telekomunikácii, regulačnej technike, v počítačových obvodoch a inde. Základná frekvencia (kmitočet) takých prúdov začína pri nule (konštantné prúdy a napätia) a končí v infračervenej oblasti, pri frekvenciách $\sim 10^{12}$ Hz. Pri vyšších frekvenciách stráca pojem elektrického prúdu fyzikálny zmysel. Príklady periodických funkcií sú znázornené na *obr. 9.1*.

Dôležitou matematickou vlastnosťou periodických časových priebehov je možnosť ich rozloženia do nekonečného radu trigonometrických funkcií, ktorý sa nazýva **Fourierov rad** a pre funkciu $y(t)$ má tvar

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right] \tag{9.2}$$

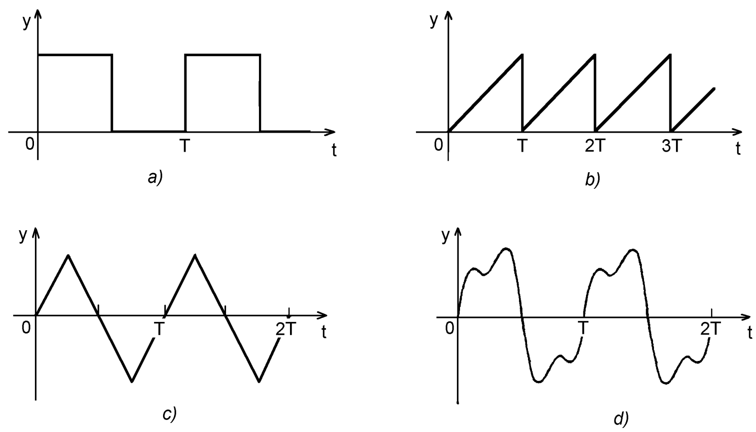
kde a_n, b_n sú Fourierove koeficienty, dané výrazmi

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (9.3a)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (9.3b)$$

a

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad [\mathrm{rad.s^{-1}}] \qquad (9.4)$$



Obr. 9.1

Periodický časový priebeh (v elektronike ho nazývame tiež napäťový alebo prúdový signál) sa teda pre účely jeho analýzy dá rozložiť na nekonečný rad sínusových a kosínusových funkcií uhlového argumentu

$$\Phi_n = n\omega t = 2\pi n\frac{t}{T} \qquad [\mathrm{rad}] \qquad (9.5)$$

Veličina Φ_n sa nazýva **fáza** a ω daná výrazom (9.4) je **uhlová frekvencia** základnej sínusovej alebo kosínusovej zložky, $n\omega$ sú kruhové frekvencie vyšších harmonických zložiek. Okrem kruhovej frekvencie sa pri opise používa lineárna **frekvencia** f, ktorá s kruhovou frekvenciou ω a s periódou T súvisí vzťahom

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \qquad [\mathrm{Hz = s^{-1}}] \qquad (9.6)$$

Frekvencia f v hertzoch (Hz) udáva počet kmitov harmonického priebehu za sekundu.

Rozklad periodického priebehu na jeho frekvenčné zložky sa nazýva harmonická (Fourierova) analýza. Opačný proces – skladanie jednotlivých harmonických zložiek so zodpovedajúcimi amplitúdami podľa výrazov (9.2) a (9.3), ktorý vedie k vytvoreniu periodickej funkcie $y(t)$, nazýva sa Fourierova harmonická syntéza. Koeficienty a_n, b_n predstavujú amplitúdy jednotlivých zložiek signálu, ktoré s rastúcim n klesajú. Existujú aj iné možnosti rozvinutia periodickej funkcie do nekonečného radu, avšak je zaujímavé, že zo všetkých možných rozložení signálu Fourierove koeficienty klesajú najrýchlejšie, čo znamená, že matematický rad (9.2) – Fourierov rad – konverguje najrýchlejšie.

Prvý člen radu $a_0/2$ je konštantný, nezávislý od času, predstavuje konštantné napätie alebo prúd. V mnohých prípadoch je tento člen nulový ($a_0 = 0$). V takom prípade hovoríme, že priebeh $y(t)$ nemá jednosmernú zložku, a práve takýto priebeh nazývame striedavý. Má dôležitú vlastnosť, že jeho **stredná hodnota**

$$\overline{y(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \tag{9.7}$$

sa rovná nule. Skutočne, ak do výrazu (9.7) dosadíme výraz (9.2) pri $a_0 = 0$, dostaneme

$$\overline{y(t)} = \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_0^T \cos n\omega t\,\mathrm{d}t + b_n\int_0^T \sin n\omega t\,\mathrm{d}t\right] = 0 \tag{9.8}$$

pretože pre všetky celé n

$$\int_0^T \sin n\omega t\,\mathrm{d}t = \int_0^T \cos n\omega t\,\mathrm{d}t = 0$$

Priebehy na *obr. 9.1a, b* majú nenulovú jednosmernú zložku, priebehy na *obr. 9.1c, d* jednosmernú zložku nemajú – sú to striedavé priebehy.

Inou dôležitou hodnotou periodickej funkcie je **odmocnina jej strednej kvadratickej hodnoty** alebo **efektívna hodnota** (angl. root mean square value – RMS value)

$$y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^T y^2(t)\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)} \;>\; 0 \tag{9.9}$$

ktorá je vždy nenulová a kladná. Stredná kvadratická hodnota má význam najmä pri výpočte strednej hodnoty výkonu striedavého prúdu.

Nemienime sa tu podrobne zaoberať harmonickou analýzou alebo syntézou elektrických signálov, pre nás je dôležitá skutočnosť, že reálne periodické elektrické signály, napr. v elektronike, alebo prúdy a napätia v elektrickej energetike, sa dajú vyjadriť ako superpozícia jednoduchých harmonických priebehov $\sim\sin n\omega t$ alebo $\sim\cos n\omega t$. Vlastnosti akéhokoľvek periodického priebehu sú teda dané vlastnosťami jednoduchých harmonických elektrických priebehov. Treba zdôrazniť, že Fourierova analýza, prípadne syntéza, nie je iba matematický formalizmus, ale je to aj fyzikálny proces, ktorý možno pomocou elektrických filtrov (spektrálnych analyzátorov), prípadne rôznych elektrických syntezátorov aj prakticky realizovať. Naša analýza striedavých prúdov (a napätí) bude teda založená na analýze vlastností harmonických priebehov.[1]

9.2 HARMONICKÉ NAPÄTIA A PRÚDY

9.2.1 Harmonické napätia na prvkoch *RLC* obvodu

S harmonickými napätiami a prúdmi sme sa v našom pojednaní stretli už dvakrát. Boli to napätia a prúdy, ktoré vznikajú v cievke rotujúcej v statickom magnetickom poli v dôsledku pôsobenia zákona elektromagnetickej indukcie (odsek 7.4), a prúdy tečúce v *RLC* obvode v dôsledku periodického vybíjania a nabíjania kondenzátora pre kritický prípad nulového odporu obvodu $R \to 0$ (odsek 7.9). Bude preto určite dôležité hlbšie analyzovať javy spojené so striedavými prúdmi.

Harmonické napätia a prúdy sa vyjadrujú časovými závislosťami

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t \pm \varphi_u) \tag{9.10a}$$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t \pm \varphi_i) \tag{9.10b}$$

kde u a i sú okamžité hodnoty napätia a prúdu, U_0 a I_0 sú ich amplitúdy, φ_u a φ_i sú fázové posuny napätia a prúdu voči referenčným napäťovým alebo prúdovým priebehom s tou istou frekvenciou a s nulovým fázovým posunom. Ak je takýmto referenčným priebehom napríklad napätie

$$u_0(t) = U_0 \cos \omega t$$

potom napätie u fázovo predbieha napätie u_0, ak jeho fázový posun je $+\varphi_u$ a fázovo zaostáva za u_0, ak jeho fázový posun je $-\varphi_u$. To isté možno povedať o prúde i a jeho fázovom vzťahu k u_0. K vyjadreniu harmonických priebehov možno rovnako využiť aj funkciu sínus, čím sa do vyjadrení (9.10) zavedie iba konštantný fázový posun $\pm \pi/2$, pretože napr.

$$\sin(\omega t + \varphi \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \cos(\omega t + \varphi) \tag{9.11a}$$

a naopak

$$\cos(\omega t + \varphi \mp \frac{\pi}{2}) = \pm \sin(\omega t + \varphi) \tag{9.11b}$$

Striedavé harmonické prúdy tečú v obvodoch, ktoré pozostávajú z odporov R, kapacít C, indukčností L a tie môžu byť viazané vzájomnými indukčnosťami M do zložitých striedavých elektrických sietí. Na jednotlivých prvkoch siete vznikajú striedavé napätia

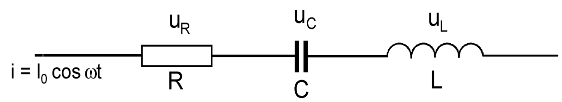
[1] V prípade neperiodických časových priebehov možno funkciu $y(t)$ namiesto Fourierovým radom vyjadriť Fourierovým integrálom. Diskrétne amplitúdy Fourierovho rozvoja sa v ňom nahradia spojitou funkciou frekvencie $J(\omega)$, ktorá sa nazýva spektrálna hustota. Takýmito neperiodickými priebehmi sa nebudeme zaoberať.

s istými amplitúdami a fázovými vzťahmi k iným napätiam alebo prúdom siete. Ako jednoduchý príklad určíme napätia na prvkoch R, L a C, ktoré sú zapojené sériovo v jednej vetve, ktorou tečie harmonický prúd

$$i = I_0 \cos \omega t \tag{9.12}$$

(pozri *obr. 9.2).* Na odpore R podľa Ohmovho zákona vznikne napätie

$$u_R = Ri = RI_0 \cos \omega t = U_{0R} \cos \omega t \tag{9.13}$$



Obr. 9.2

Vidíme, že harmonický prúd a napätie na odpore nie sú fázovo posunuté, inak povedané, napätie a prúd v odpore R sú vo fáze ($\varphi_R = 0$) a amplitúda napätia $U_{0R} = RI_0$.

V úplne inom fázovom vzťahu sú prúdy a napätia na kondenzátore a cievke. Ak sa striedavým prúdom (9.12) nabíja kondenzátor C (pôvodne nenabitý), potom napätie na ňom je dané výrazom

$$u_C = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int i \mathrm{d}t = \frac{I_0}{\omega C}\sin \omega t = U_{0C}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \tag{9.14}$$

t. j. **napätie na kondenzátore zaostáva za prúdom vo fáze o $\varphi_C = -\pi/2$** a amplitúda napätia $U_{0C} = I_0/\omega C$. Vo výraze (9.14) bol využitý vzťah (9.11b). Veličina

$$X_C = \frac{U_{0C}}{I_0} = \frac{1}{\omega C} \qquad [\Omega] \tag{9.15}$$

daná pomerom amplitúd napätia a prúdu, ktorá má rozmer odporu sa nazýva **kapacitná reaktancia**.

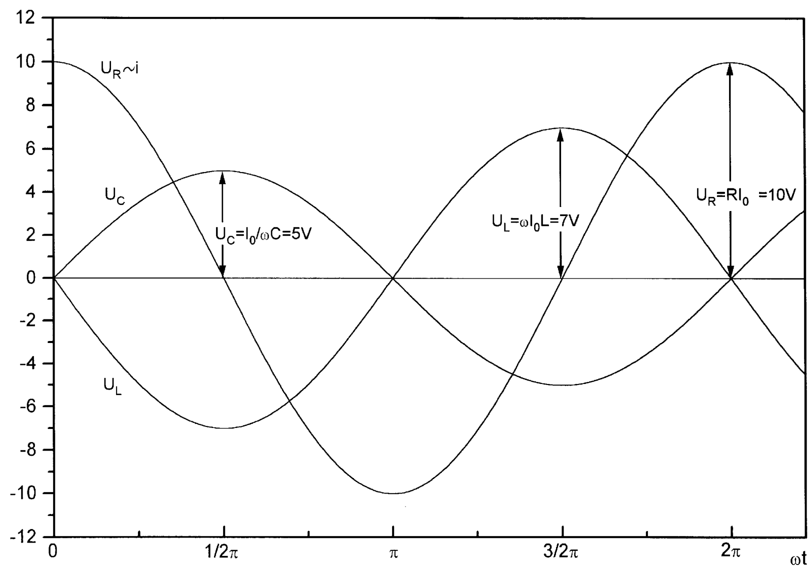
Nakoniec, ak prúd (9.12) tečie indukčnosťou L, samoindukciou na nej vznikne napätie

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\omega L I_0 \sin \omega t = U_{0L}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

teda **napätie na indukčnosti predbieha prúd vo fáze o $\varphi_L = \pi/2$** a amplitúda napätia $U_L = \omega L I_0$. Veličina

$$X_L = \frac{U_{0L}}{I_0} = \omega L \qquad [\Omega] \tag{9.16}$$

sa nazýva **induktívna reaktancia** a má rozmer odporu. Na *obr. 9.3* sú zobrazené časové priebehy všetkých napätí u_R, u_C a u_L vo svojom vzájomnom fázovom vzťahu pre konkrétne numerické hodnoty R-L-C prvkov, frekvencie a amplitúdy prúdu.

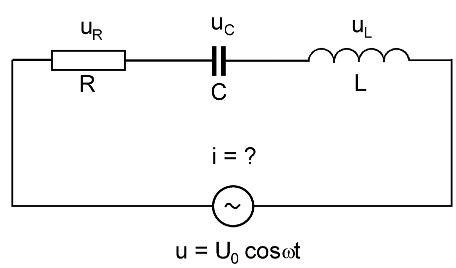


Obr. 9.3

9.2.2 Harmonický prúd v obvode *RLC*

Pozrime sa teraz na problém z inej strany. Na *obr. 9.4* je jednoduchý sériový obvod *RLC*, ktorý je uzavretý zdrojom striedavého napätia

$$u = U_0 \cos \omega t \qquad (9.17)$$



Obr. 9.4

Položme si otázku – aký prúd tečie takýmto obvodom? Pre obvod musí platiť obvodová rovnica, podľa ktorej súčet všetkých napätí, teda napätí zdrojov u, indukovaných napätí na indukčnostiach $L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, odporových ohmických spádov Ri a napätí nabitých kondenzátorov Q/C v uzavretom obvode sa musí rovnať nule (samozrejme s ohľadom na znamienka). Musí teda platiť

$$u - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri + \frac{Q}{C} \qquad (9.18)$$

Po úprave rovnice a jej derivácii, s uvážením, že

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = i$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd i v tvare

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} = -\omega U_0 \sin \omega t \tag{9.19}$$

Z matematického hľadiska je to obyčajná nehomogénna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientmi, a ako je známe, má riešenie pozostávajúce z dvoch častí – je to superpozícia všeobecného riešenia homogénnej rovnice a jedného partikulárneho riešenia nehomogénnej rovnice. Takáto strohá je reč matematiky. Fyzikálny pohľad na problém je oveľa zaujímavejší. Predovšetkým - homogénnu rovnicu sme už riešili v odseku 7.9 [pozri rovnicu (7.71)]. Riešením je nestacionárny prechodový prúd, ktorý s časom (a pomerne rýchle) vymizne. Potom zostane nenulová iba druhá, kvázistacionárna časť riešenia, ktorá je obyčajne predmetom záujmu. Fyzik, na rozdiel od matematika, vie charakter tohto riešenia posúdiť a vie navrhnúť aj jeho tvar bez toho, aby diferenciálnu rovnicu riešil. Možno očakávať, že riešenie, teda prúd, bude tiež harmonickou funkciou, napríklad tvaru

$$i = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \tag{9.20}$$

Takto navrhnuté riešenie sa dosadí do rovnice (9.19) a z tej sa určia neznáma amplitúda prúdu I_0 a fázový posun φ prúdu oproti napätiu. Po dosadení riešenia (9.20) do rovnice (9.19) dostaneme

$$-\omega^2 L I_0 \cos(\omega t - \varphi) - \omega R I_0 \sin(\omega t - \varphi) + \frac{I_0}{C}\cos(\omega t - \varphi) = -\omega U_0 \sin \omega t$$

Ďalší postup je nasledovný: kosínusové a sínusové funkcie rozdielového uhla $\omega t - \varphi$ na ľavej strane rovnice sa vyjadria pomocou príslušných trigonometrických vzťahov. Rovnosť sa upraví na tvar

$$A\cos \omega t + B\sin \omega t = 0$$

Rovnica bude platiť pre všetky t vtedy, ak

$$A = 0 \qquad\qquad B = 0$$

Po vykonaní uvedenej procedúry dostaneme dve podmienky

$$A = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos\varphi - R\sin\varphi = 0$$

$$B = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 \sin\varphi - R I_0 \cos\varphi - U_0 = 0$$

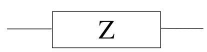
Riešením týchto rovníc dostaneme amplitúdu prúdu v obvode I_0 a jeho fázový posun φ v tvare

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{9.21}$$

Výrazy (9.21) sú odpoveďou na našu otázku o prúde v sériovom *RLC* obvode na *obr. 9.4*. Vidíme, že ako amplitúda prúdu, tak aj jeho fázový posun oproti napätiu sú funkciami frekvencie a vykazujú od frekvencie dosť zvláštnu závislosť. Prúd môže podľa hodnoty frekvencie napätie vo fáze predbiehať alebo za ním zaostávať. Pri istej frekvencii je amplitúda prúdu maximálna a súčasne je pri tejto frekvencii fázový posun nulový. Je to stav rezonancie v obvode, budeme sa mu však venovať v osobitnom odseku. Veličina

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} \qquad [\Omega] \tag{9.22}$$

sa nazýva **impedancia** (zdanlivý odpor) sériového *RLC* obvodu a je daná pomerom amplitúd napätia a prúdu v obvode. Pojem impedancie je kľúčovým pojmom teórie striedavých elektrických obvodov a sietí a má podobný, ale všeobecnejší význam ako pojem odporu v jednosmerných elektrických sieťach. Spolu s fázovým posunom φ úplne určuje elektrické vlastnosti danej vetvy obvodu. Neskôr bude jeho význam ešte rozšírený tak, že bude zahŕňať aj fázové vlastnosti obvodu. V elektrotechnických zapojeniach predstavuje impedancia dvojpól a zakresľuje sa symbolom



9.2.3 Harmonický prúd v obvodoch *RC* a *RL*

Pozrime sa teraz na uvažovaný obvod v dvoch špeciálnych prípadoch:

a) Indukčnosť v obvode nie je, teda $L = 0$. Obvod tvorí sériová dvojica *RC*. V takom prípade výrazy (9.21) pre amplitúdu a fázový posun prejdú na tvar

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z} \qquad \operatorname{tg}\varphi_{RC} = -\frac{1}{\omega CR} \tag{9.23}$$

a impedancia obvodu je

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^2} \qquad [\Omega] \tag{9.24}$$

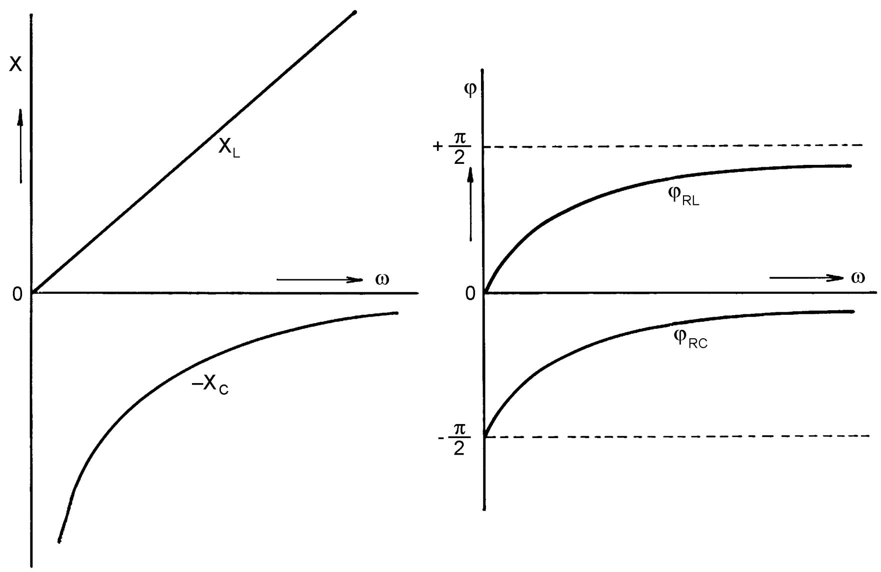
b) Kapacita v obvode nie je, teda $C \to \infty$ a na mieste kondenzátora je skrat. Obvod tvorí sériová dvojica RL a na základe výrazov (9.21) amplitúda prúdu a fázový posun sú dané výrazmi

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{U_0}{Z} \qquad \operatorname{tg} \varphi_{RL} = \frac{\omega L}{R} \tag{9.25}$$

a impedancia

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2} \qquad [\Omega] \tag{9.26}$$

Vidíme, že v prípade a), obvodu RC, prúd predbieha napätie [pozri tiež výraz (9.20)] vo fáze o uhol $\varphi_{RC} = \operatorname{arctg}(-1/\omega RC) > -\pi/2$ v celom pásme možných frekvencií ω od 0 až po ∞. V prípade b), obvodu RL, prúd naopak zaostáva za napätím vo fáze o uhol $\varphi_{RL} = \operatorname{arctg}(\omega L/R) < \pi/2$ takisto v celom frekvenčnom pásme. Impedancia (teda aj pomer U_0/I_0) v prípade a) klesá z nekonečnej hodnoty pri $\omega = 0$ na hodnotu R pri teoreticky nekonečnej frekvencii. V prípade b) rastie z hodnoty R pri nulovej frekvencii na nekonečnú hodnotu pri nekonečnej frekvencii. Frekvenčné závislosti reaktancií $X_L(\omega)$ a $-X_C(\omega)$ a fázové posuvy $\varphi_{RC}(\omega)$, $\varphi_{RL}(\omega)$ pre obvody RC a RL sú graficky znázornené na *obr. 9.5*.



Obr. 9.5

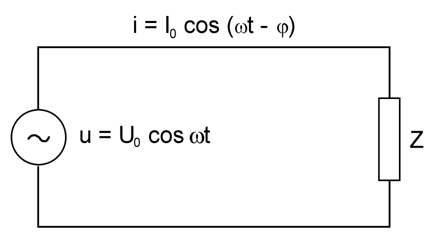
9.3 VÝKON STRIEDAVÉHO PRÚDU

Ak striedavý prúd tečie v obvode, ktorý pozostáva z prvkov R, C a L, dochádza k zložitejšej výmene energie medzi obvodom a zdrojom, než v prípade stáleho prúdu a odporového spotrebiča. V striedavom obvode sa istá časť energie zdroja nevratne spotrebuje na teplo v odpore R. Prvky L a C naproti tomu pôsobia ako zásobníky energie, ktorá vo forme elektrického a magnetického poľa putuje do týchto zásobníkov a z nich naspäť do zdroja, pričom sa energia vymieňa aj medzi týmito zásobníkmi. Z toho vidieť, že nie všetka energia, ktorú by bol zdroj schopný do odporu R odovzdať, sa do neho aj dostane. Presvedčíme sa o tom jednoduchou úvahou. Predpokladajme, že zdroj s napätím

$$u = U_0 \cos \omega t$$

dodáva striedavý prúd do obvodu s impedanciou Z na *obr. 9.6*. Prúd tečúci v obvode je daný výrazom (9.20). Amplitúda I_0 a fázový posuv φ sú dané výrazmi (9.21). Obvodu sa bude odovzdávať elektrická energia W s okamžitým výkonom (pozri odsek 5.5)

$$p(t) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = ui = U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) \tag{9.27}$$



Obr. 9.6

Výraz s využitím trigonometrického vzťahu pre kosínus rozdielového uhla a vzťahu

$$\sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$$

možno upraviť na tvar

$$p(t) = U_0 I_0 [\cos^2 \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \ \sin \omega t \sin \varphi] =$$

$$= U_0 I_0 \cos \varphi \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin \varphi \sin 2\omega t =$$

$$= p_{akt}(t) + p_{reakt}(t) \tag{9.28}$$

Vidíme, že okamžitý výkon je periodická funkcia času s dvojnásobnou frekvenciou 2ω a pozostáva z dvoch častí:

Z **aktívneho (činného) výkonu**

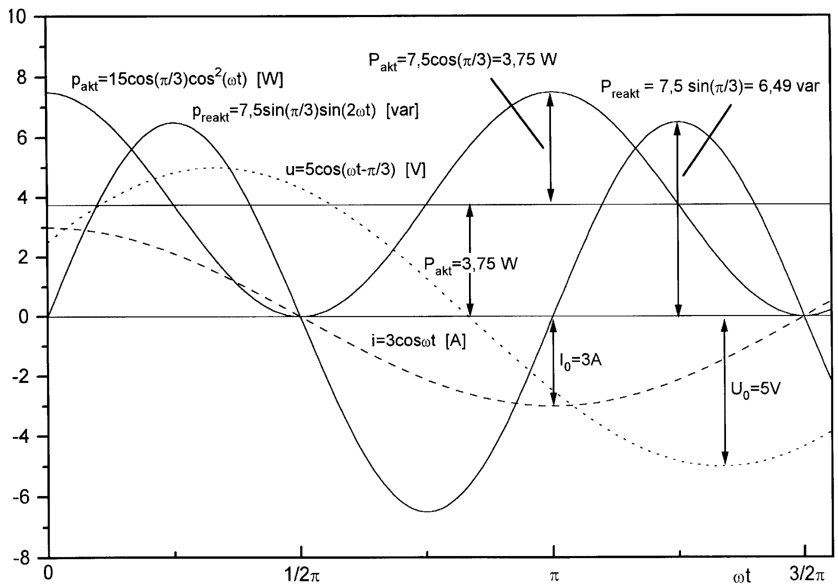
$$p_{akt}(t) = U_0 I_0 \cos\varphi \cos^2 \omega t \qquad (9.29a)$$

a z **reaktívneho (jalového) výkonu**

$$p_{reakt}(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin\varphi \sin 2\omega t \qquad (9.29b)$$

Časové priebehy týchto výkonov sú znázornené spolu s priebehmi napätia u a prúdu i na *obr. 9.7*. Časová stredná hodnota aktívneho okamžitého výkonu je nenulová, daná výrazom

$$P_{akt} = \frac{1}{T}\int_0^T p_{akt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos\varphi \qquad [\mathrm{W}] \qquad (9.30)$$



Obr. 9.7

Hodnota stredného aktívneho výkonu sa dá tiež získať ako grafická stredná hodnota závislosti p_{akt} na *obr. 9.7.* Výpočet aktívneho výkonu súvisí s výpočtom odmocniny strednej kvadratickej (efektívnej) hodnoty funkcie $\sim\cos\omega t$ alebo $\sim\sin\omega t$ s výsledkom $1/\sqrt{2}$ [pozri výraz (9.9)]. Na základe toho možno výkon (9.30) napísať tiež v tvare

$$P_{akt} = U_{ef} I_{ef} \cos\varphi \qquad (9.31)$$

kde

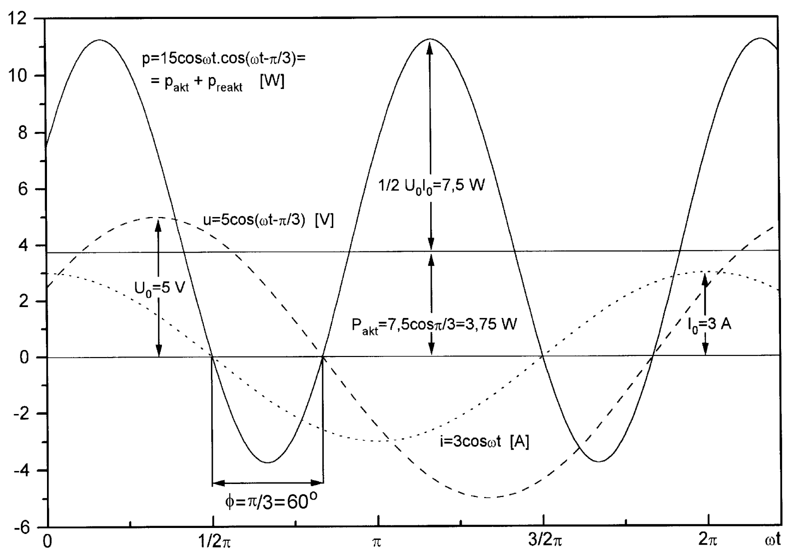
$$U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \qquad I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

sú efektívne hodnoty napätia a prúdu. V energetickej spotrebiteľskej sieti efektívna hodnota napätia jednej fáze je $U_{ef} = 220$ V, amplitúda tohto napätia je $U_0 = \sqrt{2}U_{ef} \approx 311{,}1$ V.

Veličina

$$\cos\varphi = \frac{P_{akt}}{U_{ef} I_{ef}} \tag{9.32}$$

sa nazýva **výkonový faktor** alebo **účinník**. Môže nadobúdať hodnoty od 1 (pre $\varphi = 0$) až po 0 (pre $\varphi = \pi/2$) a je mu úmerný stredný aktívny výkon. Ak obvod pozostáva iba z aktívneho odporu, účinník sa rovná 1 (fázový posuv na odpore je nula, cos 0 = 1) a výkon pri daných U_{ef} a I_{ef} je maximálny. Ak naopak, obvod je reaktívny (výlučne kapacitný alebo induktívny), odovzdávaný výkon sa rovná nule, pretože $\varphi = \pm\pi/2$ a $\cos(\pm\pi/2) = 0$.



Obr. 9.8

Druhá, reaktívna časť okamžitého výkonu (9.28)

$$p_{reakt}(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin\varphi \sin 2\omega t \tag{9.33}$$

je striedavá veličina a má strednú hodnotu rovnú nule, čo vidieť aj z grafu na *obr. 9.7.* Jej amplitúda

$$P_{reakt} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin\varphi \qquad \text{[var]}$$

sa udáva v reaktívnych voltampéroch (var) a môže nadobúdať hodnoty od 0 pre $\varphi =$ $= 0$ po hodnotu $\pm U_{ef} I_{ef}$, ak $\varphi = \pm\pi/2$. Fyzikálne je to výkon, s ktorým energia osciluje bez akéhokoľvek úžitku medzi zdrojom a reaktívnymi prvkami obvodu. Tento výkon zaujíma predovšetkým energetikov, ktorý sa ho snažia redukovať na najmenšiu možnú mieru.

Veličina

$$P_s = U_{ef} I_{ef} \qquad [\mathrm{VA}]$$

sa nazýva **zdanlivý výkon**, ktorý by zdroj dodal do výlučne odporovej záťaže pri rovnakom efektívnom napätí a prúde. Udáva sa vo voltampéroch (VA). Tento výkon sa obyčajne udáva na spotrebičoch pre obchodnú sieť, pretože tie sú dimenzované na istú hodnotu napätia a prúdu. Je zrejmé, že aktívny výkon je vždy menší, nanajvýš rovný zdanlivému výkonu. Na *obr. 9.8* je grafom znázornená časová závislosť celkového okamžitého výkonu $p(t)$ podľa vzťahu (9.28) spolu s priebehom prúdu a napätia.

Ak uvážime, že impedancia Z sa dá vyjadriť podielom

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{ef}}{I_{ef}}$$

potom stredný aktívny výkon (9.29) v impedancii Z sa dá vyjadriť nasledovnými užitočnými výrazmi

$$P_{akt} = Z I_{ef}^2 \cos\varphi = \frac{U_{ef}^2}{Z} \cos\varphi$$

Okrem toho z výrazov (9.21) a (9.22) plynie, že

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

takže aktívny výkon možno vyjadriť aj výrazmi

$$P_{akt} = R I_{ef}^2 = \frac{U_{ef}^2}{Z^2} R$$

9.4 SYMBOLICKO-KOMPLEXNÁ METÓDA ANALÝZY OBVODOV S HARMONICKÝMI STRIEDAVÝMI PRÚDMI[1]

Analýza obvodov striedavých prúdov s využitím trigonometrických funkcií je pri zložitých obvodoch veľmi nepraktická a ťažkopádna, pretože vedie k veľmi komplikovaným a neprehľadným výrazom. Tieto nedostatky odstraňuje elegantná symbolicko-komplexná metóda, ktorej prednosť je aj v tom, že všetky výpočty redukuje na algebraické operácie s komplexnými číslami.

[1] Pred čítaním tohto odseku čitateľovi odporúčam zopakovať si poznatky o komplexných číslach. Ich najdôležitejšie vlastnosti sú zhrnuté v tabuľke 16.

Symbolická-komplexná metóda spočíva na jednoduchých myšlienkach, ktoré možno sformulovať takto:

Striedavý prúd

$i = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ *alebo* $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$

možno pre účely analýzy nahradiť komplexným číslom (obrazom)

$$\boldsymbol{i} = I_0\cos(\omega t + \varphi) + \mathrm{j}I_0\sin(\omega t + \varphi) = I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)} = (I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \boldsymbol{I}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

t. j. číslom, ktorého reálna časť je

$I_0 \cos(\omega t + \varphi)$

a imaginárna časť

$I_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Naopak, ak komplexné číslo

$$\boldsymbol{i} = I_0\,\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)} = I_0\,\mathrm{e}^{j\varphi}\mathrm{e}^{j\omega t} = \boldsymbol{I}_0\mathrm{e}^{j\omega t} = \left(I_{0\,re} + jI_{0\,im}\right)\mathrm{e}^{j\omega t}$$

predstavuje komplexný prúd, potom skutočný prúd je jeho reálnou alebo imaginárnou časťou

V ďalšom sa pokúsime zdôvodniť oprávnenie takéhoto postupu.

Čitateľ, ktorý pozná komplexné čísla a operácie s nimi, si určite všimol, že impedancia sériového *RLC* obvodu daná výrazom (9.22) a jej fázový uhol podľa (9.21) má charakter amplitúdy a fázy komplexného čísla. Takéto komplexné číslo možno napísať v tvare

$$\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + \mathrm{j}(X_L - X_C) \tag{9.34}$$

alebo

$$\boldsymbol{Z} = |\boldsymbol{Z}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{9.35}$$

kde skutočne

$$|\boldsymbol{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{9.36}$$

je absolútna hodnota komplexného čísla, teda impedancia a

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}\{\boldsymbol{Z}\}}{\mathrm{Re}\{\boldsymbol{Z}\}} = \mathrm{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{9.37}$$

je jeho fáza, teda fázový posuv.

Tabuľka 16

Najdôležitejšie vlastnosti komplexných čísel

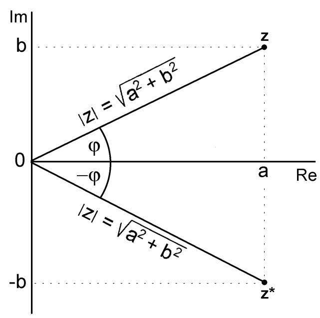
Komplexným číslom nazývame výraz tvaru

$$\boldsymbol{z} = a + \mathrm{j}b = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{z}\} + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\{\boldsymbol{z}\}, \quad ^{\times})$$

(**algebraický tvar komplexného čísla**), kde a a b sú reálne čísla (kladné alebo záporné) a j je imaginárna jednotka definovaná ako

$$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$$

Re($\boldsymbol{z}$) = a je reálna časť komplexného čísla a jIm($\boldsymbol{z}$) = jb je jeho imaginárna časť. Graficky možno komplexné číslo znázorniť ako bod $\boldsymbol{z}$ v komplexnej (Gaussovej) rovine podľa obrázka. Pre imaginárnu jednotku platí



$$\mathrm{j}^2 = -1, \quad \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j}, \quad \mathrm{j}^4 = +1 \quad \text{a ďalej} \quad \mathrm{j}^{4n+k} = \mathrm{j}^k$$

kde n a k sú celé kladné čísla. Tiež platí

$$\frac{1}{\mathrm{j}} = -\,\mathrm{j}$$

Trigonometrický (polárny) tvar komplexného čísla

$$\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{z}|(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi), \quad \text{kde} \quad |\boldsymbol{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

je absolútna hodnota komplexného čísla a φ je jeho fáza alebo argument. Platí (pozri obrázok)

$$a = |\boldsymbol{z}|\cos\varphi \qquad\qquad b = |\boldsymbol{z}|\sin\varphi$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\{\boldsymbol{z}\}}{\mathrm{Re}\{\boldsymbol{z}\}} = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$$

Exponenciálny tvar komplexného čísla

$$\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{z}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

kde e je základ prirodzených logaritmov a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi$$

je Eulerov vzťah, z ktorého plynie

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = 1 \qquad \mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \pm\,\mathrm{j} \qquad \mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\pi} = 1 \qquad \mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\frac{3}{2}\pi} = \mp\,\mathrm{j} \qquad \mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}2\pi} = 1$$

a tiež
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} = (\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \mathrm{j}\sin m\varphi$$

(Moivreov vzorec). Dve komplexné čísla sú komplexne združené, ak sa ich reálne časti rovnajú a imaginárne časti sa líšia znamienkom. K číslu $\boldsymbol{z}$ je komplexne združené číslo $\boldsymbol{z}^*$ dané výrazom

$$\boldsymbol{z}^* = a - \mathrm{j}b = |\boldsymbol{z}|(\cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi) = |\boldsymbol{z}|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$

a v obrázku je graficky znázornené bodom $\boldsymbol{z}^*$. Platí

$$\boldsymbol{z}.\boldsymbol{z}^* = |\boldsymbol{z}|^2 \qquad \text{a} \qquad \frac{\boldsymbol{z}^*}{|\boldsymbol{z}|} = \frac{|\boldsymbol{z}|}{\boldsymbol{z}}$$

Derivácia a integrál komplexnej funkcie času $\boldsymbol{I}(t) = I_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega\boldsymbol{I} \qquad\qquad \int \boldsymbol{I}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\boldsymbol{I}$$

$^{\times}$) Komplexné čísla sú písané tučnými písmenami podobne ako vektory.

Predpokladajme teraz, že pre nejakú vetvu obvodu sú zadané komplexné napätie a prúd v tvare

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{I}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{9.38}$$

kde

$$\boldsymbol{U}_0 = |\boldsymbol{U}_0|\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{I}_0 = |\boldsymbol{I}_0|\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} \tag{9.39}$$

sú ich komplexné amplitúdy a φ_u, φ_i sú fázové posuvy od nejakého referenčného priebehu. Absolútne hodnoty komplexných amplitúd sú reálne amplitúdy napätia a prúdu, teda

$$|\boldsymbol{U}_0| = U_0 \qquad \text{a} \qquad |\boldsymbol{I}_0| = I_0$$

Vydeľme teraz komplexné napätie komplexným prúdom. Dostaneme podiel

$$\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{i}} = \frac{\boldsymbol{U}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\boldsymbol{I}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} = \frac{\boldsymbol{U}_0}{\boldsymbol{I}_0} = \frac{U_0}{I_0}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}} = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)} = \boldsymbol{Z} \tag{9.40}$$

ktorý je komplexným číslom $\boldsymbol{Z}$ a jeho absolútna hodnota

$$Z = \frac{U_0}{I_0}$$

udáva práve impedanciu tej časti obvodu, v ktorej pri napätí u tečie prúd i. Fáza $\varphi_u - \varphi_i$ komplexného čísla $\boldsymbol{Z}$ je práve fázový posuv prúdu oproti napätiu z výrazov (9.38) a (9.39). **Komplexná veličina $\boldsymbol{Z}$ daná všeobecným výrazom (9.40) sa nazýva komplexná impedancia, ktorá úplne charakterizuje vybranú vetvu obvodu**.

Túto vlastnosť komplexných výrazov (9.38) až (9.40) si na konci 19. storočia – v roku 1893 – všimol anglický elektrotechnický inžinier Oliver Heaviside (1850 – 1925), ktorý sa považuje za pôvodcu symbolicko-komplexnej metódy.

Na ilustráciu vypočítame teraz komplexnú impedanciu (9.34) *RLC* obvodu na *obr. 9.4*. Rovnicu (9.18) prepíšeme do tvaru

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = u$$

Reálne napätie a prúd nahradíme komplexnými výrazmi podľa (9.38), vykonáme integráciu a deriváciu (pozri tabuľku 16) a dostaneme algebraickú rovnicu

$$R\boldsymbol{I}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\boldsymbol{I}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{j}\,\omega L\boldsymbol{I}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \boldsymbol{U}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

po úprave

$$\boldsymbol{I}_0\left[R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] = \boldsymbol{U}_0$$

alebo

$$\frac{\boldsymbol{U}_0}{\boldsymbol{I}_0} = \boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

9.5 KOMPLEXNÝ VÝKON

Pri práci s komplexnými obrazmi napätí a prúdov je výhodné zaviesť komplexnú veličinu, ktorá sa nazýva komplexný výkon. Samotná veličina nemá fyzikálny význam, lebo všetky formy elektrického výkonu (aktívny, reaktívny, zdanlivý) sú matematicky aj fyzikálne reálne veličiny. Komplexný výkon má tú výhodu, že je vyjadrený prostredníctvom komplexných amplitúd prúdu a napätia, pričom jeho reálna časť priamo udáva stredný aktívny výkon.

Nech teda na nejakej impedancii napätie a prúd majú obrazy

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = (U_{re} + \mathrm{j}U_{im})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{I}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = (I_{re} + \mathrm{j}I_{im})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

kde

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \cos\omega t + \mathrm{j}\,\sin\omega t$$

Na impedancii je reálne napätie

$$u = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{u}\} = U_{re}\cos\omega t - U_{im}\sin\omega t$$

a tečie ňou reálny prúd

$$i = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{i}\} = I_{re}\cos\omega t - I_{im}\sin\omega t$$

Okamžitý výkon v impedancii je daný súčinom posledných dvoch výrazov, teda

$$p = ui = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{u}\}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{i}\} = U_{re}I_{re}\cos^2\omega t + U_{im}I_{im}\sin^2\omega t - (U_{re}I_{re} + U_{im}I_{im})\cos\omega t\,\sin\omega t$$

Stredovaním okamžitého výkonu za periódu dostaneme stredný aktívny výkon v tvare

$$P_{str} = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\,U_{re}I_{re} + U_{im}I_{im})$$

pretože stredná hodnota funkcií $\cos^2\omega t$ a $\sin^2\omega t$ sa rovná 1/2 a stredná hodnota funkcie $\cos\omega t\sin\omega t$ je nula. Možno sa presvedčiť, že výsledok integrácie je reálnou časťou komplexného výrazu

$$\boldsymbol{P}_{kompl} = \frac{1}{2}\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{I}_0^* = \boldsymbol{U}_{ef}\boldsymbol{I}_{ef}^* \qquad (9.41)$$

alebo jeho komplexne združeného výrazu

$$\boldsymbol{P}_{kompl}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{U}_0^*\boldsymbol{I}_0 = \boldsymbol{U}_{ef}^*\boldsymbol{I}_{ef} \qquad (9.42)$$

Stredný výkon teda udáva reálna časť komplexného výkonu daného výrazmi (9.41) alebo (9.42)

$$P_{str} = \mathrm{Re}\{\, \boldsymbol{P}_{kompl} \,\} = \mathrm{Re}\{\, \boldsymbol{P}^{*}_{kompl} \,\} \tag{9.43}$$

Z uvedeného postupu a výsledku vidíme, že ak sú prúd a napätie dané ich obrazmi, netreba pri výpočte výkonu počítať najprv reálne veličiny a z nich výkon, ale možno použiť priamo výrazy (9.41) až (9.43).

Ak si uvedomíme, že komplexná impedancia je

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{U}_0}{\boldsymbol{I}_0}$$

tak výrazy pre komplexný výkon môžeme napísať niekoľkými ďalšími spôsobmi, a to

$$\boldsymbol{P}_{kompl} = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{I}_0\right|^2 \boldsymbol{Z} = \frac{1}{2}\frac{\left|\boldsymbol{U}_0\right|^2}{\boldsymbol{Z}} = \left|\boldsymbol{I}_{ef}\right|^2 \boldsymbol{Z} = \frac{\left|\boldsymbol{U}_{ef}\right|^2}{\boldsymbol{Z}} \tag{9.44}$$

Na ilustráciu výpočtu výkonu rôznymi spôsobmi vypočítame nasledovný príklad:

V nejakej impedancii tečie striedavý prúd

$$i = 0{,}2\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \qquad \text{[A]}$$

a napätie na nej je

$$u = 10\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right) \qquad \text{[V]}$$

a) Vypočítajte okamžitý výkon v impedancii v čase $t = 0$,

b) vypočítajte stredný výkon v impedancii,

c) vytvorte komplexné amplitúdy napätia a prúdu[1]*, vypočítajte komplexný výkon a stredný výkon.*

Riešenie:

a) Okamžitý výkon v čase $t = 0$ je

$$p = (ui)_{t=0} = \left(10\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(-0{,}2\sin\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}924 \text{ W}$$

a vidíme, že práve vtedy *impedancia odovzdáva zdroju energiu* s výkonom 0,924 W.

b) Stredný výkon spotrebovaný v impedancii (v záťaži)

$$P_{str} = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,\mathrm{d}t = 2\frac{1}{T}\int_0^T \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}t = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{6}\right) \text{ W} = 0{,}61 \text{ W}$$

---

[1] V elektrotechnickej literatúre sa komplexné amplitúdy napätia a prúdu nazývajú aj fázory a zobrazujú sa šípkami podobne ako vektory.

c) Komplexné amplitúdy napätia a prúdu (fázory) sú

$$\boldsymbol{U}_0 = 10\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{8}}\ \mathrm{V} \qquad\qquad \boldsymbol{I}_0 = 0{,}2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{6}}\ \mathrm{A}$$

a komplexne združený prúd

$$\boldsymbol{I}_0^* = 0{,}2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{6}}\ \mathrm{A}$$

Komplexný výkon

$$\boldsymbol{P}_{kompl} = \frac{1}{2}\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{I}_0^* = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{6}\right)}\ \mathrm{W}$$

z čoho stredný výkon

$$P_{str} = \mathrm{Re}\{\,\boldsymbol{P}_{kompl}\,\} = \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{W} = 0{,}61\ \mathrm{W}$$

9.5.1 Objemové harmonické prúdy v nedokonalých dielektrikách. Stratový uhol dielektrika. Objemová hustota výkonu

Ak sa v nedokonalom dielektriku (alebo v nedokonalom vodiči) s vodivosťou σ a permitivitou ε vytvorí harmonické elektrické pole s intenzitou

$$E = E_0 \cos\omega t$$

bude v ňom pod účinkom tohto poľa tiecť harmonický elektrický prúd, ktorého hustota pozostáva z dvoch častí: z hustoty ohmického prúdu σE a z hustoty posuvného prúdu $\partial D/\partial t$, kde $D = \varepsilon_0\varepsilon_r E$ je elektrická indukcia (pozri odseky 6.3 a 8.2.3). Celková prúdová hustota je daná súčtom týchto hustôt. Keďže hustota vodivého prúdu je úmerná $\cos\omega t$ a hustota posuvného prúdu je úmerná $\sin\omega t$, sú tieto hustoty posunuté vo fáze o $\pi/2$, a preto sa na vyjadrenie ich súčtu výnimočne dobre hodia komplexné veličiny. Nech teda obrazom intenzity elektrického poľa je komplexná veličina

$$\boldsymbol{E} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{9.45}$$

Ak symbolom J_v označíme amplitúdu prúdovej hustoty vodivého prúdu, potom možno napísať

$$J_v\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \sigma\boldsymbol{E} = \sigma E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

a podobne, ak $\boldsymbol{J}_p$ je komplexná amplitúda prúdovej hustoty posuvného prúdu, potom

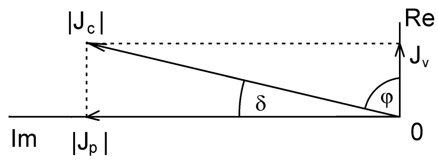
$$\boldsymbol{J}_p\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon\boldsymbol{E} = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

Obidve hustoty sú fázovo posunuté o $\pi/2$ ($\boldsymbol{J}_p$ predbieha $\boldsymbol{J}_v$) podľa *obr. 9.9* a ich absolútne veľkosti sú

$$J_v = \sigma E_0 \qquad \text{a} \qquad J_p = \omega\varepsilon E_0$$

Komplexná amplitúda celkovej hustoty prúdu $\boldsymbol{J}_c$ v dielektriku (ktorý napr. vytvára magnetické pole) je daná výrazom

$$\boldsymbol{J}_c = \boldsymbol{J}_v + \boldsymbol{J}_p = \sigma E_0 + \mathrm{j}\,\omega\varepsilon E_0 = (\sigma + \mathrm{j}\,\omega\varepsilon)E_0 \qquad [\mathrm{A.m^{-2}}] \tag{9.46}$$



Obr. 9.9

Komplexný výraz v zátvorke má charakter komplexnej konduktivity materiálu pri frekvencii ω

$$\boldsymbol{y} = \sigma + \mathrm{j}\,\omega\varepsilon \tag{9.47}$$

Je to jedna z dôležitých elektrických charakteristík materiálu. Pre dobre vodivé materiály pri nepríliš vysokých frekvenciách je reálna časť podstatne väčšia ako imaginárna, teda

$$\sigma \gg \omega\varepsilon$$

V takých materiáloch (patrí k ním väčšina kovov) je posuvný prúd zanedbateľný. Naopak, v dobrých dielektrikách je konduktivita σ nízka oproti "vodivosti posuvného prúdu" $\omega\varepsilon$, teda

$$\sigma \ll \omega\varepsilon$$

Vodivý prúd je malý, a tým sú malé aj ohmické straty. Sú to vhodné materiály na izolačné účely a ako dielektriká v kondenzátoroch.

Na charakteristiku stratových vlastností látok sa zavádza uhol $\delta = \pi/2 - \varphi$, kde φ je fáza komplexného čísla (9.47). Uhol δ sa nazýva **stratový uhol dielektrika** (pozri tiež odsek 11.2). Tangens tohto uhla je daný pomerom veľkosti vodivého a posuvného prúdu alebo reálnej konduktivity σ a "konduktivity" posuvného prúdu $\omega\varepsilon$, teda

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{J_v}{|\boldsymbol{J}_p|} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \tag{9.48}$$

(pozri *obr. 9.9*). Dobré vodiče majú $\mathrm{tg}\,\delta$ veľmi veľký, dobré dielektriká ho majú naopak veľmi malý. Pre posúdenie veľkosti $\mathrm{tg}\,\delta$ určíme jeho veľkosť pre meď ako vynikajúci vodič a tavený kremeň ako vynikajúci izolant (dielektrikum). Meď má konduktivitu $\sigma = 5{,}8.10^7$ S/m a relatívnu permitivitu blízku 1, takže

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \approx \frac{6{,}5.10^{19}}{\omega}$$

Tento výraz je pre všetky do úvahy prichádzajúce frekvencie striedavých prúdov veľmi veľký. Tavený kremeň má konduktivitu $\sigma < 10^{-17}$ S/m a relatívnu permitivitu $\varepsilon_r \approx 4$. Tangens δ je teda

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \approx \frac{2{,}8.10^{-7}}{\omega}$$

a je naopak, pre všetky frekvencie určite oveľa menší ako 1, teda kremeň je materiál, ktorý prakticky v celom pásme frekvencií vykazuje iba vodivosť posuvného prúdu. Skutočné straty dielektrík sú však vždy väčšie ako teoretické, pretože vodivosť je ovplyvnená mnohými ďalšími faktormi. Tangens stratového uhla dielektrík je zriedkakedy menší ako cca 10^{-4}. V tabuľke 17 sú uvedené niektoré materiály, ich permitivity a tgδ pre vybrané frekvencie pri teplote blízkej izbovej. Straty dielektrík sa merajú špeciálnym (Scheringovým) mostom, v ktorom jednu z vetiev tvorí kondenzátor naplnený skúmaným stratovým dielektrikom (pozri úlohu 248).

Tabuľka 17[1]

Látka	ε_r	**10^4.tgδ**	**Frekvencia [Hz]**
Voda	78,2	400	10^6
Etylalkohol	24,5	900	10^6
Jantár	2,65	56	10^6
Parafín	2,25	2	10^6
Kremeň (tavený)	3,8	1	10^{10}
Sľuda	7	2	10^{10}
Polyetylén	2,26	2	10^6
Polystyrén	2,56	0,7	10^6
Teflon*	2,02	3,7	10^{10}
PMMA*	2,6	140	10^{10}
PVC*	2,75	120	10^{10}
Ebonit*	4,0	250	10^{10}
$BaTiO_3$	2 820	40	10^6

Prúd, ktorý tečie vodivým prostredím, toto prostredie ohrieva, teda do neho dodáva energiu s istým výkonom. Stredná komplexná objemová hustota výkonu je daná jednou polovicou súčinu amplitúdy intenzity E_0 [výraz (9.45)] a komplexnej amplitúdy celkovej prúdovej hustoty $\boldsymbol{J}_c$ [výraz (9.46)], teda

$$\boldsymbol{p}_{kompl} = \frac{E_0\boldsymbol{J}_c}{2} = E_{ef}\boldsymbol{J}_{ef} \qquad [\mathrm{W.m^{-3}}] \qquad (9.49a)$$

alebo komplexná veličina

[1] Dáta použité v tabuľke boli prevzaté z knihy Hippel, A. R. von: Dielectric Materials and Applications, Cambridge, Mass. 1954. Dáta označené hviezdičkou pochádzajú z autorových meraní (Tirpák, A. – nepublikované, Katedra rádiofyziky MFF UK Bratislava).

$$\boldsymbol{p}^*_{kompl} = \frac{E_0 \boldsymbol{J}_c^*}{2} = E_{ef} \boldsymbol{J}_{ef} \tag{9.49b}$$

Predpokladáme pritom, že materiál je izotropný, že vektory prúdovej hustoty a intenzity elektrického poľa sú kolineárne, pretože v opačnom prípade by súčiny boli skalárne. Ak vezmeme do úvahy rovnicu (9.46), t.j. že

$$\boldsymbol{J}_c = \boldsymbol{y} E_0 = (\sigma + \mathrm{j}\omega\varepsilon) E_0$$

potom výrazy (9.49) možno prepísať tvarmi

$$\boldsymbol{p}_{kompl} = \frac{E_0^2 \boldsymbol{y}}{2} = E_{ef}^2 \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{J}_c^2}{2\boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{J}_{ef}^2}{\boldsymbol{y}} \tag{9.50a}$$

$$\boldsymbol{p}^*_{kompl} = \frac{E_0^2 \boldsymbol{y}^*}{2} = E_{ef}^2 \boldsymbol{y}^* = \frac{\boldsymbol{J}_c^{*2}}{2\boldsymbol{y}^*} = \frac{\boldsymbol{J}_{ef}^{*2}}{\boldsymbol{y}^*} \tag{9.50b}$$

Alebo po dosadení $\boldsymbol{y} = \sigma + \mathrm{j}\omega\varepsilon$

$$\boldsymbol{p}_{kompl} = \frac{E_0^2}{2}(\sigma + j\omega\varepsilon) \qquad\qquad \boldsymbol{p}^*_{kompl} = \frac{E_0^2}{2}(\sigma - j\omega\varepsilon)$$

Reálna objemová hustota výkonu je daná reálnymi časťami posledných dvoch výrazov, teda

$$p = \frac{E_0^2 \sigma}{2} = E_{ef}^2 \sigma \qquad [\mathrm{W.m^{-3}}] \tag{9.51}$$

Ak je posuvný prúd zanedbateľný, t. j. materiál je dobrý vodič a $\omega\varepsilon \ll \sigma$, potom $\boldsymbol{y} \approx \sigma$, $\boldsymbol{J}_c \approx J_v \approx \sigma E_0$, a objemová hustota výkonu je reálna, daná tiež výrazom (9.51).

9.6 STRIEDAVÉ ELEKTRICKÉ SIETE. POJEM ADMITANCIE A SUSCEPTANCIE

Z prvkov R, L, C, M a zdrojov harmonických alebo periodických napätí a prúdov možno pre účely elektronickej a elektrotechnickej praxe zostavovať elektrické siete, ktoré majú podobné topologické vlastnosti ako jednosmerné siete zostavené z odporov a jednosmerných zdrojov EMN. Analýza jednosmerných a analýza striedavých elektrických sietí majú mnoho spoločných znakov. Pre účely analýzy možno uvedené prvky formálne spájať do dvojpólov (vetiev), ktorých obrazmi sú ich komplexné impedancie $\boldsymbol{Z}$. V rámci dvojpólu môžu byť prvky zapojené sériovo, paralelne alebo sériovo-paralelne, prípadne aj zložitejšie (mostíky). Impedancia $\boldsymbol{Z}$ v striedavej sieti zodpovedá odporu R v jednosmernej. Ako už bolo skôr zavedené, komplexná impedancia $\boldsymbol{Z}$ udáva pomer komplexných amplitúd napätia a prúdu a plne opisuje vlastnosti vetvy, ktorú reprezentuje. Vo všeobecnosti pozostáva z dvoch častí

$$\boldsymbol{Z} = R \pm \mathrm{j}X \tag{9.52}$$

pričom prvá, reálna časť, je **odpor** (**rezistancia**) R, ktorý je v lineárnej teórii vždy kladný. Druhá, imaginárna časť, sa nazýva **reaktancia** $\pm\mathrm{j}X$. Ak je kladná ($+\mathrm{j}X$), vtedy fáza impedancie je kladná, t. j.

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{U}_0}{\boldsymbol{I}_0} = Z\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{9.53}$$

čo znamená, že *napätie predbieha prúd* (alebo *prúd zaostáva za napätím*) vo fáze o uhol φ na danej impedancii. Tá musí pozostávať z odporu a zo sériovej induktívnej reaktancie. Môže ňou byť napríklad cievka s indukčnosťou L a jej imaginárnou induktívnou reaktanciou $\boldsymbol{X}_L = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}X_L$, ale aj napríklad sériová kombinácia cievky a kondenzátora s kapacitou C a celkovou induktívnou reaktanciou sériového spojenia

$$\boldsymbol{X}_{ind} = \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \mathrm{j}(X_L - X_C)$$

ak $X_C = 1/\omega C < X_L$.

V prípade, ak je reaktancia záporná ($-\mathrm{j}X$), je fáza impedancie záporná, t. j.

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{U}_0}{\boldsymbol{I}_0} = Z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} \tag{9.54}$$

a *napätie na impedancii zaostáva za prúdom* (alebo *prúd predbieha napätie*) vo fáze o uhol φ. Obvod pozostáva z odporu a zo sériovej kapacitnej reaktancie, napríklad sériového kondenzátora s kapacitou C a jeho reaktanciou $\boldsymbol{X}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = -\mathrm{j}X_C$. Môže to však byť aj spomínaná sériová kombinácia L-C s reaktanciou

$$\boldsymbol{X}_{kap} = \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = -\mathrm{j}(X_C - X_L)$$

ak $X_C > X_L$.

Impedancie možno spájať podobne ako rezistory. Pri sériovom spojení n impedancií $\boldsymbol{Z}_i$ ($i = 1, 2, 3. \dots n$) je výsledná impedancia $\boldsymbol{Z}$ daná súčtom všetkých impedancií, teda

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 + \dots + \boldsymbol{Z}_n \tag{9.55}$$

Pri paralelnom spájaní impedancií sa sčítavajú ich prevrátené hodnoty. Prevrátenou hodnotou impedancie $\boldsymbol{Z}$ je komplexná veličina

$$\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}} = \frac{\boldsymbol{I}_0}{\boldsymbol{U}_0} \qquad [\mathrm{S}] \tag{9.56}$$

ktorá sa nazýva **admitancia**. Paralelné spojenie n impedancií (admitancií) predstavuje výslednú admitanciu

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{Y}_2 + \ldots + \boldsymbol{Y}_n \tag{9.57}$$

Podobne ako impedancia, aj admitancia pozostáva z dvoch častí, a možno ju vyjadriť ako súčet

$$\boldsymbol{Y} = G \mp \mathrm{j}B \tag{9.58}$$

kde G je reálna **vodivosť** alebo **konduktancia** a $\mp \mathrm{j}B$ je imaginárna **susceptancia**. Susceptancia so záporným znamienkom má induktívny charakter a s kladným znamienkom má kapacitný charakter.[1] Reálna vodivosť a imaginárna susceptancia sa chápu zapojené paralelne. Kondenzátor s kapacitou C má kapacitnú susceptanciu $\boldsymbol{B}_C = \mathrm{j}\omega C = \mathrm{j}B_C$, cievka s indukčnosťou L má induktívnu susceptanciu $\boldsymbol{B}_L = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega L} = -\mathrm{j}B_L$. Vo všeobecnosti medzi $\boldsymbol{Z}$ a $\boldsymbol{Y}$ platí vzťah

$$\frac{1}{\boldsymbol{Z}} = \frac{1}{R \pm \mathrm{j}X} = \frac{R}{R^2 + X^2} \mp \mathrm{j}\frac{X}{R^2 + X^2} = G \mp \mathrm{j}B = \boldsymbol{Y} \tag{9.59}$$

z čoho

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = \frac{X}{R^2 + X^2} \tag{9.60a}$$

a podobne

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \qquad X = \frac{B}{G^2 + B^2} \tag{9.60b}$$

9.6.1 Kirchhoffove zákony pre elektrické siete s harmonickými prúdmi

Analýza striedavých elektrických sietí sa zakladá na použití Ohmovho zákona v symbolickom tvare

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{I} \tag{9.61}$$

a Kirchhoffových zákonov pre komplexné amplitúdy prúdov a napätí. Ich matematické vyjadrenia pre uzly v sieti a slučky sú dané výrazmi

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}_i = 0 \tag{9.62}$$

---

[1] Čitateľa chcem upozorniť, že v obvodovej elektronike sa pojem "induktívny" alebo "kapacitný" charakter reaktancie, či susceptancie nemusí nutne spájať s cievkami a kondenzátormi, ktoré akumulujú magnetickú resp. elektrickú energiu a súčasne posúvajú fázu medzi napätím a prúdom. V elektronike možno realizovať *syntetické indukčnosti*, ktoré posúvajú fázu podobne ako indukčnosť, ale fyzikálne sa v nich nehromadí energia vo forme magnetického poľa. V elektronických zapojeniach sa tak možno vyhnúť cievkam ako technologicky nepríjemným súčiastkam.

Tabuľka 18

Terminológia

Časť obvodu (prvok alebo vetva zložená z prvkov) medzi dvoma uzlami je plne charakterizovaná komplexnou impedanciou

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{I}} = R \pm \mathrm{j}X \qquad [\Omega]$$

čiže

$$_{\text{impedancia}}\boldsymbol{Z} = {}_{\substack{\text{odpor}\\ \text{(rezistancia)}}} R \pm \mathrm{j}\, {}_{\substack{\text{induktívna reaktancia } X_L\\ \text{kapacitná reaktancia } X_C}}$$

schematická značka pre impedanciu:

$$-\boxed{\boldsymbol{Z}}-$$

Recipročná hodnota komplexnej impedancie sa nazýva komplexná admitancia $\boldsymbol{Y}$ a platí

$$\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}} = \frac{\boldsymbol{Z}^*}{|\boldsymbol{Z}|^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} \mp \mathrm{j}\frac{X}{R^2 + X^2} = G \mp \mathrm{j}B$$

teda

$$\boldsymbol{Y} = G \mp \mathrm{j}B \qquad [\mathrm{S}]$$

alebo

$$_{\text{admitancia}}\boldsymbol{Y} = {}_{\substack{\text{vodivosť}\\ \text{(konduktancia)}}} G \mp \mathrm{j}\, {}_{\substack{\text{induktívna susceptancia } B_L\\ \text{kapacitná susceptancia } B_C}}$$

Schematická značka pre admitanciu je rovnaká ako pre impedanciu

pre n prúdov v uzle a

$$\sum_k \boldsymbol{U}_k = \sum_j \boldsymbol{I}_j \boldsymbol{Z}_j \qquad (9.63)$$

pre komplexné amplitúdy napätí $\boldsymbol{U}_k$ zdrojov v slučke a zodpovedajúce amplitúdy prúdov $\boldsymbol{I}_j$ a impedancie $\boldsymbol{Z}_j$ v jednotlivých vetvách slučky.

Spôsob použitia Kirchhoffových zákonov na striedavé siete je formálne úplne rovnaký ako v prípade jednosmerných sietí (pozri kapitolu 5.7). Výnimku tvoria siete so vzájomnými indukčnosťami, kde treba použiť zvláštny prístup, ktorý bude opísaný ďalej. Rovnako možno použiť metódy obvodových prúdov a uzlových potenciálov. Treba však upozorniť na dve dôležité odlišnosti striedavých sietí:

1. Veličiny, ktoré vystupujú v rovniciach, sú komplexné čísla. Podľa pravidla, že dve komplexné čísla sa sebe rovnajú vtedy a len vtedy, ak sa rovnajú zvlášť reálne a zvlášť imaginárne časti, plynie, že každá komplexná rovnica predstavuje v skutočnosti dve rovnice, z ktorých sa vypočíta reálna i imaginárna časť veličiny alebo jej amplitúda a fáza.

2. Pri analýze jednosmerných sietí sa na začiatku zadávajú smery prúdov. Ak je numerický výsledok riešenia kladný, prúd má zvolený smer, ak je výsledok záporný, prúd má opačný smer. V striedavých obvodoch sa smer prúdu a pôsobiaceho napätia periodicky mení, a preto ľubovôľa ich smeru súvisí s výberom ich fáze. Zmena vybraného okamžitého smeru prúdu na opačný mení fázu o $\pm\pi$, čo zodpovedá zmene znamienka fáze komplexného čísla.[1]

V súvislosti s analýzou striedavých elektrických sietí odporúčam čitateľovi riešiť úlohy 245 až 253 týkajúce sa niektorých striedavých mostíkov a iných zariadení, ktoré možno považovať za jednoduché elektrické siete. V tabuľke 18 je zhrnutá terminológia používaná v teórii striedavých elektrických sietí.

9.7 VYNÚTENÉ KMITY V *RLC* OBVODOCH. SÉRIOVÁ A PARALELNÁ REZONANCIA

9.7.1 Sériový rezonančný obvod

Ak sa k sériovému spojeniu prvkov R, L, C pripojí zdroj harmonického napätia, pri istej frekvencii vznikne v obvode zvláštny napäťový jav, ktorý sa nazýva napäťová alebo sériová rezonancia. Slovo "rezonancia" je latinského pôvodu a znamená "ozvuk" alebo "ozvena". Vo fyzike je ním vo všeobecnosti pomenovaný súbor javov (mechanických, akustických, elektrických, kvantovomechanických a i.), ktoré spočívajú v periodickej výmene kinetickej a potenciálnej energie v nejakom systéme za účinku periodickej sily s istou, pre systém charakteristickou, rezonančnou frekvenciou ω_0. Pri tejto frekvencii je výmena energie obzvlášť intenzívna, najmä vo "vysokokvalitných" systémoch. Na druhej strane, systém schopný rezonancie môže vykonávať energetické kmity (tlmené alebo v ideálnom prípade netlmené) aj bez účinku vonkajšej sily so svojou charakteristickou frekvenciou (ako príklad môže slúžiť kyvadlo, závažie na pružine a i.). Takéto vlastné elektrické kmity v *RLC* obvode sme skúmali v odseku 7.9.

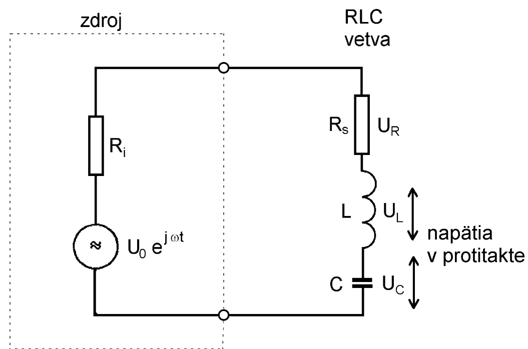
Na *obr. 9.10* je znázornený sériový *RLC* obvod so zdrojom striedavého napätia $u = U_0 \cos\omega t$ alebo s jeho obrazom $\boldsymbol{u} = U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. Voľba reálnej amplitúdy napätia znamená, že fázy všetkých veličín budú vzťahované na nulový fázový posuv napätia ($\varphi_u = 0$). Napäťovým zdrojom je najčastejšie laditeľný generátor harmonického napäťového signálu. *RLC* obvod sme už skúmali v odsekoch 9.2 a 9.4, kde sme vypočítali amplitúdu prúdu a jeho fázový posuv oproti napätiu [výrazy (9.21)]. Prv než pristúpime k analýze frekvenčných vlastností obvodu, treba urobiť poznámku k odporu obvodu a k vlastnostiam zdroja. Odpor R_s v obvode najčastejšie predstavuje sériový odpor vinutia cievky, zriedkakedy sa do obvodu umelo pridáva. Keďže sa nedá od indukčnosti fyzicky

[1] Takáto zmena znamienka zmenou fáze o $\pm\pi$ je možná iba u prísne harmonických priebehov, u ktorých časový posuv o $T/2$ nevedie k zmene absolútnej hodnoty veličiny. Zámena sa nedá urobiť napríklad u tlmených periodických (prechodových) priebehov.

oddeliť, nemožno oddelene merať napätie na odpore a indukčnosti. Hodnota odporu je zvyčajne veľmi malá v porovnaní s induktívnou reaktanciou pri rezonancii $\omega_0 L$, alebo kapacitnou reaktanciou $1/\omega_0 C$. V odseku 7.9.1 sme ako charakteristiku kmitavých vlastnosti *RLC* obvodu zaviedli kvalitu obvodu danú výrazom (7.99). Táto veličina hrá dôležitú úlohu aj pri vynútených kmitoch v obvode, je daná výrazom

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R_s} \tag{9.64}$$

a pri urobených predpokladoch je oveľa väčšia ako 1.



Obr. 9.10

Druhú poznámku treba urobiť k vlastnostiam použitého zdroja napätia. Popri jeho amplitúde napätia a frekvencii určuje jeho vlastnosti aj vnútorný odpor, presnejšie vnútorná impedancia. Ak má obvod vykazovať dobré rezonančné vlastnosti, musí byť táto impedancia v absolútnej hodnote oveľa menšia ako R_s. Budeme predpokladať, že vnútornú impedanciu zdroja reprezentuje odpor $R_i \ll R_s$, ktorý v našej analýze možno zanedbať. V opačnom prípade analýza vlastností obvodu sa stáva neprehľadná, a pritom neposkytuje primeraný praktický osoh.

Impedancia *RLC* vetvy obvodu je

$$\boldsymbol{Z} = R_s + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

a pre dané komplexné napätie generátora je komplexná amplitúda prúdu v obvode daná výrazom

$$\boldsymbol{I} = \frac{U_0}{R_s + \mathrm{j}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} \tag{9.65}$$

Z tohoto výrazu alebo z jemu zodpovedajúcich reálnych veličín vidíme, že v prípade konštantnej amplitúdy U_0 a premennej frekvencie ω sa bude s frekvenciou meniť amplitúda prúdu a aj jeho fázový posuv oproti napätiu. Mimoriadne výrazná je táto zmena v okolí frekvencie ω_0, pri ktorej má amplitúda prúdu maximálnu hodnotu. Je to vtedy, keď imaginárna časť menovateľa posledného výrazu sa rovná nule, t. j. pri frekvencii ω_0, pre ktorú platí

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

Zodpovedajúca frekvencia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{9.66}$$

je známa Thomsonova frekvencia vlastných kmitov vysokokvalitného *RLC* obvodu. Pomocou tejto frekvencie možno impedanciu vyjadriť výrazom

$$\mathbf{Z} = R_s + \mathrm{j}\omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = R_s\left[1 + \mathrm{j}Q_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \tag{9.67}$$

Vidíme, že pre $\omega = \omega_0$ je $\mathbf{Z} = R_s$. Ak frekvencia ω rastie alebo klesá z hodnoty ω_0, absolútna hodnota imaginárnej časti impedancie rapídne rastie, ak je kvalita Q_0 veľká, čo sme predpokladali. Amplitúda prúdu naopak, bude dosahovať veľké hodnoty iba pri rezonančnej frekvencii a v jej tesnom okolí a so zväčšovaním frekvenčnej odchýlky $\delta\omega = \omega - \omega_0$ na obidve strany bude rapídne klesať (pozri *obr 9.11*). Za takýchto predpokladov možno impedanciu (9.67) pre blízke okolie ω_0 vyjadriť výrazom

$$\mathbf{Z} = R_s\left(1 + \mathrm{j}2Q_0\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right) = R_s + \mathrm{j}2\delta\omega L \tag{9.68}$$

Táto impedancia určuje vlastnosti sériového *RLC* obvodu v okolí frekvencie ω_0, a na základe jej vyššie uvedených vlastností môžeme konštatovať, že:

a) Pri frekvencii $\omega = \omega_0$ ($\delta\omega = 0$) impedancia $\mathbf{Z}$ je minimálna a reálna. Má veľkosť

$$\mathbf{Z} = R_s$$

a fázu $\varphi = 0$. Amplitúda prúdu je maximálna, má veľkosť

$$I_0 = \frac{U_0}{R_s}$$

a fázový posuv napätia a prúdu sa rovná nule, t. j. prúd a napätie sú vo fáze. To je stav **sériovej rezonancie** v obvode. Ak by odpor R_s klesal k nule, rástla by za rezonancie amplitúda prúdu nad všetky medze.

b) Pre frekvencie $\omega < \omega_0$ ($\delta\omega < 0$) má impedancia obvodu kapacitný charakter s fázou $\varphi < 0$. S klesajúcou frekvenciou pre $\omega \to 0$ rastie impedancia Z nad všetky medze a jej fáza $\varphi \to -\pi/2$. Amplitúda prúdu klesá k nule a prúd fázovo predbieha napätie.

c) Pre frekvencie $\omega > \omega_0$ ($\delta\omega > 0$) má impedancia obvodu induktívny charakter a fáza $\varphi > 0$. S rastúcou frekvenciou pre $\omega \to \infty$ impedancia Z rastie nad všetky medze a fáza $\varphi \to +\pi/2$. Amplitúda prúdu klesá k nule a prúd fázovo zaostáva za napätím.

Všetky uvedené vlastnosti *RLC* obvodu v okolí rezonancie sú graficky ilustrované na *obr. 9.11*.

Za rezonancie vznikajú na prvkoch obvodu zaujímavé napäťové javy. Na odpore je amplitúda napätia

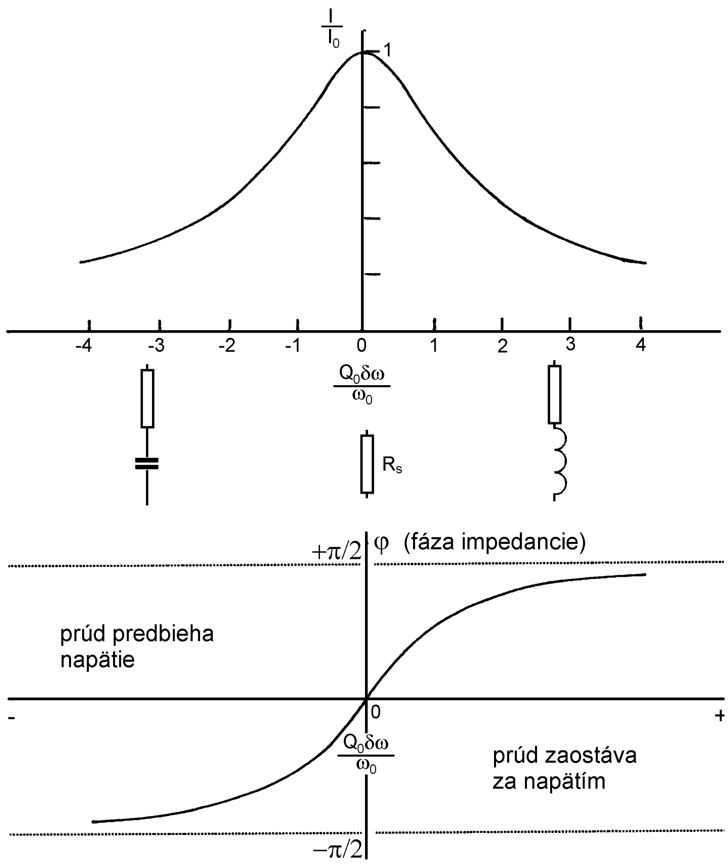
$$U_R = R_s I_0 = U_0$$

na kapacite je komplexná amplitúda napätia

$$\boldsymbol{U}_C = -\mathrm{j}X_C I_0 = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 C} I_0 = -\mathrm{j}\frac{U_0}{\omega_0 C R_s} = -\mathrm{j}Q_0 U_0 \tag{9.69}$$

a na indukčnosti

$$\boldsymbol{U}_L = \mathrm{j}X_L I_0 = \mathrm{j}\,\omega_0 L I_0 = \mathrm{j}\frac{\omega_0 L}{R_s} U_0 = \mathrm{j}Q_0 U_0 \tag{9.70}$$



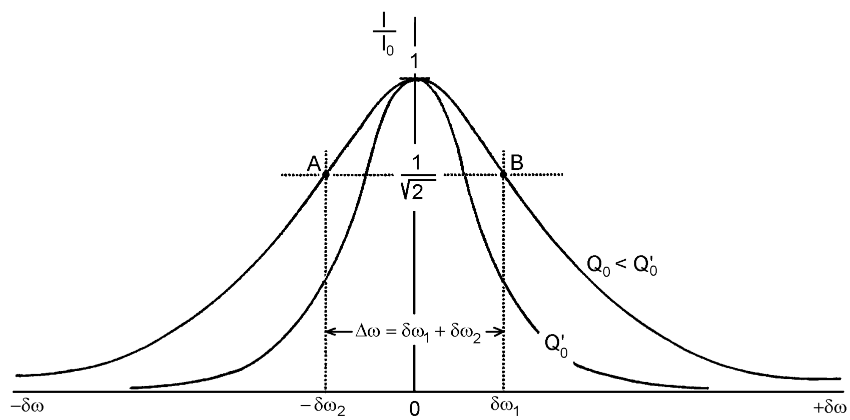
Obr. 9.11

Vidíme, že **za rezonancie napätie na kapacite U_C fázovo zaostáva o $\varphi_C = -\pi/2$ za napätím generátora U_0 a napätie na indukčnosti U_L ho fázovo predbieha o $\varphi_L = +\pi/2$**, takže vzájomný fázový posuv oboch napätí je π. Hovorí sa, že napätia sú v protifáze, kmitajú na obidvoch prvkoch v protitakte, takže výsledné napätie na *L-C* dvojici je za rezonancie nulové. Každá z amplitúd napätí je pritom Q_0-krát väčšia ako amplitúdy napätí generátora U_0 a napäťového spádu na odpore R_s. Tieto napäťové efekty sú hlavnými znakmi sériovej rezonancie, ktorá sa preto nazýva aj **napäťová rezonancia** (pozri *obr. 9.10*).

Frekvenčná závislosť relatívnej (normovanej) amplitúdy prúdu I/I_0, zobrazená na *obr. 9.11* sa nazýva **rezonančná krivka** Lorentzovho typu[1]. Jej frekvenčný priebeh je daný výrazom

$$\frac{I}{I_0} = \frac{R_s}{Z} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q_0^2 \dfrac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}}} \tag{9.71}$$

a ako vidíme, jej tvar závisí nielen od rezonančnej frekvencie, ale aj od kvality obvodu Q_0. Pre malé hodnoty Q_0 je krivka plochá, pre vysoké hodnoty naopak, veľmi ostrá a pre kvality idúce do nekonečna (pre $R_s \to 0$) nadobúda tvar "normovanej" Diracovej δ-funkcie.[2] Tvar normovanej rezonančnej krivky pre dve hodnoty kvality je znovu znázornený na *obr. 9.12*.



Obr. 9.12

Na rezonančnej krivke možno definovať jej šírku frekvenčného pásma $\Delta\omega = \delta\omega_1 - \delta\omega_2$, v ktorom normovaná amplitúda prúdu neklesne pod hodnotu $1/\sqrt{2}$. Body *A* a *B* na *obr. 9.12* sa nazývajú "body polovičného výkonu", pretože v nich obvod absorbuje polovicu rezonančného výkonu. Vidíme, že výraz (9.71) bude mať hodnotu $1/\sqrt{2}$ vtedy, ak pod odmocninou je hodnota

[1] Lorentz, H. A., Proc. Amst. Akad. Sc. **8**, 591, 1906

[2] Diracova δ-funkcia je definovaná ako funkcia $\delta(x)$, ktorá má hodnotu 0 pre všetky hodnoty x s výnimkou $x = 0$, kde nadobúda nekonečne veľkú hodnotu $+\infty$, pričom je normovaná tak, že $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

$$2Q_0\frac{\delta\omega}{\omega_0} = Q_0\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1 \tag{9.72}$$

Z posledného výrazu vidíme, že **kvalita rezonančného obvodu je nepriamo úmerná šírke jeho frekvenčného pásma na úrovni polovičného výkonu**, teda

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \tag{9.73}$$

Je to nová definícia kvality rezonančného obvodu, obzvlášť výhodná na určenie kvality meraním. Meranie frekvencie je totiž jedno z najpresnejších meraní v oblasti striedavých prúdov.

Kvalita je veličina úmerná rezonančnej frekvencii. Keďže efektívny odpor drôtového vodiča z ktorého je vinutá cievka je v dôsledku povrchového javu (skinefektu) – pozri odsek 11.5 – závislý od frekvencie a má hodnotu $R_s \sim \sqrt{\omega_0}$, potom v súhlase s výrazom (9.64) kvalita

$$Q_0 \sim \sqrt{\omega_0}$$

t. j. s frekvenciou mierne rastie. Pri akustických frekvenciách sú realizovateľné rezonančné obvody s kvalitou ~ 20, pri frekvenciách ~ 1 MHz sú bežné kvality ~ 100 – 200, v pásme frekvencií ~ $10^3 – 10^5$ MHz sú rezonančnými systémami ladené úseky prenosových vedení a dutinové rezonátory, ktorých kvality dosahujú hodnôt ~ 1 000 až ~ 10 000. V optickej oblasti elektromagnetického spektra slúžia ako rezonančné systémy optické interferometre (napr. známy Fabryho-Perotov interferometer) s kvalitami 10^5 až 10^6.

Podľa všeobecnej definície kvality v odseku 7.9.1 je kvalita nepriamo úmerná stratám rezonančného systému, ktoré v našom prípade sú stratami v odpore cievky R_s, ale isté straty môžu nastávať aj v dielektriku kondenzátora, a nakoniec, pri dosť vysokých frekvenciách nemusia byť zanedbateľné ani straty vyžarovaním elektromagnetickej energie zo systému. Preto namerané kvality môžu byť menšie ako tie, ktoré plynú z výrazu (9.64). Možno ukázať, že s uvážením strát v dielektriku kondenzátora celková kvalita Q_c obvodu RLC klesne a je daná výrazom

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{1}{Q_0} + \operatorname{tg}\delta \tag{9.74}$$

kde δ je stratový uhol dielektrika. Ak však uvážime, že pre všetky do úvahy prichádzajúce dielektriká kondenzátorov v megahertzovej oblasti je $\operatorname{tg}\delta < 10^{-3}$ (pozri tabuľku 17), pritom $1/Q_0 \approx 10^{-2}$ a väčšie, možno straty kondenzátorov zanedbať.

Na záver analýzy sériového rezonančného obvodu uvedieme číselný príklad pre pochopenie kvantitatívnych súvislostí:

Sériový obvod RLC s prvkami C = 2 533 pF, L = 10 μH s odporom cievky R_s = 1 Ω je za rezonancie napájaný z ideálneho napäťového generátora s amplitúdou U_0 = 1 V. Kondenzátor je bezstratový. Treba vypočítať rezonančnú frekvenciu f_0, kvalitu obvodu Q_0, amplitúdu prúdu v obvode za rezonancie I_0 a amplitúdy napätí na cievke U_L a kondenzátore U_C.

Rezonančná frekvencia

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 10^6 \text{ Hz} = 1 \text{ MHz}$$

kvalita obvodu

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R_s} = 2\pi f_0 \frac{L}{R_s} \approx 62{,}8$$

amplitúda prúdu v obvode za rezonancie

$$I_0 = \frac{U_0}{R_s} = 1 \text{ A}$$

a amplitúdy napätí na cievke a kondenzátore

$$U_L = U_C = \omega_0 L I_0 = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = Q_0 U_0 \approx 62{,}8 \text{ V}$$

Na odpore je amplitúda napätia $U_R = U_0 = 1$ V a napätie je vo fáze s napätím generátora. Napätie na cievke ho predbieha vo fáze o $+\pi/2$, zatiaľ čo napätie na kondenzátore za ním zaostáva o $-\pi/2$. Výsledné napätie na sériovej dvojici *L-C* je nulové.

9.7.2 Paralelný rezonančný obvod

Paralelný rezonančný obvod vznikne paralelným spojením troch ideálnych prvkov *L*, *C*, *R*. Také spojenie sa, žiaľ, v praxi nedá realizovať, pretože odpor a indukčnosť tvoria sériovú dvojicu *L* a *R*, ktorú nemožno fyzicky rozdeliť. V praxi teda možno spojiť paralelne iba reálnu cievku a viac alebo menej ideálny kondenzátor. Takéto spojenie sa pripojí na prúdový zdroj (generátor), o ktorom budeme predpokladať, že je ideálny, t. j. jeho vnútorná admitancia je nulová ($Y_i \approx G_i = 0$). Zapojenie je schematicky znázornené na *obr. 9.13.* Prúdový generátor dodáva do obvodu prúd s konštantnou reálnou amplitúdou I_0, frekvencia ω generátora je premenná. Paralelné spojenie *RLC* možno na svorkách generátora charakterizovať admitanciou

$$\boldsymbol{Y} = \frac{1}{R_s + \mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C = \frac{R_s}{R_s^2 + \omega^2 L^2} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_s^2 + \omega^2 L^2}\right) \tag{9.75}$$

ktorá podobne ako impedancia sériového obvodu určuje frekvenčný priebeh komplexnej amplitúdy napätia na obvode $\boldsymbol{U}$, prípadne prúd v *RLC* slučke. Tieto veličiny majú rezonančný charakter a rezonancia nastáva pri takej frekvencii ω_r, pri ktorej je admitancia reálna. Ak sa teda imaginárna časť výrazu (9.75) rovná nule, t. j. ak

$$\omega_r C - \frac{\omega_r L}{R_s^2 + \omega_r^2 L^2} = 0$$

dostaneme pre rezonančnú frekvenciu výraz

$$R_s^2 + \omega_r^2 L^2 = \frac{L}{C}$$

z čoho

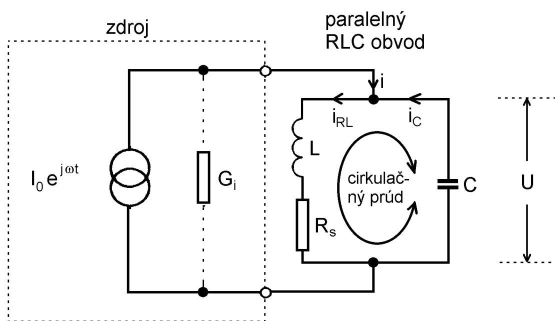
$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R_s^2 C}{L}} \tag{9.76}$$

Ak vezmeme do úvahy, že

$$\frac{L}{CR_s^2} = Q_0^2 \tag{9.77}$$

(pozri tiež odsek 7.9.1), možno výraz pre rezonančnú frekvenciu paralelného rezonančného obvodu napísať v tvare

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q_0^2}} \tag{9.78}$$



Obr. 9.13

Vidíme, že zatiaľ čo sériový rezonančný obvod je v rezonancii pri Thomsonovej frekvencii ω_0 a pri tejto frekvencii má prúd aj maximum (impedancia minimum), paralelný rezonančný obvod sa správa ináč. Rezonancia v zmysle definície (nulová fáza impedancie, resp. admitancie) nastáva u neho pri inej frekvencii, menovite pri frekvencii danej výrazom (9.78) a amplitúda napätia U nadobúda maximum pri ďalšej frekvencii

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{\sqrt{1 + \frac{2}{Q_0^2}} - \frac{1}{Q_0^2}} \tag{9.79}$$

o čom sa čitateľ môže presvedčiť, ak vypočíta extrém (minimum) funkcie $|\boldsymbol{Y}(\omega)|$ [amplitúda výrazu (9.75)]. Okrem toho kvalita obvodu je daná frekvenciou ω_r a nie ω_0, takže má hodnotu

$$Q_r = \omega_r \frac{L}{R_s} = \sqrt{Q_0^2 - 1} \tag{9.80}$$

Vidíme, že sa dostávame do rovnakých ťažkostí s definíciou kvality ako pri voľných kmitoch v *RLC* obvode v odseku 7.9.1. Treba teda rozhodnúť, čo považovať za príznak rezonancie paralelného obvodu: či nulovú fázu admitancie (exaktná, jednoduchá definícia, ale zložité meranie) alebo extrém impedancie či admitancie (zložité vyjadrenie ω_m, avšak jednoduché a pohodlné "vyladenie" minima či maxima amplitúdy prúdu alebo napätia). Zdá sa, že odpoveď na túto dilemu nie je všeobecne jednoduchá. Našťastie takmer vo všetkých reálnych prípadoch je naporúdzi jednoduchá odpoveď: **Ak je kvalita obvodu veľká (a nemusí byť ani príliš veľká) – je jedno, čo budeme považovať za rezonančnú frekvenciu – či ω_0, ω_r alebo ω_m – pretože tieto frekvencie sú takmer rovnaké a existujúci frekvenčný rozdiel je prakticky bezvýznamný.** Ak je napríklad Q_0 len 10, potom z výrazu (9.80) plynie, že relatívny rozdiel

$$\frac{Q_0 - Q_r}{Q_0} \approx \frac{1}{2Q_0^2} = 0{,}005$$

teda Q_r = 9,95. Ak Q_0 = 100, potom uvažovaný relatívny rozdiel je iba 5.10^{-5} a Q_r = 99,995. Dôležité však je, že aj relatívny rozdiel frekvencií je rovnako veľmi malý, t. j.

$$\frac{\omega_0 - \omega_r}{\omega_0} \approx \frac{1}{2Q_0^2}$$

a relatívny rozdiel

$$\frac{\omega_0 - \omega_m}{\omega_0} \approx \frac{1}{4Q_0^4}$$

je skutočne zanedbateľný, pretože ω_m a ω_0 prakticky splývajú.

Ak teda prijmeme predpoklad, že kvalita je veľká, že teda

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R_s} \gg 1$$

potom sa situácia veľmi zjednoduší. Predovšetkým možno položiť

$$Q_r \approx Q_0$$

tiež platí, že

$$\omega_0 L \gg R_s$$

a

$$\omega_r \approx \omega_m \approx \omega_0$$

Výraz (9.75) pre admitanciu možno napísať v jednoduchšom tvare

$$\boldsymbol{Y} = \frac{R_s}{\omega^2 L^2} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \frac{R_s}{\omega^2 L^2} + \mathrm{j}\omega_0 C\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

Ak je kvalita paralelného rezonančného obvodu veľká, má obvod ešte jednu dôležitú vlastnosť, a to, že jeho admitancia sa rapídne mení iba v blízkej frekvenčnej oblasti okolo frekvencie ω_0, a všade inde rýchle rastie v absolútnej hodnote (napätie *U* naopak klesá k nule – pozri *obr. 9.14*). Možno teda podobne ako u sériového rezonančného obvodu zaviesť frekvenčnú odchýlku (rozladenie) $\delta\omega = \omega - \omega_0$, pričom $\delta\omega \ll \omega_0$ a dosadiť v poslednom výraze $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, tak výraz pre admitanciu prejde na tvar

$$\boldsymbol{Y} \approx \frac{R_s C}{L} + \mathrm{j}2\delta\omega C = \frac{R_s C}{L}\left(1 + \mathrm{j}2Q_0\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right) = \frac{1}{Q_0^2 R_s}\left(1 + \mathrm{j}2Q_0\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right) \tag{9.81}$$

Za rezonancie ($\delta\omega = 0$) je admitancia na svorkách obvodu minimálna a reálna s hodnotou

$$Y = \frac{1}{Q_0^2 R_s} = \frac{CR_s}{L} = G_p = \frac{1}{R_p}$$

kde G_p je vodivosť obvodu za rezonancie. Odpor $R_p = 1/G_p$ obvodu za rezonancie je Q_0^2-násobkom sériového odporu cievky R_s (čím menší je odpor R_s, tým väčší je rezonančný odpor R_p).

Ak porovnáme výraz (9.81) s podobným výrazom (9.68) pre impedanciu sériového rezonančného obvodu, vidíme, že v istom zmysle sú sériový a paralelný obvod duálne, vlastnosti jedného možno získať z druhého zámenou $Z \Leftrightarrow Y$ a $I \Leftrightarrow U$. Ich impedancie a admitancie sú vyjadrené formálne rovnakými výrazmi a formálne rovnakými budú aj amplitúda prúdu v sériovom obvode a amplitúda napätia na paralelnom obvode, ktoré má tvar

$$\boldsymbol{U} = \frac{I_0}{\boldsymbol{Y}} = \frac{Q_0^2 R_s I_0}{1 + \mathrm{j}2Q_0\dfrac{\delta\omega}{\omega_0}} = \frac{U_0}{1 + \mathrm{j}2Q_0\dfrac{\delta\omega}{\omega_0}} \tag{9.82}$$

kde

$$U_0 = Q_0^2 R_s I_0 \tag{9.83}$$

je maximálna (rezonančná) amplitúda napätia na obvode. Normovaná napäťová rezonančná krivka obvodu je daná výrazom

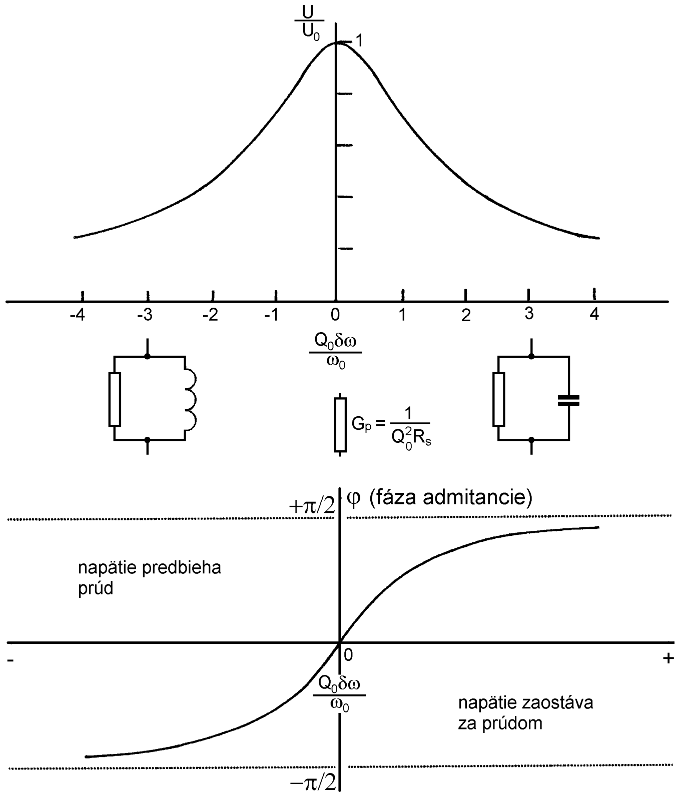
$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{Q_0^2 R_s Y} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q_0^2\dfrac{\delta\omega^2}{\omega_0^2}}} \tag{9.84}$$

a je formálne rovnaká ako prúdová rezonančná krivka (9.71) pre sériový rezonančný obvod. Frekvenčná závislosť normovanej amplitúdy napätia (9.84) je graficky znázornená na *obr. 9.14.* Na obrázku je znázornená aj frekvenčná závislosť fáze admitancie.

Fyzikálne procesy prebiehajúce v paralelnom obvode za rezonancie možno dokonale pochopiť až po preskúmaní prúdu, ktorý tečie v uzavretej slučke R_sLC v závislosti od frekvencie. Tento prúd je za rezonancie maximálny a v slučke cirkuluje. Ak teda $\delta\omega = 0$, na obvode je napätie U_0 a amplitúda prúdu v kondenzátore je

$$\boldsymbol{I}_C = \mathrm{j}B_C U_0 = \mathrm{j}\,\omega_0 C\, Q_0^2 R_s I_0 = \mathrm{j}Q_0 I_0$$

kde $B_C = \omega_0 C$ je susceptancia kapacity za rezonancie. Vidíme, že **prúd v kondenzátore je za rezonancie Q_0-krát väčší ako prúd generátora a predbieha ho vo fáze o $+\pi/2$**.



Obr. 9.14

V cievke je situácia zložitejšia, pretože napätie U_0 nie je na samotnej indukčnosti, ale na *RL* sériovej dvojici, ktorú fyzicky nemožno rozdeliť. Ak je však splnená podmienka $\omega_0 L \gg R_s$, potom odpor R_s možno zanedbať a

$$\boldsymbol{I}_L \approx -\mathrm{j}B_L U_0 = -\mathrm{j}\frac{Q_0^2 R_s}{\omega_0 L} I_0 = -\mathrm{j}Q_0 I_0$$

kde $B_L = 1/\omega_0 L$ je susceptancia indukčnosti za rezonancie. **Prúd v cievke je teda tiež približne Q_0-krát väčší ako prúd generátora a zaostáva za ním vo fáze o $-\pi/2$**. V slučke teda skutočne cirkuluje Q_0-krát väčší prúd ako dodáva do obvodu generátor, a preto sa paralelná rezonancia nazýva tiež **prúdová rezonancia** (pozri *obr. 9.13*).[1]

[1] Veľké rezonančné prúdy a napätia v *RLC* obvodoch vyžadujú napr. vo výkonových vysokofrekvenčných obvodoch vysielačov používať kondenzátory s veľmi kvalitnými dielektrikami a vysokou dielektrickou pevnosťou. Sú známe prípady havárie vysielačov práve v dôsledku nedodržania týchto požiadaviek.

Priebeh napäťovej rezonančnej krivky na *obr. 9.14* súvisí s kvalitou podobne ako prúdová krivka sériového obvodu – je štíhla pre obvody s vysokou kvalitou a naopak plochá pre nízke kvality. Možno na nej definovať body polovičného výkonu so šírkou pásma $\Delta\omega$ a vyjadriť kvalitu výrazom $Q_0 = \omega_0/\Delta\omega$.

9.7.3 Napájanie rezonančných obvodov a ich použitie

Aj keď sériová a paralelná rezonancia v *RLC* obvodoch sú v mnohých ohľadoch analogické, treba si uvedomiť dva dôležité rozdiely: charakter rezonancie a vlastnosti napájacích zdrojov. Zatiaľ čo v **sériovom obvode s napäťovou rezonanciou** na *obr. 9.10* sme použili **generátor napätia** s konštantnou amplitúdou U_0 a malým (nulovým) vnútorným odporom R_i, pre **paralelný obvod s prúdovou rezonanciou** na *obr. 9.13* sme bez komentára použili **generátor prúdu** s konštantnou amplitúdou prúdu I_0 a s malou (nulovou) vnútornou vodivosťou G_i. **Jedine pri takom napájaní možno využiť rezonančné vlastnosti obidvoch obvodov.** Ak by sme totiž napájali paralelný rezonančný obvod napäťovým generátorom (s konštantným U_0), napätie na obvode by zostávalo prakticky konštantné a rezonancia by sa prejavila iba minimom prúdu generátora, lebo impedancia paralelného rezonančného obvodu je za rezonancie maximálna. Podobne, ak by sme sériový rezonančný obvod napájali z prúdového generátora (s konštantným I_0), prúd v obvode by bol pri všetkých frekvenciách takmer konštantný a pri frekvencii ω_0 by napätie na svorkách prúdového zdroja bolo minimálne, pretože impedancia sériového obvodu je za rezonancie minimálna. V obidvoch prípadoch by sa rezonančné vlastnosti obvodov prejavili iba vplyvom na svorkové napätie, resp. svorkový prúd napájacích generátorov, ktoré nie sú nikdy ideálne, teda vždy je $R_i > 0$ resp. $G_i > 0$. V prípade ideálnych zdrojov by sme v takých nevhodných zapojeniach dokonca nepozorovali žiadne rezonančné efekty.

Spôsob napájania rezonančných obvodov možno posúdiť aj z hľadiska ich kvalít. Doteraz uvažované kvality Q_0 sú **vlastné kvality** obvodov dané ich vlastnými stratami. Ak generátory nie sú ideálne, vznikajú isté straty aj na ich vnútorných odporoch, resp. vodivostiach a celkové straty sú potom vyššie. Kvalita obvodu zaťaženého vonkajšími stratami sa nazýva **kvalita zaťaženého obvodu**. Tak napríklad ak napäťový generátor na *obr. 9.10* nie je ideálny (t. j. ak $R_i > 0$), potom kvalita zaťaženého obvodu

$$Q_s = \frac{\omega_0 L}{R_s + R_i} = Q_0 \frac{1}{1 + \dfrac{R_i}{R_s}}$$

Ak generátor nemá príliš ovplyvňovať rezonančné vlastnosti obvodu (nemá veľmi vplývať na kvalitu), musí mať malý vnútorný odpor ($R_i \ll R_s$), teda musí to byť napäťový generátor blízky ideálnemu. Podobnú úvahu možno urobiť pre paralelný obvod, pre ktorý je však výhodnejšie vyjadriť kvalitu Q_0 z definície výrazom

$$Q_0 = \omega_0 \frac{\frac{1}{2} C U_0^2}{\frac{1}{2} G_p U_0^2} = \frac{\omega_0 C}{G_p}$$

kde $G_p = 1/R_p$ je rezonančná vodivosť obvodu. Kvalita zaťaženého obvodu vodivosťou G_i prúdového generátora je daná výrazom

$$Q_p = \frac{\omega_0 C}{G_p + G_i} = Q_0 \frac{1}{1 + \frac{G_i}{G_p}}$$

a nebude generátorom podstatne ovplyvnená, ak jeho vnútorná vodivosť bude malá ($G_i \ll G_p$), teda ak generátor bude mať vlastnosti blízke ideálnemu prúdovému generátoru.

Prúdové generátory (zdroje) však v praxi neexistujú a vzniká otázka, z čoho sa vlastne paralelné rezonančné obvody napájajú? Odpoveď je jednoduchá. **Vhodným generátorom pre napájanie paralelného rezonančného obvodu je napäťový generátor, ktorého vnútorný odpor R_i je podstatne väčší ako rezonančný odpor obvodu $R_p = Q_0^2 R_s$.** Je to teda generátor, pre ktorý platí

$$R_i \gg \frac{L}{CR_s} = Q_0^2 R_s$$

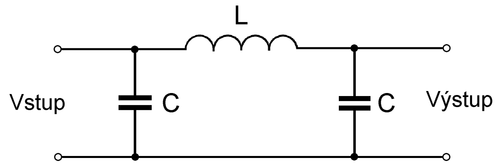
Rezonančné obvody predstavujú základ obvodovej vysokofrekvenčnej elektroniky. Tvoria súčasť oscilátorov, reprezentujú najjednoduchšie frekvenčné priepusty a zádrže, sú súčasťou ladených viazaných obvodov, pásmových zosilňovačov a pod.

9.8 FREKVENČNÉ FILTRE

V obvodovej elektronike často treba zo zmesi signálov (napätí alebo prúdov) rôznych frekvencií vybrať signál s jednou frekvenciou alebo signály v nejakom frekvenčnom intervale (vo frekvenčnom pásme). Inokedy treba oddeliť jednosmernú zložku napätia a potlačiť striedavé zložky ako je to v usmerňovačoch striedavého prúdu. Elektrické zariadenia slúžiace na tieto účely sa nazývajú spoločným názvom "frekvenčné filtre". V tomto odseku sa budeme zaoberať iba pasívnymi frekvenčnými filtrami pozostávajúcimi z pasívnych elektrických prvkov R, L a C bez aktívnych polovodičových súčiastok.

Podľa pásma priepustnosti sa filtre delia na **frekvenčné priepusty** prepúšťajúce signály v istom definovanom pásme frekvencií $\Delta\omega$ a **frekvenčné zádrže**, ktoré naopak, v nejakom pásme $\Delta\omega$ signály potláčajú. Jednoduchými príkladmi nie veľmi dokonalých frekvenčných priepustov a zádrží sú v predchádzajúcich odsekoch analyzované sériové a paralelné rezonančné obvody, ktoré prepúšťajú alebo zadržiavajú signály v úzkom pásme okolo rezonančnej frekvencie $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Iné druhy filtrov prepúšťajú signály s frekvenciami v pásme od 0 po istú, **kritickú frekvenciu ω_{kr}**, nad ktorou prepúšťajú signály s veľkým útlmom alebo neprepúšťajú vôbec. Filter s takými vlastnosťami sa nazýva **dolnofrekvenčný priepust**. Filter, ktorý naopak, silne potláča signály s frekvenciami menšími ako ω_{kr} a prepúšťa signály nad ω_{kr} sa nazýva **hornofrekvenčný priepust**.



Obr. 9.15

Na *obr. 9.15* je znázornený špeciálny filter, ktorý sa často používa na "vyhladenie" pulzujúceho napätia z výstupu napr. dvojcestného usmerňovača striedavého napätia sieťovej frekvencie f = 50 Hz. Od takého filtra sa očakáva, že prepustí jednosmerné napätie, teda napäťovú zložku s frekvenciou f = 0 Hz a potlačí zložku s frekvenciou 100 Hz (dvojcestné usmernenie) a vyššie harmonické zložky. Pomer efektívnej hodnoty striedavej zložky napätia na výstupe filtra k jeho konštantnej, jednosmernej zložke sa nazýva **činiteľ zvlnenia $\boldsymbol{\xi}$**. Na filter sa možno pozerať ako na delič tvorený reaktanciami $X_L = \omega L$ a $X_C = 1/\omega C$, pričom sa volí $X_L \gg X_C$. Pre frekvenciu ω je pomer frekvenčných zložiek napätia $U_{výst}/U_{vst}$ daný približne deliacim pomerom reaktancií, teda

$$\frac{U_{výst}(\omega)}{U_{vst}(\omega)} = \frac{X_C}{X_L - X_C} \approx \frac{X_C}{X_L} \approx \frac{1}{\omega^2 LC}$$

(za predpokladu, že výstup filtra nie je zaťažený). Napäťový prenos na výstup je teda nepriamo úmerný ω^2. Ak napr. L = 25 H a C = 10 μF, potom pri frekvencii f = 100 Hz je

$$\frac{U_{výst}(\omega)}{U_{vst}(\omega)} \approx \frac{1}{\omega^2 LC} \approx 10^{-2}$$

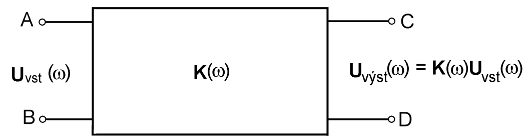
Vidieť, že aj keď striedavá zložka napätia nie je dokonale potlačená, je zvlnenie pri základnej frekvencii malé, a pre vyššie harmonické zložky je ešte menšie. Na druhej strane, ak kondenzátory nemajú zvody, prenesie sa na výstup filtra plné jednosmerné napätie. V prípadoch, keď sa vyžaduje väčšie potlačenie striedavej zložky (menšie zvlnenie), zapojí sa niekoľko takých filtrov za sebou.

Filtre zostavené z iba reaktančných prvkov L a C sa používajú hlavne pre energetické účely a pre špeciálne požiadavky vysokofrekvenčnej elektroniky, pretože výroba najmä veľkých indukčností, so železným prípadne feritovým jadrom, je nákladná. V prípadoch, keď netreba prenášať veľké výkony, nahrádzajú sa kombinácie L-C kombináciami R-C. Takáto kombinácia má isté výkonové straty na odpore R a to obmedzuje jej použitie pri veľkých prúdoch.

Prv, než pristúpime k analýze vlastností niektorých pasívnych R-C filtrov, zavedieme niekoľko všeobecných pojmov, ktoré vystupujú v teórii filtrov. Pre naše účely budeme pod pojmom pasívny frekvenčný filter rozumieť elektrické zapojenie z odporov a kondenzátorov, ktoré je schematicky znázornené na *obr. 9.16*. Svorky AB sú vstupné, CD výstupné. Prenosové vlastnosti filtra sú úplne opísané jeho komplexným koeficientom prenosu $\boldsymbol{K}(\omega)$ definovaným ako pomer komplexných amplitúd výstupného a vstupného napätia pri frekvencii ω, teda

$$\boldsymbol{K}(\omega) = \frac{\boldsymbol{U}_{výst}(\omega)}{\boldsymbol{U}_{vst}(\omega)} = K(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{9.85}$$

kde $K(\omega)$ je bezrozmerná absolútna hodnota koeficientu prenosu a φ je jeho fáza. Pre pasívne filtre typu *R-C* a *R-L* je koeficient prenosu $K(\omega)$ vždy menší, nanajvýš sa rovná 1. V ďalšom preskúmame vlastnosti niektorých *R-C* filtrov z hľadiska ich prenosovej funkcie.



Obr. 9.16

9.8.1 Dolnofrekvenčný *R-C* priepust

Zapojenie jednoduchého *R-C* filtra s vlastnosťami dolnofrekvenčného priepustu je na *obr. 9.17.* Ak je na vstupe napätie, ktorého komplexná amplitúda je $\boldsymbol{U}_{výst}(\omega)$ a na výstupe komplexná amplitúda $\boldsymbol{U}_{vst}(\omega)$, potom komplexný koeficient prenosu je daný výrazom

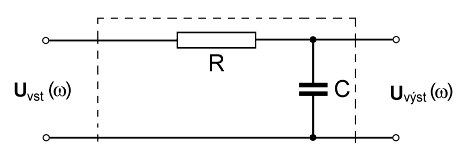
$$\boldsymbol{K}(\omega) = \frac{\boldsymbol{U}_{výst}(\omega)}{\boldsymbol{U}_{vst}(\omega)} = \frac{-\mathrm{j}X_C}{R - \mathrm{j}X_C} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC} \tag{9.86}$$

Amplitúda a fáza koeficientu prenosu (amplitúdovo-frekvenčné a fázovo-frekvenčné charakteristiky) sú dané výrazmi

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \qquad \varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}\ \omega RC \tag{9.87}$$

Vidíme, že koeficient prenosu má hodnotu 1 pri nulovej frekvencii a s rastúcou frekvenciou klesá k nule. Filter teda dobre prenáša jednosmerný signál a signály pri nízkych frekvenciách a potláča signály s vysokými frekvenciami. Za hraničnú alebo kritickú frekvenciu ω_{kr} v spektre prenášaného signálu možno považovať frekvenciu, pri ktorej koeficient prenosu $K(\omega)$ klesne z hodnoty 1 na hodnotu $1/\sqrt{2}$. Z výrazu (9.87) vidieť, že je to frekvencia, ktorá spĺňa podmienku

$$\omega_{kr} RC = 1$$



Obr. 9.17

z čoho $$\omega_{kr} = \frac{1}{RC} \tag{9.88}$$

Vidíme, že hraničná frekvencia je prevrátenou hodnotou časovej konštanty obvodu $\tau = RC$, ktorú sme zaviedli pri analýze prechodových javov v RC obvode. Možno očakávať, že frekvenčné vlastnosti RC obvodu nejako hlbšie súvisia s jeho prechodovými vlastnosťami. Možno dokázať, že prechodová (časová) charakteristika je Fourierovou transformáciou frekvenčnej charakteristiky.

Ak využijeme vzťah (9.88), možno vo výrazoch (9.87) zaviesť bezrozmernú normovanú frekvenciu

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{kr}} = \omega RC$$

ktorá nadobúda hodnoty od 0 po ∞. Hodnotu 1 dosahuje pri $\omega = \omega_{kr} = 1/RC$. Výrazy (9.87) prejdú potom na tvar

$$K(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}} \qquad \varphi(\Omega) = -\operatorname{arctg}\Omega \tag{9.89}$$

Vlastnosti dolnofrekvenčného priepustu možno lepšie pochopiť, ak sa graficky znázorní frekvenčná závislosť koeficientu prenosu $K(\Omega)$ a jeho fázy $\varphi(\Omega)$. Lineárne zobrazenie v závislosti od frekvencie nemá veľký praktický osoh, pretože správanie sa filtra je zaujímavé nie pri malých zmenách frekvencie, ale pri zmenách rádových (cez dekády frekvencií – ako to hovoria elektrotechnici). Pri takýchto zmenách frekvencií sa aj koeficient prenosu mení rádovo, a to vedie k myšlienke, vyjadrovať uvažované veličiny ich logaritmami [logaritmický spôsob vyjadrovania pomerných veličín navrhol už pôvodca prirodzených logaritmov škótsky matematik John Napier (1550 – 1617)]. A tak namiesto pomeru dvoch veličín, ktoré sú v nejakom príčinnom vzťahu (ako napríklad vstupné a výstupné napätie, prúd alebo výkon v nejakej dvojbráne) berie sa podľa dohody dekadický logaritmus uvažovaného pomeru. Tak napríklad v prípade dvoch výkonov $P_{výst}$ a P_{vst} možno namiesto ich pomeru $A = P_{výst}/P_{vst}$, ktorý predstavuje zosilnenie alebo útlm výkonu, pracovať s veličinou

$$\underline{A} = \log\frac{P_{výst}}{P_{vst}} \tag{9.90}$$

ktorá v prípade zosilnenia je kladná a v prípade útlmu záporná. Veličina $\underline{A}$ je bezrozmerná, napriek tomu má jednotku nazvanú **bel** (B), ktorá nesie názov po americkom fyzikovi a fyziológovi škótskeho pôvodu Alexandrovi Grahamovi Bellovi (1847 – 1922). Jednotka bola pôvodne zavedená na vyjadrenie akustického tlaku, resp. výkonu. Hodnota ±1 B predstavuje desaťnásobné zosilnenie alebo desaťnásobný útlm výkonu. V prípade, ak je porovnávanou veličinou napätie alebo prúd, treba pravú stranu výrazu (9.90) vynásobiť s faktorom 2, pretože výkon je úmerný druhej mocnine napätia alebo prúdu.

Jednotka bel je príliš veľká, a preto sa v praxi častejšie pracuje s jej desatinou, ktorá sa nazýva **decibel** (dB). V takom prípade treba pravú stranu výrazu (9.90) vynásobiť súčiniteľom 10 a v prípade napäťových alebo prúdových veličín súčiniteľom 20. Podľa uvedeného možno teda koeficient prenosu vyjadriť

$$\underline{K}(\Omega) = 20 \log K(\Omega) = 20 \log \frac{U_{výst}}{U_{vst}} \quad [\text{dB}] \qquad (9.90a)$$

Vidíme, že filtre *RC*, prípadne *RL*, pre ktoré je $K < 1$, majú $\underline{K} < 0$. Záporný koeficient prenosu v dB predstavuje útlm. Zosilňovače, pre ktoré je $K > 1$, majú $\underline{K} > 0$. V tabuľke 19 je uvedených niekoľko typických hodnôt koeficientu prenosu a zodpovedajúce hodnoty v dB.[1]

Tabuľka 19

K	10^{-3}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	10^3
$\underline{K}$[dB]	–60	–6	–3	0	3	6	20	60

Ako referenčný výkon vo výraze (9.90) sa niekedy berie $P_{vst} = 1$ mW. V takom prípade výstupný výkon udáva výkonovú úroveň v dBm výrazom

$$P(\text{dBm}) = 10 \log P_{výst}(\text{mW})$$

takže napr. výstupnému výkonu 1 mW zodpovedá úroveň 0 dBm, 2 mW zodpovedá 3 dBm, 10 mW zodpovedá 10 dBm atď. dBm škála sa používa hlavne v telekomunikácii.

Na *obr. 9.18a* je znázornená logaritmická závislosť $\underline{K}$ od pomernej frekvencie Ω a na *obr. 9.18b* je závislosť fázy φ. Závislosti možno aproximovať asymptotami, ktoré vytvárajú Bodeho diagram.[2] Vidieť, že závislosť $\underline{K}$ je ohraničená dvoma asymptotami:

a) Pre $\Omega < 1$ je asymptotou $\underline{K} = 0$ dB. Pre frekvencie $\omega < \omega_{kr}$ je priepust "priezračný".

b) Pre $\Omega > 1$, teda pre $\omega > \omega_{kr}$ je asymptotou priamka so smernicou –20 dB/dekádu, alebo –6 dB/oktávu.[3]

c) Pri frekvencii $\Omega = 1$, teda pri $\omega = \omega_{kr}$ je

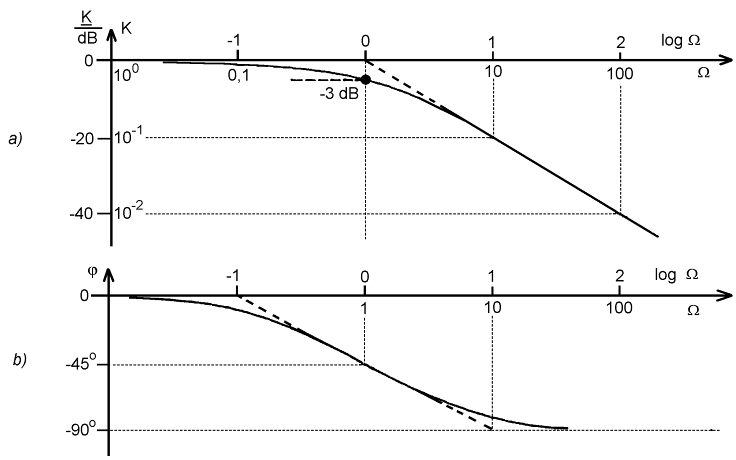
$$\underline{K} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3 \text{ dB}$$

Fáza koeficientu prenosu φ sa mení od 0 pri $\Omega = 0$, po $-\pi/2$ (–90°) pre $\Omega \to \infty$. Pri $\Omega = 1$ ($\omega = \omega_{kr}$) je $\varphi = -\pi/4$ (–45°).

[1] V literatúre sa možno stretnúť s vyjadrením napäťového zosilnenia alebo útlmu aj prostredníctvom prirodzených logaritmov. Koeficient prenosu možno vyjadriť výrazom $A(\text{Np}) = \ln(U_2/U_1)$. Jednotkou takto definovaného prenosu je neper (Np). Je zrejmé, že ±1 Np je zosilnenie alebo útlm napätí v pomere $U_2/U_1 = \text{e} = 2{,}718\,281\,8$. Platí $A(\text{dB}) = 20 (\log \text{e})\, A(\text{Np}) = 8{,}686\, A(\text{Np})$, takže 1 Np = 8,686 dB a 1 dB = 0,1151 Np. V SI-sústave je neper zakázanou jednotkou.

[2] Pozri Bode, H. W.: Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Princeton, D. Van Nostrand Co., 1945

[3] V elektrotechnike je oktávou frekvenčný interval v pomere frekvencií 1:2. Pojem je prebraný z hudobníckej terminológie.



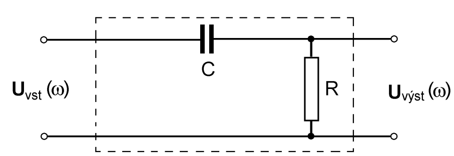
Obr. 9.18

9.8.2 Hornofrekvenčný *R-C* priepust

Hornofrekvenčný *R-C* priepust vznikne z dolnofrekvenčného výmenou kondenzátora za odpor a naopak. Jeho zapojenie je znázornené na *obr. 9.19.* Koeficient prenosu takého filtra je daný výrazom

$$\boldsymbol{K}(\omega) = \frac{U_{výst}(\omega)}{U_{vst}(\omega)} = \frac{R}{R - \mathrm{j}\,X_C} = \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{\mathrm{j}\Omega}{1 + \mathrm{j}\Omega} \tag{9.91}$$

kde $\Omega = \omega RC$ je normovaná frekvencia definovaná v predchádzajúcom odseku. Amplitúdovo-frekvenčné a fázovo-frekvenčné charakteristiky sú dané výrazmi



Obr. 9.19

$$K(\Omega) = \frac{\Omega}{\sqrt{1+\Omega^2}} \qquad\qquad \varphi(\Omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\Omega} \tag{9.92}$$

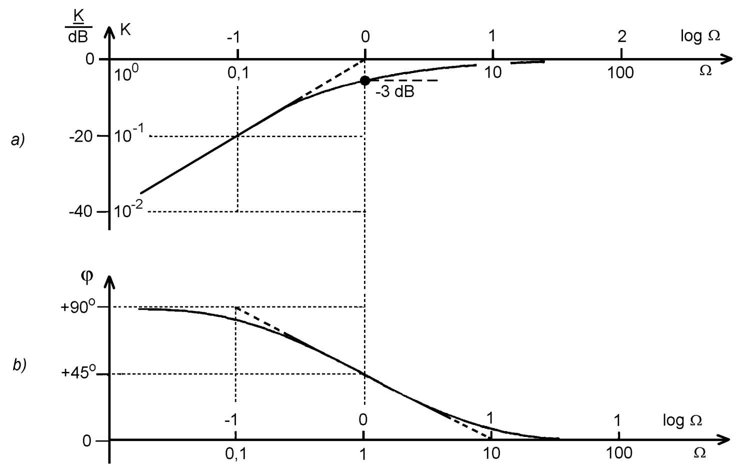
Tieto charakteristiky sú graficky znázornené na *obr. 9.20a,b*. Vidíme, že:

a) na nízkych frekvenciách pre $\Omega < 1$ ($\omega < \omega_{kr}$) je asymptotou k logaritmickému priebehu $\underline{K}$ priamka so smernicou +20 dB/dekádu alebo +6 dB/oktávu, t. j. filter potláča signály v tomto pásme.

b) pri vysokých frekvenciách, pre $\Omega > 1$ ($\omega > \omega_{kr}$) je asymptotou k amplitúdovo-frekvenčnej charakteristike priamka $\underline{K} = 0$ dB. Filter je v tomto pásme "priezračný".

c) Pre $\omega = \omega_{kr}$ je podobne ako pre dolnofrekvenčný priepust

$$\underline{K} \approx -3\,\mathrm{dB}$$



Obr. 9.20

Priebeh fáze koeficientu prenosu v závislosti od Ω, resp. od log Ω je vidno na *obr. 9.20b*. Pri $\omega = \omega_{kr}$ je $\varphi = +\pi/4$ (+45°).

Dolnofrekvenčný a hornofrekvenčný priepust majú ešte jednu zaujímavú vlastnosť, že za istých okolností elektricky "diferencujú" alebo "integrujú" prechádzajúci signál. Ukazuje sa, že dolnofrekvenčný priepust v pásme potlačenia signálov ($\omega \gg \omega_{kr}$) pôsobí ako "integračný" obvod, a hornofrekvenčný priepust v pásme jeho potlačenia signálov ($\omega \ll \omega_{kr}$) naopak signál "derivuje". Čitateľ sa môže o tom presvedčiť riešením úlohy 254.

9.8.3 Pásmový *R-C* priepust (Wienov delič)

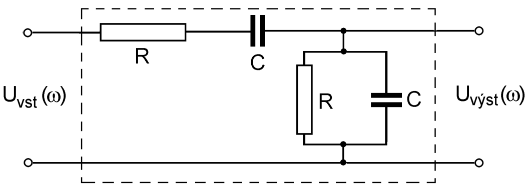
Syntézou dvoch predchádzajúcich priepustov (dolnofrekvenčného a hornofrekvenčného) vznikne **pásmový priepust**. Jeho zapojenie je na *obr. 9.21*. Na určenie komplexného koeficientu prenosu označme impedanciu sériovej dvojice *RC* ako

$$\boldsymbol{Z}_s = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = \frac{\omega RC - \mathrm{j}}{\omega C}$$

a impedanciu paralelnej dvojice *RC* ako

$$\boldsymbol{Z}_p = \frac{-\mathrm{j}RX_C}{R - \mathrm{j}X_C} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}\omega RC}$$

Tieto impedancie predstavujú delič pre vstupné napätie, takže koeficient prenosu



Obr. 9.21

$$\boldsymbol{K}(\omega) = \frac{\boldsymbol{U}_{výst}(\omega)}{\boldsymbol{U}_{vst}(\omega)} = \frac{\boldsymbol{Z}_p}{\boldsymbol{Z}_s + \boldsymbol{Z}_p} = \frac{\omega RC}{3\omega RC + \mathrm{j}\left[(\omega RC)^2 - 1\right]}$$

Použitím substitúcie $\Omega = \omega RC$ možno koeficient $\boldsymbol{K}(\omega)$ vyjadriť v tvare

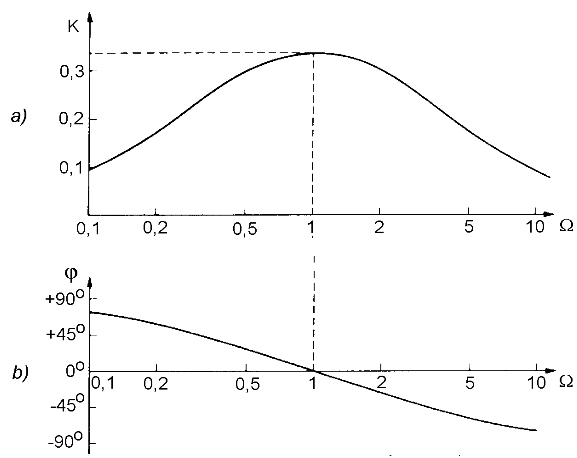
$$\boldsymbol{K}(\Omega) = \frac{1}{3 + \mathrm{j}\left(\Omega - \dfrac{1}{\Omega}\right)} \tag{9.93}$$

Z výrazu (9.93) plynú pre amplitúdovú a fázovú charakteristiku výrazy

$$K(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\Omega - \dfrac{1}{\Omega}\right)^2}} \qquad \varphi(\Omega) = \operatorname{arctg}\frac{1 - \Omega^2}{\Omega} \tag{9.94}$$

a ich grafické zobrazenia sú na *obr. 9.22.* Z priebehu amplitúdovej charakteristiky vidíme, že má extrém (maximum) pri normovanej frekvencii $\Omega = 1$ alebo pri frekvencii

$$\omega = \frac{1}{RC}$$



Obr. 9.22

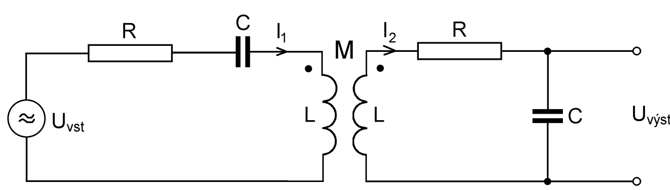
kedy koeficient prenosu má maximum s hodnotou

$$K_{max} = \frac{1}{3}$$

a jeho fáza sa rovná nule ($\varphi = 0$). Obvod sa do istej miery podobá na rezonančný, nejde v ňom však o fyzikálnu rezonanciu, pretože chýbajú dva zásobníky, medzi ktorými by energia mohla vykonávať kmity premenou z potenciálnej (elektrickej) na kinetickú (magnetickú) formu. Obvod sa používa ako selektívny spätnoväzobný prvok v *RC*-oscilátoroch. Niekedy sa nazýva Wienov delič, pretože predstavuje frekvenčne závislú časť Wienovho mostu, ktorého vlastnosti sú predmetom analýzy v úlohe 247.

9.8.4 Induktívne viazané obvody ako pásmový filter

Vo vysokofrekvenčnej elektronike sa ako pásmový filter často používajú dva induktívne viazané ladené *RLC* obvody, ktorých zapojenie je znázornené na *obr. 9.23.* Oproti jednoduchému rezonančnému obvodu majú viazané obvody výhodu vyššej selektivity, väčšej šírky pásma a väčšej ekvivalentnej kvality. Prvky *RLC* v primárnom a sekundárnom obvode môžu byť vo všeobecnosti rôzne, v našej analýze kvôli jednoduchosti však budeme predpokladať, že sú rovnaké. O väzbe medzi obvodmi budeme predpokladať, že je premenná, t. j. že koeficient väzby $k = M/L$ (pozri odsek 7.5.1) možno meniť, napr. zmenou vzdialenosti cievok. Viazané obvody sú svojím vstupom obyčajne pripojené na výstup nejakého aktívneho prvku (tranzistora, prípadne operačného zosilňovača) a spolu tvoria ladený pásmový zosilňovač. V prípade operačného zosilňovača, ktorého výstupný odpor je malý, možno ho priamo pripojiť k vstupu primárneho sériového *RLC* obvodu. V prípade tranzistora, ktorého výstupný odpor je veľký, treba primárny sériový obvod nahradiť paralelným *RLC* obvodom, tranzistor pripojiť k paralelnej dvojici a uvažovať zdroj ako prúdový. Analýza paralelných induktívne viazaných *RLC* obvodov napájaných prúdovým generátorom je však zložitejšia a fyzikálne neprináša nič nového.



Obr. 9.23

Pri analýze obvodu je predmetom záujmu napätie na kondenzátore sekundárneho obvodu $U_{výst}$ a pri konštantnej amplitúde vstupného napätia je cieľ zmenou parametrov obvodu (obyčajne zmenou kapacity kondenzátorov) dosiahnuť maximum amplitúdy výstupného napätia. Maximum možno dosiahnuť buď zmenou iba parametrov primárneho obvodu (prvá čiastková rezonancia) alebo zmenou iba parametrov sekundárneho obvodu (druhá čiastková rezonancia). Okrem toho možno naladiť jeden z obvodov a nastaviť väzbu na maximum (zložená rezonancia) alebo naladiť obidva obvody zvlášť pri ich nulovej väzbe, a potom nastaviť väzbu na maximum (úplná rezonancia). Ak sa pri naladených obvodoch mení frekvencia generátora, potom podľa veľkosti väzby k výstupné napätie vykazuje jedno maximum pri slabej väzbe alebo dve maximá pri silnej väzbe. Frekvenčná vzdialenosť maxím rastie s koeficientom väzby.

Vidíme, že aj v takej relatívne jednoduchej dvojici obvodov ako je na *obr. 9.23* vznikajú zložité rezonančné javy, ktorých niektoré stránky posúdime nasledujúcou analýzou. Pre primárny a sekundárny obvod dvojice možno na základe II. Kirchhoffovho zákona napísať obvodové rovnice[1]

$$\left(R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\boldsymbol{I}_1 - \mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{U}_{vst} \tag{9.95a}$$

$$\left(R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\boldsymbol{I}_2 - \mathrm{j}\omega M\boldsymbol{I}_1 = 0 \tag{9.95b}$$

Riešením sústavy (9.95) pre prúd $\boldsymbol{I}_2$ dostaneme výraz

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega M U_{vst}}{\left(R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)^2 + \omega^2 M^2}$$

z ktorého výstupné napätie

$$\boldsymbol{U}_{výst} = -\mathrm{j}X_C\boldsymbol{I}_2 = \frac{M}{C}\frac{U_{vst}}{\left(R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)^2 + \omega^2 M^2} \tag{9.96}$$

Komplexný koeficient prenosu je potom daný výrazom

$$\boldsymbol{K}(\omega) = \frac{\boldsymbol{U}_{výst}}{\boldsymbol{U}_{vst}} = \frac{M}{C}\frac{1}{\left(R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)^2 + \omega^2 M^2} \tag{9.97}$$

Vo výraze (9.97) možno zaviesť niekoľko substitúcií a to: koeficient väzby cievok viazaných obvodov

$$k = \frac{M}{L}$$

rezonančná frekvencia obvodov

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

a tlmenie obvodov definované ako recipročná hodnota ich kvality, teda

[1] Bodky pri svorkách vzájomnej indukčnosti označujú relatívne polarity na indukčnostiach. Ak v jednej cievke prúd vzrastá v smere od zdroja k označenej bodke ako na *obr. 9.23*, v druhej cievke je indukované napätie takej polarity, že svorka označená bodkou je kladná oproti druhej jej svorke.

$$d = \frac{1}{Q_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC$$

Výraz (9.97) možno potom prepísať do tvaru

$$\boldsymbol{K}(\omega) = \frac{k}{d^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 k^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + \mathrm{j}2d\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{9.98}$$

Pre ďalší postup treba vo výraze (9.98) predovšetkým urobiť niektoré zjednodušenia. Budeme predpokladať, podobne ako u rezonančných obvodov, že k interakcii obvodov dochádza iba v úzkom pásme frekvencií okolo hodnoty ω_0, inak povedané, že rezonancia je "ostrá". Ak zavedieme pomerné rozladenie

$$\zeta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

potom za uvedených predpokladov platí, že

$$\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \qquad \text{a} \qquad \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx 2\zeta$$

a prenosovú funkciu možno prepísať do tvaru

$$\boldsymbol{K}(\zeta) = \frac{k}{d^2 + k^2 - 4\zeta^2 + 4\,\mathrm{j}d\zeta} \tag{9.99}$$

Amplitúda koeficientu prenosu alebo amplitúdová charakteristika induktívne viazaných obvodov je

$$K(\zeta) = \frac{k}{\sqrt{(d^2 + k^2 - 4\zeta^2)^2 + 16d^2\zeta^2}} \tag{9.100}$$

Vidíme, že charakteristika závisí od dvoch parametrov k, d a od pomerného rozladenia ζ. Preskúmame jej priebeh pre rôzne situácie. Predovšetkým zistíme jej extrémy riešením podmienky $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\zeta} = 0$. Dostaneme dve rovnice určujúce polohy troch extremálnych bodov na osi frekvencií:

$$\zeta = 0 \qquad \text{a} \qquad k^2 - d^2 - 4\zeta^2 = 0$$

Prvá rovnica určuje extrém pri $\omega = \omega_0$. Druhá rovnica má dve riešenia

$$\zeta_{1,2} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{k^2 - d^2}$$

ktorým zodpovedajú dve frekvencie extrémov

$$\omega_{1,2} = \omega_0(1 + \zeta_{1,2}) = \omega_0\left(1 \mp \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - d^2}\right)$$

Môžeme teda zhrnúť, že vo všeobecnosti amplitúdová charakteristika viazaných obvodov má nasledovné tri frekvencie extrémov:

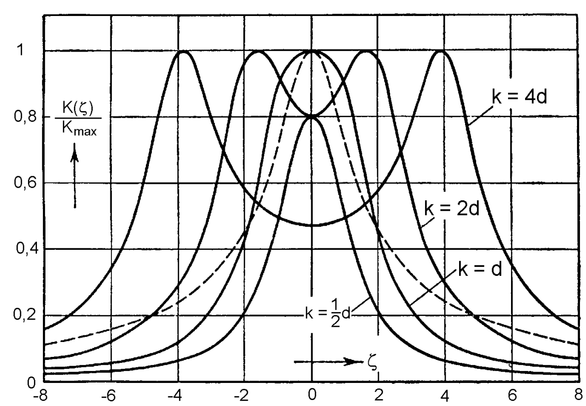
$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_1 = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - d^2}\right) \\ \omega &= \omega_0 \\ \omega &= \omega_2 = \omega_0\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - d^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9.101}$$

Tri "rezonančné" frekvencie sú najdôležitejšou vlastnosťou viazaných obvodov. Bočné frekvencie $\omega_{1,2}$ závisia od koeficientu väzby k (v ďalšom budeme predpokladať, že tlmenie obvodov d je konštantné). Podľa veľkosti väzby k môžu nastať tri prípady:

a) **Podkritická väzba $k < d$.** V takých prípadoch existuje iba jedna extremálna frekvencia ω_0 ($\zeta = 0$), pri ktorej má amplitúdová charakteristika maximum s hodnotou

$$K_{max} = \frac{k}{k^2 + d^2} \tag{9.102}$$

a má podobný priebeh ako rezonančné krivky jednoduchých *RLC* obvodov. S rastom k rastie aj K_{max} ku svojej kritickej hodnote. Priebeh amplitúdovej charakteristiky je pre podkritickú hodnotu $k = 0{,}5d$ znázornený na *obr. 9.24.* Lepšiu predstavu o priebehoch si možno vytvoriť z priestorovej projekcie takých kriviek na *obr. 9.25.*



Obr. 9.24

b) **Kritická väzba $k = k_{kr} = d$.** V tomto prípade všetky tri frekvencie splývajú, t. j.

$$\omega_1 = \omega_0 = \omega_2 \tag{9.103}$$

Amplitúdová charakteristika má priebeh daný výrazom

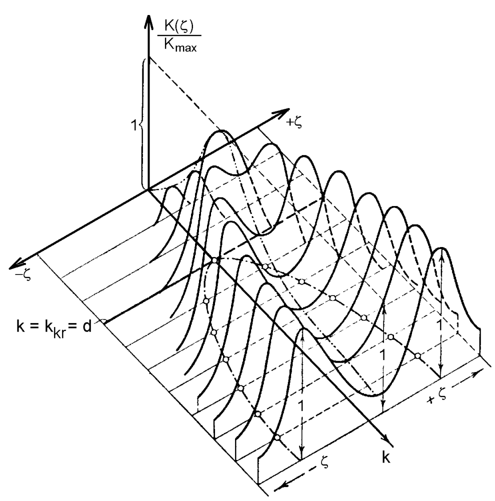
$$K(\zeta) = \frac{d}{2\sqrt{d^4 + 4\zeta^4}} \tag{9.104}$$

a dosahuje absolútne maximum pri $\zeta = 0$ ($\omega = \omega_0$) s hodnotou

$$K_{max}^{max} = \frac{1}{2d} = \frac{Q_0}{2} \tag{9.105}$$

Priebeh tejto charakteristiky je podobný priebehu rezonančnej krivky jednoduchého *RLC* obvodu (na *obr. 9.24* nakreslenej čiarkovane), avšak je oveľa strmší, teda bližší k ideálnej obdĺžnikovej charakteristike pásmového priepustu. Šírka pásma kriticky viazaných obvodov na úrovni $1/\sqrt{2}$ maxima charakteristiky je

$$\Delta\,\omega = \frac{\sqrt{2}\omega_0}{Q_0} = \sqrt{2}\omega_0 d \tag{9.106}$$



Obr. 9.25

teda $\sqrt{2}$-krát väčšia ako šírka pásma jednoduchého rezonančného obvodu s rovnakou kvalitou [pozri výraz (9.73)].

c) **Nadkritická väzba *k* > *d*.** V týchto prípadoch stredná frekvencia ω_0 odpovedá lokálnemu minimu amplitúdovej charakteristiky [o tom sa možno presvedčiť preskúmaním priebehu závislosti (9.100)] a bočné frekvencie maximám ako to vidieť z kriviek na *obr. 9.24* a *9.25*. Frekvenčný odstup maxím je

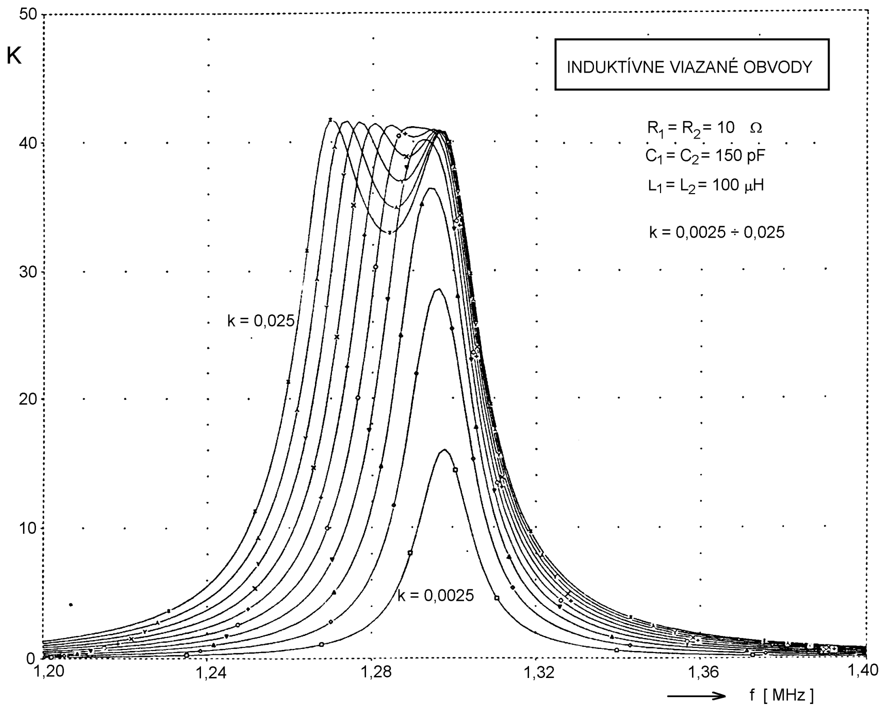
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0\sqrt{k^2 - d^2} \tag{9.107}$$

a ako vidíme rastie s koeficientom väzby. V bočných maximách má amplitúda koeficientu prenosu rovnaké hodnoty

$$K_{1,2}^{max} = \frac{1}{2d} = \frac{Q_0}{2} \tag{9.108}$$

a v strede má minimum s hodnotou

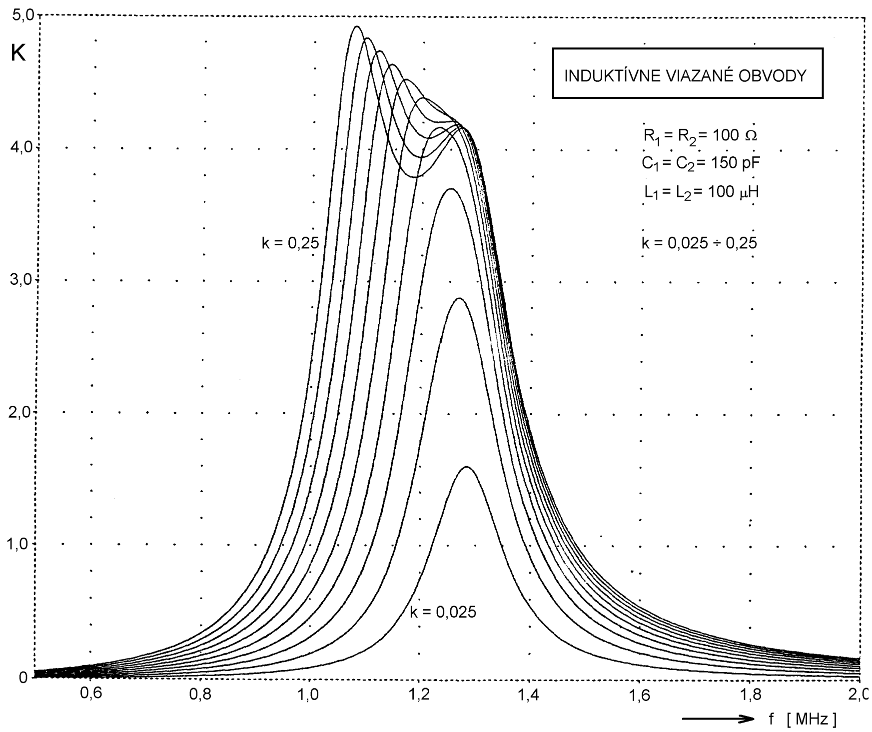
$$K_{min} = \frac{k}{k^2 + d^2} \tag{9.109}$$



Obr. 9.26

Na záver treba povedať, že uvedená približná analýza viazaných obvodov založená na predpoklade vysokých kvalít jednotlivých obvodov v praxi obyčajne úplne postačuje. Dnes, v dobe počítačovej techniky, však nie je problém presne analyzovať koeficient prenosu viazaných obvodov podľa výrazu (9.97), a to ako z hľadiska amplitúdovej, tak aj fázovej charakteristiky. Výsledkom takejto analýzy sú ako príklad na *obr. 9.26* a *9.27* zobrazené dve sústavy amplitúdových charakteristík.[1] Na obrázkoch sú zadané číselné parametre obvodov ako aj koeficienty väzby (ako parameter). Obvody sa líšia odpormi $R_1 = R_2 = R$, v pomere 1:10. Odpor $R = 10\ \Omega$ obvodov na *obr. 9.26* zodpovedá kvalite $Q_0 = (\sqrt{L/C})/R \approx 80$, čo je bežná kvalita obvodov v megahertzovej oblasti, obvody na druhom obrázku s odpormi $R = 100\ \Omega$ sú už silne tlmené a ich kvalita je iba $Q \approx 8$.

[1] Grafické priebehy na *obr. 9.26* a *9.27* boli získané simuláciou využitím programu PSPICE fy MicroSim Corporation, Fairbanks, Irvine, Ca 92718.



Obr. 9.27

Pozrime sa, čím sa výsledky presnej analýzy týchto obvodov líšia od výsledkov približnej, a čím sa líšia navzájom! Predovšetkým si na obrázkoch možno všimnúť, že frekvencia ω_0 obvodov nezostáva pri zmene väzby konštantná, ale sa mení – pri kvalitnejšom obvode menej a pri menej kvalitnom viac. V prípade na *obr. 9.26* sa pri zmene koeficientu väzby z hodnoty 0,0025 na hodnotu 0,025 posunie frekvencia z hodnoty cca 1,3 MHz o asi 17 kHz smerom k nižším frekvenciám, čo predstavuje relatívnu zmenu asi o −1,3 %. Takýto výsledok nás vo väčšine praktických prípadov oprávňuje použiť výsledky približnej analýzy. V druhom obvode na *obr. 9.27* pri desaťnásobnej zmene väzby z hodnoty k = 0,025 na hodnotu k = 0,25 posunie sa stredná frekvencia z hodnoty 1,3 MHz o asi 120 kHz smerom k nižším frekvenciám, čo predstavuje značnú relatívnu zmenu asi –9 %. V praxi treba uvážiť, či sa s takou odchýlkou výsledku približnej analýzy možno ešte uspokojiť. Ďalej si možno všimnúť, že zatiaľ čo približná analýza dáva rovnakú absolútnu hodnotu koeficientu prenosu v bočných maximách [pozri výraz (9.108) a *obr. 9.24* prípadne *obr. 9.25*], pri presnej analýze majú nerovnakú hodnotu a rozdiel rastie s hodnotou odporov obvodov. Na *obr. 9.26* je rozdiel pozorovateľný, ale prakticky nemerateľný, na *obr. 9.27* k = 0,25 činí rozdiel maxima a minima cca 1,4 dB. Z porovnania grafov na obidvoch obrázkoch vidieť, že hodnoty koeficientu prenosu sú nepriamo úmerné hodnotám odporov R, čo plynie aj z výrazu (9.97). V konkrétnych prípadoch na *obr. 9.26* a *9.27* je R v pomere 1:10 a K sa redukuje približne 10:1.

Induktívne viazané obvody sa používajú najmä vo vysokofrekvenčných častiach rôznych telekomunikačných zariadení, ako sú rádiové a televízne vysielače a prijímače, a v meracích zariadeniach vysokofrekvenčnej elektroniky. Dnes sa často nahrádzajú keramickými filtrami.

Úlohy 231 – 276

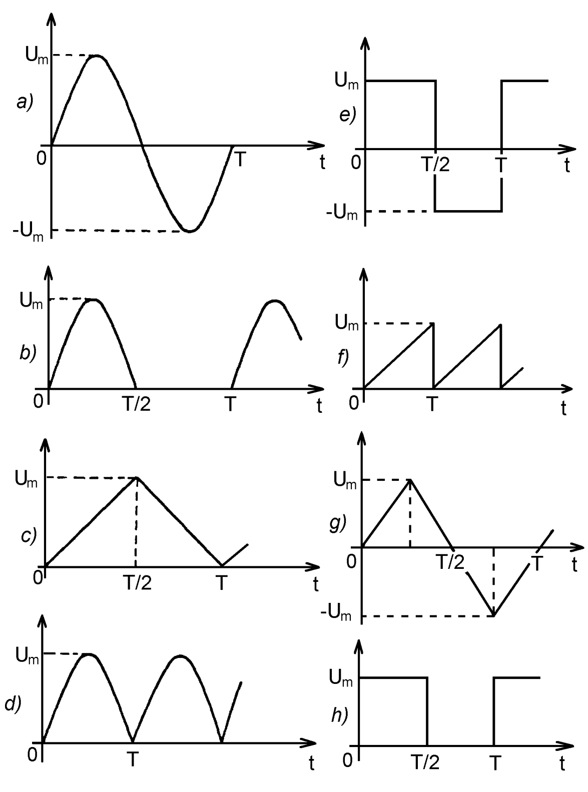
231. Stredná hodnota periodickej funkcie $v(t)$ s periódou T je daná výrazom

$$\overline{v} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\mathrm{d}t$$

a efektívna (stredná kvadratická) hodnota je daná výrazom

$$u_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}$$

Vypočítajte stredné a efektívne hodnoty funkcií zobrazených na *obr. 231*.



Obr. 231

232. Rozhodnite, z ktorých dvoch elementov pozostáva sériový obvod, v ktorom prúd a napätie sú dané časovými závislosťami

$$u = 150 \sin(500t + 10°) \qquad [\mathrm{V}]$$
$$i = 13{,}42 \sin(500t - 53{,}4°) \qquad [\mathrm{A}]$$

Vypočítajte hodnoty týchto elementov.

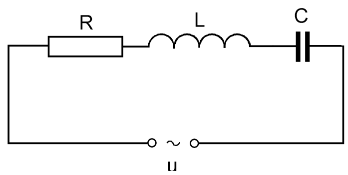
233. V sériovom *RLC* obvode prúd a napätie sú dané vzťahmi

$$i = 12{,}5 \cos(3\,000t - 45°) \qquad [A]$$
$$u = 353{,}5 \cos(3\,000t) \qquad [V]$$

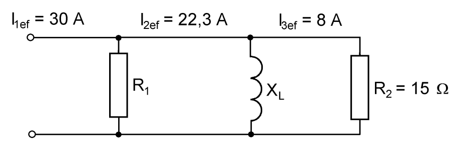
Indukčnosť v obvode má hodnotu 10 mH. Vypočítajte hodnoty odporu a kapacity.

234. Ak je k sériovému *RLC* obvodu na *obr. 234* pripojené striedavé napätie $u_1 = 100 \cos(1\,000t)$ V, potom amplitúda prúdu v obvode je 5 A. V prípade, že k obvodu je pripojené napätie $u_2 = 80 \cos(500t)$ V, potom stredný výkon v odpore *R* je 200 W a účinník sa rovná jednej. Vypočítajte hodnoty odporu, indukčnosti a kapacity.

235. V zapojení podľa *obr. 235* vypočítajte:
a) efektívnu hodnotu napätia na vstupných svorkách,
b) hodnotu odporu *R* a reaktancie *X*,
c) celkový činný výkon v obvode,
d) komplexnú impedanciu obvodu.



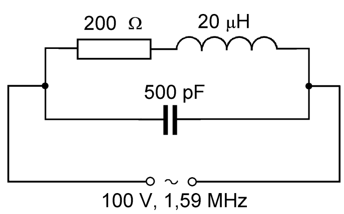
Obr. 234



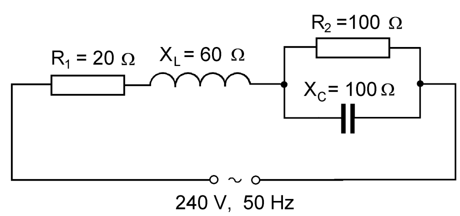
Obr. 235

236. Určite amplitúdu prúdu dodávaného zdrojom do obvodu podľa *obr. 236*. Zdroj má efektívne napätie 100 V s frekvenciou 1,59 MHz.

237. V obvode na *obr. 237* vypočítajte:
a) efektívnu hodnotu prúdu dodávaného zdrojom,
b) maximálny náboj na kondenzátore (jeho amplitúdu),
c) celkový činný výkon v obvode.



Obr. 236



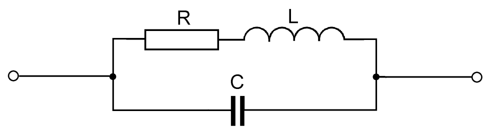
Obr. 237

238. Odpor *R* = 10 kΩ a kondenzátor *C* = 0,2 μF sú spojené v sérii a pripojené na zdroj striedavého efektívneho napätia 220 V s frekvenciou 50 Hz. Vypočítajte:
a) impedanciu obvodu,
b) efektívnu hodnotu prúdu dodávaného zdrojom,
c) činný výkon v obvode,
d) efektívne hodnoty napätí na odpore a kondenzátore.
Vypočítajte veličiny podľa bodov a), b), c) pre paralelné spojenie daných elementov. Určite efektívne hodnoty prúdov v odpore a kondenzátore.

239. Čierna skrinka má dve svorky. Ak sa na svorky pripojí jednosmerné napätie 100 V, potom v obvode tečie prúd 0,01 A. Pri pripojení sieťového efektívneho napätia (220 V, 50 Hz) tečie v obvode efektívny prúd 2 A. Ak sa amplitúda napätia udržuje konštantnou a mení sa frekvencia, pri f_0 = 1 kHz má amplitúda prúdu maximum. Čo obsahuje skrinka?

240. Priestor medzi kruhovými elektródami doskového kondenzátora je vyplnený slabo vodivým dielektrikom s mernou vodivosťou σ a permitivitou ε. Nájdite intenzitu magnetického poľa v kondenzátore, ak intenzita elektrického poľa medzi doskami je

$$E = E_m \cos\omega t$$



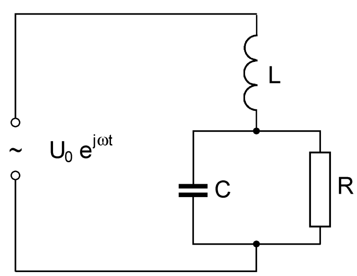
Obr. 241

241. Kondenzátor je vyplnený dielektrikom s relatívnou permitivitou

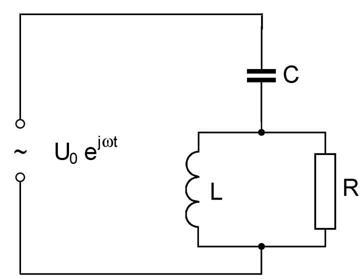
$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \mathrm{j}\gamma)}$$

(ionizovaný plyn, plazma, ω_p je plazmová frekvencia). Kapacita nevyplneného kondenzátora je C_0. Dokážte, že impedancia takého kondenzátora je rovnaká ako impedancia dvojpólu podľa *obr. 241,* ak sa jeho prvky vyberú zodpovedajúcim spôsobom. Vypočítajte hodnoty *R*, *L*, *C*.

242. Je daný obvod podľa *obr. 242*. Vypočítajte prúd odporom, ak $\omega L = 1/\omega C$. Obvod si dal patentovať ako jednoduchý stabilizátor striedavého prúdu americký elektrotechnik Charles Steinmetz (1865 – 1923).



Obr. 242



Obr. 243

243. Je daný obvod podľa *obr. 243*. Vypočítajte prúd odporom, ak $\omega L = 1/\omega C$.

244. Principiálne zapojenie reproduktorových sústav pre Hi-Fi zosilňovače je znázornené na *obr. 244*. Aktívny odpor každého reproduktora je *R*.

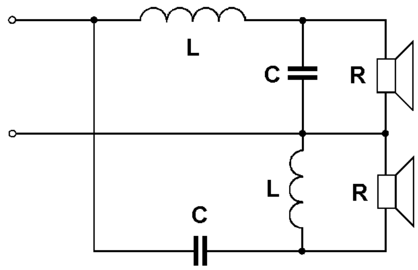
a) Ukážte, že impedancia na vstupných svorkách je reálna pri frekvencii

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

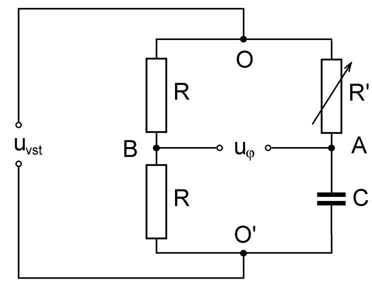
b) Ako treba zvoliť pomer *L*/*C*, aby vstupný odpor pri frekvencii ω_0 bol rovný práve hodnote *R*?

c) Ako sa v tomto prípade delí vstupný výkon medzi jednotlivými reproduktormi?

245. V obvodovej elektronike niekedy treba posúvať fázu napätia, ktorého amplitúda musí pritom zostať konštantná. Na nízkych frekvenciách takému účelu slúži fázový posúvač na *obr. 245*. Dokážte, že ak je na vstup fázového posúvača pripojené striedavé napätie s amplitúdou U_0, potom pri zmene odporu R' od nuly do nekonečna zostáva amplitúda výstupného napätia u konštantná a rovná $U_0/2$ a fáza sa oproti vstupnému napätiu mení v intervale od 0° do 180°.



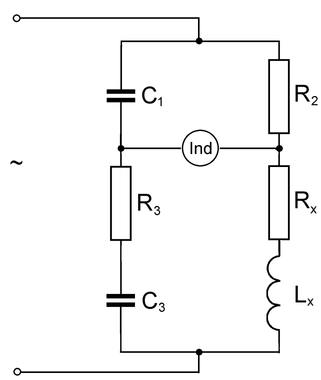
Obr. 244



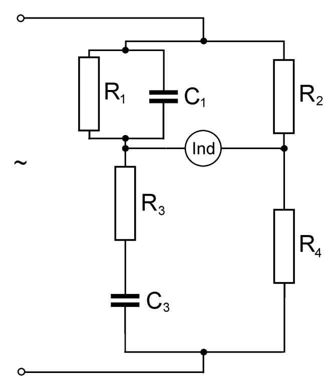
Obr. 245

246. Zapojenie na *obr. 246* je Owenov most, vhodný na meranie indukčností a odporov cievok. Zistite aké vzťahy musia platiť medzi elementmi mostu, aby bol vyvážený, t. j. aby prúd indikátorom bol nulový. Závisí vyváženie mostu od frekvencie napájacieho napätia?

247. Na meranie nízkych frekvencií a tiež ako selektívny spätnoväzobný prvok v RC-generátoroch sa používa Wienov most podľa *obr. 247*. Nájdite podmienky rovnováhy tohoto mostu. Aké sú podmienky rovnováhy, ak $R_1 = R_3 = R$, $C_1 = C_3 = C$, $R_2 = R_4/2 = R_0$?



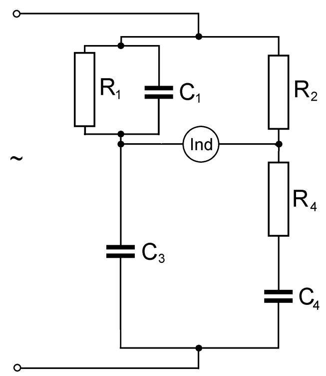
Obr. 246



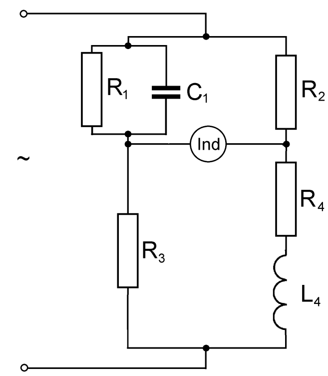
Obr. 247

248. Na meranie kapacít a dielektrických vlastností materiálov sa používa Scheringov most v zapojení podľa *obr. 248*. Nájdite podmienky rovnováhy tohoto mostu. Závisí rovnováha mostu od frekvencie napájacieho napätia?

249. Na meranie indukčností a odporov cievok sa používa aj Maxwellov most, ktorého zapojenie je na *obr. 249*. Nájdite podmienky rovnováhy mostu. Je tento most frekvenčne závislý?

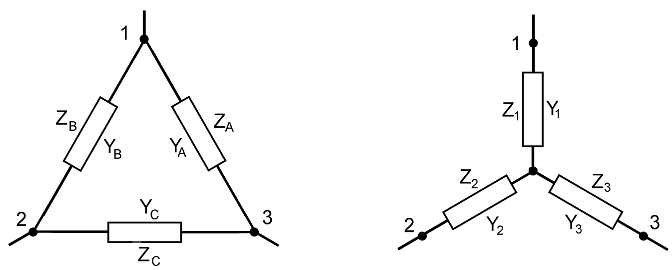


Obr. 248



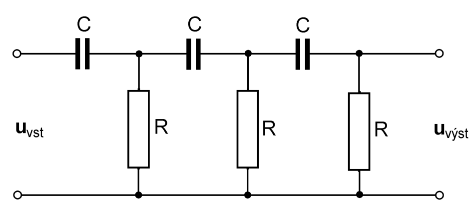
Obr. 249

250. Pri analýze elektrických sietí je niekedy užitočné urobiť transformáciu "trojuholníkového" zapojenia impedancií na "trojcípu hviezdu" impedancií a naopak. Takáto transformácia časti elektrickej siete je znázornená na *obr. 250*. Hodnoty elementov vo hviezde a trojuholníku možno vybrať tak, že obidva obvody budú elektricky ekvivalentné, t. j. ich impedancie, resp. admitancie z ľubovoľnej strany budú rovnaké. Nájdite vzťahy medzi Z_1, Z_2, Z_3 a Z_A, Z_B, Z_C, pre identické vlastnosti obidvoch zapojení.



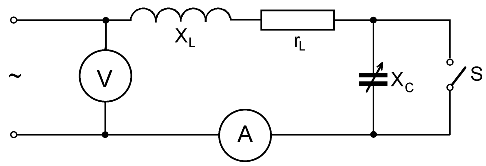
Obr. 250

251. V generátoroch nízkych frekvencií sa na otočenie fáze napätia o 180° používa zapojenie podľa *obr. 251*. Dokážte, že v takomto zapojení pri frekvencii $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{6}RC}$ je $U_{výst} = -\dfrac{1}{29}U_{vst}$.



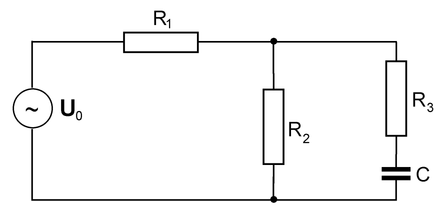
Obr. 251

252. Na meranie parametrov cievok (r_L, X_L) môže slúžiť obvod podľa *obr. 252*. Kapacita C v obvode sa pri meraní nastaví tak, aby efektívna hodnota prúdu v obvode bola rovnaká pri zopnutom a rozopnutom spínači S. Vypočítajte ohmický odpor indukčnosti r_L a jej reaktanciu X_L, ak pri efektívnom napätí 220 V a reaktancii kondenzátora X_C = 48 Ω bola efektívna hodnota prúdu v obvode pri rozopnutom a zopnutom spínači 5,6 A.



Obr. 252

253. V zapojení na *obr. 253* treba vypočítať komplexné amplitúdy (fázory) prúdov v jednotlivých odporoch. Hodnoty jednotlivých elementov sú: $R_1 = R_2 = R_3 = 1\ \Omega$, C = 3,183 μF. Zdroj má amplitúdu napätia $\boldsymbol{U}_0 = 10\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}0}$ V a frekvenciu f = 50 kHz. Aký je fázový posuv medzi prúdmi v odporoch R_2 a R_3?



Obr. 253

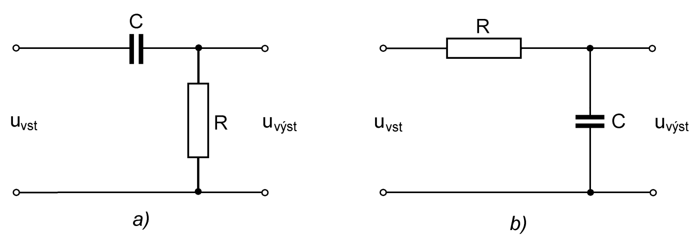
254. Obvod na *obr. 254a* sa za istých podmienok správa ako "derivačný", t. j. jeho výstupné napätie je úmerné časovej derivácii vstupného napätia. Podobne obvod na *obr. 254b* sa správa ako "integračný". Zistite za akých podmienok platí (v prvom prípade)

$$u_{výst} \sim \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{vst}$$

resp. (v druhom prípade)

$$u_{výst} \sim \int u_{vst} \mathrm{d}t$$

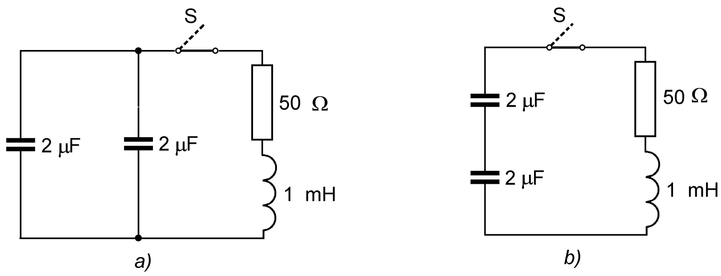
Nech $u_{vst} = U_0 \cos\omega t$. Ako voliť hodnoty R a C v obvodoch, aby výstupné napätie bolo úmerné derivácii (integrálu) vstupného napätia?



Obr. 254

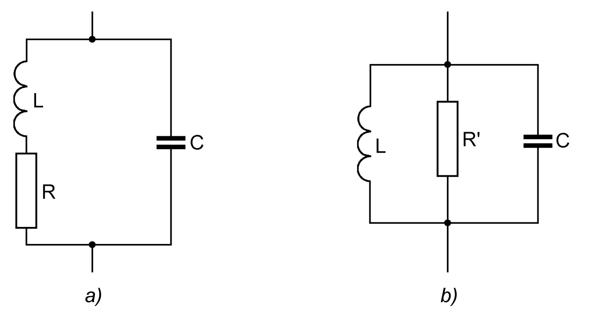
255. Rezonančný obvod kmitá bez tlmenia na frekvencii $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. O koľko sa zmení rezonančná frekvencia (v percentách), ak sa obvod zatlmí sériovým odporom, ktorého veľkosť je taká, že obvod má kvalitu 200?

256. Zistite, v ktorom z obvodov na *obr. 256a,*b môžu po zapnutí spínača vzniknúť tlmené kmity.



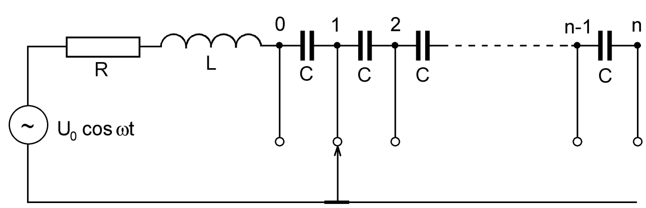
Obr. 256

257. Na *obr. 257a,b* sú dva rezonančné obvody *RLC* a *R'LC*. Odpor *R* je taký malý, že $R \ll \omega_0 L$, kde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Ako treba voliť odpor *R*', aby obidva obvody boli v okolí rezonancie ekvivalentné?



Obr. 257

258. V elektrickom zapojení na *obr. 258* možno k sériovej dvojici *RL* pripájať prepínačom sériovo radené kondenzátory *C*.



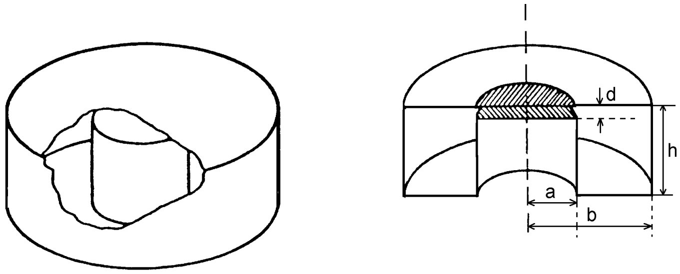
Obr. 258

a) Nájdite stredný výkon v odpore *R*, ak je prepínač v ľubovoľnej polohe *m* ($0 < m < n$).

b) Nech R = 1 000 Ω, L = 10 H, C = 20 μF, ω = 100 rad/s. Pre akú hodnotu *m* je stredný výkon v odpore maximálny?

c) Aká je amplitúda napätia na sériovej dvojici *RL*, ak je prepínač v polohe 2 a U_0 = 100 V? Aká je amplitúda napätia na odpore?

259. Rezonančná dutina na *obr. 259* je podstatnou časťou generátora veľmi vysokých frekvencií – klystrónu. Takúto dutinu možno považovať za paralelný *LC* obvod. Jeho indukčnosť tvorí toroid s jedným závitom (cylindrická časť dutiny) a paralelné plochy uzatvárajúce toroid (vyšrafovaná časť) predstavujú kapacitu obvodu. Nájdite výraz pre rezonančnú frekvenciu dutiny, pričom predpokladajte, že steny dutiny sú ideálne vodivé! Riešte numericky pre a = 1 cm, b = 2 cm, h = 1 cm, d = 1 mm. V dutine je vákuum.

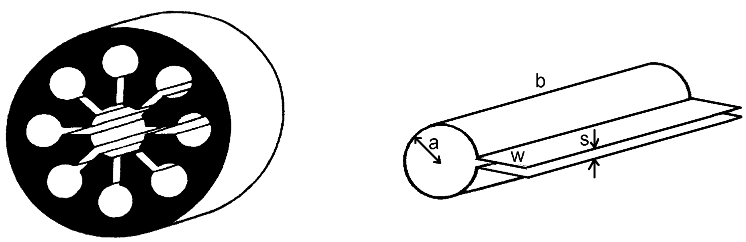


Obr. 259

260. Podstatnou časťou magnetrónu (generátora veľmi vysokých frekvencií) je masívny anódový blok (*obr. 260a*) s vyfrézovanými rezonančnými dutinami, z ktorých jedna je zobrazená na *obr. 260b*. Dutinu možno považovať za paralelný rezonančný *LC* obvod, ktorého indukčnosť je tvorená valcovou časťou a kapacitu predstavujú paralelné rovinné plochy. Rezonančná frekvencia dutiny je v prvom priblížení frekvenciou, na ktorej magnetrón kmitá, pričom počet dutín len málo ovplyvňuje výslednú frekvenciu.

a) Vypočítajte rezonančnú frekvenciu dutiny za predpokladu, že $b \gg a$ a $s \ll w$.

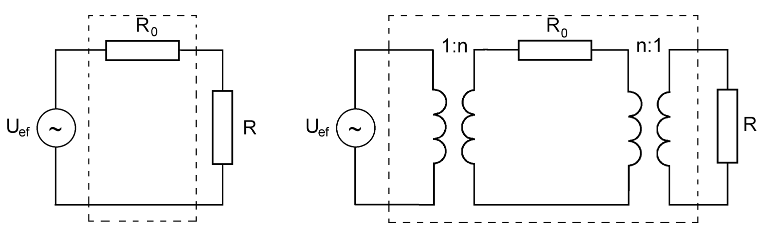
b) Prvý magnetrón vyrobený v USA počas druhej svetovej vojny pre radarové účely mal parametre: a = 3 mm, s = 1 mm, w = 3 mm. Vypočítajte číselne rezonančnú frekvenciu a vlnovú dĺžku kmitov magnetrónu. V dutine je vákuum.



a) b)

Obr. 260

261. Pri prenose veľkých elektrických výkonov na diaľku sa primárne napätie elektrárne najprv transformuje na vysoké napätie (rádovo stovky kilovoltov) a na strane spotrebiteľa sa znovu

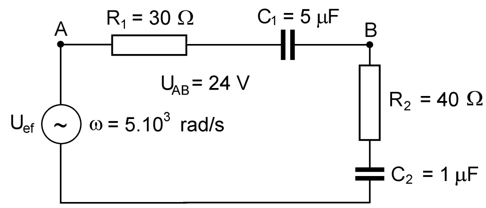


a) b)

Obr. 261

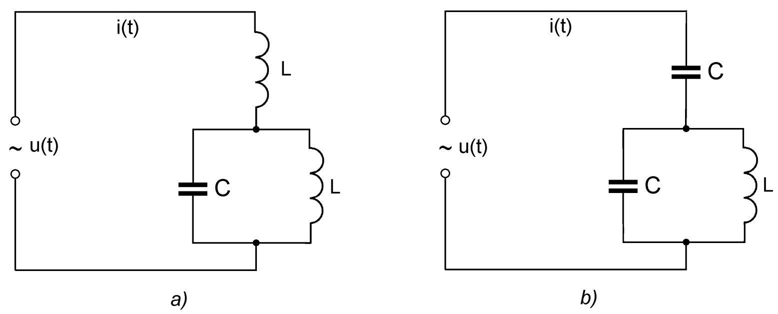
transformuje na nízke napätie (napr. 220 V). Táto transformácia sa robí kvôli zníženiu tepelných (ohmických) strát vo vedení. Na *obr. 261a* je obvod, v ktorom generátor a spotrebič R sú priamo spojené vedením o celkovom odpore R_0. Na *obr. 261b* je spojenie generátor – spotrebič urobené ideálnymi transformátormi s prevodom 1 : n a n : 1, pričom samotné vedenie má ten istý odpor R_0. Vypočítajte pomer celkového prenášaného výkonu k tepelným stratám v prvom a druhom prípade.

262. V obvode na *obr. 262* nájdite efektívnu hodnotu napätia zdroja U_{ef}, ak na sériovej dvojici R_1C_1 bolo namerané efektívne napätie U = 24 V.



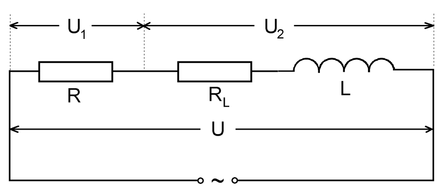
Obr. 262

263. V obvodoch podľa *obr. 263a,b* nájdite časovú závislosť prúdu $i(t)$, ak $u(t) = U_0 \cos \omega t$.



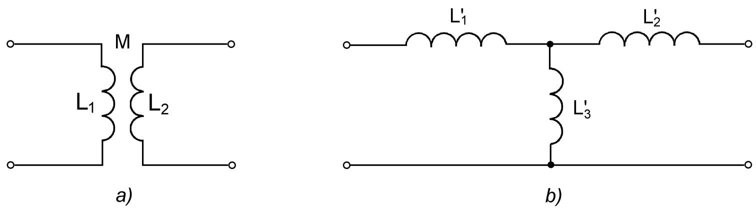
Obr. 263

264. Cievka a známy odpor R sú spojené v sérii (*obr. 264*) a pripojené na zdroj striedavého napätia s efektívnou hodnotou U. Na odpore bolo namerané efektívne napätie U_1 a na cievke U_2. Vypočítajte stredný výkon na cievke (na jej činnom odpore).



Obr. 264

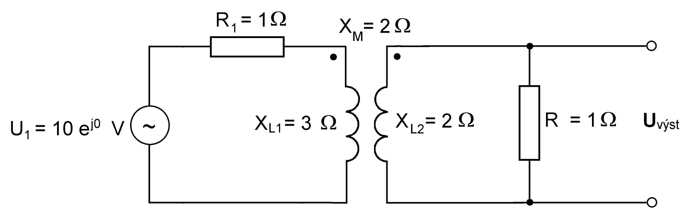
265. Viazané obvody na *obr. 265a* sa pre výpočtové účely dajú nahradiť zapojením podľa *obr. 265b.* Ako treba voliť hodnoty indukčností L_1', L_2' a L_3', aby obvody boli elektricky ekvivalentné?



Obr. 265

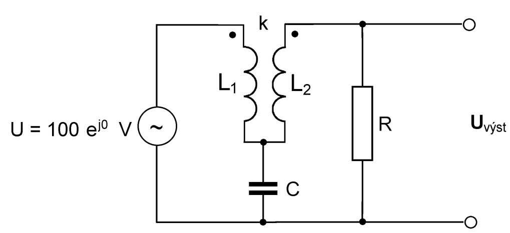
266. Dve cievky s indukčnosťami L_1 a L_2 majú vzájomnú indukčnosť M.
a) Vypočítajte dve možné hodnoty indukčnosti cievok spojených do série.
b) Vypočítajte dve možné hodnoty indukčnosti, ak sú cievky spojené paralelne.
c) Aká indukčnosť je medzi svorkami každej cievky, ak je druhá cievka skratovaná?
Riešte číselne pre $L_1 = 6$ H, $L_2 = 4$ H, $M = 3$ H.

267. V zapojení na *obr. 267* nájdite amplitúdu a fázu výstupného napätia.



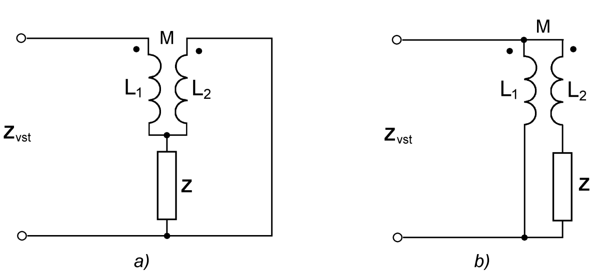
Obr. 267

268. V obvode na *obr. 268* nájdite amplitúdu a fázový posuv výstupného napätia. Riešte pre číselné hodnoty $R = 1\ \Omega$, $X_C = 8\ \Omega$, $X_{L1} = 16\ \Omega$, $X_{L2} = 4\ \Omega$, $k = 1/2$.



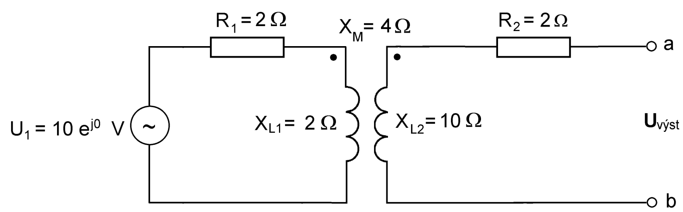
Obr. 268

269. Vypočítajte vstupnú impedanciu obvodov na *obr. 269a, b* pri frekvencii ω.



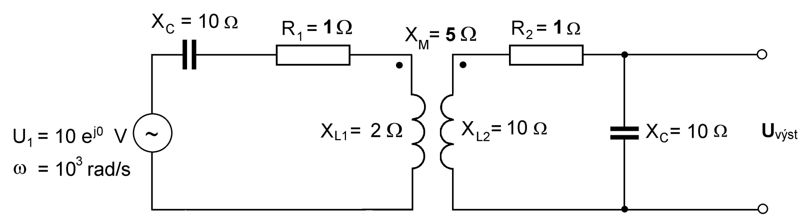
Obr. 269

270. Pre obvod podľa *obr. 270* nájdite:
a) Výstupné napätie (amplitúdu a fázový posuv) medzi svorkami *a–b*.
b) Prúd, ktorý tečie sekundárnym obvodom ak svorky *a–b* sú skratované.



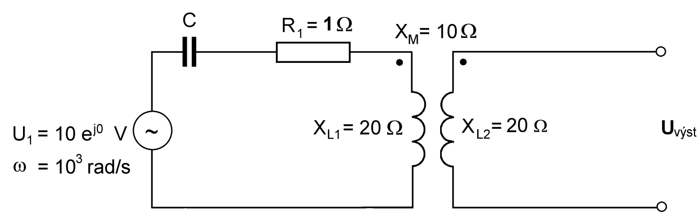
Obr. 270

271. V zapojení na *obr. 271* nájdite amplitúdu a fázový posuv výstupného napätia.



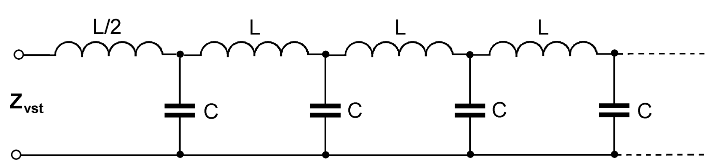
Obr. 271

272. a) V obvode na *obr. 272* nájdite takú hodnotu *C*, pri ktorej výsledná reaktancia primárneho obvodu bude nulová (sériová rezonancia). b) Pre túto hodnotu *C* nájdite amplitúdu a fázový posuv výstupného napätia. Ukážte, že amplitúda výstupného napätia je maximálna pri zvolenej hodnote *C*.



Obr. 272

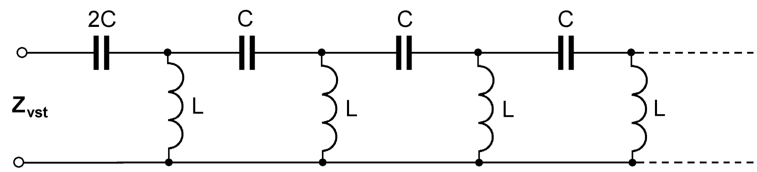
273. Vypočítajte vstupnú impedanciu nekonečného *LC* reťazca podľa *obr. 273* (použite postup uvedený v úlohe 118). Vstupná impedancia zapojenia na obrázku môže byť reálna alebo imaginárna. V akom pásme frekvencií je táto impedancia reálna?



Obr. 273

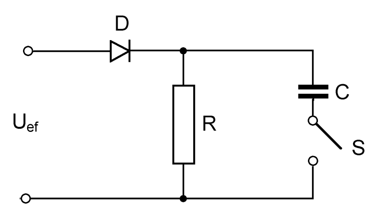
Reálna impedancia (ohmický odpor) pripojená k zdroju napätia odoberá zo zdroja energiu, ktorá sa v prípade zapojenia zostaveného z čisto reaktančných prvkov nemôže meniť na teplo, ale iba postupovať pozdĺž nekonečného reťazca (nekonečný reťazec sa môže nahradiť konečným, ak sa na jeho výstup pripojí vhodný tzv. charakteristický odpor). Reťazec sa teda správa ako frekvenčný filter – prepustí signály s frekvenciou, pre ktorú je vstupná impedancia reálna a zadrží signály s frekvenciou, pre ktorú vstupná impedancia reťazca je imaginárna. V akom pásme frekvencií je uvedený filter "priezračný"? Opísané zapojenie predstavuje oneskorovacie vedenie, často používané v impulzovej technike.

274. Podobne ako v úlohe 273 analyzujte nekonečný reťazec, ktorého zapojenie je na *obr. 274*.



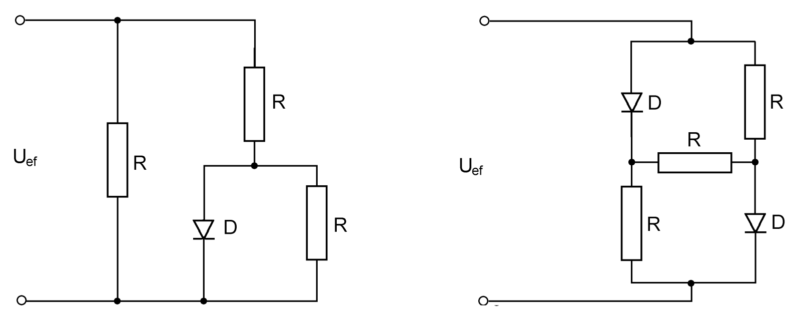
Obr. 274

275. Usmerňovač s ideálnou diódou (ideálna dióda je v priepustnom smere dokonale vodivá a v závernom smere dokonale nevodivá) je pripojený na zdroj striedavého napätia U_{ef} s frekvenciou f podľa *obr. 275*. Koľkokrát sa zmení stredný výkon v odpore R, ak sa zopne spínač S, keď je známe, že za jednu periódu napätie na kondenzátore zostáva prakticky konštantné? V akom vzťahu musia byť R, C a f ?



Obr. 275

276. V obvodoch na *obr. 276a,b* vypočítajte stredný výkon. Diódy sú ideálne.



a) *b)*

Obr. 276

10 POHYB NABITÝCH ČASTÍC V ELEKTRICKÝCH A MAGNETICKÝCH POLIACH

Riadenie pohybu častíc elektrickým a magnetickým poľom je predmetom štúdia vedeckých disciplín známych pod menami "fyzikálna elektronika" a "elektrónová a iónová optika" a využíva sa v mnohých zariadeniach spotrebnej a priemyselnej elektroniky. Okrem toho je známe, že veľa principiálnych experimentov fyziky súvisí s pohybom elektrických nábojov v elektromagnetických poliach. Je to napr. známa Thomsonova metóda merania merného náboja elektrónu *e*/*m*,[1] Franckov-Hertzov experiment[2] a Sternov-Gerlachov experiment,[3] ktoré potvrdzujú platnosť niektorých zákonov kvantovej mechaniky, Rabiho metóda molekulárnych zväzkov[4] na určenie magnetického momentu elementárnych častíc a mnohé iné. Aj Rutherfordov rozptylový vzorec odráža pohyb elektrónu v guľovo symetrickom elektrickom poli.[5] Obzvlášť dôležitým príkladom je urýchľovanie nabitých častíc v rôznych druhoch urýchľovačov (cyklotrón, betatrón, synchrotrón a. i.) pre potreby fyziky veľmi vysokých energií, ďalej hmotnostné spektrografy na separáciu izotopov, katódová (Braunova) trubica, z ktorej sa vyvinuli dnešné obrazovky s elektrickým a magnetickým vychyľovaním používané napr. V osciloskopoch, v monitoroch počítačov a v TV prijímačoch, vákuové elektrónky, generátory a zosilňovače signálov veľmi vysokých frekvencií (klystróny, magnetróny, karcinotróny, permaktróny a i.). V ďalšom budeme analyzovať niektoré základné črty pohybov nabitých častíc v elektromagnetických poliach.

10.1 VOĽNÁ NABITÁ ČASTICA V ELEKTRICKOM POLI

Ak sa nabitá častica s nábojom q (kladným alebo záporným) ocitne v elektrickom poli intenzity $\boldsymbol{E}$, bude na ňu pôsobiť sila

$$\boldsymbol{F}_{el} = q\boldsymbol{E} \tag{10.1}$$

V prípade, že častica je voľná, začne sa pod účinkom tejto sily pohybovať, pričom pohyb je daný Newtonovou pohybovou rovnicou

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_{el} \tag{10.2}$$

[1] Thomson, J. J., Phil. Mag. **5**, 11, 227 (1881)
[2] Franck, J., Hertz, G.: Verhandlungen der Deutschen Phys. Gesellschaft, **15**, 1914
[3] Stern, O., Gerlach, W., Z. f. Physik **8**, 991 (1921)
[4] Rabi, I. I. et al., Phys. Rev. **50** (1936): **56** (1939)
[5] Rutherford, E., Phil. Mag. **21**, 669 (1911)

kde $\boldsymbol{p}$ je hybnosť častice. Ak je hmotnosť častice m a jej rýchlosť je $\boldsymbol{v}$, potom hybnosť

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{10.3}$$

Rýchlosti, ktoré môže nabitá častica v elektromagnetických poliach dosiahnuť, sú nezriedka relativistické, teda blízke rýchlostiam svetla c ($v \approx c$), takže m vo výraze (10.3) je relativistická hmotnosť závislá od okamžitej rýchlosti v podľa známeho vzťahu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{10.4}$$

kde m_0 je pokojová hmotnosť častice. Takýto prípad nastáva napr. v betatróne určenom na urýchľovanie elektrónov.

Ak však $v \ll c$, možno hmotnosť m považovať za relativisticky nezávislú, teda položiť

$$m \approx m_0 \tag{10.5}$$

a pohybovú rovnicu (10.2) s ohľadom na (10.1) a (10.3) napísať v tvare

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} \tag{10.6}$$

Rýchlosť $\boldsymbol{v}$ možno vyjadriť ako časovú deriváciu polohového vektora $\boldsymbol{r}$, teda

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}$$

a rovnica (10.6) prejde na diferenciálnu rovnicu pre polohový vektor v tvare

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = q\boldsymbol{E} \tag{10.7}$$

V pravouhlom súradnicovom systéme x, y, z je polohový vektor

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

a pomocou neho možno vektorovú pohybovú rovnicu (10.7) prepísať na tri zložkové rovnice

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= qE_x \\ m\ddot{y} &= qE_y \\ m\ddot{z} &= qE_z \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

Bodky nad súradnicami znamenajú ich časové derivácie. Rovnice (10.8) pri daných zložkách intenzity poľa E_x, E_y, E_z a pri udaných začiatočných podmienkach (začiatočná poloha x_0, y_0, z_0 a začiatočná rýchlosť v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} v čase $t = 0$) umožňujú nájsť polohu častice ako funkciu času t.

Vidíme, že úloha o pohybe nabitej nerelativistickej častice v elektrickom poli je bežný kinematický problém, v ktorom charakter pohybu častice určujú vlastnosti poľa, ktoré môže závisieť nielen od súradníc, ale aj od času.

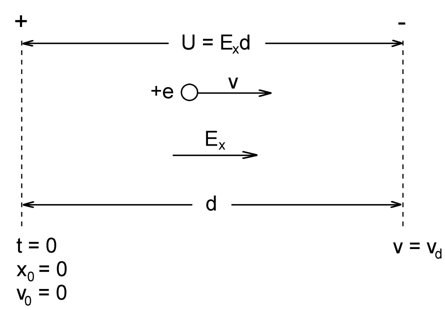
V praxi sú najdôležitejšie pohyby častíc v homogénnych a valcovo symetrických elektrických poliach. Homogénne polia sa využívajú na urýchľovanie častíc alebo na vychýlenie zväzku nabitých častíc, napr. systémom dvoch rovinných planparalelných elektród v obrazovke osciloskopu. Valcovo symetrické elektrické polia sa používajú na vytvorenie elektrostatických šošoviek, ktoré slúžia na fokusáciu elektrónových a iónových zväzkov.

Najjednoduchší je pohyb častíc v homogénnych elektrických poliach, ktorý svojím charakterom pripomína pohyb hmotného bodu v gravitačnom poli. Predpokladajme, že homogénne elektrické pole má smer osi x a intenzitu E_x ($E_y = E_z = 0$). Sústava rovníc (10.8) prejde na tvar

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= qE_x \\ \ddot{y} = \ddot{z} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

z ktorého vidíme, že v smeroch osí y a z sa častica môže pohybovať konštantnou začiatočnou rýchlosťou (s nulovým zrýchlením) alebo je v pokoji. V smere osi x sa pohybuje s konštantným zrýchlením

$$a_x = \ddot{x} = \frac{q}{m} E_x \tag{10.10}$$



Obr. 10.1

ktoré môže byť kladné alebo záporné, podľa znamienka náboja. V smere osi x sa teda častica pohybuje rovnomerne zrýchlene alebo spomalene v závislosti od znamienka náboja častice. Ak sa častica s nábojom $q = +e$ (napr. protón) v čase $t_0 = 0$ nachádza v začiatočnom bode $x_0 = 0$ s nulovou rýchlosťou $v_0 = 0$, potom za čas t prejde v elektrickom poli intenzity E_x dráhu (pozri *obr. 10.1)*

$$d = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{eE_x}{2m} t^2 \tag{10.11}$$

a jej rýchlosť dosiahne hodnotu

$$v_d = a_x t = \frac{eE_x}{m} t \qquad (10.12)$$

Vyjadrením času t z výrazu (10.11) a dosadením do (10.12) dostaneme rýchlosť ako funkciu prejdenej vzdialenosti v poli v tvare

$$v_d = \sqrt{\frac{2eE_x d}{m}} \qquad (10.13)$$

Ak uvážime, že $E_x d = U$ je rozdiel potenciálov začiatočného a konečného bodu (napätie), možno výraz (10.13) napísať v tvare

$$v_d = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \qquad (10.14)$$

V prípade, že urýchľovanou časticou je elektrón, ktorého merný náboj má veľkosť $|e/m_e| = 1{,}758\,8.10^{11}$ C.kg^{-1}, jeho rýchlosť je daná výrazom

$$v_d = 5{,}93.10^5 \sqrt{U} \qquad [\mathrm{m.s^{-1}; V}] \qquad (10.14a)$$

Vidíme, že ak elektrón zo stavu pokoja prejde potenciálový rozdiel iba 1 V, vzrastie jeho rýchlosť na 593 km/s. Ak prejde potenciálový rozdiel 2,5 kV, dosiahne rýchlosť $2{,}97.10^7$ m/s, čo je jedna desatina rýchlosti svetla.

Kinetická energia, ktorú častica na dráhe d dosiahne, je

$$W_k = \frac{1}{2} m v_d^2 = eU \qquad (10.15)$$

a ako vidíme, rovná sa zmene potenciálnej energie eU na prejdenej dráhe.

Ak častica vletí do homogénneho elektrického poľa kolmo na jeho smer, jej výsledný pohyb v poli je superpozíciou rovnomerného pohybu v smere začiatočnej rýchlosti a rovnomerne zrýchleného pohybu v smere alebo proti smeru elektrického poľa v závislosti od znamienka náboja. Výsledný pohyb je potom pohybom častice po úsekoch paraboly. V súvislosti s pohybom častíc v elektrickom poli odporúčam čitateľovi riešiť úlohy 279, 280 a 282.

Na záver tohto odseku treba povedať, že naše úvahy o pohybe častice v elektrickom poli platia iba pre osamotenú časticu. V prípade dvoch a viac častíc treba uvážiť aj vzájomné elektrické a magnetické silové pôsobenie častíc. Dva nerelativistické elektróny vo vzdialenosti r pôsobia na seba odpudivou silou podľa Coulombovho zákona

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

a ak sa pohybujú rýchlosťou v kolmo na ich spojnicu jedným smerom a v jednej línii pôsobia na seba dodatočnou magnetickou príťažlivou silou

$$F_{mag} = evB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^2}{r^2}v^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\frac{v^2}{c^2} = F_{el}\frac{v^2}{c^2} \ll F_{el}$$

Tieto sily budú do istej miery ovplyvňovať pohyb elektrónov napr. v elektrónovom zväzku tak, že budú spôsobovať jeho defokusáciu.

10.2 POHYB NABITÝCH ČASTÍC V STATICKÝCH MAGNETICKÝCH POLIACH

Na rozdiel od elektrického poľa, ktoré nabitú časticu urýchľuje pozdĺž svojich siločiar, pôsobenie magnetického poľa na pohyb častice je oveľa zaujímavejšie. Pohyb častice s nábojom e v magnetickom poli indukcie $\boldsymbol{B}$ sa deje pod účinkom známej magnetickej zložky Lorentzovej sily

$$\boldsymbol{F}_{mag} = e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{10.16}$$

Takáto sila nemôže častici udeľovať dráhové zrýchlenie v smere rýchlosti $\boldsymbol{v}$. Pre rýchlosti $v \ll c$ pohybová rovnica častice s hmotnosťou m je tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{10.17}$$

a z nej predovšetkým vidieť, že ak sa častica ocitne v poli $\boldsymbol{B}$ v pokoji, pole nemá na ňu žiadny pohybový účinok. Ani v prípade pohybu častice pozdĺž indukčných čiar nemá magnetické pole vplyv na jej pohyb. Ak však rýchlosť $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{B}$, potom pole $\boldsymbol{B}$ núti časticu pohybovať sa so zrýchlením, ktoré je kolmé na obidva vektory $\boldsymbol{v}$ aj $\boldsymbol{B}$. Je to dostredivé zrýchlenie veľkosti v^2/R, ktoré v homogénnom magnetickom poli spôsobí pohyb častice po kružnici polomeru R (pozri *obr. 10.2*). V takom prípade rovnica (10.17) udáva rovnosť dostredivej sily

$$F = m\frac{v^2}{R}$$

a magnetickej sily veľkosti

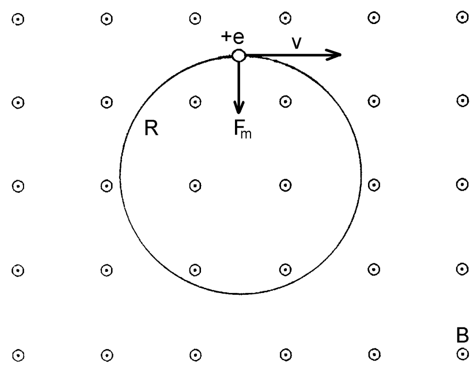
$$F_{mag} = evB$$

takže platí

$$m\frac{v^2}{R} = evB \tag{10.18}$$

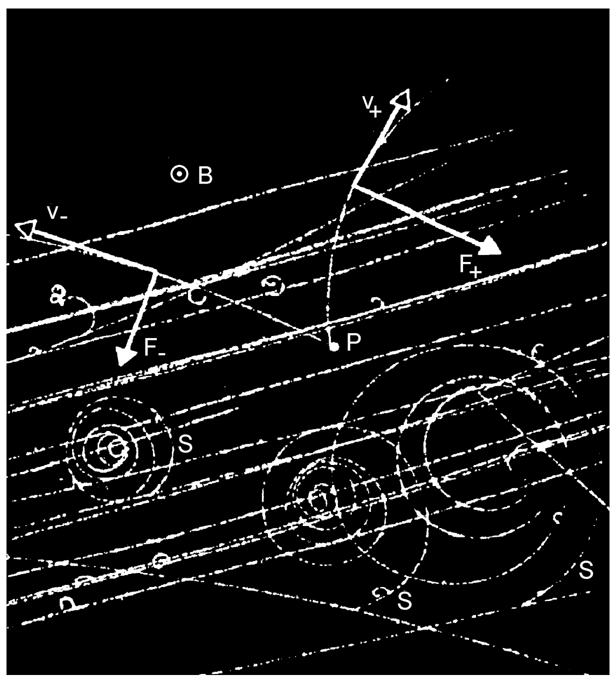
Z rovnice (10.18) plynie polomer R kružnice, po ktorej sa častica v magnetickom poli pohybuje

$$R = \frac{mv}{eB} \tag{10.19}$$



Obr. 10.2

Polomer je, ako vidíme, priamo úmerný hmotnosti a rýchlosti častice a nepriamo úmerný veľkosti magnetickej indukcie. Ťažké častice (napr. protóny, prípadne nabité mezóny) sa budú s danou rýchlosťou a v danom poli pohybovať po kružniciach s väčším polomerom ako napr. rovnako rýchle elektróny. Názorným a poučným príkladom pohybu nabitých urýchlených častíc v magnetickom poli je fotografický záber z bublinovej komory na *obr. 10.3*.



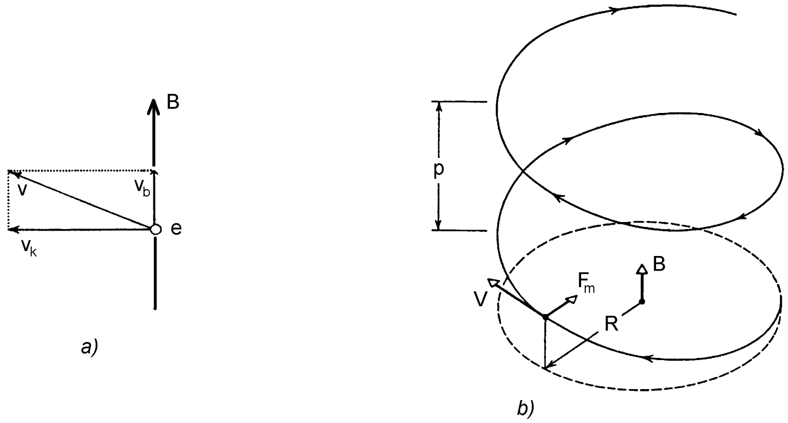
Magnetické pole ***B*** smeruje pred rovinu obrázku. V bode *P* vznikol pár elektrón-pozitrón a vzniklé častice sa pohybujú rýchlosťami *v*– a *v*+ pod účinkom magnetických síl *F*– a *F*+. Špirály *S* sú stopy troch nízkoenergetických elektrónov. (E. O. Lawrence Radiation Laboratory, University of California)

Obr. 10.3

Frekvencia obehov častice po kružnici je daná výrazom

$$\omega_c = \frac{v}{R} = \frac{e}{m} B \tag{10.20}$$

a závisí iba od druhu častice (od jej merného náboja *e*/*m*) a od hodnoty magnetickej indukcie. Táto skutočnosť sa využíva v urýchľovači častíc nazývanom cyklotrón, ktorého činnosť bude opísaná ďalej. Frekvencia ω_c sa nazýva **cyklotrónová frekvencia**.



Obr. 10.4

Ak má častica v magnetickom poli začiatočnú rýchlosť $\boldsymbol{v}$, ktorá nie je kolmá na vektor magnetickej indukcie, možno ju rozložiť na zložku $\boldsymbol{v}_b$ pozdĺž indukčnej čiary a zložku $\boldsymbol{v}_k$ na ňu kolmú (pozri *obr. 10.4a*). V smere indukčnej čiary sa častica bude pohybovať rovnomerne a v priečnej rovine po kružnici. Výsledný pohyb je pohybom po skrutkovici s polomerom

$$R = \frac{mv_k}{eB} \tag{10.21}$$

a s konštantným stúpaním

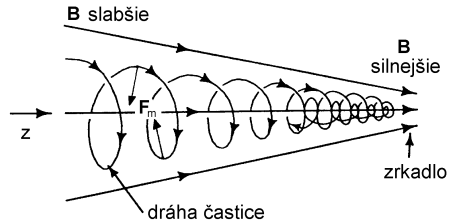
$$p = v_b T = 2\pi \frac{v_b}{\omega_c} = 2\pi \frac{mv_b}{eB} \tag{10.22}$$

podľa *obr. 10.4b.* Čím vyššia je magnetická indukcia, tým menší je polomer skrutkovice. Magnetické pole má na mrak pohybujúcich sa častíc "kompresný účinok" okolo indukčných čiar. Podobný princíp zvaný "pinch efekt"[1] sa používa na udržiavanie horúcich častíc vysokoteplotnej plazmy v strede dutiny toroidu slúžiaceho na experimenty s riadenou termonukleárnou reakciou. Takéto zariadenie vyvinuté v bývalom ZSSR sa nazýva **tokamak**[2].

---

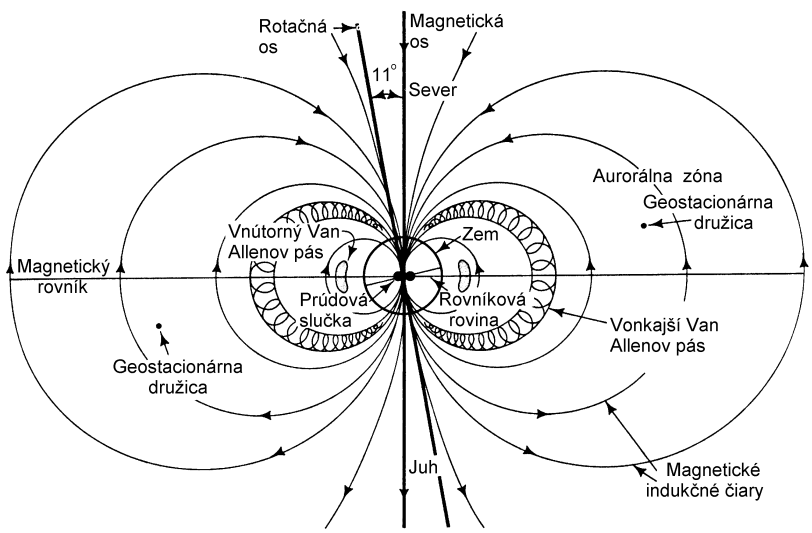
[1] Kolb, A.: Magnetic compression of plasma, Rev. Mod. Phys. **32**, 748 (1960)

[2] Skratka ruského názvu **to**roidaľnaja **ka**mera s **ma**gnitnymi **k**atuškami (toroidálna komora s magnetickými cievkami).



Obr. 10.5

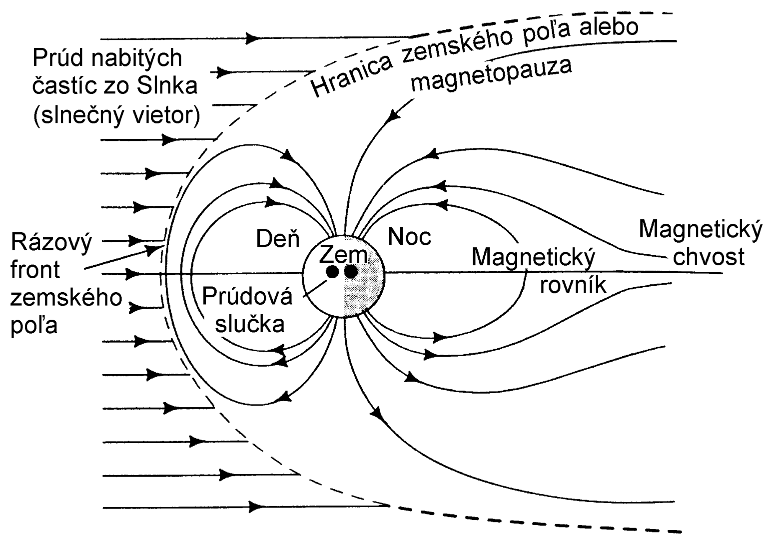
Zvláštny účinok na časticu má magnetické pole, ktorého veľkosť pozdĺž vybranej indukčnej čiary narastá ako na *obr. 10.5*. Skrutkovica, po ktorej sa častica pohybuje v smere osi z, má stále menší polomer, pretože magnetická indukcia narastá a obežná rýchlosť častice na skrutkovici rastie. Sila $\boldsymbol{F}_m$ má zložku proti smeru osi z, takže rýchlosť častice v smere indukčnej čiary (v smere osi z) klesá až na nulu a nakoniec zmení smer. Častica sa "odrazí" a miesto odrazu sa nazýva magnetické zrkadlo. Ak sú na opačnom konci magnetické indukčné čiary rovnako zhustené, častica sa znovu odrazí a bude vykonávať kmity medzi dvoma magnetickými zrkadlami. Takto sa pohybujú elektróny a protóny zo Slnka zachytené v magnetickom poli Zeme v dvoch oblastiach magnetosféry. Tieto oblasti veľkej koncentrácie častíc a silnej radiácie sa nazývajú **Van Allenove pásy**[1] (*obr. 10.6*). Elektróny a protóny veľkou rýchlosťou prelietavajú zo severnej do južnej oblasti magnetosféry a majú nepriaznivý vplyv na činnosť slnečných batérií, ako aj na posádky umelých družíc Zeme.



Obr. 10.6

[1] James Alfred van Allen, nar. 1914, americký fyzik a raketový odborník, objavil v roku 1958 na základe údajov z družice Explorer 1 vnútorný radiačný pás elektrónov a protónov vo výške 1 000 až 6 000 km v ekvatoriálnej oblasti. Vonkajší radiačný pás zložený takmer výlučne z elektrónov vo výške 15 000 až 25 000 km objavil ruský fyzik S. N. Vernov v roku 1962.

Magnetické pole Zeme zobrazené na *obr. 10.6* má dipólový charakter, avšak také je iba v relatívne malých vzdialenostiach od Zeme. Vo veľkých vzdialenostiach je deformované magnetickým poľom slnečného vetra – tokom elektrónov a protónov zo Slnka. Výsledné magnetické pole Zeme vo veľkých dimenziách je znázornené na *obr. 10.7* (pozri tiež ilustračný *obr. 6.1*). Vidíme, že zo slnečnej strany je "stláčané" slnečným vetrom a na opačnej strane vytvára charakteristický chvost. Pôvod magnetického poľa Zeme a niektorých iných planét slnečnej sústavy dodnes nie je presne známy. Existuje mnoho hypotéz o pôvode zemského magnetizmu, pozri napr. úlohu 167. Nepochybne je dôsledkom nejakých elektrických prúdov, ktoré majú pravdepodobne pôvod v magnetohydrodynamických procesoch v jadre Zeme. Na *obr. 10.6* a *10.7* je zdroj magnetického poľa Zeme modelovaný prúdovou slučkou vo vnútri zemegule.



Obr. 10.7

10.3 POHYB ČASTÍC POD SÚČASNÝM ÚČINKOM ELEKTRICKÝCH A MAGNETICKÝCH POLÍ

V prípade, ak sa častica s nábojom e pohybuje pod účinkom elektrického aj magnetického poľa, výslednou pôsobiacou silou je Lorentzova sila

$$\boldsymbol{F}_{elmag} = \boldsymbol{F}_{el} + \boldsymbol{F}_{mag} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

a pohybová rovnica má tvar

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Kombináciou elektrických a magnetických polí možno veľmi efektívne riadiť pohyb častíc, čo sa využíva v mnohých zariadeniach vysokofrekvenčnej a jadrovej, ale aj spotrebnej elektroniky. Uvedieme niekoľko príkladov:

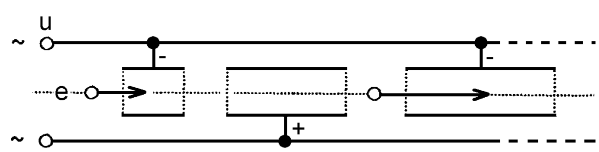
Ak oblasťou so skríženým homogénnym elektrickým $\boldsymbol{E}$ a magnetickým $\boldsymbol{B}$ poľom preteká kolmo na obidve polia prúd nabitých častíc, potom v priamom smere prejdú iba častice s rýchlosťou

$$v = \frac{E}{B} \tag{10.23}$$

Ostatné budú vychýlené elektrickým alebo magnetickým poľom. Na tomto princípe pracuje **rýchlostný selektor** v Bainbridgeovom hmotnostnom spektrografe (pozri odsek 10.3.2 a úlohu 285).

Ak sa nabitá častica ocitne v skríženom elektrickom a magnetickom poli s nulovou rýchlosťou, začne sa pohybovať "skackavým" cykloidálnym pohybom v rovine kolmej na smer magnetického poľa (pozri úlohu 288). Tento princíp sa využíva na budenie kmitov vo výkonnom generátore kmitov veľmi vysokých frekvencií (rádovo GHz) nazývanom **magnetrón,** ktorý je základnou súčasťou radaru a mikrovlnových pecí.

V skríženom statickom magnetickom poli a vysokofrekvenčnom elektrickom poli sa nabitá častica môže za istých okolností pohybovať v rovine kolmej na smer magnetického poľa po zväčšujúcej sa špirále, pričom sa zväčšuje aj jej rýchlosť, resp. energia. Tento spôsob sa využíva na urýchlenie častíc v cyklotróne (pozri úlohu 292). Činnosť tohto zariadenia je opísaná v nasledujúcom odstavci.



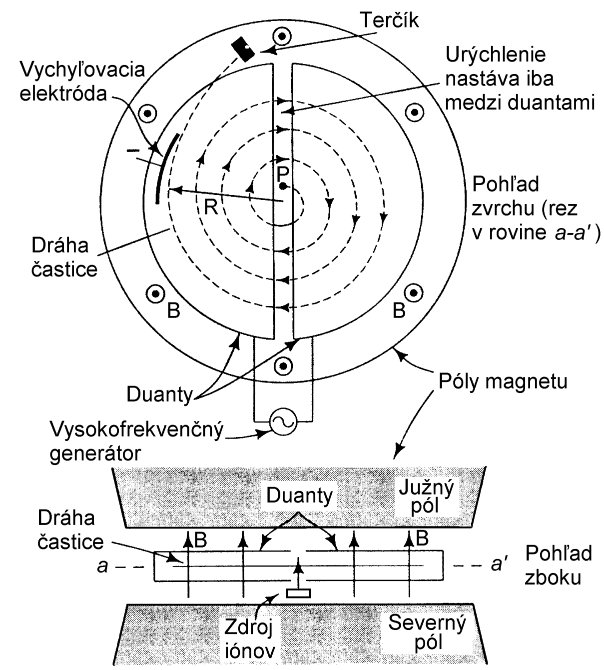
Obr. 10.8

10.3.1 Urýchľovanie nabitých častíc. Cyklotrón

Urýchľovanie nabitých elementárnych častíc a iónov je jeden zo základných technických problémov fyziky elementárnych častíc a fyziky vysokých energií. V odseku 10.1 sme videli, že priamym spôsobom urýchlenia častice je jej prechod elektrickým poľom, čím častica získa energiu eU, kde e je náboj častice a U je potenciálový rozdiel (napätie) na úseku, ktorý častica prešla. Vidíme, že čím väčšia je požadovaná energia, tým vyššie musí byť urýchľujúce napätie. Súčasné experimenty s elementárnymi časticami vyžadujú častice s energiami rádovo MeV = 10^6 eV až TeV = 10^{12} eV. Lineárne urýchlenie častíc napätím na také vysoké energie nie je možné, pretože by to vyžadovalo urýchľujúce napätia rádovo 10^6 až 10^{12} V. Potrebu vysokého napätia možno obísť v sekciovanom **lineárnom urýchľovači**,[1] v ktorom sa častica urýchľuje striedavým vysokofrekvenčným napätím u nižšej amplitúdy, ktoré je pripojené na rad valcových dutých elektród podľa

[1] Lawrence, E. O., Sloan, O. H., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **17**, 64 (1931)

obr. 10.8. Častica sa urýchľuje napätím jednej polarity a počas opačnej polarity prechádza vnútrajškom valcovej elektródy, v ktorej je elektrické pole nulové. Takéto urýchlenie je spojené s veľkými priestorovými problémami a ťažkosťami synchronizácie rýchlosti a poľa, a neumožňuje získať častice s energiami viac než 1 MeV. V roku 1930 americkí fyzici Lawrence a Livingstone[1] vytvorili prvý cyklický urýchľovač iónov, v ktorom v podstate využili princíp sekciovaného lineárneho urýchľovača s tým rozdielom, že urýchľovanú časticu počas nevhodnej polperiódy napätia vysokofrekvenčného generátora "ukryli" v elektricky tienenej oblasti a tam magnetickým poľom zmenili smer jej pohybu na opačný. Tento urýchľovač nazvali **cyklotrón**. Schematicky je cyklotrón znázornený na *obr. 10.9*. Jeho základným prvkom je dvojica dutých nízkych medených polvalcov v tvare písmen "D". Tieto polvalce sa nazývajú "duanty" a sú umiestnené v homogénnom magnetickom poli indukcie B veľkého elektromagnetu. V strede kruhovej symetrie sa nachádza zdroj urýchľovaných častíc, ktorými môžu byť protóny, deuteróny, α-častice, prípadne iné ióny. Celé zariadenie medzi pólmi elektromagnetu je vákuovotesne uzavreté a vyčerpané na vysoké vákuum, k duantom je pripojený generátor vysokofrekvenčného napätia.



Obr. 10.9

Predpokladajme, že v istom okamihu sa v strede cyklotrónu v bode P ocitne kladný ión. Ak je pravý duant v tom okamihu záporný, bude ión elektrickým poľom medzi duantami urýchľovaný doprava, do dutiny duantu, kde má istú konštantnú rýchlosť. V dutine na neho pôsobí iba magnetické pole, ktoré ho núti pohybovať sa po kružnici s malým polomerom r podľa vzťahu (10.19) a po prebehnutí polkružnice sa vráti znovu do štrbiny

[1] Lawrence, E. O., Livingstone, M. S., Phys. Rev. **37**, 1707 (1931)

medzi duantami. Ak sa medzitým zmení polarita napätia medzi duantami, ión bude v štrbine elektrickým poľom znovu urýchlený a vletí do dutiny ľavého duantu s väčšou rýchlosťou, tam prejde po polkružnici s väčším polomerom, atď. Ak kruhová frekvencia ω vysokofrekvenčného zdroja sa rovná cyklotrónovej frekvencii ω_c iónu v danom magnetickom poli podľa vzťahu (10.20), bude ión pri každom obehu synchrónne urýchľovaný, a bude sa pohybovať po špirále so stále väčšou rýchlosťou. Na polomere R, ktorý predstavuje efektívny polomer cyklotrónu, je rýchlosť a energia iónu maximálna. Tam je ión vychýlený vysokým záporným potenciálom vychýľovacej elektródy a otvorom v duante nasmerovaný na terčík.

Činnosť cyklotrónu je podmienená splnením dvoch podmienok. Prvou podmienkou je vzťah (10.20), teda frekvencia f generátora pre daný ión s merným nábojom q/m a v danom poli B musí mať hodnotu

$$f = \frac{q}{2\pi m} B \tag{10.24}$$

Cyklotrón sa teda musí "naladiť". Obyčajne je frekvencia generátora pevná a nastavuje sa hodnota magnetickej indukcie podľa vzťahu (10.24). Druhou podmienkou je zachovanie nerelativistických pomerov v cyklotróne, t. j. rýchlosť častice nesmie narásť na také hodnoty, pri ktorých sa už prejavuje závislosť jej hmotnosti od rýchlosti, ináč povedané, hmotnosť m vo výraze (10.24) musí zostať konštantná pre všetky častice v cyklotróne. V opačnom prípade sa poruší synchronizácia, častice nebudú v štrbine urýchľované, ale môžu byť prípadne brzdené. Z toho vyplýva, že cyklotrón sa nehodí na urýchľovanie ľahkých častíc, ako sú napr. elektróny, ale na protóny, prípadne ťažšie častice.

Konečná kinetická energia častice je daná efektívnym polomerom cyklotrónu R a magnetickou indukciou B. Podľa vzťahu (10.19) je rýchlosť urýchlenej častice na konci jej pohybu

$$v = \frac{q}{m} RB$$

a kinetická energia

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{(qRB)^2}{2m} \tag{10.25}$$

Bude zaujímavé vypočítať číselne energiu častice urýchlenej cyklotrónom s bežnými parametrami. Predpokladajme, že efektívny polomer cyklotrónu je $R = 0{,}5$ m a magnetická indukcia $B = 1{,}5$ T. Nech urýchľovanými iónmi sú jadrá deutéria s hmotnosťou $m \approx 2m_p \approx$ $\approx 3{,}34\ .10^{-27}$ kg a s nábojom $q = e \approx 1{,}6\ .10^{-19}$ C. Dosadením týchto hodnôt do výrazu (10.25) dostaneme

$$W_k = 2{,}16.10^{-12}\ \mathrm{J}$$

Ak uvážime, že 1 J = $6{,}24.10^{18}$ eV, dostaneme energiu deuterónu v elektrónvoltoch

$$W_k = 13{,}5\ \mathrm{MeV}$$

Vidíme, že pri lineárnom urýchľovaní by na získanie tejto kinetickej energie musel deuterón prejsť potenciálny rozdiel 13,5 miliónov voltov! Frekvencia kmitov vysokofrekvenčného generátora pritom je

$$f = \frac{q}{2\pi m} B \approx 11{,}44 \text{ MHz}$$

Amplitúda urýchľujúceho vysokofrekvenčného napätia U generátora teoreticky nemá vplyv na konečnú energiu častice, pretože ona určuje iba veľkosť energetických prírastkov qU častice v štrbine medzi duantami. Pri každom obehu získa častica energiu $2qU$. Ak označíme počet obehov častice v cyklotróne n, potom konečná kinetická energia častice je

$$W_k = 2nqU \tag{10.26}$$

a v cyklotróne častica vykoná

$$n = \frac{W_k}{2qU} \tag{10.27}$$

obehov. Vidíme, že n je nepriamo úmerné U. Počet obehov sa však nemá voliť príliš veľký, pretože to zvyšuje disperziu urýchľovaného zväzku častíc.

Cyklotrón je iba jeden z mnohých cyklických urýchľovačov častíc, v ktorých je častica elektrickým poľom urýchlená a magnetickým poľom vychyľovaná.

K urýchleniu ľahkých častíc, ako sú elektróny, slúži urýchľovač, ktorý v roku 1940 skonštruoval a jeho činnosť publikoval D. W. Kerst.[1] Nazval ho **betatrón**. Je to tiež cyklický urýchľovač, ale urýchlenie elektrónu nastáva na princípe elektromagnetickej indukcie zvyšovaním indukčného toku na kruhu, po obvode ktorého elektrón obieha. Zvláštnym tvarovaním pólových nástavcov elektromagnetu sa dosiahne konštantný polomer dráhy elektrónu.

Cyklotrónom možno urýchľovať aj relativistické častice, ak sa pri zvyšovaní ich hmotnosti podľa vzťahu (10.4) bude súčasne znižovať frekvencia f, aby pri konštantnom B zostal vzťah (10.24) v platnosti. Takýto synchronizovaný cyklotrón sa nazýva **synchrocyklotrón**.

Ak sa so zmenou frekvencie bude súčasne meniť aj magnetická indukcia, možno dosiahnuť to, že polomer dráhy urýchľovanej častice R zostane konštantný, takže bude splnená rovnica (10.24), pri platnosti rovnice

$$v = 2\pi f R_0 \tag{10.28}$$

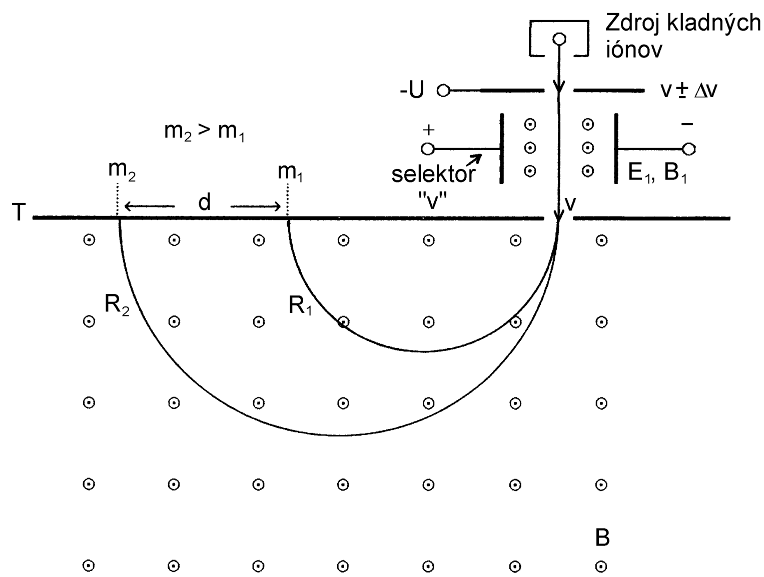
Rýchlosť častice sa bude zvyšovať na jednej kruhovej dráhe polomeru R_0, čo si žiada magnetické pole iba na prstenci s polomerom R_0. Je to dôležité u veľkých urýchľovačov s polomerom dráhy až niekoľko sto metrov, na ktorej sa magnetické pole vytvára prstencovou sústavou magnetov, pretože jediný magnet s polomerom R_0 by sa nedal realizovať. Zariadenie pracujúce na tomto princípe bolo opísané Mc Millanom a Vekslerom[2] v štyridsiatych rokoch tohto storočia a nazýva sa **synchrotrón**. Elektróny urýchlené cyklickými urýchľovačmi na rýchlosti blízke rýchlosti svetla vyžarujú zvláštny druh žiarenia, ktoré sa nazýva **synchrotrónové žiarenie**.

[1] Kerst, D. W., Phys. Rev. **58** (1940); **60** (1941)
[2] Mc Millan, E. M., Phys. Rev. **69**, 534 (1946); **80**, 493 (1950)
Veksler, V., Journ. Phys. (SSSR) **9**, 153 (1945)
Veksler, V., Phys. Rev. **69**, 244 (1946)

10.3.2 Hmotnostný spektrograf alebo separátor izotopov

Ako je známe, izotopy vybraného prvku sa nedajú separovať žiadnou z chemických metód. Takúto metódu ponúka fyzika preskúmaním pohybu iónov izotopov prvku v elektrických a magnetických poliach. Zariadenie slúžiace na takýto výskum sa nazýva **hmotnostný spektrograf**. Schéma jedného z existujúcich typov hmotnostných spektrografov (Bainbridgeov hmotnostný spektrograf) je znázornená na *obr. 10.10.* Zdroj kladných jednomocných iónov s nábojom $q = +e$ produkuje zmes izotopov skúmaného prvku. Ióny sú urýchlené elektródou s napätím $-U$ oproti zdroju a na výstupe zo štrbiny je zväzok iónov s rýchlosťami v intervale $v \pm \Delta v$. Tento zväzok prechádza rýchlostným selektorom, ktorý prepustí v priamom smere iba ióny, ktorých rýchlosť spĺňa podmienku

$$\frac{E_1}{B_1} = v \tag{10.29}$$



Obr. 10.10

kde E_1 a B_1 sú intenzita elektrického poľa a magnetická indukcia v rýchlostnom selektore. Ostatné ióny budú selektorom vychýlené, a neprejdú druhou štrbinou do priestoru magnetického poľa $\boldsymbol{B}$. V tomto priestore sa budú ióny pohybovať po kružniciach s polomerom R daným výrazom (10.19). V konštantnom poli $\boldsymbol{B}$ bude polomer dráhy jednomocných iónov závisieť iba od hmotnosti iónu. Na obrázku sú znázornené dráhy dvoch izotopov prvku s hmotnosťami m_1 a m_2 ($m_2 > m_1$). Tieto dráhy sú polkruhové a končia na tienidle T, kde vytvoria stopu. Hmotnosť iónov plynie zo vzťahu

$$m = \frac{eRB}{v} \tag{10.30}$$

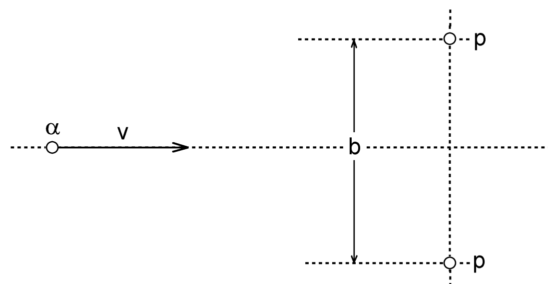
Rozdiel hmotností dvoch izotopov, ktorých stopy sú znázornené na *obr. 10.10*, je potom daný výrazom

$$m_2 - m_1 = \frac{eBd}{2v} \qquad (10.31)$$

kde $d/2 = R_2 - R_1$.

Úlohy 277 – 292

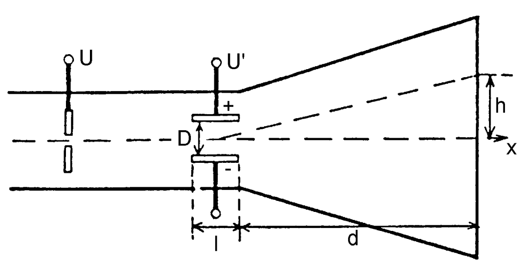
277. α-častica prechádza veľkou rýchlosťou cez geometrický stred molekuly vodíka H_2 a pohybuje sa po priamke kolmej k osi molekuly (*obr. 277*). Vzdialenosť protónov v molekule je b. Určite bod na dráhe α-častice, kde sila pôsobiaca na ňu je maximálna. Predpokladá sa, že vzdialenosť protónov sa pri prechode α-častice molekulou nemení. Tento predpoklad je prípustný, pretože rýchlosť α-častice je veľká. Pri výpočte sa zanedbáva tiež vplyv elektrónov v molekule, čo je hrubé priblíženie, pretože v centrálnej časti molekuly H_2 je značná koncentrácia záporného náboja.



Obr. 277

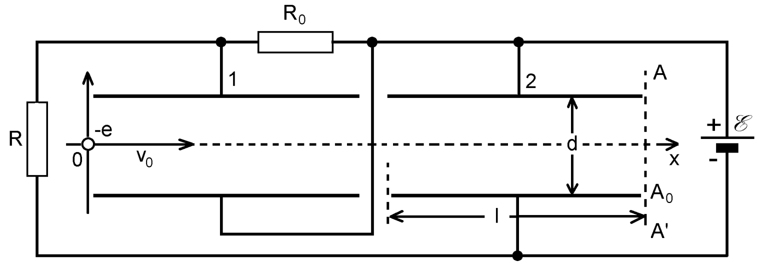
278. Jednomocný ión cézia je urýchľovaný pozdĺž dráhy dlhej d = 3,3 mm elektrickým poľom o intenzite $E = 3.10^4$ V/m zo stavu pokoja. Vo vákuu bez prítomnosti poľa prejde potom urýchlený ión dráhu o dĺžke s = 1 mm za čas $t = 8{,}7.10^{-8}$ s. Z uvedených údajov určite hmotnosť iónu Cs^+.

279. V katódovej trubici na *obr. 279* sú elektróny urýchľované napätím U a po urýchlení prechádzajú medzi vychyľovacími doskami v tvare doskového kondenzátora. Po prechode vychyľovacím priestorom dopadajú elektróny na fluorescenčné tienidlo, kde vytvárajú svetelnú stopu. Odvoďte výraz pre odchýlku h elektrónového lúča na tienidle, ak napätie na vychyľovacích doskách je U'. Riešte numericky pre: U = 500 V, U' = 100 V, l = 2 cm, D = 0,5 cm, d = 8 cm.



Obr. 279

280. Dva rovnaké doskové kondenzátory 1 a 2 (dĺžka dosiek l, vzdialenosť dosiek d) sú zapojené ku zdroju EMN $\mathscr{E}$ podľa *obr. 280,* pričom kondenzátory sú tesne vedľa seba. Do oblasti kondenzátora 1 (v bode 0 na osi 0x) vletí elektrón rýchlosťou v_0 v smere osi x.



Obr. 280

a) Vypočítajte veľkosť a smer rýchlosti, s ktorou elektrón opustí kondenzátor 2 (v rovine AA') pri všeobecne zadaných hodnotách l, d, $\mathscr{E}$ a odporov R a R_0. Predpokladá sa, že všetky parametre sú zvolené tak, že elektrón pri pohybe medzi doskami kondenzátora nenarazí na dosky.

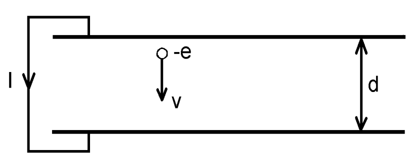
b) V akej vzdialenosti od osi 0x v rovine AA' opustí elektrón kondenzátor 2?

c) Ako musí byť zvolený odpor R (pri konštantnej hodnote odporu R_0), aby elektrón opustil kondenzátor 2 rýchlosťou paralelnou s osou 0x? Aká veľká je táto rýchlosť? V akej vzdialenosti od osi 0x vystúpi elektrón z kondenzátora 2?

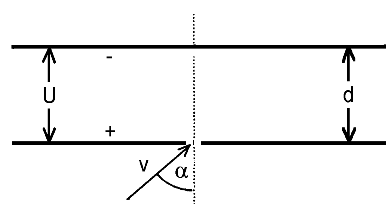
d) Aká musí byť hodnota EMN zdroja, aby elektrón vyletel z kondenzátora 2 tesne popri pravej hrane jeho dolnej dosky (bodom A_0) rýchlosťou paralelnou s osou 0x? Tento prípad riešte numericky pre: Energia elektrónu na vstupe kondenzátora 1 je W_k = 10 keV a jeho rýchlosť je paralelná s osou 0x, l = 10 cm, d = 2 cm.

e) Kde je v prípade d) energia elektrónu medzi doskami kondenzátorov maximálna? Aká je jej hodnota?

281. Dve veľmi veľké paralelné vodivé roviny uložené vo vzdialenosti d = 2 mm sú spojené vodivým skratom podľa *obr. 281.* V istom okamihu je z jednej roviny uvoľnený elektrón, ktorý sa konštantnou rýchlosťou $v = 10^6$ m/s pohybuje kolmo k druhej rovine a dopadne na ňu. Nájdite veľkosť prúdu, ktorý potečie skratom v čase pohybu elektrónu medzi rovinami. Ako dlho trvá tento prúdový impulz? Jednoduchý výraz, ktorý dostanete pre prúd je špeciálnym prípadom vety o indukovaných prúdoch (Shockleyho-Ramova veta) často používanej v teórii generátorov kmitov veľmi vysokých frekvencií. Pri riešení využite výsledok riešenia úlohy 43.



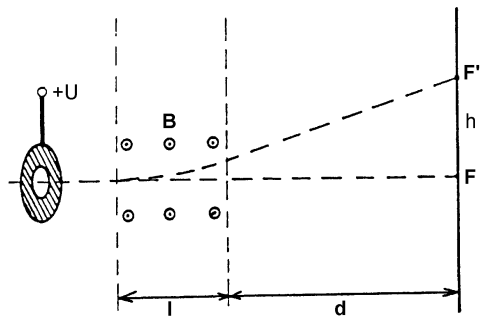
Obr. 281



Obr. 282

282. Elektrón s rýchlosťou $v = 10^7$ m/s vlieta do priestoru doskového kondenzátora so vzdialenosťou dosiek d = 1 cm, ktorý je pod napätím U = 425 V (*obr. 282*). Uhol dopadu elektrónu vzhľadom na kolmicu k doske kondenzátora α = 30°. Vypočítajte hĺbku preniku elektrónu do kondenzátora, ak horná doska kondenzátora je záporná. Nájdite vzdialenosť miesta dopadu elektrónu od kolmice na hornej doske, ak polarita napätia na doskách je opačná.

283. Zväzok elektrónov urýchlených napätím U = 300V prechádza priestorom s homogénnym magnetickým poľom s indukciou B = 1,46.10^{-2} T, ktoré smeruje na *obr. 283* pred nákresňu. Magnetické pole pôsobí na dĺžke l = 2,5 cm. Bez prítomnosti magnetického poľa zväzok dopadá do bodu F na fluorescenčnom tienidle, ktoré sa nachádza vo vzdialenosti d = 5 cm od pravej hranice magnetického poľa. Za prítomnosti magnetického poľa zväzok dopadá do bodu F' na tienidle. Vypočítajte odchýlku $h = FF'$ elektrónového zväzku.

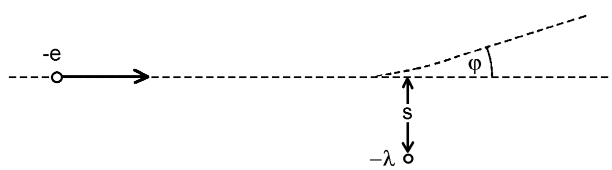


Obr. 283

284. α-častica vletí do homogénneho magnetického poľa s indukciou B = 2,5.10^{-2} T, pričom jej rýchlosť je kolmá na smer magnetického poľa. Moment hybnosti častice v danom poli je L = = 1,33.10^{-22} m^2.kg.s^{-1}. Vypočítajte kinetickú energiu častice a jej cyklotrónovú frekvenciu. Hmotnosť protónu, príp. neutrónu je m = 1,67.10^{-27} kg.

285. Nabitá častica sa pohybuje rýchlosťou v_x v smere osi x v navzájom kolmých elektrických a magnetických poliach E_y a B_z. V akom vzťahu musí byť rýchlosť častice v_x k poliam E_x a B_z, aby polia neovplyvnili smer pohybu častice? Na princípe dvoch kolmých polí, ktoré sú kolmé na rýchlosť častice sa zakladá činnosť rýchlostného selektora v Bainbridgeovom hmotnostnom spektrografe.

286. V elektrónovom mikroskope prechádza zväzok elektrónov s veľkou energiou vedľa tenkého priameho drôtu, ktorý je uložený kolmo k začiatočnému smeru elektrónov vo vzdialenosti s od tohoto smeru podľa *obr. 286*. Drôt je nabitý záporným nábojom λ na jednotku dĺžky. Elektrické pole drôtu je slabé, takže málo ovplyvní dráhu elektrónov. Ukážte, že v takomto prípade uhol odchýlky elektrónového zväzku v nezávisí od vzdialenosti s, t. j. rovnobežný zväzok zostáva rovnobežným aj po odklone od prvotného smeru! Nabitý drôt pôsobí v tomto prípade na elektrónový zväzok podobne ako Fresnelov dvojhranol na svetelný zväzok.



Obr. 286

287. Vákuová dióda má cylindrickú anódu s polomerom R a katódou veľmi malého polomeru r na osi anódy. Anóda je udržiavaná na potenciále V oproti katóde. V smere osi cylindra je naložené homogénne magnetické pole B. Bez prítomnosti magnetického poľa by sa elektróny emitované katódou pohybovali radiálne k anóde. V dôsledku pôsobenia magnetického poľa sa elektróny pohybujú po zakrivených dráhach s polomermi zakrivenia závislými od veľkosti magnetickej indukcie. Pri istej hodnote magnetickej indukcie B elektróny vôbec nedosiahnu anódu a vracajú sa na katódu. Vypočítajte túto najmenšiu kritickú hodnotu magnetickej indukcie, pri ktorej prúd diódou prestáva tiecť! Pri výpočte predpokladajte, že rýchlosť elektrónov je konštantná a daná výrazom

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

čo je skutočne dobre splnené, ak $r \ll R$ (prečo?). Na opísanom princípe pracuje generátor veľmi vysokých frekvencií nazývaný magnetrón.

288. Elektrón sa pohybuje v elektrickom a magnetickom poli, ktoré má v pravouhlom súradnicovom systéme zložky

$$(0, -E_y, 0)$$

$$(0, 0, -B_z)$$

V čase $t = 0$ sa elektrón nachádza v začiatku súradníc, kde je jeho rýchlosť nulová. Vypočítajte:
a) tvar dráhy elektrónu,
b) zložky rýchlosti elektrónu ako funkcie času,
c) unášavú (driftovú) rýchlosť elektrónu.

289. Frekvencia elektrického poľa na urýchlenie protónov v cyklotróne s magnetickou indukciou B je $\omega = 10^7$ rad/s. Aká frekvencia je potrebná na urýchlenie
a) deuterónov,
b) iónov He^+,
c) α-častíc?

290. V cyklotróne s polomerom $R = 0{,}35$ m je na duantoch naložené vysokofrekvenčné elektrické pole s frekvenciou $f = 13{,}8$ MHz. Vypočítajte:
a) magnetickú indukciu B potrebnú pre synchrónnu činnosť cyklotrónu pri urýchľovaní protónov,
b) maximálnu energiu urýchlených protónov.

291. Elektrón a protón sú urýchľované zo stavu pokoja po dráhe $d = 10$ cm elektrickým poľom intenzity $E = 3.10^4$ V/m a potom vniknú do magnetického poľa s indukciou $B = 1$ T, ktoré smeruje kolmo na rýchlosť častíc. Vypočítajte cyklotrónové frekvencie a polomery kruhových dráh častíc v magnetickom poli.

292. Elektrické a magnetické pole v cyklotróne má zložky

$$E_x = E\cos\omega t \qquad E_y = -E\sin\omega t \qquad E_z = 0 \qquad B_x = B_y = 0 \qquad B_z = B$$

kde

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

Os z je totožná s osou cyklotrónu. Vypočítajte zložky dráhy ako funkcie času pre nabitú časticu s nábojom q a hmotnosťou m za predpokladu, že v čase $t = 0$ je častica v začiatku súradníc (v strede cyklotrónu) v pokoji. Nakreslite tvar dráhy častice.

Heinrich HERTZ
(1857 Hamburg – 1894 Bonn)

11 ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

> Z pohľadu ďalekej budúcnosti ľudstva – povedzme desaťtisíc rokov – bude Maxwellov objav zákonov elektrodynamiky hodnotený ako najväčší objav 19. storočia. Americká občianska vojna vedená v tom istom desaťročí bude v porovnaní s touto dôležitou vedeckou udalosťou hodnotená ako bezvýznamná provinciálna šarvátka.
>
> "Feynmanove prednášky z fyziky"

11.1 PODSTATA ELEKTROMAGNETICKÝCH VĹN

Ak sa elektrické náboje pohybujú v priestore tak, že ich rýchlosť je periodickou funkciou času, vytvárajú v svojom okolí elektromagnetické pole, ktoré má vlnový charakter, t. j. je periodické v čase i v priestore a šíri sa v priestore istou konečnou rýchlosťou. Konečnú rýchlosť, ktorou sa elektromagnetické rozruchy vo vákuu šíria, zvykneme nazývať rýchlosťou svetla, označujeme ju univerzálne písmenom c [1] a je predpokladom pre existenciu elektromagnetických vĺn (nekonečná rýchlosť by vznik vlny neumožňovala). Každú vlnu, a teda aj elektromagnetickú, charakterizujú dva parametre: frekvencia jej kmitov $f = \omega/(2\pi)$ a jej vlnová dĺžka λ. Tieto parametre sú navzájom viazané vzťahom

$$\lambda = \frac{c}{f} \tag{11.1}$$

Rýchlosť svetla c je jedna z univerzálnych prírodných konštánt a jej meraniu sa budeme venovať v odseku 11.7.

Myšlienku o existencii elektromagnetických vĺn a možnosti ich šírenia v priestore vyslovil už Faraday a o niekoľko desaťročí neskôr, v rokoch 1864 až 1873 anglický fyzik James Clerk Maxwell, tieto myšlienky svojimi teoretickými prácami zdôvodnil. Maxwellova teória elektromagnetizmu umožňuje na základe jej zákonov napísať diferenciálne rovnice – vlnové rovnice, ktorých riešenie v neohraničenom priestore predstavuje elektromagnetické vlny, a ktorých rýchlosť šírenia vo vákuu sa rovná práve rýchlosti svetla. Ďalšie teoretické práce ukázali, že vlastnosti elektromagnetických vĺn – odraz, lom, prípadne rozptyl – sú rovnaké, aké boli experimentálne zistené pre svetelné vlny. Na základe týchto skúseností Maxwell usúdil, že svetelné vlny sú tiež elektromagnetické vlny, ibaže veľmi krátkych vlnových dĺžok, ktorým zodpovedajú extrémne vysoké frekvencie. Na rozdiel od iných vlnových procesov (akustických, gravitačných) elektromagnetické vlny pozostávajú z dvoch vlnových polí, ktoré sú nerozlučne spojené a nemôžu existovať oddelene. V neohraničenom vákuu sú obidve tieto dielčie vlny priečne (transverzálne) k smeru ich šírenia a roviny kmitov ich vektorov elektrického

---

[1] Podľa latinského slova "celeritas" = rýchlosť.

a magnetického poľa sú tiež navzájom kolmé. Kolmosť vektorov môže byť porušená v anizotropných látkových prostrediach. V ohraničených prostrediach, napr. v trubicových vlnovodoch, môžu vzniknúť aj pozdĺžne (longitudinálne) vlny. V smere šírenia vlny sa prenáša aj jej elektromagnetická energia resp. hybnosť. V bezstratových prostrediach zostávajú amplitúdy polí rovnaké v celom priestore, v stratových prostrediach amplitúdy v smere šírenia klesajú tak, ako sa časť energie vlny premieňa na teplo v prostredí. Treba však pripomenúť, že bezstratových prostredí takmer niet, pretože aj v prostrediach bez joulovských strát existujú vždy dielektrické straty spojené s periodickou zmenou polarizácie materiálu.

Význam elektromagnetických vĺn je obrovský. Na nich je založená prakticky všetka diaľková komunikácia, ktorá sa uskutočňuje v obrovskom intervale frekvencií. Doslova sme ponorení v "mori" signálov všetkých možných frekvencií produkovaných umelými aj prirodzenými zdrojmi, ako to vidieť z tabuľky 20. Z nej si možno urobiť predstavu o šírke celého, dnes známeho elektromagnetického spektra. Dolnou hranicou použiteľných kmitov sú frekvencie okolo 10 Hz a najvyššie dnes detegované frekvencie sú rádu 10^{22} Hz. Pomer týchto frekvencií činí $10^{21} \approx 2^{70}$, teda elektromagnetické spektrum pokrýva 70 oktáv. Z týchto 70 oktáv viditeľné svetlo s frekvenciami od cca $3{,}9.10^{14}$ Hz ($\lambda = 769$ nm) do $7{,}7.10^{14}$ Hz ($\lambda = 389$ nm) nepokrýva ani celú jednu oktávu, pričom táto necelá oktáva má rozhodujúci význam pre život na Zemi. Na jednej strane je ľudské oko citlivé iba na ňu, a na druhej strane, svetelné žiarenie zo Slnka je podmienkou pre proces tvorby uhľovodíkov z kysličníka uhličitého a vody v rastlinnej ríši. Tento proces sa nazýva **fotosyntéza**. Energie $E = hf$ uvedené v prvom stĺpci tabuľky sú energie fotónov odpovedajúcich daným frekvenciám, pričom h je Planckova konštanta.

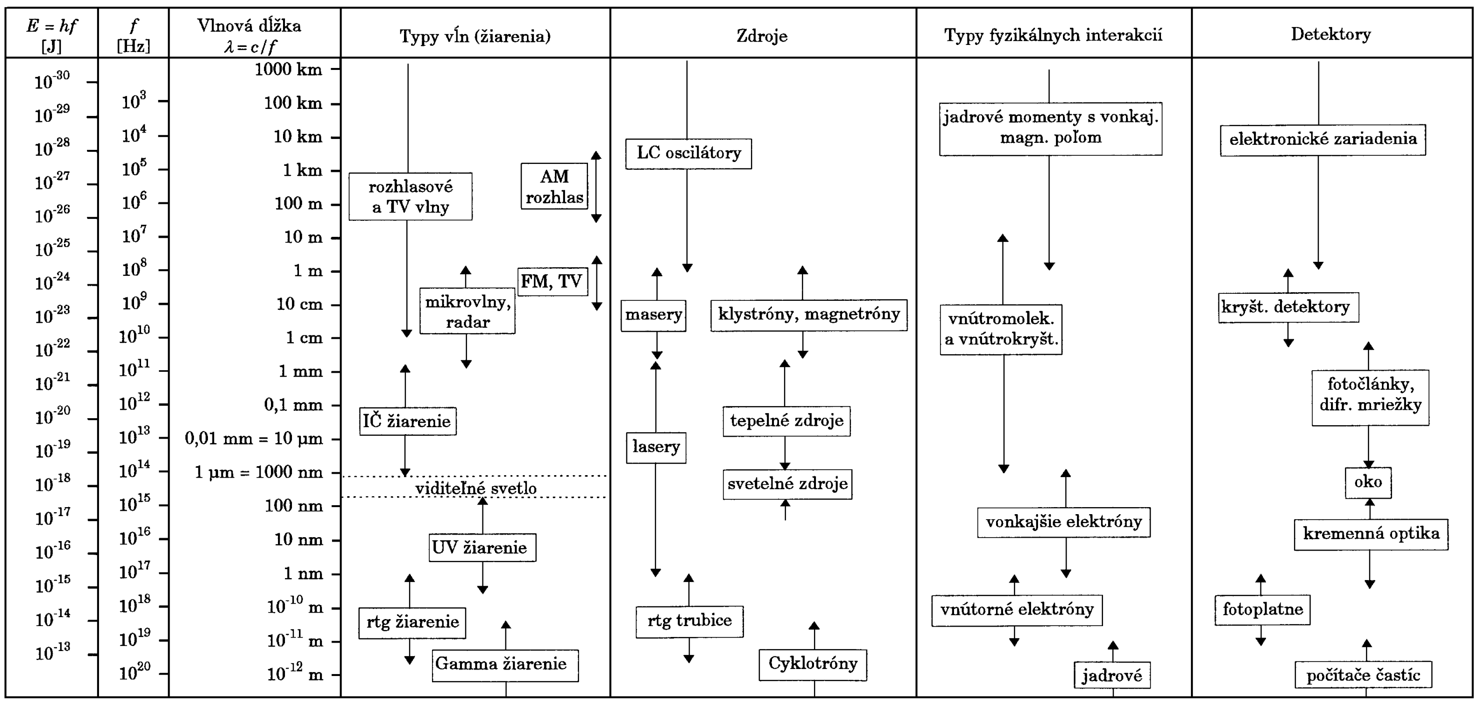
Elektromagnetické vlny experimentálne objavil na univerzite v Karlsruhe v roku 1887 nemecký fyzik Heinrich Hertz, žiak a chránenec fyzika, fyziológa, filozofa a znalca umenia Hermanna von Helmholtza (1821 – 1894). Hertz prvý určil aj vlnovú dĺžku meraním vzdialenosti susedných miním vybudenej stojatej vlny. Z vlnovej dĺžky a známej frekvencie (určenej z hodnôt L a C rezonančného obvodu) využitím výrazu (11.1) stanovil rýchlosť danej elektromagnetickej vlny na hodnotu $3{,}2.10^{8}$ m/s. Sám o tomto výsledku skepticky vyhlásil, že ho treba považovať iba za rádový odhad. Vidíme však, že jeho odhad bol blízky k dnes používanej hodnote rýchlosti svetla c, a to bola podpora Maxwellovej teórie, podľa ktorej elektromagnetické vlny a svetlo majú rovnakú podstatu a v neohraničenom voľnom priestore (vo vákuu) sa šíria rovnakou rýchlosťou.

11.2 VLNOVÉ ROVNICE

Po tomto úvode o podstate a niektorých vlastnostiach elektromagnetických vĺn sa pokúsime matematicky preskúmať ich vlastnosti tak, ako plynú z Maxwellovej teórie elektromagnetizmu. Predpokladajme, že v neohraničenom, elektricky homogénnom a izotropnom prostredí (s konštantnými číselnými hodnotami ε a μ) existujú nenulová intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ a magnetická indukcia $\boldsymbol{B}$. Vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ sú vo všeobecnosti funkciami polohy a času. Ďalej budeme predpokladať, že prostredie je lineárne, t. j. také, že v ňom platí Ohmov zákon, a hustota náboja sa rovná nule. Tieto predpoklady sú takmer vo všetkých praktických prípadoch splnené. Úlohou v tomto odseku je – na základe

Tabuľka 20

Spektrum elektromagnetických vĺn



Maxwellových rovníc – napísať diferenciálne rovnice pre vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu$.[1] Štyri Maxwellove rovnice formulované v odseku 8.6 za uvedených predpokladov nadobudnú tvar

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{11.2a}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \sigma\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{11.2b}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0 \tag{11.2c}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0 \tag{11.2d}$$

V týchto rovniciach treba separovať vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$. Najjednoduchšie sa to dá urobiť tak, že napr. na rovnicu (11.2a) aplikujeme ešte raz operáciu rotácie, takže dostaneme rovnicu

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} \tag{11.3}$$

Pre operáciu rot rot na ľavej strane tejto rovnice podľa tabuľky 2 platí identita

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$$

a s jej využitím možno rovnicu (11.3) prepísať do tvaru

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E} = -\sigma\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

Rovnicu, ak vezmeme do úvahy rovnicu (11.2c), možno ešte zjednodušiť a napísať v konečnom tvare

$$\Delta\boldsymbol{E} - \sigma\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{11.4a}$$

Formálne úplne rovnakými operáciami na rovnici (11.2b) využitím vyššie uvedenej operátorovej identity a rovníc (11.2a) a (11.2d) dostaneme rovnicu pre vektor $\boldsymbol{H}$ vo formálne rovnakom tvare

$$\Delta\boldsymbol{H} - \sigma\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{11.4b}$$

[1] Môže vzniknúť oprávnená otázka, prečo sa chystáme vyjadrovať elektromagnetické vlny vektormi $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$, a nie vektormi $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$. Príčinou toho, na prvý pohľad paradoxného prístupu je skutočnosť, že teraz predmetom záujmu nebude silové pôsobenie polí na náboje, ale tok výkonu v elektromagnetickej vlne, ktorý je daný práve vektorovým súčinom vektorov $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ (pozri ďalej Poyntingov vektor).

Parciálne diferenciálne rovnice (11.4a,b) sa nazývajú **vlnové rovnice** pre vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$. Na úrovni základného kurzu elektromagnetizmu možno o nich povedať iba toľko, že ich možným riešením sú elektrické a magnetické vlny, ktoré v čase a v priestore zanikajú.

Budeme sa zaoberať niektorými jednoduchšími prípadmi vlnových polí. Predovšetkým sa obmedzíme na v čase harmonické vlny, pre ktoré môžeme s výhodou využiť symbolicko-komplexnú metódu známu z teórie striedavých prúdov. Túto metódu možno využiť pre všetky periodické vlny, pretože sú superpozíciou harmonických vĺn. Zobrazíme teda trigonometrické funkcie $\sin\omega t$, resp. $\cos\omega t$ v komplexnej reprezentácii komplexným časovým faktorom $e^{j\omega t}$ vlny, kde ω je frekvencia očakávanej vlny a komplexné amplitúdy závislé od polohy danej polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ budú potom $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ a $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ (pozor – sú to komplexné vektory!). Obrazmi poľa sú teda komplexné vektory

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{j\omega t} \tag{11.5a}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})e^{j\omega t} \tag{11.5b}$$

ktoré možno dosadiť do rovníc (11.4a,b). Po ich úprave a vydelením s $e^{j\omega t}$ dostaneme rovnice pre komplexné amplitúdy polí v tvare

$$\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{11.6a}$$

$$\Delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) - j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{11.6b}$$

Sú to Helmholtzove parciálne diferenciálne rovnice pre komplexné amplitúdy elektromagnetickej vlny v stratovom prostredí ($\sigma \neq 0$). Častejšie sa zapisujú v tvare

$$\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{K}^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{11.6a}$$

$$\Delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{K}^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{11.6b}$$

kde $\boldsymbol{K}$ je **koeficient šírenia vlny** daná výrazom

$$\boldsymbol{K}^2 = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) \tag{11.8}$$

Možno si všimnúť, že výraz v zátvorke je komplexná konduktivita $\boldsymbol{y}$ prostredia definovaná už v odseku 9.5.1 vzťah (9.47). Výraz (11.8) možno napísať aj v tvare

$$\boldsymbol{K}^2 = -j\omega\mu\boldsymbol{y} = \omega^2\mu\varepsilon^*$$

kde

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon(1 - j\,\mathrm{tg}\delta) = \varepsilon' - j\varepsilon'' \tag{11.9}$$

je v elektrotechnickej literatúre často uvádzaná **komplexná permitivita** materiálu, ktorá opisuje dielektrické a vodivostné vlastnosti materiálu v závislosti od frekvencie.

Analýza harmonických vĺn sa značne zjednoduší v bezstratových prostrediach, prípadne vo vákuu (alebo i vo vzduchu). V takých prostrediach $\sigma = 0$, a teda aj $\mathrm{tg}\delta = 0$, $\varepsilon'' = 0$, $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \varepsilon$ a

$$\boldsymbol{K}^2 = \beta^2 = \omega^2 \varepsilon\mu \qquad (11.10)$$

Konštanta

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad \left[\mathrm{rad.m^{-1}}\right] \qquad (11.11)$$

je **fázový koeficient vlny**. V prípade bezstratového prostredia sa zjednodušia aj Helmholtzove rovnice na tvar

$$\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \beta^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad (11.12a)$$

$$\Delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) + \beta^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad (11.12b)$$

Tieto rovnice sa nazývajú tiež **rovnicami membrány**, pretože ak Δ je dvojrozmerný Laplaceov operátor, opisujú aj kmity pružných blán (membrán).

11.3 ROVINNÁ ELEKTROMAGNETICKÁ VLNA

Najčastejšie v praxi sa vyskytujúce vlnové polia sú guľové vlny a rovinné vlny. Guľová vlna sa vytvára v blízkom okolí zdroja vlnového poľa, ktorým môže byť elektrický vibrátor (dipól), prípadne malá prúdová slučka. Toto pole vo veľmi veľkej vzdialenosti r od zdroja prechádza na pole rovinnej vlny. Pod rovinnou elektromagnetickou vlnou budeme rozumieť vlnové pole, v ktorom vektory intenzít poľa závisia iba od jednej súradnice a času. Budeme tiež predpokladať, že prostredie je homogénne, izotropné a neohraničené a pre jednoduchosť budeme tiež predpokladať, že je aj bezstratové, teda jeho konduktivita je nulová (σ = 0). Nech v pravouhlom súradnicovom systéme xyz závisia vektory intenzít poľa iba od súradnice z, takže

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_x(z, t)\boldsymbol{i} + E_y(z, t)\boldsymbol{j} + E_z(z, t)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{E}_T(z, t) + E_z(z, t)\boldsymbol{k} \qquad (11.13a)$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = H_x(z, t)\boldsymbol{i} + H_y(z, t)\boldsymbol{j} + H_z(z, t)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{H}_T(z, t) + H_z(z, t)\boldsymbol{k} \qquad (11.13b)$$

kde

$$\boldsymbol{E}_T(z, t) = E_x(z, t)\boldsymbol{i} + E_y(z, t)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{H}_T(z, t) = H_x(z, t)\boldsymbol{i} + H_y(z, t)\boldsymbol{j}$$

sú vektorové zložky elektrického a magnetického poľa priečne na smer súradnice z (ďalej už funkčnú závislosť od z nebudeme vypisovať).

Prv, než sa pokúsime nájsť výrazy pre vektory intenzít poľa (11.13) riešením rovníc (11.12), posúdime niektoré ich vlastnosti priamym využitím Maxwellových rovníc (11.2). Zistíme, že očakávané riešenia budú mať veľmi zaujímavé a dôležité vlastnosti. Pre tieto účely predovšetkým prepíšeme rovnice (11.2c) a (11.2d) do operátorového tvaru

$$\nabla.\boldsymbol{E} = 0 \qquad (11.14a)$$

$$\nabla.\boldsymbol{H} = 0 \qquad (11.14b)$$

a operátor nabla napíšeme v tvare súčtu priečneho operátora ∇_T a jeho pozdĺžnej zložky $(\partial/\partial z)\boldsymbol{k}$, teda

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} = \nabla_T + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{11.15}$$

Ak dosadíme (11.15) a výrazy (11.13) do (11.14), po vykonaní formálnych skalárnych súčinov dostaneme rovnice

$$\nabla_T \cdot \boldsymbol{E}_T + \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\nabla_T \cdot \boldsymbol{H}_T + \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

Prvé členy týchto rovníc sa identicky rovnajú nule, lebo elektrické a magnetické pole závisí od z a ∇_T je operátor priečnych súradníc x a y. Platí teda

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{11.16}$$

t. j. z-ové zložky elektrického a magnetického poľa nezávisia od súradnice z a v tomto ohľade sú konštanty.

Ak podobne prepíšeme rovnice (11.2a) a (11.2b) do formálneho tvaru (pre $\sigma = 0$)

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

a dosadíme sem vyjadrenia (11.13) a (11.15), po úprave dostaneme rovnice

$$\boldsymbol{k} \times \frac{\partial \boldsymbol{E}_T}{\partial z} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}_T}{\partial t} - \mu\frac{\partial H_z}{\partial t}\boldsymbol{k} \tag{11.17}$$

$$\boldsymbol{k} \times \frac{\partial \boldsymbol{H}_T}{\partial z} = \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}_T}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}\boldsymbol{k} \tag{11.18}$$

Rovnice (11.17) a (11.18) majú zvláštnu štruktúru. Vektory na ich ľavých stranách sú priečne, pretože sú výsledkom vektorového súčinu pozdĺžneho vektora $\boldsymbol{k}$ a priečneho vektora $\partial\boldsymbol{E_T}/\partial z$, resp. $\partial\boldsymbol{H}_T/\partial z$. Prvé členy na pravých stranách sú priečne vektory, ktoré sa musia rovnať ľavým stranám, pretože druhé členy sú pozdĺžne vektory, ktoré sa tým pádom musia rovnať nule. Takto sa každá z uvažovaných rovníc rozpadne na dve rovnice nasledovných tvarov

$$\boldsymbol{k} \times \frac{\partial \boldsymbol{E}_T}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}_T}{\partial t} \tag{11.19a}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \tag{11.19b}$$

$$\boldsymbol{k} \times \frac{\partial \boldsymbol{H}_T}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}_T}{\partial t} \tag{11.20a}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \tag{11.20b}$$

Z rovníc (11.19b) a (11.20b) vidíme, že z-ové zložky poľa sú nezávislé nielen od súradnice, ale aj od času. Sú to teda statické elektrické a magnetické polia v smere osi z, t. j.

$$E_z = \text{konšt.} \qquad\qquad H_z = \text{konšt.} \tag{11.21}$$

Vzniká otázka, ako interpretovať takýto na prvý pohľad prekvapujúci výsledok našej analýzy.

Z matematického hľadiska je taký výsledok prípustný, pretože ak sa pozrieme na rovnice (11.2), nulové a statické priestorovo homogénne polia týmto rovniciam pri $\sigma = 0$ vyhovujú. Z fyzikálneho hľadiska im vyhovujú aj superpozície statických a iných, nestatických im vyhovujúcich polí. Statické riešenia (11.21) teda možno považovať za superpozíciu navzájom nesúvisiacich statických polí "obrovského kondenzátora so statickým nábojom a obrovskej cievky so stálym prúdom". Pri analýze iba vlnových procesov môžeme tieto polia z analýzy vylúčiť.

Z týchto závažných úvah plynie, že v našom zápise vektorov elektrického a magnetického poľa (11.13) rovinnou elektromagnetickou vlnou musia byť vektory $\boldsymbol{E}_T$ a $\boldsymbol{H}_T$, a teda možno vyhlásiť, že:

– *rovinná elektromagnetická vlna je priečnou (transverzálnou) elektromagnetickou vlnou, pretože jej vektory $\boldsymbol{E}_T$ a $\boldsymbol{H}_T$ kmitajú v rovine priečnej (v rovine xy) k smeru jej šírenia z. V literatúre sa často označuje ako TEM-vlna (transverzálne elektromagnetická vlna).*

Využitím vlnových rovníc (11.12) nájdeme teraz amplitúdy rovinnej vlny $\boldsymbol{E}_T(z)$ a $\boldsymbol{H}_T(z)$, ak časová závislosť je harmonická, teda $e^{j\omega t}$. Keďže rovnice sú symetrické, stačí riešiť prvú, pričom laplacián Δ možno nahradiť obyčajnou druhou deriváciou podľa súradnice z, teda

$$\frac{d^2 \boldsymbol{E}_T}{dz^2} + \beta^2 \boldsymbol{E}_T = 0$$

Riešenie tejto rovnice možno napísať v tvare

$$\boldsymbol{E}_T(z) = \boldsymbol{E}'_T\, e^{-j\beta z} + \boldsymbol{E}''_T\, e^{+j\beta z}$$

a podobne pre magnetickú zložku poľa

$$\boldsymbol{H}_T(z) = \boldsymbol{H}_T' \,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + \boldsymbol{H}_T'' \,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta z}$$

Ak napokon posledné dva výrazy vynásobíme faktorom $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, dostaneme kompletné hľadané riešenie vlnových rovníc pre rovinnú elektromagnetickú vlnu v tvare

$$\boldsymbol{E}_T(z, t) = \boldsymbol{E}_T' \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)} + \boldsymbol{E}_T'' \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta z)} \tag{11.22a}$$

$$\boldsymbol{H}_T(z, t) = \boldsymbol{H}_T' \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)} + \boldsymbol{H}_T'' \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta z)} \tag{11.22b}$$

Každé z týchto riešení pozostáva z dvoch častí s vlnovými (časovo-pozdĺžnymi) faktormi $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t \pm \beta z)}$ a so začiatočnými amplitúdami $\boldsymbol{E}_T'$, $\boldsymbol{E}_T''$, resp. $\boldsymbol{H}_T'$, $\boldsymbol{H}_T''$. Vlna, ktorá postupuje v zápornom smere osi z s vlnovým faktorom $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta z)}$ sa zvykne nazývať odrazenou vlnou a v praxi môže skutočne predstavovať odrazený signál od nejakej prekážky. Odrazenú vlnu bez ujmy na všeobecnosti môžeme z našich úvah vylúčiť a riešenia (11.22) iba pre postupujúcu vlnu napíšeme v tvare

$$\boldsymbol{E}_T(z, t) = \boldsymbol{E}_T' \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)} \tag{11.23a}$$

$$\boldsymbol{H}_T(z, t) = \boldsymbol{H}_T' \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta z)} \tag{11.23b}$$

Argument exponenciálnych funkcií v posledných výrazoch možno využiť na určenie fázovej rýchlosti vlny v_f. Ak argument (fázu) položíme rovný konštante a zdiferencujeme

$$\omega \mathrm{d}t \pm \beta \mathrm{d}z = 0$$

dostaneme pre fázovú rýchlosť

$$v_f = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{\omega}{\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Vo vákuu, kde $\varepsilon = \varepsilon_0$ a $\mu = \mu_0$ je fázová rýchlosť

$$v_{f0} = \pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \pm c \tag{11.24}$$

teda veľkosťou sa rovná rýchlosti svetla c. Rýchlosť c je maximálna limitná rýchlosť pohybu fáze v neohraničenom vákuu. V látkovom neohraničenom prostredí pre vlnu postupujúcu v kladnom smere osi z platí, že

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} < c \tag{11.25}$$

kde ε_r a μ_r sú relatívna permitivita a permeabilita prostredia.[1]

---

[1] V ohraničenom vákuu, napr. v trubicových vlnovodoch, je fázová rýchlosť vždy väčšia ako c a môže dosahovať nekonečných hodnôt. Táto skutočnosť nie je v rozpore s teóriou relativity, pretože fázovou rýchlosťou sa prenáša iba tvar vlny. Informácia, teda energia vlny, sa prenáša grupovou rýchlosťou, ktorá je naopak vždy menšia ako c (pozri napr. Tirpák, A.: Elektronika veľmi vysokých frekvencií, Vydavateľstvo UK Bratislava 2001)

Elektromagnetické vlny sú dané reálnymi alebo imaginárnymi časťami výrazov (11.23), teda napr.

$$\boldsymbol{E}_T(z,t) = \boldsymbol{E}_T' \sin(\omega t - \beta z) \tag{11.26a}$$

$$\boldsymbol{H}_T(z,t) = \boldsymbol{H}_T' \sin(\omega t - \beta z) \tag{11.26b}$$

Ak na okamih zmrazíme čas, výrazy (11.26) predstavujú sínusové funkcie pozdĺž osi z s dĺžkou jednej periódy Δz plynúcej z výrazu $\beta\Delta z = 2\pi$. Dĺžka jednej periódy je vlnovou dĺžkou $\lambda = \Delta z$, z čoho

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi v_f}{\omega} = \frac{v_f}{f}$$

S využitím fázovej rýchlosti, resp. vlnovej dĺžky, možno vlnový faktor napísať v troch tvaroch

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t \pm \beta z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\left(t \pm \frac{z}{v_f}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t \pm \frac{2\pi}{\lambda} z\right)} \tag{11.27}$$

Nakoniec zostáva zodpovedať ešte na jednu otázku: V akom vzájomnom vzťahu sú amplitúdy elektrickej a magnetickej zložky elektromagnetickej vlny? Zatiaľ vieme, že obidva vektory ležia v priečnej rovine. Vzájomný vzťah týchto vektorov udávajú rovnice (11.19a) a (11.20a). Ak do nich dosadíme výrazy (11.23) dostaneme vzťahy

$$\boldsymbol{k} \times \beta \boldsymbol{E}_T = \omega\mu \boldsymbol{H}_T \tag{11.28a}$$

$$\beta \boldsymbol{H}_T \times \boldsymbol{k} = \omega\varepsilon \boldsymbol{E}_T \tag{11.28b}$$

Ak si uvedomíme, že

$$\frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

potom výrazy (11.28) možno prepísať na tvary

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_T = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \boldsymbol{H}_T$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \boldsymbol{H}_T \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{E}_T$$

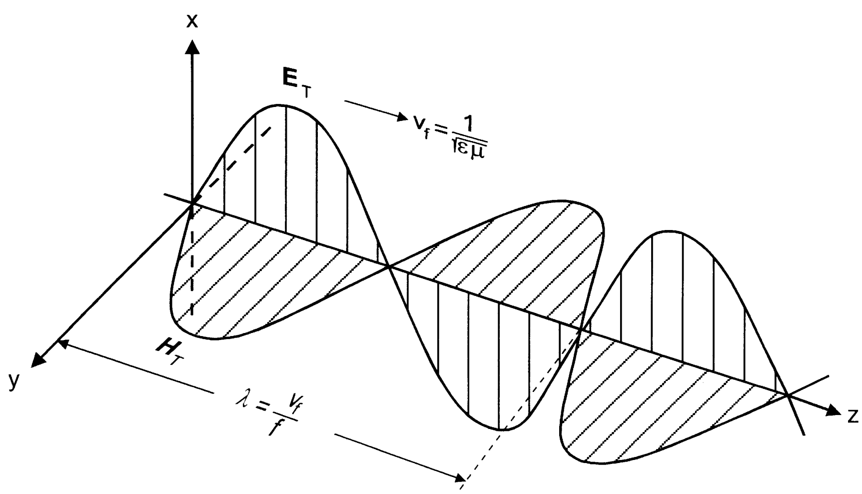
Vidíme, že obidve rovnice poskytujú rovnakú informáciu: priečne vektory $\boldsymbol{E}_T$, $\boldsymbol{H}_T$ spolu s pozdĺžnym jednotkovým vektorom $\boldsymbol{k}$ sú navzájom kolmé a sledujú pravotočivý súradnicový systém. Pomer priečnych zložiek $E_T' \,/\, H_T'$ je reálna veličina

$$Z = \frac{E_T'}{H_T'} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad [\Omega] \tag{11.29}$$

a nazýva sa **charakteristická (vlnová) impedancia prostredia**. Reálna hodnota tejto veličiny znamená, že elektrický a magnetický vektor v rovinnej elektromagnetickej vlne v bezstratovom prostredí sú vo fáze. Charakteristická impedancia vákua

$$Z_{00} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c = 376{,}73\ \Omega$$

je podobne ako c jedna z prírodných konštánt. Ak v priestorovo neohraničenom vákuu existuje elektromagnetická vlna s amplitúdou magnetickej zložky $H_T = 1$ A/m, potom jej elektrická zložka má amplitúdu $E_T = Z_0 H_T = 376{,}73$ V/m. Rovinná elektromagnetická vlna aj s jej parametrami je schematicky znázornená na *obr. 11.1*.



Obr. 11.1

Ak je prostredie stratové, výpočet vlnového poľa sa stáva zložitým. Amplitúdy polí v smere šírenia budú vo všeobecnosti klesať, elektrická a magnetická vlna nebudú vo fáze a charakteristická impedancia bude komplexná, daná výrazom

$$\boldsymbol{Z} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon^*}} \tag{11.30}$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ je komplexná permitivita prostredia definovaná výrazom (11.9). Relatívne jednoduchý je prípad malých strát (kvalitné dielektriká) alebo naopak, prípad prostredí s veľkými stratami (dobré vodiče), ktorý vedie na povrchový jav, alebo skinefekt. Budeme sa ním zaoberať v odseku 11.5.

11.4 TOK VÝKONU V ELEKTROMAGNETICKEJ VLNE. POYNTINGOV VEKTOR

Pri práci so stálymi jednosmernými prípadne nízkofrekvenčnými prúdmi je zvykom spájať prenos elektrickej energie s prúdom, ktorý tečie vodičmi medzi zdrojom a spotrebičom. Na vysokých a veľmi vysokých frekvenciách táto koncepcia prenosu zlyháva, pretože vysokofrekvenčné prúdy sa riadia svojimi zákonitosťami a ich smery nemusia vždy udávať smer prenosu energie. Okrem toho, také prúdy majú vo väčšine prípadov zložitý plošný prípadne objemový charakter a sú prakticky nemerateľné. Prenášanú energiu treba teda počítať z elektromagnetických polí, ktoré sú dôsledkom týchto prúdov. Možno teda povedať, že energia sa prenáša "bezdrôtovo" prostredníctvom poľa. Tento prístup k prenosu elektromagnetickej energie nie je nijako prekvapivý – celkom prirodzene prijímame elektromagnetickú energiu zo Slnka, tepelnú i svetelnú, bez akéhokoľvek vodivého spojenia zdroja (Slnka) a spotrebiča (Zeme).

K posúdeniu otázky prenosu elektromagnetickej energie v priestore treba urobiť energetickú bilanciu poľa na základe Maxwellových rovníc. Predpokladajme teda, že v nejakom objeme τ priestoru uzavretom plochou A sú nenulové elektrické a magnetické polia dané svojimi vektormi $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$, ktoré sú funkciami polohy a času. Tieto polia vyhovujú Maxwellovým rovniciam

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Vynásobme skalárne prvú rovnicu s $\boldsymbol{H}$ a druhú s $\boldsymbol{E}$ a odčítajme druhu od prvej. Dostaneme

$$\boldsymbol{H}\,.\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}.\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = -\varepsilon\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \boldsymbol{J}\,.\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon\boldsymbol{E}^2}{2} + \frac{\mu\boldsymbol{H}^2}{2}\right) - \boldsymbol{J}\,.\,\boldsymbol{E} \qquad (11.31)$$

Ľavá strana výrazu (11.31) sa dá vyjadriť ako div ($\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$) (pozri tabuľku 2), teda

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon\boldsymbol{E}^2}{2} + \frac{\mu\boldsymbol{H}^2}{2}\right) - \boldsymbol{J}\,.\,\boldsymbol{E} \qquad (11.32)$$

Výraz v zátvorke na pravej strane rovnice je objemová hustota energie elektromagnetického poľa

$$w_{elmag} = \frac{\varepsilon\boldsymbol{E}^2}{2} + \frac{\mu\boldsymbol{H}^2}{2}$$

ktorý sme už predtým získali zvlášť pre statické elektrické a statické magnetické polia. Teraz vidíme, že platí aj pre časovopremenné polia. Druhý člen $\boldsymbol{J}\,.\,\boldsymbol{E}$ na pravej strane výrazu (11.32) je objemová hustota tepelného (Joulovho) výkonu, s ktorým sa elektromagnetická energia mení na teplo v prostredí.

Ak výraz (11.32) integrujeme cez objem τ a na integrál na ľavej strane rovnice použijeme Gaussovu vetu, ktorou sa objemový integrál premení na plošný, po úprave dostaneme rovnicu

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \oint_A (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}).\mathrm{d}\boldsymbol{A} + \int_\tau \boldsymbol{J}.\boldsymbol{E}\ \mathrm{d}\tau \tag{11.33}$$

kde

$$W = \int_\tau w_{elmag}\ \mathrm{d}\tau$$

je celková elektromagnetická energia uzavretá v objeme τ. Rovnica (11.33) udáva energetickú bilanciu poľa v objeme τ a nazýva sa **Poyntingova veta**.[1] Podľa Poyntingovej vety sa časový úbytok elektromagnetickej energie W v objeme τ rovná súčtu energie vyžiarenej z objemu τ plochou A (prvý integrál na pravej strane rovnice) a energie spotrebovanej na teplo v objeme τ (druhý integrál na pravej strane rovnice). Hodnota druhého integrálu môže byť kladná, ak vektory $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{E}$ majú rovnaký smer, ale aj záporná, ak $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{E}$ majú opačný smer (čo je napr. v zdrojoch elektrickej energie). Vektorový súčin $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ v prvom člene na pravej strane rovnice, ktorý sa integruje po uzavretej ploche A, je dôležitou výkonovou veličinou poľa

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \qquad [\mathrm{W.m^{-2}}] \tag{11.34}$$

ktorá sa nazýva Poyntingov vektor $\boldsymbol{S}$,[2] a ktorý udáva plošnú hustotu toku výkonu (alebo hustotu toku energie jednotkovou plochou za jednotku času). Smer šírenia energie alebo výkonu je kolmý na rovinu, v ktorej ležia vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$. V rovinnej elektromagnetickej vlne je tento smer totožný so smerom šírenia vlny, teda je to smer fázovej rýchlosti v_f. Neskôr uvidíme, že ak sa vlna šíri pozdĺž nejakého vedenia (koaxiálny kábel, dvojvodičové vedenie alebo trubicový vlnovod), Poyntingov vektor má smer osi vedenia.

Na Poyntingovom vektore je kuriózne to, že jeho koncepcia nezlyháva ani v prípade navzájom nezávislých statických elektrických a magnetických polí, ktoré sú dôsledkom časovo stálych prúdov a otvára nám nové neobvyklé pohľady na toky elektromagnetickej energie. Spomeňte si na kondenzátor, ktorý sme nabíjali v odseku 3.7.3, a tým zvyšovali jeho energiu. Zopakujme tento postup a pomaly nabíjajme kondenzátor na *obr. 11.2* postupným prenosom nábojov dq. Pri každom prenesení náboja dq sa zvýši energia kondenzátora s kapacitou $C = \varepsilon_0 \pi a^2/h$ na *obr. 11.2* o hodnotu

$$\mathrm{d}W = hE\mathrm{d}q = h^2CE\mathrm{d}E$$

[pozri tiež výraz (3.36)]. Energia kondenzátora narastá s výkonom

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = hE\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = h^2CE\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \tag{11.35}$$

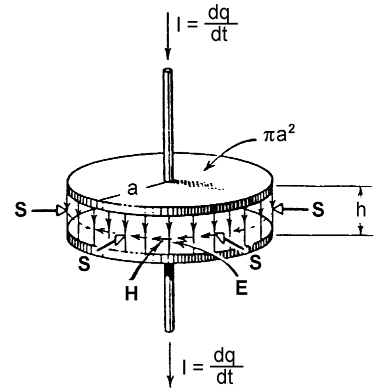
---

[1] Podľa amerického fyzika Johna Henryho Poyntinga (1852 – 1914).

[2] Označenie $\boldsymbol{S}$ pochádza z nemeckého názvu Strahlungsvektor – vektor žiarenia.

Pôvod tohto výkonu je v práci sily, ktorá prenáša náboje medzi doskami. Dalo by sa teda povedať, že energia postupuje prívodnými vodičmi tak, ako sa kondenzátor postupne nabíja. Pozrime sa však, čo nám prináša Poyntingova veta. Predovšetkým v kondenzátore je $\boldsymbol{J} = 0$, teda aj Joulov tepelný výkon $\boldsymbol{J.E} = 0$. Elektrické pole s intenzitou $\boldsymbol{E}$, smeruje na obrázku zhora nadol, a počas nabíjania kondenzátora je v ňom aj magnetické pole, ktorého intenzita $\boldsymbol{H}$ na okraji kondenzátora má azimutálny smer a jej veľkosť plynie z Ampérovho zákona

$$\oint_l \boldsymbol{H}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_p \tag{11.36}$$



Obr. 11.2

pričom sa integruje po kruhovom obvode kondenzátora na polomere $r = a$. Veličina

$$I_p = \pi a^2 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

je celkový posuvný prúd v kondenzátore. Po dosadení do (11.36) dostaneme výraz

$$2\pi a H = \pi a^2 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

z čoho intenzita magnetického poľa má veľkosť

$$H = \frac{\varepsilon_0 a}{2} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

a smeruje azimutálne s orientáciou ako na obrázku. Vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ sú navzájom kolmé a vektorový súčin $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$, teda Poyntingov vektor, smeruje zo všetkých strán do vnútra kondenzátora. Jeho veľkosť je na obvode kondenzátora všade rovnaká s hodnotou

$$S = EH = \frac{\varepsilon_0 a}{2} E \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

Celkový tok Poyntingovho vektora t. j. výkon vstupujúci do kondenzátora sa rovná súčinu S a obvodovej plochy $2\pi ah$, teda

$$P = 2\pi ahS = \varepsilon_0 \pi a^2 hE \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = h^2 CE \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

Výsledok je fascinujúci – energia vstupuje do kondenzátora štrbinou zo všetkých strán a rastie rovnako rýchlo ako udáva výraz (11.35), len nepostupuje vodičmi, ale vstupuje do kondenzátora jeho obvodom.

Iným príkladom je výkon časovo stáleho prúdu spotrebovaný na teplo v odpore. Ak má odporový vodič valcový tvar a prúd tečie pozdĺž jeho osi, na jednej strane sa energia prenáša "tlačením" elektrónov pozdĺž osi, ale na druhej strane, podľa Poyntingovej koncepcie, vstupuje do vodiča jeho plášťom a vo vnútri sa mení na teplo. Čitateľ sa o tom môže presvedčiť riešením úlohy 297 a v úlohe 298 sa dozvie, že v koaxiálnom kábli energia nepostupuje vodičmi prostredníctvom prúdu, ale dutinou kábla, resp. jeho dielektrikom vo forme elektromagnetického poľa smerom k záťaži.

Naskytá sa otázka, ako sa vlastne prenáša elektromagnetická energia. Možno iba povedať, že pri statických poliach a pri nízkych frekvenciách je otázka spôsobu prenosu energie otázkou vkusu. V takých prípadoch je však prirodzenejšie viazať prenos energie na prúd, lebo vtedy aj podľa Feynmana je "Poyntingov prístup príliš bláznivý". Pri veľmi vysokých frekvenciách sa naopak Poyntingovmu vektoru nemožno vyhnúť.

Ak je elektromagnetické pole harmonické pole, potom jeho vektory možno vyjadriť jeho komplexnými obrazmi

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

a zaviesť **komplexný Poyntingov vektor**

$$\boldsymbol{S}_{kompl}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r}) \tag{11.37}$$

ku ktorému sa možno formálne dopracovať rovnako, ako k pojmu **komplexný výkon** v odseku 9.5. Veličina $\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$ je komplexne združená amplitúda intenzity magnetického poľa. **Reálna časť výrazu (11.37) udáva strednú hodnotu Poyntingovho vektora**, teda strednú hodnotu toku výkonu v harmonickej elektromagnetickej vlne.

V rovinnej elektromagnetickej vlne v bezstratovom prostredí elektrické a magnetické vektory $\boldsymbol{E}_T$ a $\boldsymbol{H}_T$ sú priečne, navzájom kolmé, vo fáze a navzájom viazané vlnovou impedanciou Z. Stredný Poyntingov vektor takého poľa je

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}_{kompl} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_T \times \boldsymbol{H}_T^* = \frac{1}{2Z}\left|\boldsymbol{E}_T'\right|^2 \boldsymbol{k} = \frac{1}{2}Z\left|\boldsymbol{H}_T'\right|^2 \boldsymbol{k}$$

Výkon v rovinnej elektromagnetickej vlne sa šíri v smere osi z a je úmerný štvorcu amplitúdy elektrického alebo magnetického poľa.

11.5 POVRCHOVÝ JAV (SKINEFEKT)

11.5.1 Jednorozmerný rovinný prípad

Teraz sa budeme zaoberať šírením elektromagnetických vĺn v prostredí, ktoré je na rozdiel od dobrých dielektrík vysoko vodivé, ako je napríklad väčšina kovov. Na základe jednoduchých energetických úvah možno očakávať, že elektromagnetická vlna bude v takomto prostredí v smere svojho šírenia silne tlmená v dôsledku strát energie premenou na teplo. Pod účinkom elektromagnetickej vlny budú totiž v takom prostredí tiecť elektrické prúdy. Ich prúdová hustota $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$ v izotropnom vodivom prostredí s konduktivitou σ na základe Ohmovho zákona je

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \tag{11.38}$$

Elektrické pole je teda úmerné prúdovej hustote v prostredí. Ak je prúd harmonický, je harmonické aj elektromagnetické pole a výraz (11.38) možno prepísať pre komplexné amplitúdy závislé od súradníc, teda

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Vidíme, že elektrická vlna kopíruje prúdovú vlnu v prostredí, takže Helmholtzovu rovnicu (11.6a) možno prepísať pre vlnu prúdovej hustoty do tvaru

$$\Delta \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) - \mathrm{j}\,\omega\mu(\sigma + \mathrm{j}\,\omega\varepsilon)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{11.39}$$

Ak je prostredie vysoko vodivé, také, že

$$\sigma \gg \omega\varepsilon$$

možno v rovnici (11.39) konduktivitu posuvného prúdu $\omega\varepsilon$ zanedbať a prepísať rovnicu do tvaru

$$\Delta \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) - \mathrm{j}\,\omega\mu\sigma \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{11.40a}$$

Podobným spôsobom možno prepísať aj rovnicu (11.6b)

$$\Delta \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) - \mathrm{j}\,\omega\mu\sigma \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{11.40b}$$

Všeobecné riešenia týchto rovníc sú formálne rovnaké a líšia sa iba charakterom hraničných podmienok. Budeme sa zaoberať riešením prvej z rovníc. Najjednoduchší je prípad, ak prúdová hustota závisí iba od jednej z pravouhlých súradníc, napríklad od súradnice x. Vodivé prostredie nemôže byť v celom nekonečnom priestore, ale musí mať nejakú hranicu v konečne. Nech je rozhraním rovina yz pre $x = 0$ a vodivé prostredie je nekonečný polpriestor $x \geq 0$. Nech naviac má prúdová hustota smer osi z, potom $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = J_z(x)\boldsymbol{k}$ a rovnica (11.40a) prejde na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{J}_z(x)}{\mathrm{d}x^2} - \mathrm{j}\omega\mu\sigma \boldsymbol{J}_z(x) = 0 \tag{11.41}$$

Substitúciou

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = \mathrm{j}\,\omega\mu\sigma \tag{11.42}$$

prejde rovnica (11.41) na konečný tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{J}_z(x)}{\mathrm{d}x^2} - \boldsymbol{\gamma}^2 \boldsymbol{J}_z(x) = 0 \tag{11.43}$$

Rovnica (11.43) má tvar rovnice vedenia tepla alebo rovnice difúzie (v stacionárnom prípade), a preto aj jej riešenie musí mať charakter funkcie, ktorá so súradnicou x exponenciálne klesá. Všeobecné riešenie rovnice možno napísať v tvare

$$\boldsymbol{J}_z(x) = \boldsymbol{J}_{z0}\,\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma}x} + \boldsymbol{J}'_{z0}\,\mathrm{e}^{+\boldsymbol{\gamma}x} \tag{11.44}$$

kde J_{z0} a J'_{z0} sú integračné konštanty a fyzikálne predstavujú hraničné hodnoty (pre $x = 0$) dvoch amplitúd prúdovej hustoty, z ktorých jedna smerom do vodiča klesá a druhá rastie. Je prirodzené očakávať, že celková prúdová hustota musí smerom do vnútra materiálu klesať, čo znamená, že druhá integračná konštanta $J'_{z0} = 0$. Riešenie (11.44) možno teda zapísať v tvare

$$\boldsymbol{J}_z(x) = \boldsymbol{J}_{z0}\,\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma}x} \tag{11.44a}$$

Komplexná konštanta šírenia $\boldsymbol{\gamma}$ sa dá napísať v tvare

$$\boldsymbol{\gamma} = \alpha + \mathrm{j}\beta = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\sigma} = \frac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+\mathrm{j}}{\delta} \tag{11.45}$$

kde α je koeficient útlmu udávaný v m^{-1}, alebo v neperoch na meter (Np/m – jednotku však SI-sústava nepripúšťa), prípadne v decibeloch na meter (dB/m) a β je už zavedený fázový koeficient udávaná v radiánoch na meter (rad/m). Veličina

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \qquad [\mathrm{m}] \tag{11.46}$$

je hĺbka vniku (skinová hĺbka – skin depth[1]). Je to charakteristická hĺbka, s ktorou prúdová hustota a súčasne elektrické aj magnetické pole exponenciálne klesajú smerom do vnútra prostredia (materiálu). V hĺbke δ poklesnú amplitúdy všetkých troch veličín na 1/e-tinu ich povrchových hodnôt. Tento jav sa nazýva **povrchovým javom** alebo **skin-efektom**.

Na základe uvedenej analýzy možno napísať riešenie pre prúdovú harmonickú vlnu vynásobením výrazu (11.44a) s faktorom $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ a využitím substitúcií (11.45), (11.46) takto

[1] Skin je anglický názov pre "kožu" alebo "šupku".

$$\boldsymbol{J}_z(x, t) = \boldsymbol{J}_{z0}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \tag{11.47}$$

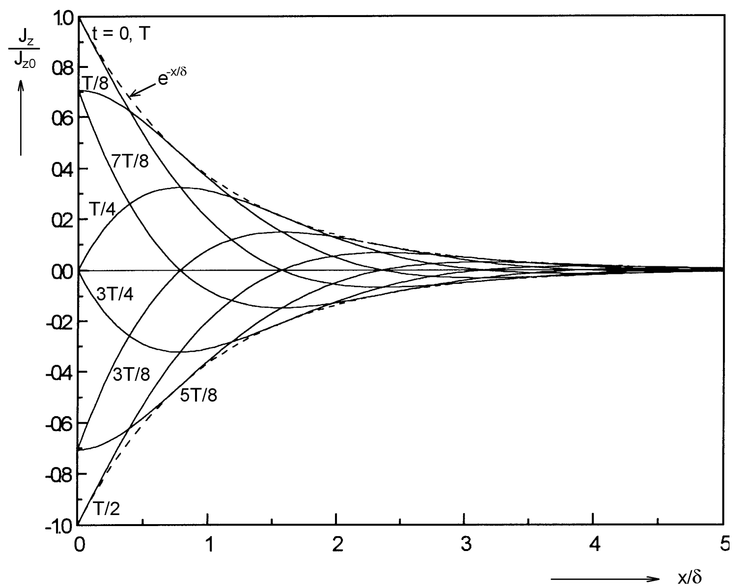
Skutočná prúdová hustota v prostredí je reálnou časťou výrazu (11.47), teda

$$J_z(x, t) = J_{z0}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \tag{11.48}$$

Z výrazu (11.48) vidíme, že ide o silne tlmenú vlnu prúdovej hustoty, ktorá postupuje do vnútra materiálu. Prúdová hustota v čase kmitá s frekvenciou ω.

Pre dobré vodiče je hĺbka vniku veľmi malá a závisí od frekvencie. V medi ($\sigma = 5{,}8.10^7$ S/m, $\mu \approx \mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m) už pri pomerne nízkej frekvencii $f = 1$ MHz je δ iba

$$\delta \approx 6{,}6.10^{-5}\ \mathrm{m}$$



Obr. 11.3

Vidíme, že vysokofrekvenčné prúdy tečú iba vo veľmi tenkej vrstve (šupke) pod povrchom vodiča a smerom do jeho vnútra sa veľmi rýchlo exponenciálne tlmia. Na *obr. 11.3* je znázornená závislosť normovanej prúdovej hustoty od pomeru x/δ pre niekoľko vybraných zlomkov periódy T. Je to silne tlmená prúdová vlna.

Nakoniec treba zodpovedať otázku, aké je elektromagnetické pole v prostredí. Jeho elektrická zložka je formálne daná rovnakými výrazmi ako (11.47), resp. (11.48), v ktorých treba zameniť $\boldsymbol{J} \rightarrow \boldsymbol{E}$. Magnetickú zložku poľa možno principiálne získať riešením rovnice (11.40b), jednoduchšie a poučnejšie je však jej vyjadrenie cez impedanciu prostredia. Podľa výrazu (11.30) impedancia $\boldsymbol{Z}_s$ vodivého (stratového) prostredia je daná vzťahom

$$\boldsymbol{Z}_s = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon^*}}$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ je komplexná permitivita stratového materiálu daná výrazom (11.9), teda

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}$$

Pre vysokovodivé prostredia $\sigma \gg \omega\varepsilon$, takže komplexná permitivita je daná približným výrazom

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* \approx -\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}$$

Dosadením do výrazu pre impedanciu dostaneme

$$\boldsymbol{Z}_s = \sqrt{\mathrm{j}\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = (1+\mathrm{j})\frac{1}{\sigma\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} = Z_s\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

kde

$$Z_s = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

je absolútna hodnota stratovej impedancie. Magnetickú zložku poľa možno potom na základe vzťahu (11.29) napísať v tvare

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{Z}_s} = \frac{\boldsymbol{E}}{Z_s}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

Využitím tohto vzťahu a vzťahov (11.38), (11.47) a (11.48) možno výrazy pre harmonickú elektromagnetickú vlnu v dobre vodivom prostredí napísať v tvare

$$\boldsymbol{E}_z(x,t) = \boldsymbol{E}_{z0}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)} \tag{11.49a}$$

$$\boldsymbol{H}_y(x,t) = \frac{\boldsymbol{E}_{z0}}{Z_s}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{11.49b}$$

alebo pomocou reálnych funkcií

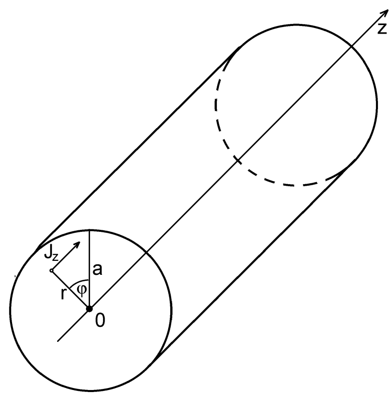
$$E_z(x,\, t) = E_{z0}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \tag{11.50a}$$

$$H_y(x,\, t) = \frac{E_{z0}}{Z_s}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{11.50b}$$

Vidíme, že elektrické a magnetické vektory ležia v priečnej rovine, smerom do vnútra vodiča sú tlmené s charakteristickou hĺbkou δ a sú fázovo navzájom posunuté o uhol $\pi/4 = 45°$.

11.5.2 Povrchový jav vo valcovom vodiči

Analýza jednorozmerného povrchového javu s rovinným nekonečným rozhraním nezodpovedá reálnym prúdovým rozloženiam, je však matematicky jednoduchá. Prakticky dôležitejší je prípad prúdu valcovým vodičom umiestneným v dielektriku (vo vzduchu), alebo prúdu v dutej kovovej trubici s vnútorným vodičom (koaxiálny kábel), prípadne bez vnútorného vodiča (trubicový cylindrický vlnovod).



Obr. 11.4

Naznačíme preto riešenie problému vysokofrekvenčného prúdu vo valcovom vodiči s polomerom a, ak prúd tečie v smere osi vodiča z. Problém treba riešiť v cylindrických súradniciach r, φ, z. Nech má očakávaná prúdová hustota komplexnú amplitúdu $\boldsymbol{J}_z(r)$, kde r je vzdialenosť od osi vodiča (pozri *obr. 11.4*). V takomto prípade treba rovnicu (11.40a) napísať pre cylindrickú súradnicu r (problém nezávisí od φ ani od z), pre ktorú má Laplaceov operátor tvar (pozri tabuľku 23)

$$\Delta_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Ak prúdovú hustotu označíme $\boldsymbol{J}_z(r)$, prejde rovnica (11.40a) na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{J}_z(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_z(r)}{\mathrm{d}r} - \mathrm{j}\omega\mu\sigma\boldsymbol{J}_z(r) = 0$$

a líši sa formálne od rovnice (11.41) iba členom $(1/r)\mathrm{d}\boldsymbol{J}_z(r)/\mathrm{d}r$, ktorý však spôsobí, že jej riešenie sa nedá vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Po úprave rovnica nadobudne tvar

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{J}_z(r)}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_z(r)}{\mathrm{d}r}+\boldsymbol{k}^2r^2\boldsymbol{J}_z(r)=0 \tag{11.51}$$

kde

$$\boldsymbol{k}^2=-\,\mathrm{j}\,\omega\mu\sigma=-\,\mathrm{j}\frac{2}{\delta^2}$$

Rovnica (11.51) je v matematickej literatúre známa ako **Besselova diferenciálna rovnica**[1] nultého rádu. Jej riešenie je dané nekonečnými radmi nazývanými **Besselove funkcie** prvého a druhého druhu komplexného argumentu $\boldsymbol{k}r$. Funkcia druhého druhu ale diverguje pre $r \to 0$, takže sa v riešení neobjaví. Prúdová hustota je potom daná Besselovou funkciou prvého druhu nultého rádu a má všeobecný tvar nekonečného radu

$$\boldsymbol{J}_z(r)=\boldsymbol{J}_z(\boldsymbol{k}r)=J_{00}\left(1-\frac{(\boldsymbol{k}r)^2}{2^2}+\frac{(\boldsymbol{k}r)^4}{2^2.4^2}-\frac{(\boldsymbol{k}r)^6}{2^2.4^2.6^2}+\dots\right) \tag{11.52}$$

Výraz v zátvorke (11.52) konverguje pre všetky konečné reálne aj komplexné hodnoty argumentu $\boldsymbol{k}r$. Hodnotu J_{00} treba určiť z hraničnej podmienky na povrchu vodiča. Ak zavedieme ďalšiu substitúciu

$$\boldsymbol{k}r=\sqrt{-\,\mathrm{j}}\,\frac{\sqrt{2}}{\delta}\,r=\sqrt{-\,\mathrm{j}}\;u$$

kde

$$u=\frac{\sqrt{2}}{\delta}\,r$$

rozpadne sa riešenie (11.52) na dva nekonečné rady, ktoré sú reálnou a imaginárnou časťou komplexnej funkcie prúdovej hustoty argumentu u. Riešenie má tvar

$$\boldsymbol{J}_z=J_{00}\left\{\left[1-\frac{u^4}{2^2.4^2}+\frac{u^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\dots\right]+\mathrm{j}\left[\frac{u^2}{2^2}-\frac{u^6}{2^2.4^2.6^2}+\frac{u^{10}}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}-\dots\right]\right\} \tag{11.53}$$

Funkcie v hranatých zátvorkách výrazu (11.53) majú špeciálne mená a ich tabuľky sa nachádzajú vo vybraných matematických príručkách.[2] Prvá sa volá

ber u – Besselova (funkcia) reálna argumentu u

a druhá

bei u – Besselova (funkcia) imaginárna argumentu u

teda

$$\mathrm{ber}\,u=1-\frac{u^4}{2^2.4^2}+\frac{u^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\dots \tag{11.54a}$$

[1] Pozri napr. Rektorys, K.: Přehled užité matematiky, SNTL Praha 1981

[2] Pozri napr. Jahnke, E., Emde, F., Lösch, F.: Tafeln höherer Funktionen, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960

$$\text{bei}\, u = \frac{u^2}{2^2} - \frac{u^6}{2^2.4^2.6^2} + \frac{u^{10}}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2} - \dots \qquad (11.54b)$$

Výraz pre amplitúdu prúdovej hustoty v cylindrickom vodiči možno teda napísať v tvare

$$\boldsymbol{J}_z = J_{00}(\text{ber}\, u + \text{j bei}\, u) \qquad (11.55)$$

alebo

$$\boldsymbol{J}_z(r) = J_{00}\left(\text{ber}\frac{\sqrt{2}r}{\delta} + \text{j bei}\frac{\sqrt{2}r}{\delta}\right) \qquad (11.56)$$

Na povrchu vodiča pre $r = a$ je amplitúda prúdovej hustoty

$$\boldsymbol{J}_z(a) = \boldsymbol{J}_{za} = J_{00}\left(\text{ber}\frac{\sqrt{2}a}{\delta} + \text{j bei}\frac{\sqrt{2}a}{\delta}\right)$$

takže riešenie (11.56) možno nakoniec vyjadriť v tvare

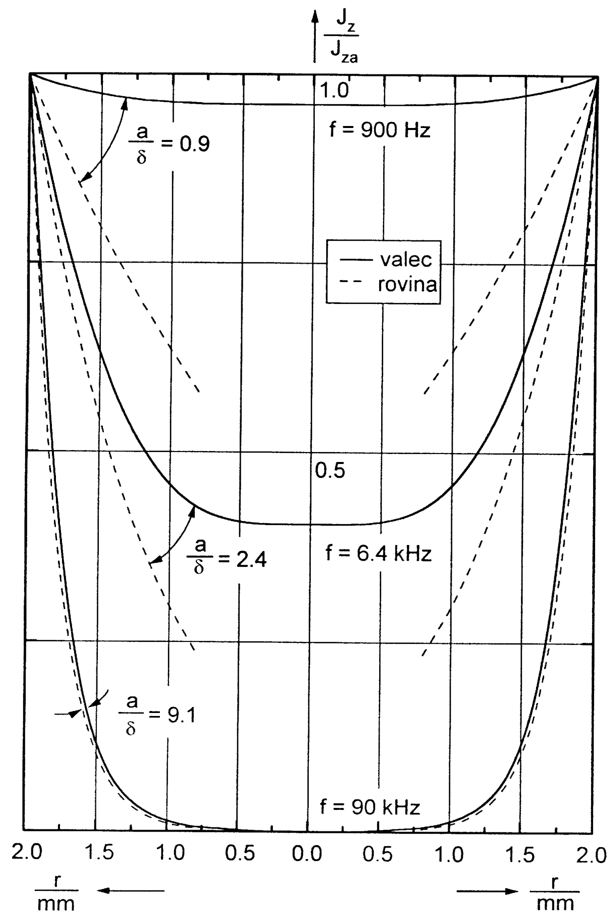
$$\boldsymbol{J}_z(r) = \boldsymbol{J}_{za}\frac{\text{ber}\frac{\sqrt{2}r}{\delta} + \text{j bei}\frac{\sqrt{2}r}{\delta}}{\text{ber}\frac{\sqrt{2}a}{\delta} + \text{j bei}\frac{\sqrt{2}a}{\delta}} \qquad (11.57)$$

Reálna amplitúda prúdovej hustoty normovaná k jej povrchovej hodnote je daná výrazom

$$\frac{J_z(r)}{J_{za}} = \left(\frac{\text{ber}^2\frac{\sqrt{2}r}{\delta} + \text{bei}^2\frac{\sqrt{2}r}{\delta}}{\text{ber}^2\frac{\sqrt{2}a}{\delta} + \text{bei}^2\frac{\sqrt{2}a}{\delta}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (11.58)$$

Výraz je implicitne funkciou parametrov μ a σ vodiča, frekvencie prúdu $f = \omega/(2\pi)$ a explicitne funkciou vzdialenosti r od osi vodiča. Numerická analýza takého výrazu je úloha pre počítač. Pre medený valcový vodič s polomerom $a = 2$ mm a pre tri frekvencie 900 Hz, 6,4 kHz a 90 kHz boli počítačom spracované a na *obr. 11.5* grafmi znázornené normované prúdové hustoty podľa výrazu (11.58). Čiarkovane sú v obrázku nakreslené závislosti amplitúd prúdovej hustoty pre tie isté frekvencie, ale v rovinnom prípade, pre ktorý sú prúdové hustoty dané výrazom (11.48).

Z obrázka predovšetkým vidieť, že so zvyšovaním frekvencie je prienik prúdu do vnútra valcového vodiča stále menší a prúd tečie pod povrchom vodiča v stále menšej hĺbke. Zatiaľ čo pri pomere $a/\delta = 0{,}9$ ($f = 900$ Hz) je prúd rozložený na priereze vodiča prakticky rovnomerne, pri $a/\delta = 9$ ($f = 90$ kHz) prúdová hustota klesá približne na 1/e-tinu (0,368) povrchovej hodnoty pod povrchom už v hĺbke cca $\delta \approx 0{,}22$ mm. Je zrejmé, že vnútrajšok vodiča je pri týchto a vyšších frekvenciách úplne nevyužitý, čo zvyšuje efektívny odpor vodiča. Ak sa má efektívny odpor znížiť, potom namiesto jedného hrubého vodiča treba použiť zväzok navzájom izolovaných tenších vodičov, čím sa zvýši efektívna prierezová plocha a zníži sa vysokofrekvenčný odpor. Taký zväzok vodičov sa nazýva "vysokofrekvenčné lanko" a používa sa napr. na vinutie cievok pre vysokokvalitné *LC* obvody. Hrubé vodiče na vysokých frekvenciách by sa teoreticky mohli tiež nahradiť rúrkami kvôli úspore materiálu.



Obr. 11.5

Druhá vec, ktorú si možno na obrázku všimnúť, je hĺbka vniku prúdu v rovinnom prípade v porovnaní s valcovým prípadom. Ak je pomer $a/\delta \sim 1$ a menej (nízka frekvencia), prúd efektívnejšie preniká do valcového vodiča ako do rovinného. Ak je pomer a/δ podstatne väčší ako 1, ako je to v prípade $f = 90$ kHz na obrázku, keď $a/\delta \approx 9$, závislosť prúdovej hustoty od hĺbky r je prakticky rovnaká pre rovinný aj valcový prípad. V takých prípadoch zložitú analýzu valcového prípadu možno nahradiť jednoduchším rovinným prípadom.

11.6 ZÁKLADY TEÓRIE DLHÝCH VEDENÍ

11.6.1 Prúdové a napäťové vlny na dvojvodičových vedeniach

Pod pojmom "dvojvodičové vedenie" máme na mysli signálový alebo energetický prenosový systém pozostávajúci z dvoch vodičov spájajúcich zdroj signálu (generátor) a spotrebič (záťaž), pričom v istom okamihu a v istej priečnej rovine prúd jedným vodičom tečie k záťaži a druhým naopak, ku generátoru. Jednoduchými príkladmi dvojvodičových vedení, analyzovanými už pri inej príležitosti, sú dvojvodičový symetrický kábel (dvojlinka) a koaxiálny kábel. Pri prenose jednosmerných a nízkofrekvenčných elektrických signálov resp. výkonov sú takéto vedenia jedinými a výhradnými prenosovými médiami a môžu slúžiť na prenos signálov až do frekvencií desiatok gigahertzov (GHz).

Menej jednoznačným je pojem "dlhé vedenie", pretože tento súvisí s frekvenciou prenášaného signálu. Ak na vstupe vedenia istej dĺžky l pôsobí generátor signálu s frekvenciou f, bude sa tento napäťovo-prúdový signál šíriť pozdĺž vedenia s istou konečnou rýchlosťou rovnou fázovej rýchlosti v_f elektromagnetickej vlny v danom dielektrickom prostredí kábla, pretože s napätím a prúdom sú nerozlučne spojené ich elektrické a magnetické polia. Pri danej frekvencii vznikne na vedení okrem elektromagnetickej aj prúdová a napäťová vlna s vlnovou dĺžkou $\lambda = v_f/f$. Ak je dĺžka l vedenia oveľa väčšia ako vlnová dĺžka λ, vedenie nazývame dlhým. V praxi sa za dlhé považujú už vedenia, pre ktoré je splnená podmienka

$$l \geq \lambda/4$$

Vidíme, že pojem "dlhé vedenie" je relatívny. Napríklad vedenie vysokého napätia v energetickej sieti je dlhým až pri dĺžke rádovo tisícov kilometrov, čo súvisí s nízkou frekvenciou napätia energetickej siete (50 Hz). Na druhej strane, úsek kábla určeného na prenos televízneho signálu pri frekvencii 1000 MHz je už "dlhý" keď má iba 10 centimetrov. Pri dlhom vedení sa súčasne vyžaduje, aby jeho priečne rozmery boli menšie ako štvrtina pracovnej vlnovej dĺžky.

Dlhé vedenia sa niekedy nazývajú aj vedenia s rozloženými parametrami. Pri prenose signálov sa totiž okrem ich pozdĺžneho odporu a priečnej vodivosti uplatňujú aj pozdĺžna reaktancia a priečna susceptancia, ktoré možno chápať ako spojito rozložené pozdĺž vedenia, na rozdiel od sústredených parametrov, akými sú odpory rezistorov, indukčnosti cievok a kapacity kondenzátorov, z ktorých pozostávajú diskrétne obvody na nízkych frekvenciách. Rozložené parametre vedenia sa uplatňujú pri veľkej dĺžke vedenia alebo pri vysokej frekvencii prenášaného signálu.

Každé dvojvodičové vedenie charakterizujú štyri primárne parametre:

a) pozdĺžny odpor vedenia na jednotku dĺžky R [Ω/m] spôsobený nenulovou vodivosťou vodiča a skin efektom;

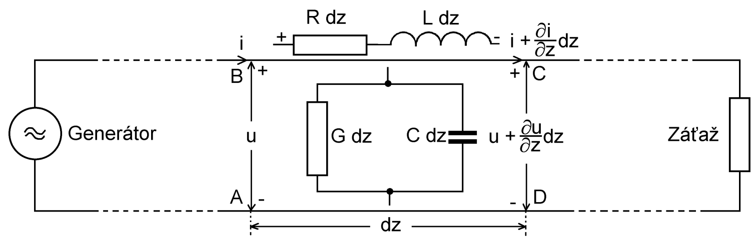
b) pozdĺžna indukčnosť vedenia na jednotku jeho dĺžky L [H/m] spôsobená induktívnymi vlastnosťami vodiča;

c) priečna vodivosť vedenia na jednotku dĺžky G [S/m] spôsobená neideálnym dielektrikom, ktoré tvorí izoláciu medzi vodičmi;

d) priečna kapacita vedenia na jednotku dĺžky C [F/m] predstavujúca kapacitné vlastnosti dvojice vodičov.

Nekonečne krátky úsek vedenia dz má potom pozdĺžny odpor jedného vodiča Rdz, priečnu vodivosť Gdz, pri frekvencii ω pozdĺžnu induktívnu reaktanciu ωLdz a priečnu kapacitnú susceptanciu ωCdz. Treba mať na pamäti, že v dôsledku skinefektu sú aj pozdĺžny odpor aj priečna vodivosť závislé od frekvencie.

Vedenie, ktorého parametre pozdĺž jeho dĺžky zostávajú konštantné, sa nazýva homogénne alebo regulárne. V našej teórii sa budeme zaoberať iba vlastnosťami homogénnych vedení. Z nehomogénnych vedení je dôležité najmä exponenciálne vedenie, ktorého úseky sa často používajú ako spojovacie články medzi vedeniami s rôznymi parametrami.



Obr. 11.6

Na *obr. 11.6* je zobrazený infinitezimálny úsek vedenia dĺžky dz. Predpokladajme, že na vstup vedenia je pripojený generátor napätia, ktoré závisí od času, a nemusí byť nevyhnutne harmonické. Pozdĺž vedenia sa vytvorí napätie závislé od času t a vzdialenosti z. Funkčné závislosti napätia a prúdu pozdĺž vedenia označíme $u = u(z, t)$ a $i = i(z, t)$. Na vybraný úsek vedenia môžeme aplikovať Kirchhoffove zákony. Na vstupe medzi bodmi A a B vybraného úseku vedenia je napätie u a prúd v bode B pozdĺž vedenia je i. Na jeho výstupe medzi bodmi C a D je napätie $u + (\partial u/\partial z)dz$, v bode C je pozdĺžny prúd $i + (\partial i/\partial z)dz$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme odpor a indukčnosť spätného, spodného vodiča sústrediť do horného a spodný považovať za bezodporový a bezindukčný. Podľa druhého Kirchhoffovho zákona pre uzavretý obvod ABCDA platí

$$u - \left(Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \right) \mathrm{d}z - \left(u + \frac{\partial u}{\partial z} \mathrm{d}z \right) = 0$$

Podľa prvého Kirchhoffovho zákona rozdiel prúdov v bode B a C sa rovná zvodovému prúdu cez vodivosť G a kapacitu C na dĺžke úseku dz, teda

$$i - \left(Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} \right) \mathrm{d}z - \left(i + \frac{\partial i}{\partial z} \mathrm{d}z \right) = 0$$

Z týchto rovníc po úprave dostaneme

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{11.59a}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} \tag{11.59b}$$

V rovniciach (11.59) možno separovať u a i. Derivujme rovnicu (11.59a) podľa súradnice z a dosaďme za $\partial i/\partial z$ z rovnice (11.59b). Dostaneme

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R\frac{\partial i}{\partial z} + L\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = -RGu - RC\frac{\partial u}{\partial t} + L\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} \tag{11.60}$$

Derivujme ďalej rovnicu (11.59b) podľa času

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = G\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

a dosaďme do rovnice (11.60). Po úprave dostaneme diferenciálnu rovnicu pre napätie u v tvare

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = RGu + (RC + GL)\frac{\partial u}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{11.61a}$$

Podobným postupom dostaneme symetrickú rovnicu pre prúd i

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = RGi + (RC + GL)\frac{\partial i}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \tag{11.61b}$$

Z historických dôvodov sa rovnice (11.59), resp. (11.61) nazývajú **telegrafné rovnice**, pretože boli odvodené a analyzované v čase vzniku drôtovej telegrafie.[1] Ich riešením pri zadaných začiatočných a hraničných podmienkach dostaneme napätia a prúdy na vedení pre ľubovoľné časové priebehy vstupného napätia.

V praxi sú najdôležitejšie periodické alebo jednoduché harmonické napäťové a prúdové priebehy, ktoré v komplexnom vyjadrení majú tvar $\boldsymbol{U}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ a $\boldsymbol{I}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, kde $\boldsymbol{U}(z)$ a $\boldsymbol{I}(z)$ sú komplexné amplitúdy napätia a prúdu na vedení. Ak v rovniciach (11.59) nahradíme prúd a napätie uvedenými komplexnými obrazmi, dostaneme po úprave diferenciálne rovnice pre komplexné amplitúdy v tvare

$$-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}z} = (R + \mathrm{j}\omega L)\boldsymbol{I} = \boldsymbol{ZI} \tag{11.62a}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}}{\mathrm{d}z} = (G + \mathrm{j}\omega C)\boldsymbol{U} = \boldsymbol{YU} \tag{11.62b}$$

kde $\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}\omega L$ je pozdĺžna impedancia vedenia na jednotku jeho dĺžky a $\boldsymbol{Y} = G + \mathrm{j}\omega C$ je jeho priečna admitancia na jednotku dĺžky. V rovniciach (11.62) možno tiež separovať premenné. Ich derivovaním podľa z a kombináciou výsledku derivácie s pôvodnými rovnicami dostaneme rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}z^2} = \boldsymbol{\gamma}^2\boldsymbol{U} \tag{11.63a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{I}}{\mathrm{d}z^2} = \boldsymbol{\gamma}^2\boldsymbol{I} \tag{11.63b}$$

---

[1] Kirchhoff, G. R.: Über die Bewegung der Elektrizität in Drähten, Pogg. Ann., Bd. 100 (1857)
Heaviside, O.: On the Extra Current, Phil. Mag., vol. 2 (1876), p. 53
Poincaré, H.: Sur la propagation de l´electricité, Comptes rendus, vol. 17 (1897), p. 1027

kde $$\boldsymbol{\gamma} = \sqrt{\boldsymbol{ZY}} = \sqrt{(R + \mathrm{j}\omega L)(G + \mathrm{j}\omega C)} \tag{11.64}$$

je **konštanta šírenia napäťových a prúdových vĺn**. Rovnice (11.63) sú telegrafné rovnice pre harmonické napäťové a prúdové priebehy. Z matematického hľadiska sú to obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu, ktorých všeobecné riešenia majú tvar

$$\boldsymbol{U}(z) = \boldsymbol{U}_0^+ \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma} z} + \boldsymbol{U}_0^- \mathrm{e}^{\boldsymbol{\gamma} z} \tag{11.65a}$$

$$\boldsymbol{I}(z) = \boldsymbol{I}_0^+ \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma} z} + \boldsymbol{I}_0^- \mathrm{e}^{\boldsymbol{\gamma} z} \tag{11.65b}$$

Vzhľadom na to, že konštanta šírenia $\boldsymbol{\gamma}$ je vo všeobecnosti komplexné číslo a časový faktor je $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, každé z riešení predstavuje tlmenú napäťovú resp. prúdovú vlnu ako superpozíciu dvoch komponent šíriacich sa v navzájom opačných smeroch pozdĺž osi vedenia (osi z). Integračné konštanty $\boldsymbol{U}_0^+, \boldsymbol{U}_0^-, \boldsymbol{I}_0^+, \boldsymbol{I}_0^-$ predstavujú komplexné amplitúdy postupujúcich a odrazených napäťových a prúdových vĺn v referenčnej rovine $z = 0$ a treba ich určiť z hraničných podmienok, napríklad z prúdu a napätia na vstupe a výstupe vedenia. Našťastie počet integračných konštánt možno redukovať na polovicu, pretože prúdy a napätie nie sú nezávislé, ale sú viazané rovnicami (11.62). Skutočne, využitím rovnice (11.62a) môžeme napísať

$$\boldsymbol{I}(z) = -\frac{1}{\boldsymbol{Z}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}z} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{U}_0^+ \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma} z} - \boldsymbol{U}_0^- \mathrm{e}^{\boldsymbol{\gamma} z}) = \frac{1}{\boldsymbol{Z}_v}(\boldsymbol{U}_0^+ \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma} z} - \boldsymbol{U}_0^- \mathrm{e}^{\boldsymbol{\gamma} z})$$

a riešenia (11.65) nadobudnú tvar

$$\boldsymbol{U}(z) = \boldsymbol{U}_0^+ \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma} z} + \boldsymbol{U}_0^- \mathrm{e}^{\boldsymbol{\gamma} z} \tag{11.66a}$$

$$\boldsymbol{I}(z) = \frac{\boldsymbol{U}_0^+}{\boldsymbol{Z}_v} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma} z} - \frac{\boldsymbol{U}_0^-}{\boldsymbol{Z}_v} \mathrm{e}^{\boldsymbol{\gamma} z} \tag{11.66b}$$

Veličina

$$\boldsymbol{Z}_v = \frac{\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{\gamma}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Y}}} = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{G + \mathrm{j}\omega C}} \tag{11.67}$$

je **charakteristická (vlnová) impedancia** vedenia, ktorá, ako vidíme, závisí iba od primárnych parametrov vedenia a od frekvencie ω. Neskôr uvidíme, že udáva pomer komplexných amplitúd napätia a prúdu iba postupujúcej vlny od zdroja k záťaži. Integračné konštanty $\boldsymbol{U}_0^+$ a $\boldsymbol{U}_0^-$ treba určiť z okrajových podmienok. Ako okrajové podmienky možno zvoliť napríklad vstupné napätie $\boldsymbol{U}_{vst}$ a vstupný prúd $\boldsymbol{I}_{vst}$. Nech sa teda vstup vedenia nachádza v rovine $z = 0$ ako na *obr. 11.7,* kde $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{vst}$ a $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_{vst}$. Z výrazov (11.66) plynie, že

$$\boldsymbol{U}_{vst} = \boldsymbol{U}_0^+ + \boldsymbol{U}_0^- \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{Z}_v \boldsymbol{I}_{vst} = \boldsymbol{U}_0^+ - \boldsymbol{U}_0^-$$

Riešením tejto sústavy rovníc pre konštanty $\boldsymbol{U}_0^+$ a $\boldsymbol{U}_0^-$ dostaneme

$$\boldsymbol{U}_0^+ = \frac{\boldsymbol{U}_{vst} + \boldsymbol{Z}_v \boldsymbol{I}_{vst}}{2} \qquad \boldsymbol{U}_0^- = \frac{\boldsymbol{U}_{vst} - \boldsymbol{Z}_v \boldsymbol{I}_{vst}}{2} \tag{11.68}$$

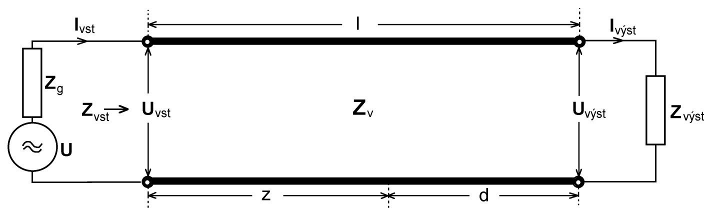
Dosadením za integračné konštanty vo výrazoch (11.66) a využitím hyperbolických funkcií

$$\sinh \boldsymbol{\gamma} z = \frac{e^{\boldsymbol{\gamma} z} - e^{-\boldsymbol{\gamma} z}}{2} \qquad \cosh \boldsymbol{\gamma} z = \frac{e^{\boldsymbol{\gamma} z} + e^{-\boldsymbol{\gamma} z}}{2} \tag{11.69}$$

dostaneme výrazy pre komplexné amplitúdy napätia a prúdu v tvare

$$\boldsymbol{U}(z) = \boldsymbol{U}_{vst} \cosh \boldsymbol{\gamma} z - \boldsymbol{Z}_v \boldsymbol{I}_{vst} \sinh \boldsymbol{\gamma} z \tag{11.70a}$$

$$\boldsymbol{I}(z) = \boldsymbol{I}_{vst} \cosh \boldsymbol{\gamma} z - \frac{\boldsymbol{U}_{vst}}{\boldsymbol{Z}_v} \sinh \boldsymbol{\gamma} z \tag{11.70b}$$



Obr. 11.7

Druhá možnosť voľby hraničných podmienok je vybrať ich ako výstupné veličiny na konci vedenia dĺžky l (pozri *obr. 11.7*). Nech teda pre $z = l$ je $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{výst}$ a $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_{výst}$. Využitím výrazov (11.66) dostaneme pre konštanty $\boldsymbol{U}_0^+$ a $\boldsymbol{U}_0^-$ systém rovníc

$$\boldsymbol{U}_{výst} = \boldsymbol{U}_0^+ e^{-\boldsymbol{\gamma} l} + \boldsymbol{U}_0^- e^{\boldsymbol{\gamma} l}$$

$$\boldsymbol{Z}_v \boldsymbol{I}_{výst} = \boldsymbol{U}_0^+ e^{-\boldsymbol{\gamma} l} - \boldsymbol{U}_0^- e^{\boldsymbol{\gamma} l}$$

z čoho

$$\boldsymbol{U}_0^+ = \frac{\boldsymbol{U}_{výst} + \boldsymbol{Z}_v \boldsymbol{I}_{výst}}{2} e^{\boldsymbol{\gamma} l} \qquad \boldsymbol{U}_0^- = \frac{\boldsymbol{U}_{výst} - \boldsymbol{Z}_v \boldsymbol{I}_{výst}}{2} e^{-\boldsymbol{\gamma} l} \tag{11.71}$$

Dosadením konštánt do výrazov (11.66) dostaneme pre amplitúdy napätia a prúdu výrazy

$$\boldsymbol{U}(z) = \boldsymbol{U}_{výst} \cosh \boldsymbol{\gamma}(l - z) + \boldsymbol{Z}_v \boldsymbol{I}_{výst} \sinh \boldsymbol{\gamma}(l - z) \tag{11.72a}$$

$$\boldsymbol{I}(z) = \boldsymbol{I}_{výst} \cosh \boldsymbol{\gamma}(l - z) + \frac{\boldsymbol{U}_{výst}}{\boldsymbol{Z}_v} \sinh \boldsymbol{\gamma}(l - z) \tag{11.72b}$$

Namiesto vzdialenosti od začiatku vedenia je v tomto prípade výhodnejšie merať vzdialenosť d od konca vedenia, teda $d = l - z$, (pozri *obr. 11.7*) a výrazy (11.72) prepísať do tvaru

$$\boldsymbol{U}(d) = \boldsymbol{U}_{výst} \cosh \boldsymbol{\gamma} d + \boldsymbol{Z}_v \boldsymbol{I}_{výst} \sinh \boldsymbol{\gamma} d \tag{11.73a}$$

$$\boldsymbol{I}(d) = \boldsymbol{I}_{výst} \cosh \boldsymbol{\gamma} d + \frac{\boldsymbol{U}_{výst}}{\boldsymbol{Z}_v} \sinh \boldsymbol{\gamma} d \tag{11.73b}$$

Všimnime si ešte konštantu šírenia $\boldsymbol{\gamma}$(11.64), ktorá závisí od primárnych parametrov vedenia a od frekvencie ω. Je to sekundárny parameter vedenia, vo všeobecnosti komplexné číslo, ktoré možno napísať v tvare

$$\boldsymbol{\gamma} = \alpha + \mathrm{j}\beta \tag{11.74}$$

kde α [m^{-1}] je koeficient útlmu a β [rad.m^{-1}] je fázový koeficient. Porovnaním (11.64) a (11.74) dostaneme vzťah

$$\alpha + \mathrm{j}\beta = \sqrt{(R + \mathrm{j}\omega L)(G + \mathrm{j}\omega C)}$$

z ktorého môžeme vypočítať α a β. Umocníme rovnicu na druhú a oddelíme reálne a imaginárne časti. Získame systém dvoch rovníc, ktorých riešením dostaneme zložité výrazy pre koeficient útlmu a fázový koeficient

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC)\right]} \tag{11.75a}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC)\right]} \tag{11.75b}$$

Ak frekvencia klesá k nule, t. j. ak

$$\omega = 0 \tag{11.76}$$

potom limitná hodnota koeficientu útlmu

$$\alpha = \sqrt{RG} \tag{11.77a}$$

a fázový koeficient

$$\beta = 0 \tag{11.77b}$$

Je to prípad prenosového vedenia pracujúceho s konštantným napätím, ktorý už bol analyzovaný v kapitole 5 (pozri úlohu 120).

Ak naopak, frekvencia rastie a platí, že

$$\omega L \gg R \qquad \text{a} \qquad \omega C \gg G \tag{11.78}$$

s využitím Newtonovho binomického vzorca možno písať

$$\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2} \approx \omega L + \frac{1}{2}\frac{R^2}{\omega L} \qquad\qquad \sqrt{\omega^2 C^2 + G^2} \approx \omega C + \frac{1}{2}\frac{G^2}{\omega C}$$

Dosadením týchto výrazov do vzťahov (11.75) a zanedbaním členov so súčinmi RG dostaneme výrazy pre vysokofrekvenčné hodnoty koeficientu útlmu a fázového koeficientu v tvaroch

$$\alpha \approx \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{11.79a}$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{LC} \tag{11.79b}$$

V limitnom prípade bezstratového vedenia, ak

$$R = 0 \qquad\qquad G = 0$$

je

$$\alpha = 0 \tag{11.80a}$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \tag{11.80b}$$

Tento prípad dôležitý pre prax bude analyzovaný v odseku 11.6.3.

11.6.2 Impedancia na vedení a koeficient odrazu

Dôležitá veličina na vedení je impedancia**. Impedancia v ľubovoľnej priečnej rovine vedenia udáva pomer komplexných amplitúd napätia $\boldsymbol{U}(z)$ a prúdu $\boldsymbol{I}(z)$**. Na vstupe a výstupe vedenia je impedancia daná výrazmi

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = \frac{\boldsymbol{U}_{vst}}{\boldsymbol{I}_{vst}} \tag{11.81a}$$

$$\boldsymbol{Z}_{výst} = \frac{\boldsymbol{U}_{výst}}{\boldsymbol{I}_{výst}} \tag{11.81b}$$

Ak je daná vstupná impedancia, potom impedanciu $\mathbf{Z}(z)$ v ľubovoľnej rovine vo vzdialenosti z od vstupu vedenia dostaneme delením výrazu (11.70a) s (11.70b), pričom využijeme vzťahy (11.81a). Dostaneme

$$\boldsymbol{Z}(z) = \boldsymbol{Z}_v \frac{\boldsymbol{Z}_{vst} - \boldsymbol{Z}_v \operatorname{tgh} \boldsymbol{\gamma} z}{\boldsymbol{Z}_v - \boldsymbol{Z}_{vst} \operatorname{tgh} \boldsymbol{\gamma} z} \tag{11.82}$$

V prípade, že je daná výstupná impedancia, vydelíme vzťah (11.73a) výrazom (11.73b) a využijeme vzťah (11.81b), čím dostaneme výraz pre impedanciu vo vzdialenosti $d = l - z$ od konca vedenia v tvare

$$\boldsymbol{Z}(d) = \boldsymbol{Z}_v \frac{\boldsymbol{Z}_{výst} + \boldsymbol{Z}_v \operatorname{tgh} \boldsymbol{\gamma} d}{\boldsymbol{Z}_v + \boldsymbol{Z}_{výst} \operatorname{tgh} \boldsymbol{\gamma} d} \tag{11.83}$$

Výrazy (11.82) a (11.83) umožňujú získať transformačné vzťahy medzi vstupnou a výstupnou impedanciou na vedení. Ak vo vzorci (11.82) položíme $z = l$, dostaneme výstupnú impedanciu na vedení v tvare

$$\boldsymbol{Z}_{výst} = \boldsymbol{Z}_v \frac{\boldsymbol{Z}_{vst} - \boldsymbol{Z}_v \operatorname{tgh} \boldsymbol{\gamma} l}{\boldsymbol{Z}_v - \boldsymbol{Z}_{vst} \operatorname{tgh} \boldsymbol{\gamma} l} \tag{11.84}$$

alebo z výrazu (11.83) pre $d = -l$ výraz pre vstupnú impedanciu

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = \boldsymbol{Z}_v \frac{\boldsymbol{Z}_{výst} + \boldsymbol{Z}_v \operatorname{tgh} \boldsymbol{\gamma} l}{\boldsymbol{Z}_v + \boldsymbol{Z}_{výst} \operatorname{tgh} \boldsymbol{\gamma} l} \tag{11.85}$$

Pri analýze dlhých vedení sa popri pojme impedancie často pracuje s jej prevrátenou hodnotou, admitanciou $\boldsymbol{Y}$. Je to vhodné najmä vtedy, ak je na dlhom vedení zapojených viac elektrických prvkov paralelne. Admitančné vzťahy získané ako podiel komplexných amplitúd prúdu a napätia sú formálne zhodné s výrazmi (11.82) až (11.85), ak v nich urobíme zámenu

$$\boldsymbol{Y} \to \frac{1}{\boldsymbol{Z}}$$

Pre opis vlnového poľa na vedení je vhodné zaviesť komplexnú veličinu závislú od polohy na vedení nazývanú **koeficient odrazu**. Koeficienty odrazu sa definujú zvlášť pre napäťovú a zvlášť pre prúdovú vlnu, líšia sa však iba znamienkom.

Uvažujme riešenia (11.65) telegrafných rovníc, ktoré sú superpozíciou postupujúcej (+) a odrazenej (–) vlny a možno ich napísať v tvare

$$\boldsymbol{U}(z) = \boldsymbol{U}^+(z) + \boldsymbol{U}^-(z) = \boldsymbol{U}_0^+ \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma} z} + \boldsymbol{U}_0^- \mathrm{e}^{\boldsymbol{\gamma} z} \tag{11.86a}$$

$$\boldsymbol{I}(z) = \boldsymbol{I}^+(z) + \boldsymbol{I}^-(z) = \frac{\boldsymbol{U}_0^+}{\boldsymbol{Z}_v} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma} z} - \frac{\boldsymbol{U}_0^-}{\boldsymbol{Z}_v} \mathrm{e}^{\boldsymbol{\gamma} z} \tag{11.86b}$$

kde

$$\boldsymbol{U}^+(z) = \boldsymbol{U}_0^+ \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma} z} \qquad \boldsymbol{I}^+(z) = \frac{\boldsymbol{U}_0^+}{\boldsymbol{Z}_v} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma} z} \tag{11.87}$$

sú amplitúdy postupujúcej napäťovej a prúdovej vlny a

$$\boldsymbol{U}^-(z) = \boldsymbol{U}_0^- \mathrm{e}^{\boldsymbol{\gamma} z} \qquad \boldsymbol{I}^-(z) = -\frac{\boldsymbol{U}_0^-}{\boldsymbol{Z}_v} \mathrm{e}^{\boldsymbol{\gamma} z} \tag{11.88}$$

sú amplitúdy odrazených vĺn. **Napäťový koeficient odrazu** $\boldsymbol{\rho}_u(z)$ na vedení definujeme ako pomer odrazenej a postupujúcej napäťovej vlny, teda

$$\boldsymbol{\rho}_u(z) = \frac{\boldsymbol{U}^-(z)}{\boldsymbol{U}^+(z)} = \frac{\boldsymbol{U}_0^-}{\boldsymbol{U}_0^+} \mathrm{e}^{2\boldsymbol{\gamma} z} = \boldsymbol{\rho}_{0u} \mathrm{e}^{2\boldsymbol{\gamma} z} \tag{11.89}$$

kde

$$\boldsymbol{\rho}_{0u} = \frac{\boldsymbol{U}_0^-}{\boldsymbol{U}_0^+}$$

je napäťový koeficient odrazu v referenčnej rovine z = 0. Podobne možno pre prúdovú vlnu definovať **prúdový koeficient odrazu**

$$\boldsymbol{\rho}_i(z) = \frac{\boldsymbol{I}^-(z)}{\boldsymbol{I}^+(z)} = -\frac{\boldsymbol{U}_0^-}{\boldsymbol{U}_0^+}\,\mathrm{e}^{2\boldsymbol{\gamma}z} = -\boldsymbol{\rho}_{0u}\,\mathrm{e}^{2\boldsymbol{\gamma}z} = -\boldsymbol{\rho}_u(z) \tag{11.90}$$

ktorý sa od napäťového koeficientu odrazu skutočne líši iba znamienkom. Treba si uvedomiť, že s pojmom odraz elektromagnetických alebo prúdovo napäťových vĺn je spojený reálny odraz časti energie smerom ku generátoru.

Pre obidva koeficienty odrazu je vhodné zaviesť spoločné označenie $\boldsymbol{\rho}(z)$ vzťahom

$$\boldsymbol{\rho}(z) = \boldsymbol{\rho}_u(z) = -\boldsymbol{\rho}_i(z)$$

Ak sú konštanty $\boldsymbol{U}_0^+, \boldsymbol{U}_0^-$ dané vstupnými amplitúdami napätia a prúdu, teda výrazmi (11.68), potom

$$\boldsymbol{\rho}_{0u} = \frac{\boldsymbol{U}_0^-}{\boldsymbol{U}_0^+} = \frac{\boldsymbol{Z}_{vst} - \boldsymbol{Z}_v}{\boldsymbol{Z}_{vst} + \boldsymbol{Z}_v} = \boldsymbol{\rho}_{vst} \tag{11.91}$$

a ďalej

$$\boldsymbol{\rho}(z) = \frac{\boldsymbol{Z}_{vst} - \boldsymbol{Z}_v}{\boldsymbol{Z}_{vst} + \boldsymbol{Z}_v}\,\mathrm{e}^{2\boldsymbol{\gamma}z} = \boldsymbol{\rho}_{vst}\mathrm{e}^{2\boldsymbol{\gamma}z} \tag{11.92}$$

Z výrazu (11.91) vidieť, že koeficient odrazu na vstupe vedenia súvisí so vstupnou impedanciou a podľa výrazu (11.92) sa transformuje pozdĺž vedenia. Netreba zvlášť zdôrazňovať, že koeficient odrazu je bezrozmerné komplexné číslo definované v komplexnej rovine na kruhu s polomerom 1.

S využitím výrazov (11.86) možno nájsť všeobecné vzťahy medzi impedanciou a koeficientom odrazu v ľubovoľnej rovine z na vedení. Platí totiž

$$\boldsymbol{Z}(z) = \frac{\boldsymbol{U}(z)}{\boldsymbol{I}(z)} = \frac{\boldsymbol{U}^+(z) + \boldsymbol{U}^-(z)}{\boldsymbol{I}^+(z) + \boldsymbol{I}^-(z)} = \frac{\boldsymbol{U}^+(z)}{\boldsymbol{I}^+(z)}\frac{1 + \dfrac{\boldsymbol{U}^-(z)}{\boldsymbol{U}^+(z)}}{1 + \dfrac{\boldsymbol{I}^-(z)}{\boldsymbol{I}^+(z)}}$$

Z výrazov (11.87) plynie, že

$$\frac{\boldsymbol{U}^+(z)}{\boldsymbol{I}^+(z)} = \boldsymbol{Z}_v \tag{11.93}$$

a s použitím výrazov (11.89) a (11.90) môžeme vzťah pre impedanciu napísať v tvare

$$\boldsymbol{Z}(z) = \boldsymbol{Z}_v \frac{1 + \boldsymbol{\rho}(z)}{1 - \boldsymbol{\rho}(z)} \tag{11.94}$$

z čoho koeficient odrazu

$$\boldsymbol{\rho}(z)=\frac{\mathbf{Z}(z)-\mathbf{Z}_v}{\mathbf{Z}(z)+\mathbf{Z}_v} \tag{11.95}$$

Z výrazu (11.95) plynie zaujímavá a dôležitá skutočnosť: na vedení v rovine z nebudú žiadne odrazy, teda koeficienty odrazu sa budú rovnať nule [$\boldsymbol{\rho}(z) = 0$] vtedy, ak sa bude v danej rovine impedancia $\mathbf{Z}(z)$ rovnať charakteristickej impedancii vedenia $\mathbf{Z}_v$, t. j. ak

$$\mathbf{Z}(z) = \mathbf{Z}_v$$

V takom prípade hovoríme o režime prispôsobenia na vedení, kedy celý výkon bez odrazov postupuje v rovine z od generátora smerom k záťaži. Vo všetkých ostatných prípadoch na vedení existuje postupujúca aj odrazená vlna, ktoré spolu interferujú a vytvárajú charakteristické konfigurácie napäťových a prúdových vĺn, ktoré sa nazývajú **stojaté vlny**. Ich vlastnosti budeme analyzovať v odseku 11.6.4.

11.6.3 Bezstratové dlhé vedenia

Bezstratové vedenia sú také, ktorých pozdĺžny odpor R a priečna vodivosť G sú nulové, teda $R = 0$, $G = 0$. Reálne vedenia majú vždy určité straty, ale v mnohých prípadoch sú tak malé, že ich možno zanedbať, čím sa teoretická analýza vedení značne zjednoduší. Konštanta šírenia $\boldsymbol{\gamma}$ daná výrazom (11.64) sa na bezstratovom vedení redukuje na tvar

$$\boldsymbol{\gamma}=\sqrt{-\omega^2 LC}=\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}=\mathrm{j}\beta$$

z čoho vyplýva, že koeficient útlmu

$$\alpha = 0 \tag{11.96a}$$

a fázový koeficient

$$\beta=\frac{\omega}{v_f}=\omega\sqrt{LC} \tag{11.96b}$$

Fázová rýchlosť prúdovo-napäťových vĺn na vedeniach je teda daná výrazom

$$v_f=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad [\mathrm{m.s^{-1}}] \tag{11.97}$$

Charakteristická impedancia definovaná výrazom (11.67) sa stáva reálnou a prejde na jednoduchý tvar

$$Z_v=\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad [\Omega] \tag{11.98}$$

Z výrazov (11.96) plynie, že postupujúca aj odrazená prúdovo-napäťová vlna majú konštantné amplitúdy nezávislé od súradnice z a z výrazu (11.98) vidieť, že prúdy a napätia týchto vĺn sú vo fáze vzhľadom na reálnosť Z_v. Reálna veličina Z_v daná výrazom (11.98) sa často nazýva vlnový odpor vedenia a závisí iba od geometrie vedenia a elektrických vlastností prostredia vypĺňajúceho vedenie. Tak napr. koaxiálne vedenie s polomerom vnútorného vodiča a a s vnútorným polomerom plášťa b, ktorý je naplnený neferomagnetickým dielektrikom ($\mu_r = 1$) s relatívnou permitivitou ε_r, má kapacitu

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\frac{b}{a}} \qquad [\mathrm{F.m^{-1}}]$$

a indukčnosť

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \qquad [\mathrm{H.m^{-1}}]$$

[pozri odsek 3.5 výraz (3.16) a odsek 7.5.1 výraz (7.38)]. Dosadením do výrazu (11.98) pre vlnový odpor koaxiálneho kábla dostaneme

$$Z_v = \frac{Z_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \approx \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{b}{a} \qquad [\Omega] \tag{11.99}$$

kde

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} \approx \frac{376{,}73}{\sqrt{\varepsilon_r}} \qquad [\Omega]$$

je charakteristická impedancia neohraničeného dielektrika. Koaxiálne káble sa vyrábajú s vlnovými odpormi v rozsahu 50 až 75 Ω. Dá sa ukázať, že v tomto intervale hodnôt Z_v majú koaxiálne káble s malými stratami ploché minimum útlmu a minimálnu intenzitu elektrického poľa na povrchu vnútorného vodiča (pozri úlohu 39).

Vlnový odpor dvojvodičového symetrického netieneného kábla (dvojlinky) je daný výrazom

$$Z_v = \frac{Z_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} \tag{11.100}$$

kde d je osová vzdialenosť vodičov a a je polomer vodiča. Typická hodnota vlnových odporov vyrábaných dvojliniek je 300 Ω.

Výrazy (11.70) pre komplexné amplitúdy napätia a prúdu na bezstratovom vedení možno s využitím vzťahov

$$\cosh(\mathrm{j}\beta z) = \cos\beta z \qquad \sinh(\mathrm{j}\beta z) = \mathrm{j}\sin\beta z$$

prepísať do tvaru

$$\boldsymbol{U}(z) = \boldsymbol{U}_{vst}\cos\beta z - \mathrm{j}\,Z_v\boldsymbol{I}_{vst}\sin\beta z \tag{11.101a}$$

$$\boldsymbol{I}(z) = \boldsymbol{I}_{vst}\cos\beta z - \mathrm{j}\frac{\boldsymbol{U}_{vst}}{Z_v}\sin\beta z \tag{11.101b}$$

Ak sú dané výstupné amplitúdy napätí a prúdov, potom tieto amplitúdy vo vzdialenosti d od konca vedenia budú podľa vzťahov (11.73) dané výrazmi

$$\boldsymbol{U}(d) = \boldsymbol{U}_{v\acute{y}st} \cos \beta d + \mathrm{j}\, Z_v \boldsymbol{I}_{v\acute{y}st} \sin \beta d \qquad (11.102a)$$

$$\boldsymbol{I}(d) = \boldsymbol{I}_{v\acute{y}st} \cos \beta d + \mathrm{j}\, \frac{\boldsymbol{U}_{v\acute{y}st}}{Z_v} \sin \beta d \qquad (11.102b)$$

Impedančné vzťahy (11.82), (11.83) a (11.85) prejdú pre bezstratové vedenie na tvary

$$\boldsymbol{Z}(z) = Z_v \frac{\boldsymbol{Z}_{vst} - \mathrm{j} Z_v \operatorname{tg} \beta z}{Z_v - \mathrm{j} \boldsymbol{Z}_{vst} \operatorname{tg} \beta z} \qquad (11.103)$$

$$\boldsymbol{Z}(d) = Z_v \frac{\boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st} + \mathrm{j} Z_v \operatorname{tg} \beta d}{Z_v + \mathrm{j} \boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st} \operatorname{tg} \beta d} \qquad (11.104)$$

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = Z_v \frac{\boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st} + \mathrm{j} Z_v \operatorname{tg} \beta l}{Z_v + \mathrm{j} \boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st} \operatorname{tg} \beta l} \qquad (11.105)$$

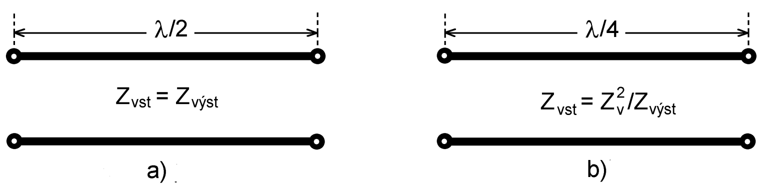
Jednou z najčastejších úloh pri analýze dlhých prenosových vedení je transformácia impedancie medzi vstupom, výstupom alebo ľubovoľnou rovinou na vedení podľa výrazov (11.103) až (11.105). V praxi sa k týmto vypočtom používajú rôzne diagramy, z ktorých najznámejší je **impedančný kruhový diagram** (Smithov diagram).[1]

Nakoniec uvedieme niekoľko špeciálnych, v praxi dôležitých prípadov transformácie impedancie podľa vzťahu (11.105):

1. Vedenie, ktorého dĺžka $l = n\lambda/2$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$ Fáza $\beta l = (2\pi/\lambda).n\lambda/2 = n\pi$ a $\operatorname{tg} n\pi = 0$. Ak $n = 1$ vedenie sa volá **polvlnové vedenie**. Podľa vzťahu (11.105)

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = \boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st} \qquad (11.106)$$

Impedancia sa transformuje v pomere 1 : 1. Pri analýze prenosových vlastností bezstratového vedenia každý jeho homogénny úsek dĺžky $n\lambda/2$ možno ignorovať (*obr. 11.8a*).



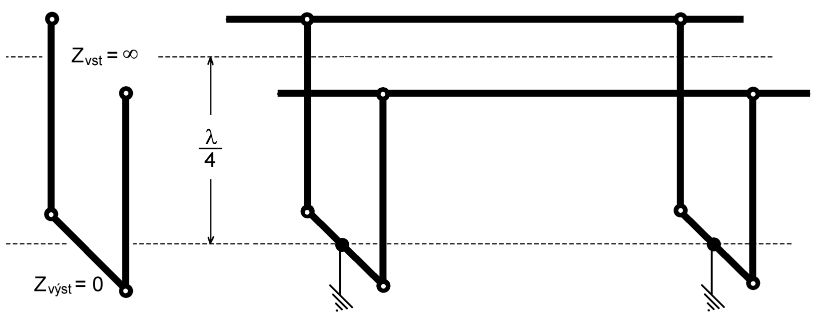
Obr. 11.8

2. Vedenie, ktorého dĺžka $l = (2n + 1)\lambda/4$, pre $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Fáza $\beta l = (n + 1/2)\pi$ a $\operatorname{tg}(n + 1/2)\pi = \pm\infty$. Ak $n = 0$, ide o **štvrťvlnové vedenie** (*obr. 11.8b*). Podľa vzťahu (11.105)

[1] Smith, P.H.: Transmission Line Calculator, Electronics **12**, 29 (1939).
Pozri tiež: Tirpák, A.: Elektronika veľmi vysokých frekvencií, Vydavateľstvo UK Bratislava 2001
Tysl, V., Růžička, V.: Teoretické základy mikrovlnné techniky, SNTL Praha 1989

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = \frac{Z_v^2}{\boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st}} \tag{11.107}$$

Na takom úseku vedenia dochádza k inverznej transformácii impedancie. Štvrťvlnové vedenia má veľký význam v prenosovej technike. Predovšetkým sa často využíva na prispôsobenie, pretože pri požadovanej výstupnej impedancii možno vstupnú impedanciu nastaviť vhodnou voľbou Z_v. Ak je štvrťvlnové vedenie na konci skratované, jeho vstupná impedancia je pri danej vlnovej dĺžke (danej frekvencii) nekonečná. Na vstupných svorkách sa také vedenie správa ako ideálny paralelný rezonančný obvod, ktorý možno okrem iného využiť aj na mechanickú fixáciu vedenia ako **štvrťvlnový izolátor** podľa *obr. 11.9,* žiaľ, iba pri jednej vlnovej dĺžke, resp. frekvencii.



Obr. 11.9

3. Bezstratové vedenie dĺžky l na konci skratované ($Z = 0$) pri iných dĺžkach ako $\lambda/4$ má v súhlase s výrazom (11.105) vstupnú impedanciu

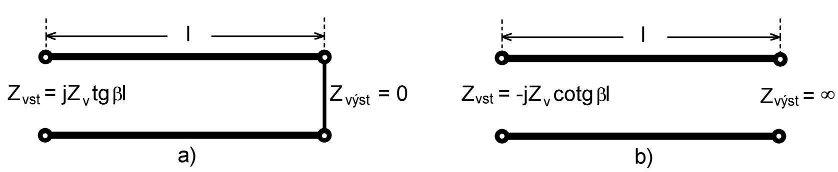
$$\boldsymbol{Z}_{vst} = \mathrm{j}\, Z_v \,\mathrm{tg}\, \beta l \tag{11.108}$$

Táto impedancia je výlučne induktívna alebo kapacitná reaktancia závislá od dĺžky vedenia l (*obr. 11.10a*).

4. Bezstratové vedenie dĺžky l, na konci otvorené ($\boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st} = \infty$) má pri iných dĺžkach ako $\lambda/4$ v súhlase s výrazom (11.105) vstupnú impedanciu

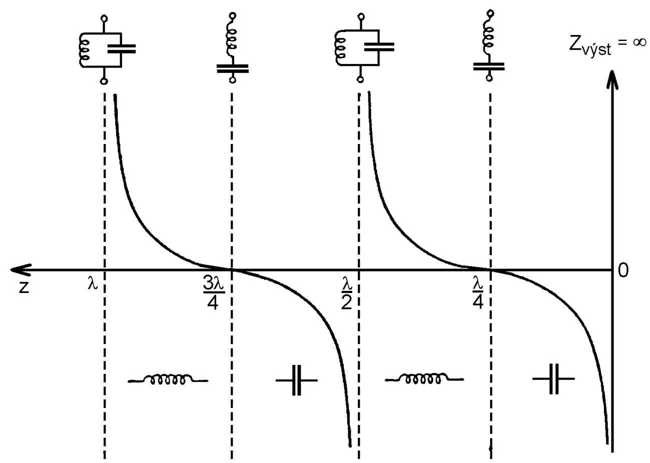
$$\boldsymbol{Z}_{vst} = -\,\mathrm{j}\, Z_v \,\mathrm{cotg}\, \beta l \tag{11.109}$$

ktorá je len kapacitná alebo len induktívna reaktancia (*obr. 11.10b*).



Obr. 11.10

Skratovanými alebo otvorenými vedeniami možno na veľmi vysokých frekvenciách realizovať kapacitné alebo induktívne reaktancie, ktoré vyžadujú malé kapacity alebo indukčnosti, a neboli by realizovateľné sústredenými kondenzátormi, prípadne cievkami. Na *obr. 11.11.* je symbolicky znázornená závislosť vstupnej reaktancie vedenia, ktoré je na konci otvorené ($Z_{výst} = \infty$) od jeho dĺžky $l = z$.



Obr. 11.11

11.6.4 Stojaté vlny na bezstratových vedeniach

Stojaté vlny na vedeniach sú dôsledkom interferencie postupujúcej a odrazenej vlny a vznikajú vždy, keď sa záťažová impedancia vedenia nerovná jeho vlnovej impedancii. Tvar a poloha stojatej vlny na vedení tesne súvisí s koeficientmi odrazu. Koeficient odrazu na bezstratovom vedení sa na základe výrazu (11.92) dá napísať v tvare

$$\boldsymbol{\rho}(z) = \boldsymbol{\rho}_0 \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}2\beta z} = |\boldsymbol{\rho}_0|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Phi(z)} \tag{11.110}$$

kde

$$\boldsymbol{\rho}_0 = |\boldsymbol{\rho}_0|\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Phi_0} \tag{11.111}$$

je koeficient odrazu v referenčnej rovine ($z = 0$) s referenčnou fázou Φ_0. Fáza koeficientu odrazu je daná výrazom

$$\Phi(z) = 2\beta z + \Phi_0 \tag{11.112}$$

Na bezstratovom vedení je modul koeficientu odrazu $|\boldsymbol{\rho}|$ konštantný a môže nadobúdať hodnoty v rozsahu od 0 po 1. Pri $|\boldsymbol{\rho}| = 0$, t. j. vtedy, keď $Z_{výst} = Z_v$ odrazy na vedení nenastávajú. Ak je naopak, $|\boldsymbol{\rho}| = 1$, odraz je totálny a nastáva vtedy, keď je výstupná impedancia nulová $Z_{výst} = 0$ (t. j. vedenie je skratované) alebo nekonečná $Z_{výst} = \infty$ (t. j. vedenie je otvorené). Z výrazov (11.110) až (11.112) vidíme, že na bezstratovom vedení sa hodnoty koeficientov odrazu periodicky opakujú vo vzdialenostiach

$$\Delta z = \frac{2\pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{2} \tag{11.113}$$

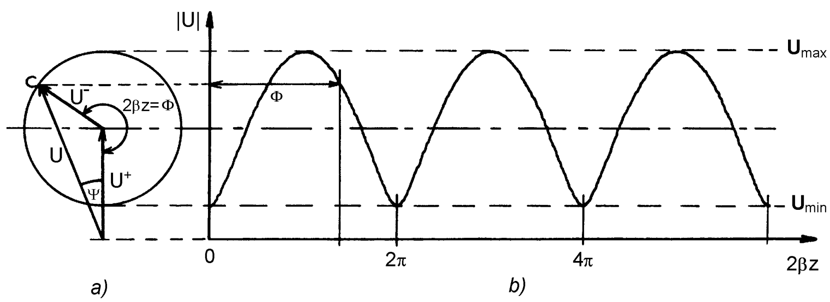
Koeficient odrazu možno využiť na opis vlnového poľa postupujúcej a odrazenej vlny. Ak napríklad vo vzťahu (11.86a) dosadíme za $\boldsymbol{U}^-(z)$ podľa (11.89), dostaneme pre amplitúdu výsledného napätia na vedení výraz

$$\boldsymbol{U}(z) = \boldsymbol{U}^+(z) + \boldsymbol{U}^-(z) = \boldsymbol{U}^+(z) + \boldsymbol{\rho}(z)\boldsymbol{U}^+(z) = \boldsymbol{U}^+(z)[1 + \boldsymbol{\rho}(z)] =$$

$$= \boldsymbol{U}^+(z)\left[1+|\boldsymbol{\rho}_0|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\beta z+\Phi_0)}\right] \tag{11.114}$$

Pravá strana tohto výrazu je súčtom dvoch "komplexných vektorov" (fázorov) $\boldsymbol{U}^+(z)$ a $\boldsymbol{\rho}(z)\boldsymbol{U}^+(z)$, pričom veľkosť vektora $\boldsymbol{U}^+(z)$ zostáva pozdĺž bezstratového vedenia konštantná. Ak vektor $\boldsymbol{U}^+$ vezmeme za vzťažný a bez ujmy na všeobecnosti položíme $\Phi_0 = 0$, možno súčet (11.114) znázorniť graficky podľa *obr. 11.12a*. Vidíme, že pri zmene polohy z na vedení o vzdialenosť Δz sa otočí vektor $\boldsymbol{\rho}(z)\boldsymbol{U}^+(z)$ okolo špičky vektora $\boldsymbol{U}^+(z)$ o uhol $2\beta\Delta z$. Veľkosť vektora $\boldsymbol{U}^+(z)$ plynie z kosínusovej vety a je daná výrazom

$$|\boldsymbol{U}(z)| = |\boldsymbol{U}^+|\sqrt{1+|\boldsymbol{\rho}|^2 - 2|\boldsymbol{\rho}|\cos 2\beta z} \tag{11.115}$$

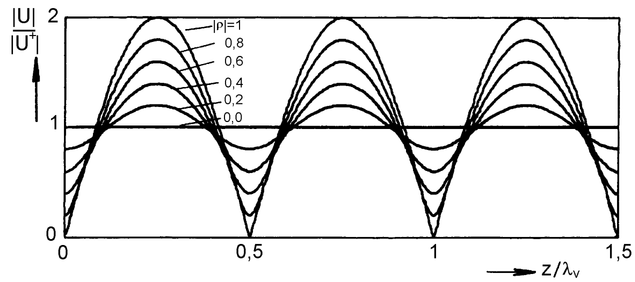


Obr. 11.12

Závislosť amplitúdy napätia od vzdialenosti pozdĺž vedenia (11.115) je graficky znázornená na *obr. 11.12b*. Podobnú závislosť, len posunutú vo fáze o uhol $\Delta\Phi = \pm\pi$ alebo o vzdialenosť $\Delta z = \pm\lambda/4$ možno nakresliť pre amplitúdu prúdu. Takéto závislosti opisujú stojatú vlnu na vedení. Pre niekoľko hodnôt $|\rho|$ je priebeh stojatej vlny graficky znázornený na *obr. 11.13*. Vidíme, že stojatá vlna je úplne určená koeficientom odrazu, je to však parameter, ktorý sa nedá bezprostredne merať. Na tieto účely sa zavádza reálna, ľahko merateľná veličina, ktorá sa nazýva **pomer stojatej vlny** (PSV) r (angl. SWR – Standing Wave Ratio). Táto veličina je definovaná výrazom

$$r = \frac{U_{max}}{U_{min}} \tag{11.116}$$

kde U_{max} a U_{min} sú absolútne amplitúdy napätia v maxime a v minime stojatej vlny dané výrazmi (pozri *obr. 11.12)*



Obr. 11.13

$$U_{max} = |\boldsymbol{U}^+| + |\boldsymbol{U}^-|$$

a

$$U_{min} = |\boldsymbol{U}^+| - |\boldsymbol{U}^-|$$

Po dosadení týchto výrazov do (11.116) dostaneme výraz pre PSV v tvare

$$r = \frac{1+|\boldsymbol{\rho}|}{1-|\boldsymbol{\rho}|} \tag{11.117}$$

a z toho veľkosť koeficientu odrazu

$$|\boldsymbol{\rho}| = \frac{r-1}{r+1} \tag{11.118}$$

PSV môže nadobúdať reálne hodnoty od 1, pre ktorú je $|\boldsymbol{\rho}| = 0$, až po $+\infty$, pri ktorom je $|\boldsymbol{\rho}| = 1$. PSV na vedeniach možno merať zariadením, ktoré sa nazýva **meracie vedenie**. Je to v podstate úsek vedenia, na ktorom sa pomocou sondy dá veľmi presne zmerať pomer napätia v maxime a minime stojatej vlny a tiež poloha sondy. PSV je konštrukčný parameter zariadení, ktoré pracujú na veľmi vysokých frekvenciách.

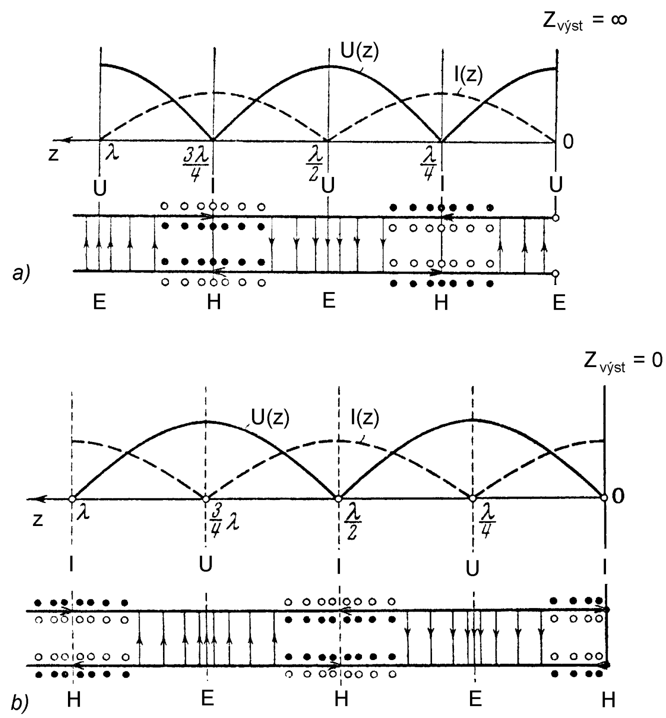
Fáza Φ koeficientu odrazu sa volí vhodným výberom referenčnej hodnoty Φ_0 tak, že v maxime stojatej vlny má hodnotu 0 a v priľahlých minimách hodnoty $\pm\pi$. Týmto požiadavkám vyhovuje závislosť

$$\Phi = -\pi + 2\beta(z - z_{min}) \tag{11.119}$$

kde z_{min} je poloha minima stojatej vlny.

Najväčšia stojatá vlna vzniká na otvorenom vedení alebo vedení zakončenom skratom, keď $|\boldsymbol{\rho}| = 1$, teda pri totálnom odraze. Zo vzťahu (11.115) vidieť, že v minime takejto napäťovej stojatej vlny je uzol ($\boldsymbol{U} = 0$), a v maxime je kmitňa ($|\boldsymbol{U}| = 2|\boldsymbol{U}^+|$). Na konci skratovaného vedenia je napäťový uzol a na otvorenom vedení napäťová kmitňa. Obidva prípady sú graficky znázornené na *obr. 11.14 a, b.*

Záverom našej analýzy vlastností dvojvodičových prenosových vedení sa naskytá otázka: aká je šírka frekvenčného pásma, v ktorom sa dvojvodičové vedenia dajú použiť na efektívny prenos elektromagnetických signálov? Dolná hranica frekvencie neexistuje, teda vedenia možno použiť od jednosmerných prúdov resp. napätí. Horná hranica frekvencie súvisí s únosnými stratami, ktoré sú ešte prípustné pri spoľahlivom prenose informácie. Straty sú dvojakého druhu – tie, ktoré vznikajú vo vodičoch a dielektrikách, z ktorých je vedenie vyrobené, a straty vyžarovaním. Straty vyžarovaním sa dajú vylúčiť tým, že sa na prenos používajú vedenia uzavretého typu, ako je koaxiálny kábel, v ktorom je elektromagnetické pole uzavreté vonkajším dutým valcovým vodičom. Tepelné (ohmické) a dielektrické straty možno obmedziť výberom kvalitných dielektrík a vodičov a zväčšovaním priečnych rozmerov koaxiálneho kábla, čo však nie je ekonomické, a má tiež svoje hranice. Dnes sa však vyrábajú také kvalitné dielektriká, že moderné koaxiálne káble sú použiteľné až do frekvencií 100 GHz. Ešte donedávna sa na prenos signálov nad 10 GHz používali výlučne duté kovové trubice, ktoré sa nazývajú trubicové vlnovody a ktoré možno použiť až po optické frekvencie. Ich teória však siaha za hranice základného kurzu elektromagnetizmu.



Obr. 11.14

11.7 MERANIE RÝCHLOSTI SVETLA

E io rispondo: Io credo in uno Dio
solo ed etterno, che tutto ´l ciel move,
non moto, con amore e con disio;

e a tal creder non ho io pur prove
fisice e metafisice, ma dalmi
anche la verità che quinci piove ... [1]

Dante Alighieri: La Divina Commedia,
Paradiso: Canto XXIV, 130-135

Meranie rýchlosti svetla patrí medzi základné úlohy experimentálnej fyziky, pretože je skúšobným kameňom platnosti Maxwellovej elektromagnetickej teórie a Einsteinovej teórie relativity, odhliadnuc od praktických potrieb poznania rýchlosti svetla.

Správnejšie by mal tento odsek niesť názov "meranie rýchlosti šírenie elektromagnetických vĺn", pretože to, čo nazývame "rýchlosťou svetla vo vákuu", je v skutočnosti univerzálna prírodná rýchlostná konštanta, ktorá udáva rýchlosť šírenia signálov v celom frekvenčnom pásme elektromagnetického spektra. Táto rýchlosť je nezávislá od frekvencie a má rovnakú hodnotu v každej vzťažnej sústave, nie je teda v pravom zmysle kinematickou veličinou. Ak ju nazývame "rýchlosťou svetla", robíme tak z historických dôvodov, pretože jej prvé merania boli urobené v tom pásme spektra, ktoré vníma ľudské oko.

Dávno pred Maxwellom a Einsteinom si otázku o rýchlosti svetla položil taliansky učenec Galileo Galilei, ktorý sa okolo roku 1600 pokúsil rýchlosť svetla aj zmerať ako pomer svetlom prejdenej dráhy s a na to potrebného času t. Pri Galileových technických možnostiach je len samozrejmé, že takýto pokus skončil neúspechom. Aj Galileovi bolo jasné, že na meranie takýchto nevídaných rýchlostí treba spoľahlivo merať veľmi veľké vzdialenosti a veľmi krátke časové intervaly. Bolo teda len logické očakávať od astronómie, že bude tou vedou, ktorá poskytne vhodné metódy na meranie rýchlosti svetla. V roku 1675 dánsky astronóm Olaf Römer na základe pozorovania zatmení Jupiterových mesiacov stanovil rýchlosť svetla na hodnotu 2.10^8 m.s^{-1}. O päťdesiat rokov neskôr anglický astronóm James Bradley ju stanovil úplne inou metódou na 3.10^8 m.s^{-1}.

V roku 1849 francúzsky fyzik Armand Hipolyte Louis Fizeau (1819 – 1896) zmeral rýchlosť svetla nie astronomickou metódou. Fizeauova aparatúra na meranie rýchlosti svetla je znázornená na *obr. 11.15.* Svetlo zo zdroja po odraze na polopriepustnom zrkadle prechádza prvou šošovkou. Za šošovkou v jej ohniskovej rovine 0 rotuje ozubený kotúč s počtom zubov N, ktorého kruhovú frekvenciu $\omega = 2\pi f$ možno meniť. Kotúč "rozseká" svetelný zväzok na sled svetelných zábleskov, ktoré rýchlosťou c prekonávajú dráhu l (vo Fizeauových pokusoch 8630 m) k zrkadlu a späť ku kotúču. Ak sa zvolí kruhová frekvencia otáčok kotúča tak, že za čas potrebný na prelet záblesku k zrkadlu a späť sa

---

[1] Nuž vravím: Verím v jediného Boha
a večného, čo hýbe nebo celé,
sám nehnutý – tak plá v ňom láska mnohá!

K tej miere nielen Fyzika mi stelie
s Metafyzikou dôkazy; ich dal mi
i pravdy jas, čo prší v božskom diele ...

Preklad: Viliam Turčány, 1986

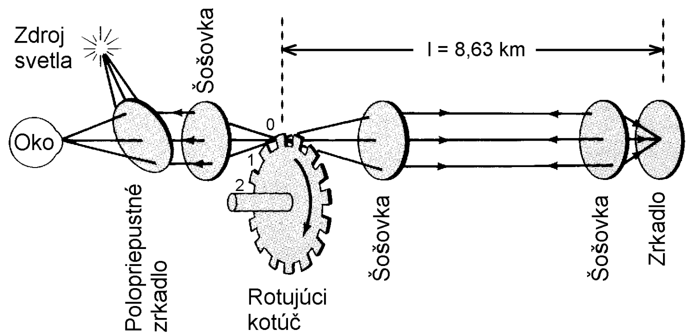
koleso pootočí tak, že nasledujúci zub záblesk zatieni, pozorovateľ neuvidí žiadne odrazené svetlo a obraz zdroja zmizne z jeho zorného poľa. Je zrejmé, že zatemnenie zorného poľa nastane vtedy, ak sa za uvedený čas kotúč pootočí o uhol $\Theta = \pi/N$. Z podmienky rovnakého času potrebného na prelet svetla po dráhe $2l$ a pootočenia kotúča o uhol Θ plynie, že musí platiť

$$\frac{\Theta}{\omega} = \frac{2l}{c}$$

z čoho rýchlosť svetla

$$c = \frac{2\omega l}{\Theta} = 4lfN \qquad (11.120)$$

Kotúč vo Fizeauovom experimente mal $N = 720$ zubov a otáčal sa s frekvenciou $f = 12{,}6$ Hz. Zo vzťahu (11.120) plynie pre rýchlosť svetla hodnota $3{,}13.10^8$ m.s^{-1}, čo je hodnota asi o 5 % väčšia ako poskytujú súčasné merania. Chyba merania je spôsobená hlavne nepresnosťou stanovenia okamihu zatemnenia zorného poľa.



Obr. 11.15

Fizeauov experiment zdokonalil v roku 1862 francúzsky fyzik Jean Bernard Léon Foucault (1819 – 1868) tým, že rotujúci kotúč nahradil rotujúcim zrkadlom. Metódou rotujúceho zrkadla vykonal v rokoch 1878 až 1930 mnoho meraní rýchlosti svetla známy americký fyzik Albert Abraham Michelson (1852 – 1931), ktorý v roku 1926 stanovil rýchlosť svetla na hodnotu 299 796 km.s^{-1} s neistotou ± 4 km.s^{-1}. Nie je nezaujímavé uviesť, že Michelsonovi sa metódou rotujúceho zrkadla podarilo zmerať 35 kilometrovú vzdialenosť vrcholov kalifornských hôr Mount Wilson a Mount San Antonio s presnosťou lepšou ako ± 2,54 cm (± 1 inch).

Michelsonovu metódu modifikoval v roku 1950 švédsky fyzik Bergstrand, ktorý nahradil rotujúce zrkadlo elektronickým zariadením pozostávajúcim z pulzného zdroja a detektora. Zmenou frekvencie pulzov možno dosiahnuť maximum údaja detektora. Zariadenie má komerčný názov geodimeter a pomocou neho bola určená hodnota rýchlosti svetla (299 792,7 ± 0,25) km.s^{-1}. Geodimeter sa dnes používa na rutinné merania veľkých vzdialeností na základe známej rýchlosti svetla.

Všetky doteraz uvedené metódy sa zakladajú na meraní dĺžok a času a sú použiteľné skutočne iba na meranie rýchlosti svetla. Oveľa presnejšie výsledky merania poskytujú metódy založené na pozorovaní stojatých vĺn, pri ktorých sa experimentálne určuje vlnová dĺžka λ a frekvencia f elektromagnetickej vlny. Rýchlosť svetla sa potom vypočíta zo známeho vzťahu

$$c = \lambda f$$

Vlnové dĺžky a frekvencie sa dnes merajú s vysokou presnosťou v celom elektromagnetickom pásme a presnosť stúpa s frekvenciou. Na určenie dĺžky vlny ako dvojnásobnej vzdialenosti medzi minimami stojatej vlny sa používajú rôzne druhy interferometrov resp. rezonátorov, ktoré majú rôzne konštrukcie podľa použitej frekvencie.

Prvé merania rýchlosti c na rádiových frekvenciách vykonal J. Mercier[1] v roku 1924 meraním stojatých vĺn na dvojvodičových vedeniach opísaných v predchádzajúcich odsekoch. V mikrovlnovom pásme prvýkrát merali rýchlosť c roku 1950 Essen[2] a dvojica výskumníkov Bol a Hansen. Essen meral rezonančnú vlnovú dĺžku v cylindrickom dutinovom rezonátore na frekvencii

$$f = 9{,}498\,300.10^9\ \text{Hz}$$

Pre polomer rezonátora $R = 3{,}258\,76$ cm a jeho dĺžku $l = 15{,}645\,74$ cm zistil v rezonátore $n = 8$ pozdĺžnych polvĺn, z čoho stanovil dĺžku vlny v rezonátore na hodnotu

$$\lambda_v = \frac{2l}{n} \approx 3{,}911\,44\ \text{cm}$$

Dĺžka vlny λ_v v rezonátore súvisí s dĺžkou vlny λ v neohraničenom vákuu podľa vzťahu[3]

$$\lambda_v = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{kr}}\right)^2}} \tag{11.121}$$

kde

$$\lambda_{kr} = 1{,}639\,662\ R = 5{,}343\,27\ \text{cm}$$

je kritická vlnová dĺžka vo vlnovode s daným polomerom. Po dosadení za λ_v a λ_{kr} do výrazu (11.121) dostal pre vlnovú dĺžku v neohraničenom vákuu hodnotu

$$\lambda = 3{,}156\,159\ \text{cm}$$

Nakoniec pre rýchlosť svetla dospel k hodnote

$$c = \lambda f = 2{,}997\,814\,5.10^8\ \text{m.s}^{-1}$$

Essen vykonal množstvo experimentov za rôznych podmienok a po starostlivom výbere výsledkov uviedol ako najpravdepodobnejšiu hodnotu s udaním neistoty

$$c = (2{,}997\,925 \pm 0{,}000\,030).10^8\ \text{m.s}^{-1}$$

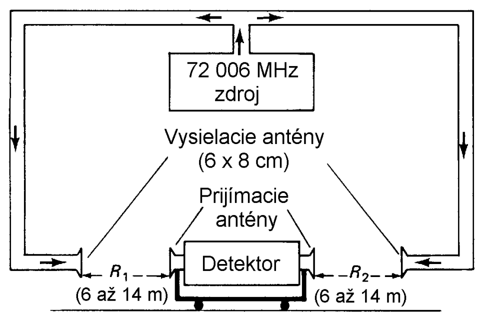
---

[1] Mercier, J., J. Phys. Radium **5**, 168 (1924)
[2] Essen, L., Proc. R. Soc. **A204**, 260 (1950)
[3] Pozri napr.: Tirpák, A.: Elektronika veľmi vysokých frekvencií, Vydavateľstvo UK Bratislava 2001; Tysl, V., Růžička, V.: Teoretické základy mikrovlnné techniky, SNTL Praha 1989

Mikrovlnový interferometer so štyrmi lievikovými anténami použil v rokoch 1952 až 1958 na určenie c Angličan K. D. Froome najprv na frekvencii $f = 25\,000$ MHz s vlnovou dĺžkou $\lambda = 1{,}2$ cm a neskôr na frekvencii $f = 72\,006$ MHz s vlnovou dĺžkou $\lambda = 4{,}16$ mm.[1] Frekvencia bola meraná s mimoriadnou presnosťou metódami mikrovlnovej techniky. Schéma zariadenia na meranie je znázornená na *obr. 11.16*. Výkon mikrovlnového zdroja je rozvetvený do dvoch zväzkov, pomocou vlnovodov a lievikových antén vyžiarený z dvoch strán proti detektoru namontovanému na pohyblivom vozíku. Pri pohybe vozíka detektor registruje interferenčné minimá a maximá (vzdialenosť susedných miním je $\lambda/2$), pričom na 8-metrovej dĺžke sa registruje veľký počet vlnových dĺžok, čo značne zvyšuje presnosť merania λ. Výsledky Froomových meraní viedli k hodnote

$$c = \lambda f = (299\,792{,}5 \pm 0{,}10)\ \mathrm{km.s^{-1}}$$

čím sa zlepšila presnosť a precíznosť Bergstrandových meraní.



Obr. 11.16

Najpresnejšie merania rýchlosti svetla boli vykonané v 70-tých rokoch minulého storočia v americkom Národnom úrade štandardov (National Bureau of Standards, Gaithersburg, Maryland) a vo Veľkej Británii v národnom fyzikálnom laboratóriu (National Physical Laboratory). Po Froomových experimentoch bolo fyzikom jasné, že efektívnym spôsobom zvýšenia presnosti merania rýchlosti c je rozšírenie Froomovej metodiky z mikrovlnovej do infračervenej a viditeľnej oblasti elektromagnetického spektra. Presnosť merania c v tom období posunuli výrazne dopredu dva objavy: vysokofrekvenčná spektroskopia a vynález laseru. Tieto vynálezy poskytli frekvenčne veľmi stabilné koherentné zdroje signálov v infračervenej a viditeľnej oblasti a metódy veľmi presného stanovenia frekvencie. Meranie frekvencie sa stalo mimoriadne presným vďaka vývoju cézioveho (Cs) frekvenčného štandardu s relatívnou presnosťou 10^{-13}. Meranie frekvencie a času vo fyzike patria dnes k najpresnejším meraniam. V roku 1967 stanovila XIII. Generálna konferencia pre miery a váhy novú definíciu sekundy, podľa ktorej:

Jedna sekunda (1 s) je časový interval, ktorý sa rovná 9 192 631 770 periódam elektromagnetického žiarenia emitovaného pri prechode medzi obidvomi hyper-jemnými hladinami základného stavu atómu cézia 133 v nulovom magnetickom poli.

[1] Froome, K. D., Proc. R. Soc. **A247**, 109 (1958)

V novembri roku 1983 prijala XVII. Generálna konferencia pre miery a váhy aj novú definíciu jednotky dĺžky – metra, podľa ktorej:

Jeden meter (1 m) je vzdialenosť, ktorú prejde svetlo vo vákuu za 1/299 792 458 sekundy.

Vysoká presnosť merania frekvencie a vlnovej dĺžky umožnili v sedemdesiatych rokoch 20. storočia spresniť meranie rýchlosti svetla asi stokrát. Céziový štandard umožnil presne merať frekvenciu stabilizovaných klystrónov, generovaných harmoník hrotových diód a Josephsonovských mostíkov a sérií spektrálnych čiar laserov, ako sú

HCN	$f =$ 890 GHz	$\lambda = 337{,}0\ \mu\mathrm{m}$
H_2O	$f =$ 10 700 GHz	$\lambda = 28{,}0\ \mu\mathrm{m}$
CO_2	$f =$ 32 176 GHz	$\lambda = 9{,}3\ \mu\mathrm{m}$

Najpresnejšie autorovi známe merania rýchlosti svetla s využitím stabilizovaných laserov vykonali v roku 1972 Evenson a i.[1] s nameranou hodnotou rýchlosti svetla

$$c = (299\,792{,}456\,2 \pm 0{,}001\,1)\ \mathrm{km.s^{-1}}$$

a v roku 1974 Blaney a i.[2] s hodnotou

$$c = (299\,792{,}459\,0 \pm 0{,}000\,8)\ \mathrm{km.s^{-1}}$$

Presnosť merania rýchlosti svetla c s odchýlkou iba ±80 cm.s^{-1}, ktorú dosiahol Blaney predstavuje percentuálnu odchýlku iba ±0,000 000 267 % od najpravdepodobnejšej hodnoty, čím sa rýchlosť svetla radí skutočne medzi prírodné konštanty, ktoré sú známe s najvyššou presnosťou.

V roku 1975 na XV. Generálnej konferencii pre miery a váhy bola na základe starostlivého a kritického posúdenia všetkých známych výsledkov merania stanovená rýchlosť svetla vo vákuu na hodnotu

$$\boxed{c = 299\,792\,458\ \mathrm{m/s}} \qquad (11.122)$$

Táto hodnota dnes slúži za základ definície metra, a je tiež základom na určenie ďalších číselných konštánt v SI-sústave, ako sú elektrická konštanta (permitivita vákua) $\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$, charakteristická impedancia vákua $Z_0 = \mu_0 c$, pokojové energie elementárnych častíc mc^2 a i. Hodnota c podľa (11.122) nie je samozrejme definitívna. Ak sa zvýši presnosť merania rýchlosti svetla bude aj táto numerická hodnota podrobená revízii.

V tabuľke 21 sú uvedené vybrané merania rýchlosti svetla vykonané od Galileových dní. Tabuľka je dôkazom veľkosti, vytrvalosti a dômyslu ľudského ducha. Vidieť z nej, ako sa s rokmi zvyšovala presnosť merania, aká široká paleta meracích metód bola pritom využívaná a medzinárodné zastúpenie vedcov na meraní rýchlosti svetla.

[1] Evenson, K, M., Wells, J. S., Petersen, F. R., Danielson, B. L., Day, G. W., Berger, R. L., Hall, J. L. Phys. Rev. Lett. **29**, 1346 (1972)

[2] Blaney, T. G., Bradley, C. C., Edwards, G. J., Jolliffe, B. W., Knight, D. J. E., Rowley, W. R. C., Shotton, K. C., and Woods, P. T., Nature, Lond. **251**, 46 (1974)

Tabuľka 21

Rýchlosť svetla vo vákuu

Rok	Autor	Krajina	Metóda	Rýchlosť svetla vo vákuu km/s	Nepresnosť merania ±km/s
1600(?)	Galileo Galilei	Taliansko	Lampáše a svetelné záklopky	"Nie je nekonečná, ale veľmi vysoká"	
1675	Römer	Francúzsko	Astronomická	200 000	
1792	Bradley	Anglicko	Astronomická	304 000	
1849	Fizeau	Francúzsko	Rotujúci kotúč	313 300	
1862	Foucault	Francúzsko	Rotujúce zrkadlo	298 000	500
1876	Cornu	Francúzsko	Rotujúci kotúč	299 990	200
1880	Michelson	USA	Rotujúce zrkadlo	299 910	50
1883	Newcomb	Anglicko	Rotujúce zrkadlo	299 860	30
1883	Michelson	USA	Rotujúce zrkadlo	299 853	60
1923	Mercier	Francúzsko	Stojaté vlny na vedeniach	299 782	15
1926	Michelson	USA	Rotujúce zrkadlo	299 796	4
1928	Karolus a Mittelstädt	Nemecko	Kerrova cela	299 778	10
1940	Hüttel	Nemecko	Kerrova cela	299 768	10
1941	Anderson	USA	Kerrova cela	299 776	14
1950	Bergstrand	Švédsko	Geodimeter	299 792,7	0,25
1950	Essen	Anglicko	Mikrovlnový rezonátor	299 792,5	3
1950	Houston	Škótsko	Kmity kryšt. mriežky	299 775	9
1950	Bol, Hansen	USA	Mikrovlnový rezonátor	299 789,3	0,4
1950	Rank, Ruth, Van der Sluis	USA	Molekulárne spektrá	299 776	7
1954	Florman	USA	Rádio-interferometer	299 795,1	3,1
1954	Rank, Shearer, Wiggins	USA	Molekulárne spektrá	299 789,8	3,0
1956	Edge	Švédsko	Geodimeter	299 792,9	0,2
1958	Froome	USA	Mikrovlnový interferometer	299 792,5	0,1
1972	Bay, Luther, White	USA	λ a f-merania 0,633-µm čiary He-Ne lasera	299 792,462	0,018
1973	Evenson a i.	USA	λ a f-merania 3,39-µm čiary He-Ne lasera	299 792,457 4	0,001 1
1974	Blaney a i.	Anglicko	λ a f-merania 9,32-µm čiary CO_2 lasera	299 792,459 0	0,000 8

Úlohy 293 – 326

293. Dokážte, že každá funkcia tvaru $f(x, t) = f(x \pm ct)$ vyhovuje vlnovej rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

294. Dokážte, že monochromatické vlny $f(x, t) = C\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t \pm \beta x)}$ (C je konštanta) sú riešeniami vlnovej rovnice pri hodnote $\beta = \omega/c$.

295. Dokážte, že elektromagnetické pole dané výrazmi

$$E_x = E_0 \cos(z - ct) \qquad B_y = \frac{E_0}{c}\cos(z - ct) \qquad E_y = E_z = B_x = B_z = 0$$

vyhovuje Maxwellovým rovniciam.

296. Súčin kapacity na jednotku dĺžky a indukčnosti na jednotku dĺžky prenosových vedení je veličina konštantná a rovná sa prevrátenej hodnote štvorca rýchlosti šírenia elektromagnetického poľa v danom prostredí. Dokážte to na príklade koaxiálneho kábla a dvojlinky.

297. Valcovým vodičom s polomerom R a mernou vodivosťou σ tečie konštantný prúd I. Vypočítajte veľkosť Poyntingovho vektora na povrchu vodiča a určite jeho smer. Dokážte, že energia elektromagnetického poľa tečie do vodiča s výkonom

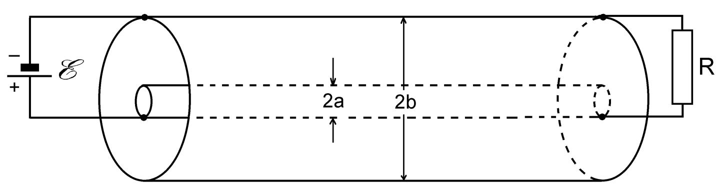
$$P = \frac{I^2}{\pi\sigma R^2}$$

na jednotku dĺžky, t. j. s tým výkonom, s ktorým sa v ňom mení na teplo.

298. Koaxiálny kábel pozostáva z dvoch dutých, ideálne vodivých valcov s polomermi a a b ($a < b$). Na jednom konci je zakončený odporom R (*obr. 298*). Na vstup kábla je pripojený zdroj elektromotorického napätia $\mathscr{E}$ s nulovým vnútorným odporom. Vypočítajte Poyntingov vektor vo vnútri kábla. Pomocou Poyntingovho vektora dokážte, že energia postupuje káblom s výkonom

$$\mathscr{E}I = \frac{\mathscr{E}^2}{R}$$

pozdĺž jeho osi, t. j. s tým výkonom, s ktorým sa mení na teplo v odpore R.



Obr. 298

299. Vypočítajte rýchlosť prenosu energie pozdĺž koaxiálneho kábla podľa predchádzajúcej úlohy. V akom vzťahu je rýchlosť prenosu k rýchlosti svetla?

Poznámka: Rýchlosť prenosu energie vedením je zavedená podobne ako rýchlosť prúdenia kvapaliny v hydrodynamike a je definovaná vzťahom

$$v_p = \frac{S}{w}$$

kde S je tok energie jednotkou plochy za jednotku času (Poyntingov vektor) a w je objemová hustota energie.

300. Rovinná elektromagnetická vlna sa šíri vo vákuu v kladnom smere osi z a jej elektrická zložka je daná výrazom

$$E_x(z,t) = E_{x0}^{\mathrm{j}(\omega t \pm \frac{\omega}{c} z)}$$

kde E_{x0} je amplitúda x-ovej zložky poľa. $E_y = E_z = 0$.

a) Vypočítajte rýchlosť šírenia fázy vlny (fázovú rýchlosť).

b) Pomocou Maxwellových rovníc nájdite magnetickú zložku vlny.

c) Vypočítajte pomer amplitúd elektrickej a magnetickej zložky vlny vo vákuu.

d) Vypočítajte strednú hodnotu hustoty toku energie v elektromagnetickej vlne ako reálnu časť komplexného Poyntingovho vektora

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*}{2}$$

kde $\boldsymbol{H}^*$ je vektor komplexne združený k vektoru $\boldsymbol{H}$.

301. Charakteristická impedancia Z prenosového vedenia je definovaná ako pomer priečnej zložky elektrického poľa k priečnej zložke magnetického poľa, pričom sa ukazuje, že

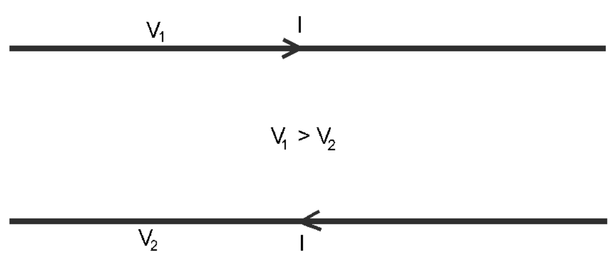
$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

kde L', C' sú indukčnosť a kapacita na jednotku dĺžky vedenia. Vypočítajte Z pre páskové vedenie vo vákuu z úlohy 206.

302. Svetelná vlna má frekvenciu $f = 4.10^{14}$ Hz a dĺžku vlny $\lambda = 5.10^{-7}$ m. Aká je rýchlosť šírenia tejto vlny? Aká je permitivita prostredia, v ktorom sa vlna šíri a jeho index lomu? Permeabilita prostredia je $\mu = \mu_0$. Aká je dĺžka danej vlny vo vákuu?

303. Vzduch sa začína ionizovať pri intenzite elektrického poľa $E \approx 3.10^6$ V/m (pozri tabuľku 5). Pri akej strednej hustote toku výkonu elektromagnetických vĺn dostatočne nízkej frekvencie môže vo vzduchu nastať ionizácia?

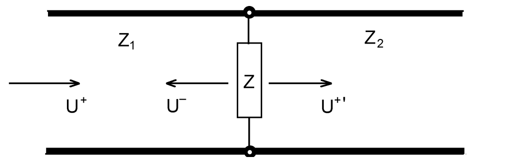
304. Rovinná elektromagnetická vlna s frekvenciou $\omega = 10^6$ rad/s dopadá na vodivý rámček tak, že vektor $\boldsymbol{H}$ je kolmý na rovinu rámčeka. Rozmery rámčeka sú malé v porovnaní s dĺžkou vlny. Plocha rámčeka $S = 100$ cm^2, stredný výkon v elektromagnetickej vlne $\overline{P} = 1$ W/m^2. Nájdite amplitúdu indukovaného EMN v rámčeku.



Obr. 305

305. Na *obr. 305* je znázornený úsek dvojvodičového vedenia s udanými smermi prúdov vo vodičoch a potenciálmi V_1 a V_2 ($V_1 > V_2$) v tej istej priečnej rovine. Podľa smeru Poyntingovho vektora rozhodnite, kde sa nachádza zdroj – vpravo, či vľavo?.

306. Nekonečne dlhé dvojvodičové vedenie je v istej rovine premostené impedanciou Z (*obr. 306*). Vlnová impedancia vedenia naľavo od Z je Z_1 a napravo Z_2. Z ľavej strany sa po vedení šíri napäťová vlná s amplitúdou U^+. Nájdite amplitúdu U^- odrazenej a amplitúdu $U^{+'}$ postupujúcej vlny v rovine premostenia a amplitúdy prúdov v impedancii Z a vo vedení s vlnovou impedanciou Z_2.



Obr. 306

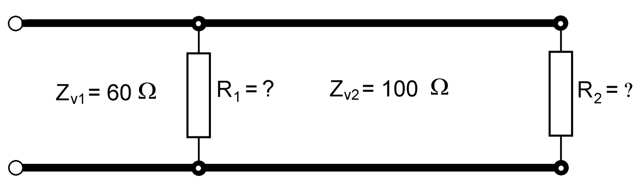
307. Úlohu 306 riešte pre $Z_1 = Z_2 = Z = R$ (R je činný odpor). Aká časť výkonu napäťovej vlny U^+ sa spotrebuje v impedancii $Z = R$? Aká časť výkonu postupuje vedením s impedanciou $Z_2 = R$ a aká časť výkonu sa odrazí?

308. Riešte úlohu 307 pre $Z_1 = R$, $Z_2 = Z = 2R$.

309. Dvojvodičové vedenie s vlnovým odporom Z_0 je v prvom prípade zakončené impedanciou $Z = 0$ (skratom) a v druhom prípade $Z = \infty$ (otvorené vedenie). Po vedení postupuje napäťová vlna s amplitúdou U^+. Nájdite amplitúdu odrazenej vlny U^- v koncovej rovine vedenia. Čím sa budú líšiť vzniknuté stojaté vlny na vedení v prvom a v druhom prípade?

310. Dvojvodičový symetrický kábel má pri frekvencii $f = 1000$ Hz takéto parametre: $R = 6{,}55.10^{-3}$ Ω/m, $L = 1{,}36.10^{-6}$ H/m, $C = 8{,}84.10^{-12}$ F/m, G zanedbateľné. Na frekvencii $f = 100$ MHz je: $R = 0{,}606$ Ω/m, $L = 1{,}26.10^{-6}$ H/m, $C = 8{,}84.10^{-12}$ F/m, G zanedbateľné. Vypočítajte pre obe frekvencie vlnovú impedanciu kábla, útlm v dB/m, straty na vlnovú dĺžku a fázovú rýchlosť vlny v kábli. Porovnajte výsledky pre obidve frekvencie.

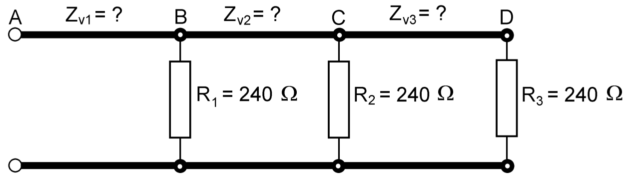
311. Koaxiálny kábel pre televízny rozvod podľa údajov výrobcu má polomer vnútorného vodiča $a = 0{,}575$ mm a vnútorný polomer plášťa $b = 3{,}625$ mm. Kábel je vyplnený polyetylénom s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 2{,}25$. Kapacita kábla $C = 67$ pF/m. Vypočítajte:
a) vlnovú impedanciu kábla,
b) indukčnosť na jednotku dĺžky kábla,
c) fázovú rýchlosť vlny na kábli.



Obr. 312

312. Aké musia byť hodnoty odporov R_1 a R_2, aby na vedení podľa *obr. 312* nevznikla stojatá vlna?

313. Aké musia byť vlnové impedancie vedení AB, BC a CD na *obr. 313*, aby pozdĺž celého vedenia nevznikali odrazy?



Obr. 313

314. Vedenie dlhé l má vlnovú impedanciu $\boldsymbol{Z}_v$ a konštantu šírenia $\boldsymbol{\gamma}$. Na vstupe vedenia je napätie s amplitúdou $\boldsymbol{U}_{vst}$ a prúd s amplitúdou $\boldsymbol{I}_{vst}$. Vypočítajte amplitúdu výstupného napätia, prúdu a výstupnú impedanciu.

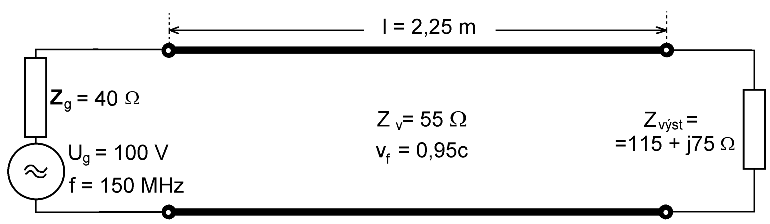
315. K vedeniu dlhému l = 20 m je na vstupe pripojený generátor pracujúci na frekvencii f = 3 MHz. Vedenie je na výstupe otvorené. Nájdite amplitúdu výstupného napätia, ak amplitúda vstupného napätia U_{vst} = 20 V.

316. Amplitúda napätia na konci otvoreného vedenia s vlnovou impedanciou Z_v = 300 Ω je $U_{výst}$ = 600 V. Nájdite amplitúdu napätia a prúdu vo vzdialenosti l = 40 m od konca vedenia. Dĺžka vlny na vedení λ = 300 m.

317. Na konci otvoreného vedenia pracujúceho na vlnovej dĺžke λ = 20 m bola nameraná amplitúda napätia $U_{výst}$ = 200 V a vo vzdialenosti l = 2 m od konca vedenia amplitúda prúdu I_m = 0,5 A. Nájdite vlnovú impedanciu vedenia. Aká je amplitúda prúdu v maxime prúdovej stojatej vlny?

318. Vedenie so vzduchovou izoláciou má vlnovú impedanciu Z_v = 400 Ω a je dlhé 75 cm. Na výstup vedenia je pripojená reaktancia $\boldsymbol{Z}_r$ = –j 400 Ω. Vedenie pracuje na frekvencii f = 150 MHz a amplitúda napätia na jeho vstupe je U_{vst} = 50 V.

a) Vypočítajte vstupnú impedanciu vedenia,
b) načrtnite napäťovú a prúdovú stojatú vlnu,
c) vypočítajte amplitúdy napätia a prúdu na výstupe a v maximách stojatých vĺn.



Obr. 319

319. Na vedení zobrazenom na *obr. 319* treba nájsť amplitúdu vstupného a výstupného napätia, prúdu, vstupný a výstupný výkon, ďalej činiteľ stojatej vlny, koeficient odrazu na vstupe a výstupe vedenia, amplitúdy napätia a prúdu v minimách a v maximách stojatých vĺn a polohy miním a maxím stojatých vĺn. Načrtnite napäťovú a prúdovú stojatú vlnu.

320. Vedenie dlhé l = 120 km je určené na prenos jednosmerného výkonu. Jeho parametre sú: R = 53,45 Ω/km, G = 1,55.10^{-6} S/km. Napätie na vstupe vedenia U_{vst} = 24 V, na výstupe vedenia je skrat. Vypočítajte vstupný a výstupný prúd a vstupný odpor vedenia.

321. Dvojvodičové telefónne vedenie má pri frekvencii f = 1 kHz vlnovú impedanciu $\boldsymbol{Z}_v$ = = 615 – j 78 Ω a konštantu šírenia $\boldsymbol{\gamma}$ = 3,05 + j 2,18.10^{-2} km^{-1}. Vedenie je dlhé l = 240 km a je zakončené záťažou rovnou vlnovej impedancii vedenia. Na vstup je pripojený generátor pracujúci na frekvencii f = 1 kHz, ktorý zabezpečuje vstupné napätie s amplitúdou U_{vst} = 5 V. Vypočítajte:

a) fázovú rýchlosť na vedení a vlnovú dĺžku,

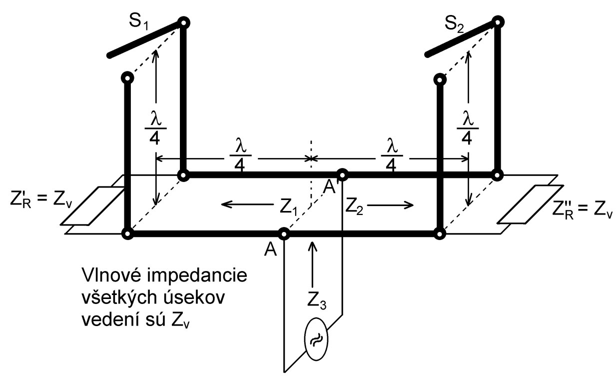
b) amplitúdu vstupného prúdu, výstupného napätia vstupný a výstupný výkon.

322. Nájdite vlnovú impedanciu vedenia, ktoré pozostáva z dvoch paralelných vodičov priemeru D = 4 mm uložených vo vzduchu v osovej vzdialenosti l = 13,54 cm. Vypočítajte vstupnú impedanciu takého vedenia, ak je dlhé d = 35 m (16 m) a na konci skratované (otvorené). Pracovná vlnová dĺžka λ = 50 m. Akú indukčnosť, resp. kapacitu predstavuje vedenie z hľadiska jeho vstupných svoriek?

323. Vedenie s vlnovou impedanciou Z_v = 70 Ω je na jednom konci skratované a na druhom konci premostené kapacitou C = 10 pF. Systém má predstavovať rezonátor na frekvencii f = 100 MHz. Aká musí byť dĺžka vedenia?

324. Paralelný LC obvod s indukčnosťou L = 125 μH kmitá na frekvencii f = 2 MHz. Pre účely merania je k nemu pripojený paralelne jeden koniec koaxiálneho vedenia, ktorého druhý koniec je pripojený k meraciemu prístroju s nekonečnou vnútornou impedanciou. Podľa údajov výrobcu má kábel vlnovú impedanciu Z_v = 52 Ω a kapacitu C = 93,5 pF/m. Kábel má dĺžku d = 76 cm. Ako sa zmení rezonančná frekvencia obvodu po pripojení kábla?

325. 70-ohmový dipól treba prispôsobiť k 300-ohmovému symetrickému zvodu úsekom štvrťvlnového vedenia pri vlnovej dĺžke λ = 4,84 m (f = 62 MHz) Nájdite vlnovú impedanciu a dĺžku tohoto vedenia.



Obr. 326

326. Na *obr. 326* je znázornený prenosový systém s dvoma záťažami a generátorom.

a) Určite Z_1, Z_2 a Z_3, ak je spínač S_1 zopnutý a S_2 rozopnutý. Kam postupuje výkon?

b) Odpovedzte na otázky bodu a) ak je spínač S_1 rozopnutý a S_2 je zopnutý.

c) Kam postupuje výkon, ak sú obidva spínače rozopnuté (zopnuté)?

DODATOK I

STRUČNÝ PREHĽAD VEKTOROVEJ ANALÝZY

1 Sčítavanie vektorov a násobenie vektora skalárom

Vektor $\boldsymbol{A}$ je fyzikálna veličina, ktorá má udanú veľkosť (modul, absolútnu hodnotu) A a smer. Možno ho vyjadriť napríklad v zložkách pozdĺž osí kartézskeho súradnicového systému x, y, z

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

kde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory s modulom 1 v smere súradnicových osí (pozri Dodatok II). Vektory možno sčítavať. Súčet dvoch vektorov $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ je vektor

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z)\boldsymbol{k}$$

Pre sčítavanie vektorov platí komutatívny zákon

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$$

a asociatívny zákon

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$$

Vždy platí

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| \le A + B$$

Rozdiel dvoch vektorov

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$$

je vektor, ktorý sa rovná súčtu vektora $\boldsymbol{A}$ s vektorom $-\boldsymbol{B}$ (vektor s rovnakým modulom ako $\boldsymbol{B}$, ale opačného smeru).

Súčin skalára α s vektorom $\boldsymbol{A}$ je vektor, ktorého modul je $|\alpha|A$ a smer je súhlasný so smerom vektora $\boldsymbol{A}$ ak $\alpha > 0$, alebo opačný smeru $\boldsymbol{A}$, ak $\alpha < 0$.

2 Násobenie vektorov

Sú definované dva súčiny vektorov:

a) **Skalárny súčin dvoch vektorov** $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$ – je skalár s hodnotou $AB\cos\varphi$, kde φ je uhol, ktorý vektory $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ zvierajú, teda

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = AB\cos\varphi$$

Skalárny súčin dvoch navzájom kolmých vektorov ($\varphi = \pi/2$) sa rovná nule. Skalárny súčin dvoch paralelných, resp. antiparalelných vektorov ($\varphi = 0, \pi$)

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \pm AB$$

Pre skalárny súčin vektorov platí komutatívny zákon a distributívny zákon, t. j.

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}.\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\,.\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{C}$$

avšak neplatí asociatívny zákon, pretože

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

Pre jednotkové vektory pravouhlého súradnicového systému platia výrazy

$$\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{j} = 0$$

$$\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{k} = 1$$

Skalárny súčin vektorov v zložkách pravouhlých súradníc

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = A_xB_\mathrm{x} + A_yB_y + A_zB_\mathrm{z}$$

Ak $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, potom

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{A} = A^2 = A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}$$

b) **Vektorový súčin dvoch vektorov** $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ je vektor, ktorého modul je

$$\left|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\right| = AB \sin\varphi$$

(φ je uhol medzi vektormi $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$) a smer vektora $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ je taký, že vektory $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ tvoria pravotočivý súradnicový systém. Vektorový súčin dvoch paralelných vektorov ($\varphi = 0, \pi$) sa rovná nule. Vektorový súčin dvoch navzájom kolmých vektorov ($\varphi = \pi/2$) je vektor s modulom AB.

Pre vektorový súčin dvoch vektorov platí distributívny zákon, t. j.

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$$

avšak neplatí komutatívny zákon. Platí antikomutatívny zákon, t. j.

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$$

a neplatí ani asociatívny zákon, pretože

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$$

Vektorové súčiny jednotkových vektorov $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sú

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$$

Vektorový súčin dvoch vektorov v zložkách pravouhlého súradnicového systému

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}$$

Dvojnásobný vektorový súčin $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ je vektor koplanárny s vektormi $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$, a je daný výrazom

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})$$

Zmiešaný vektorový súčin

$$\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}.(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}.(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

je skalár, ktorého veľkosť sa rovná objemu rovnobežnostena určeného vektormi $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$. V zložkách pravouhlého súradnicového systému

$$\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

Ďalej platia vzťahy

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}).(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C})$$
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=[\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})]\boldsymbol{C}-[\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]\boldsymbol{D}=[\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]\boldsymbol{B}-[\boldsymbol{B}.(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})]\boldsymbol{A}$$

DODATOK II

SÚRADNICOVÉ SYSTÉMY

1 Dvojrozmerné súradnicové systémy

Na určenie polohy bodu v rovine treba zadať dve čísla (súradnice), pričom spôsob zadania polohy (súradníc) závisí od povahy problému, v ktorom bod vystupuje. Na tento účel slúžia súradnicové systémy, ktoré musia mať zadaný **začiatok, smer** (+/–) súradnicových osí a **mierku** (škálu). Najčastejšie používané súradnicové systémy v rovine sú:

– **pravouhlý (kartézsky) systém** x, y

– **polárny systém súradníc** ρ, φ.

1.1 Pravouhlý (kartézsky) dvojrozmerný systém súradníc

Pravouhlý systém súradníc v rovine je sústava dvoch navzájom pravouhlých (ortogonálnych) osí podľa *obr. I.* Začiatkom (pólom alebo nulovým bodom) 0 je priesečník osí.

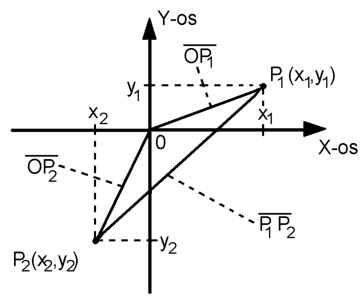
Vzdialenosti na horizontálnej osi sa zadávajú hodnotami $\pm x$ vzhľadom na začiatok, na vertikálnej osi $\pm y$ od začiatku. Poloha bodu P v rovine je potom určená dvojicou čísel x, y, čo označujeme $P(x, y)$.

Vzdialenosť $\overline{OP}$ bodu $P(x, y)$ od začiatku 0 je daná Pytagorovou vetou:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vzdialenosť d medzi dvoma bodmi $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



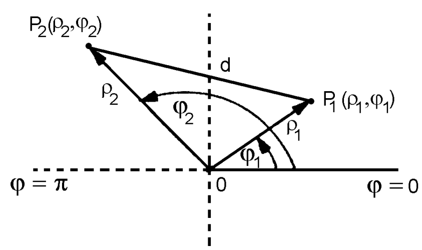
Obr. I

1.2 Systém polárnych súradníc

Polárne súradnice sa používajú pri analýze problémov so stredovou symetriou v rovine. Poloha bodu P sa zadáva (pozri *obr. II*):

1) **vzdialenosťou** (polomerom alebo dĺžkou polohového vektora) $\rho = \overline{OP}$,

2) **smerovým uhlom** (polárny uhol, uhlová súradnica alebo argument) φ medzi spojnicou $\overline{OP}$ a polárnou osou. Polárny uhol φ je kladný pri otáčaní proti smeru hodinových ručičiek a záporný pri otáčaní v smere pohybových ručičiek. Pretože uhol sa v rovine v oblúkovej miere opakuje po hodnotách 2π, najčastejšie sa pri jeho zadávaní obmedzujeme na interval hodnôt $0 \leq \varphi < 2\pi$ alebo v stupňovej miere $0 \leq \varphi < 360°$. Nazývame ich hlavné hodnoty.



Obr. II

Vzdialenosť d dvoch bodov $P_1(\rho_1, \varphi_1)$ a $P_2(\rho_2, \varphi_2)$ v polárnych súradniciach

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

je daná kosínusovou vetou.

1.3 Konverzie v dvojrozmerných súradnicových systémoch

Prechod od polárnych súradníc (ρ, φ) k pravouhlým súradniciam (x, y) sa vykoná pomocou vzťahov

$$x = r\cos\varphi \qquad\qquad y = r\sin\varphi$$

a prechod od pravouhlých súradníc (x, y) k polárnym (ρ, φ) je daný vzťahmi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad\qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

2 Trojrozmerné súradnicové systémy

Trojrozmerné súradnicové systémy sa používajú na určenie polohy bodu v priestore. Podľa povahy problému možno použiť niektorý z nasledovných najčastejšie používaných súradnicových systémov:

– **pravouhlý (kartézsky) systém** x, y, z
– **cylindrický (valcový) systém** ρ, φ, z
– **sférický (guľový) systém** r, ϑ, φ.

Každý zo systémov musí mať určený **začiatok** 0 (pre cylindrický systém je začiatkom bod na osi z), **smer** (+/–) a **mierka**.

2.1 Pravouhlý trojrozmerný systém súradníc

Tento systém predstavuje tri navzájom ortogonálne (pravouhlé) súradnice, ktoré nazývame os x, os y a os z (pozri *obr. III*).

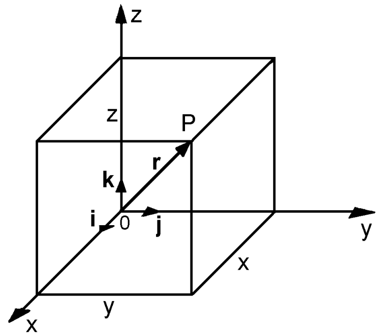
Vzdialenosť bodu $P(x, y, z)$ od začiatku 0

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Najkratšia **vzdialenosť** d medzi dvoma bodmi $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Jednotkové vektory v poradí $\boldsymbol{i} \rightarrow \boldsymbol{j} \rightarrow \boldsymbol{k}$ tvoria pravotočivý systém.



Obr. III

2.2 Cylindrický systém súradníc

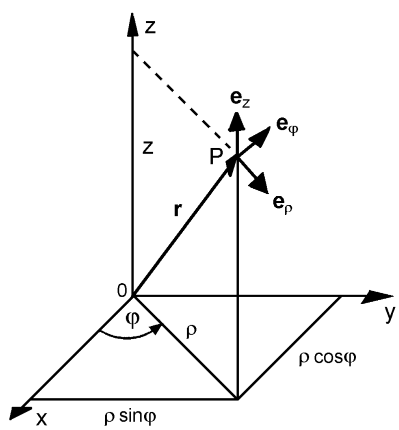
Polárne súradnice sa používajú v problémoch s osovou (cylindrickou) symetriou a rotačnou symetriou.

Poloha bodu v cylindrickom systéme je daná súradnicami (ρ, φ, z), kde z je cylindrická os, ρ je kolmá vzdialenosť bodu P od osi z (pozor – nie od začiatku na osi z) a φ je azimutálny uhol medzi referenčnou rovinou prechádzajúcou osou z a rovinou v ktorej leží bod P (pozri *obr. IV*). Definičné oblasti:

pre ρ je $\rho \geq 0$

pre φ je $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

pre z je $-\infty \leq z \leq +\infty$



Obr. IV

Pre $z = 0$ prechádza cylindrický systém na systém polárnych súradníc. Jednotkové vektory v poradí $\boldsymbol{e}_\rho \rightarrow \boldsymbol{e}_\varphi \rightarrow \boldsymbol{e}_z$ tvoria pravotočivý systém.

2.3 Sférický systém súradníc

Sférické súradnice sa používajú pri problémoch so stredovou symetriou, napr. v geografii, pri opise dipólových polí, v kvantovej mechanike pri opise energetických stavov atómov a p.

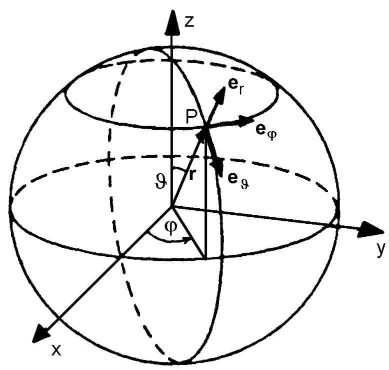
Bod P v sférických súradniciach je daný trojicou čísel (r, ϑ, φ) na *obr. V*, kde

r je **vzdialenosť** bodu P od začiatku 0 a má hodnoty $r \geq 0$,

ϑ je **polárny uhol** (geografická dĺžková súradnica) medzi polárnou osou (napr. osou z) a smerom vektora $\boldsymbol{r}$. Nadobúda hodnoty z intervalu $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

φ je **azimutálny uhol** (geografická šírková súradnica v rovníkovej rovine) medzi priemetom vektora $\boldsymbol{r}$ do roviny kolmej na polárnu os (na *obr. V* os z) a zvolenou osou v tejto rovine (napr. os x). Uhol φ nadobúda hodnoty z intervalu $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Jednotkové vektory v poradí $\boldsymbol{e}_r \to \boldsymbol{e}_\vartheta \to \boldsymbol{e}_\varphi$ tvoria pravotočivý systém.



Obr. V

2.4 Konverzie medzi trojrozmernými súradnicovými systémami

Prechod cylindrických súradníc (ρ, φ, z') na kartézske súradnice (x, y, z) umožňujú vzťahy

$$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\varphi \qquad z = z'$$

Prechod kartézskych súradníc (x, y, z) na cylindrické súradnice (ρ, φ, z') umožňujú vzťahy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad z' = z$$

Prechod sférických súradníc (r, ϑ, φ) na kartézske súradnice (x, y, z) umožňujú vzťahy

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$
$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$
$$z = r \cos \vartheta$$

Prechod kartézskych súradníc (x, y, z) na sférické súradnice (r, ϑ, φ) umožňujú vzťahy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \textit{(rovnica guľovej plochy)}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Prechod sférických súradníc (r, ϑ, φ) na cylindrické súradnice (ρ, φ', z) umožňujú vzťahy

$$\rho = r \sin \vartheta$$
$$\varphi' = \varphi \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$
$$z = r \cos \vartheta \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$

Prechod cylindrických súradníc (ρ, φ', z) na sférické súradnice (r, ϑ, φ) umožňujú vzťahy

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \qquad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\rho}{z} \qquad \varphi = \varphi'$$

Tabuľka 22

Diferenciálne operácie na skalárnych a vektorových poliach

Gradient (grad) V:

Pravouhlé súradnice (x, y, z)

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Cylindrické súradnice (ρ, φ, z)

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

Sférické súradnice (r, ϑ, φ)

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

Divergencia (div) $\boldsymbol{E}$:

Pravouhlé súradnice (x, y, z)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Cylindrické súradnice (ρ, φ, z)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho E_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Sférické súradnice (r, ϑ, φ)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\, E_\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}E_\varphi$$

Rotácia (rot) $\boldsymbol{E}$:

Pravouhlé súradnice (x, y, z)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Cylindrické súradnice (ρ, φ, z)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho E_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & \rho E_\varphi & E_z \end{vmatrix}$$

Sférické súradnice (r, ϑ, φ)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial \sin\vartheta E_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r E_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi =$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\vartheta & r\sin\vartheta\boldsymbol{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ E_r & rE_\vartheta & r\sin\vartheta E_\varphi \end{vmatrix}$$

Tabuľka 23

Laplaceov operátor

Pravouhlé súradnice (x, y, z)
$$\Delta = \nabla.\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
Cylindrické súradnice (ρ, φ, z)
$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
Sférické súradnice (r, ϑ, φ)
$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

NIEKOĽKO LITERÁRNYCH PRAMEŇOV K PREDMETU "ELEKTROMAGNETIZMUS"

O elektromagnetizme bolo napísaných veľmi veľa vynikajúcich diel. Medzi prvé, ktorých úroveň zodpovedá dnešným teoretickým predstavám patrí Maxwellova monografia **"Treatise on Electricity and Magnetism"** (Pojednanie o elektrine a magnetizme) prvý raz vydaná v roku 1873. Jej tretie vydanie vyšlo už v roku 1891 (3d ed., Oxford University Press, 1891; reprint ed., Dover, New York 1954) a posledné v júni 1998 vo vydavateľstve Oxford University Press. Maxwell v nej na základe Ampérových a Faradayových experimentálnych poznatkov predložil jednotnú teóriu elektromagnetizmu včítane svetelných javov.

Nepokladám za účelné predkladať tu rozsiahly zoznam učebníc, ktoré boli napísané potom, a ktoré sa dnes len ťažko obstarávajú, nemôžem však nespomenúť aspoň niektoré, ktoré si zasluhujú mimoriadnu pozornosť a obdiv. Sú to napríklad:

1. **Stratton, J.: "Electromagnetic Theory"**, McGraw – Hill Book Co., Inc., New York 1941 – existuje český preklad z roku 1961,
2. **Sommerfeld, A.: "Elektrodynamik"**, Akademische Verlagsgessellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1949,
3. **Tamm, I. J.: "Osnovy teoriji električestva"**, GITTL, Moskva 1957,
4. **Jackson, J. D.: "Classical Electrodynamics"**, J. Wiley and Sons, Inc. New York, London 1962.

V roku 1961 vznikla na Univerzite v Berkley v Kalifornii, USA špeciálna komisia zložená z renomovaných vedcov a pedagógov, aj nositeľov Nobelovej ceny za fyziku, ktorá dostala za úlohu koordinovať tvorbu nových moderných učebníc základného kurzu fyziky, ktoré by odrážali vtedajší stav fyzikálnych poznatkov a pokroky v technike. Druhý, už spomínaný diel tohto päťdielneho kurzu je venovaný elektromagnetizmu a vyšiel v roku 1965. Je to kniha:

5. **Purcell, E. M.: "Electricity and Magnetism"**, Berkley Physics Course, Vol. 2, McGraw Hill Book Comp., New York 1965.

"Berkleyský kurz" je jedno z najdokonalejších diel z fyzikálnej učebnicovej tvorby. Je napísaný na vysokej odbornej úrovni a s takým pedagogickým majstrovstvom, že ho môže čítať každý, kto má aspoň priemernú matematickú prípravu zodpovedajúcu gymnaziálnej úrovni. S ním možno porovnávať iba ďalej citované a tiež už spomínané učebnice Richarda P. Feynmana. Edward Mills Purcell, autor uvedenej učebnice, dostal spolu s Felixom Blochom v roku 1952 Nobelovu cenu za výskumy vo vysokofrekvenčnej spektroskopii (jadrová magnetická rezonancia).

V súčasnosti okrem tejto knihy existujú u nás pomerne nedávne vydania osvedčených učebníc, na ktoré sú študenti obyčajne odkazovaní. Sú to napríklad knihy:

6. **Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: "Feynmanove prednášky z fyziky 3"**, Alfa Bratislava 1988
7. **Sedlák, B., Štoll, J.: "Elektřina a magnetismus"**, Academia Praha Vydavatelství Karolinum 1993
8. **Čičmanec, P.: "Všeobecná fyzika 2 – Elektrina a magnetizmus"**, Vydavateľstvo UK Bratislava 2002

Dúfajme, že aj dielo, na konci ktorého ste sa práve ocitli, Vám pomohlo odhaliť a pochopiť niektoré taje sveta, v ktorom žijeme a ktorého sme neoddeliteľnou súčasťou.

RIEŠENIA ÚLOH

Fyzikálne úlohy a ich postavenie pri štúdiu fyziky

Táto záverečná časť môjho pojednania o elektromagnetizme je venovaná riešeniu úloh, ktoré som čitateľovi-študentovi predkladal za každou kapitolou. Náročnosť úloh je rôzna: niektoré sú veľmi jednoduché a ich riešenia sú udané iba numerickými výsledkami, iné, náročnejšie, vyžadujú hlbší analytický rozbor. Niekoľko úloh vyžaduje mimoriadne dobrú prípravu a patria skôr do výkladovej časti. Takúto paletu úloh som zvolil na základe skúsenosti, že potenciálni riešitelia-študenti majú rôznu úroveň teoretickej prípravy, a teda aby aj menej erudovaní mali šancu úspešne riešiť príslušný počet úloh. Na druhej strane, aby sa tí ambicióznejší pri riešení nenudili.

Najväčší problém pre riešiteľa úlohy je obvykle odpoveď na otázku: "Ako začať?" Niet na ňu jednoznačnej odpovede. Úspech sa dostaví až po tvrdej a systematickej práci s úlohami a získaním dostatočnej skúsenosti. Ako pri skutočnom fyzikálnom výskume, ani pri riešení úlohy nie je vždy od začiatku jasné, aká je optimálna postupnosť krokov pre dosiahnutie výsledku. Ak možno niečo poradiť – tak potom popri špeciálnych zákonoch týkajúcich sa priamo zložitého problému, treba sa pri jeho riešení pokúsiť využiť fundamentálne fyzikálne zákony, ako sú napr. zákony zachovania a princíp superpozície. Ešte vyšší stupeň chápania problému predpokladá schopnosť využívania metodologických princípov fyziky, ako sú: princíp príčinnosti, symetrie, relativity a ekvivalencie. Niekedy sa treba tiež povzniesť nad priehradky, ktoré sme vo fyzike narobili. Fyzikálny svet je zložitý a mnohotvárny a často sa treba na problém vedieť pozrieť aj z inej, nielen "elektromagnetickej", ale napr. aj z mechanickej, či termodynamickej stránky.

Umenie riešenia úloh spočíva tiež v schopnosti odlíšiť podstatné stránky problému od menej podstatných, či nepodstatných. Takáto schopnosť sa pri riešení prejaví schopnosťou zanedbávať tak, že sa výpočty stanú matematicky jednoduchšie, pričom výsledok riešenia problému zostáva pre prax dostatočne presný. Dobrým príkladom je zanedbanie gravitačného pôsobenia pri elektromagnetickej interakcii elementárnych častíc.

U väčšiny predkladaných úloh sa vyžaduje numerický výsledok. Nie je mojím záujmom týrať študentov bezduchými numerickými cvičeniami, skôr mám úmysel poukázať na konkrétne kvantitatívne súvislosti, ktoré môžu byť pre budúceho profesionálneho fyzika veľmi poučné. Veď dozvedieť sa numerickým výpočtom napr. to, že vo vnútri vodíkového atómu je intenzita elektrického poľa väčšia ako 10^{12} V/m a rastie smerom do vnútra k neznámym hodnotám, že magnetická indukcia pritom tiež dosahuje extrémne vysokých hodnôt cca 12 T, je poznanie veľmi vzrušujúce a šokujúce zároveň. Atóm takto predstavuje singularitu hustoty elektromagnetickej energie.

V dnešnej dobe pri súčasných možnostiach výpočtovej techniky nepredstavujú numerické výpočty úloh nijaké mimoriadne problémy. Mnohé z uvedených úloh autor numericky riešil v čase, keď mal k dispozícii ako jedinú výpočtovú techniku logaritmické pravítko, k tomu matematicko-fyzikálne tabuľky, papier a ceruzku.

Riešená zbierka úloh má svoje výhody, ale aj nevýhody. Výhodou je, že zbavuje študenta pochybností pri hodnotení svojho riešenia, nevýhodou je, že zvádza na "odpisovanie". Fyzikálne úlohy majú predovšetkým preveriť hĺbku a rozsah teoretickej prípravy študenta a jeho schopnosť samostatne riešiť úlohy fyzikálnej praxe. Mali by byť preto riešené samostatne, bez pomoci nejakých vzorových riešení, ak naviac uvážime, že úlohy môžu mať niekoľko správnych spôsobov riešenia obvykle iba s jedným správnym výsledkom. Študent by po riešeniach mal siahnuť iba pri konfrontácii vlastného postupu a dosiahnutého riešenia. Ak si musí nimi pomáhať pred dosiahnutím vlastného výsledku, znamená to, že jeho príprava nebola dostatočná, alebo nemá dosť trpezlivosti. V takom prípade riešenia sú tiež užitočné, ale iba ako dodatočná študijná literatúra (potom však treba siahnuť aj po inej dostupnej zbierke úloh).

Napriek argumentom pre a proti si myslím, že riešené úlohy môžu byť užitočnou pomôckou, ak sa riešenia budú používať v rozumnej miere. Domnievam sa, že ich treba zaradiť aj kvôli ucelenosti predkladaného diela.

2 Elektrostatika nábojov vo vákuu

1. Výsledná sila pôsobiaca na náboj q_0 na *obr. R1* môže byť nulová iba vtedy, ak sily od nábojov q_1 a q_2 sú opačného znamienka. To môže nastať vtedy ak:

a) q_1 a q_2 sú opačného znamienka, pritom $x > d$ alebo $x < 0$,

b) q_1 a q_2 sú rovnakého znamienka, pričom $0 < x < d$.

Obr. R1

Podmienka rovnováhy síl je

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q_1|q_0}{x^2} - \frac{|q_2|q_0}{(x-d)^2}\right) = 0$$

z čoho pre x plynie kvadratická rovnica

$$(1-p)x^2 - 2dx + d^2 = 0$$

kde $p = |q_2|/|q_1|$. Korene tejto rovnice sú

$$x_{1,2} = d\frac{1 \pm \sqrt{p}}{1-p} = \frac{d}{1 \mp \sqrt{p}}$$

a udávajú polohy náboja q_0, v ktorých je tento náboj v rovnováhe. Pritom môžu nastať tieto prípady:

α) ak $0 < p < 1$ ($|q_2| < |q_1|$), potom

$$x_1 > d \qquad \text{a} \qquad 0 < x_2 < d$$

Prvý koreň zodpovedá nábojom opačného znamienka a druhý nábojom rovnakého znamienka.

β) ak $p > 1$ ($|q_2| > |q_1|$), potom

$$x_1 < 0 \qquad \text{a} \qquad 0 < x_2 < d$$

Prvý koreň zodpovedá nábojom opačného znamienka a druhý nábojom rovnakého znamienka.

γ) ak $p = 1$ ($|q_2| = |q_1|$), potom pre náboje rovnakého znamienka je rovnovážna poloha medzi nábojmi vo vzdialenosti $x = d/2$. Pre náboje opačného znamienka rovnovážna poloha neexistuje, resp. je v $\pm\infty$.

2. $f = 9{,}2.10^{-8}$ N.

3. Dostredivá sila sa rovná Coulombovej sile a platí

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

z čoho plynie pre rýchlosť hodnota $v = 2{,}25.10^6$ m/s.

4. Využitím Gaussovho zákona dostaneme pre intenzitu elektrického poľa vo vnútri rovnomerne nabitej gule výraz

$$E(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad \text{pre } r < R$$

Elektrón má rovnovážnu polohu v strede gule. Ak sa vychýli z jej stredu do vzdialenosti r, bude naň pôsobiť centrálna sila

$$F(r) = eE(r) = \frac{eQr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Pohybová rovnica pre elektrón bude tvaru

$$m_e \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -F(r) = -\frac{eQr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Je to diferenciálna rovnica pre netlmený harmonický pohyb s frekvenciou

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0 m_e R^3}}$$

Pre vodík ($m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg, $Q = 1{,}6.10^{-19}$ C) $f = 7.10^{15}$ Hz. Táto frekvencia spadá do ďalekej UV – oblasti (pozri tab. 20) za hranou Lymanovej série – pojem z atómovej fyziky.

5. $E = 6{,}4.10^{20} Z/A^{3/2}$ [V/m].

6. a) div $\boldsymbol{E} = 0$, rot $\boldsymbol{E} = 0$. Pretože rot $\boldsymbol{E} = 0$, daná funkcia môže predstavovať reálne elektrostatické pole.

b) Integrál $\int \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ po dráhe 1 na *obr. R6* je

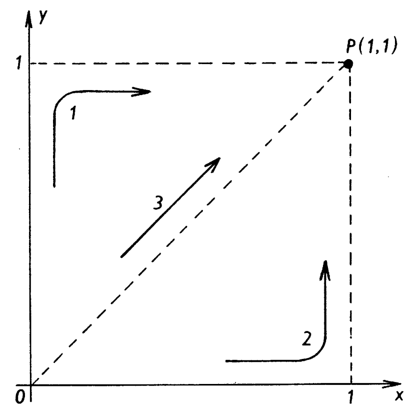
$$I_1 = K\int_{(0,0)}^{(0,1)} (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) + K\int_{(0,1)}^{(1,1)} (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = K(0+1) = K$$

Integrál po dráhe 2

$$I_2 = K\int_{(0,0)}^{(1,0)} (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) + K\int_{(0,1)}^{(1,1)} (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = K(0+1) = K$$

Dráhu 3 predstavuje priamka $y = x$, pričom vzdialenosť l od začiatku súradníc sa dá vyjadriť ako

$$l = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Obr. R6

Na dráhe 3 má intenzita elektrického poľa veľkosť

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kl$$

a smeruje pozdĺž priamky, takže integrál po dráhe 3

$$I_3 = \int_0^P \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = K\int_0^{\sqrt{2}} l\,\mathrm{d}l = K$$

Všetky tri integrály majú rovnakú hodnotu K, teda hodnota integrálu $\int \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ nezávisí od zvolených dráh.

c) Potenciálová funkcia je tvaru

$$V = -Kxy + \text{konšt.}$$

7. a) Celkový náboj v guľovej vrstve $q = Q$

b) Pre $r < R_2$ je $E = 0$. Pre $R_2 < r < R_1$ z Gaussovho zákona pre intenzitu plynie

$$E(r) = \frac{Q(r - R_2)}{4\pi\varepsilon_0(R_1 - R_2)r^2}$$

Pre $r > R_1$ je

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

c) Potenciál pre $r > R_1$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Pre $R_2 < r < R_1$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_1 - R_2)}\left(\frac{r - R_2}{r} + \ln\frac{R_1}{r}\right)$$

a pre $r < R_2$ je potenciál konštantný a z dôvodov spojitosti rovnaký ako pri $r = R_2$, teda

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_1 - R_2)} \ln\frac{R_1}{R_2} = \text{konšt.}$$

8. Ak napíšeme daný potenciál v tvare

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha r} - 1}{r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

vidíme, že je superpozíciou potenciálu bodového náboja q a potenciálu

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha r} - 1}{r}$$

na ktorý treba aplikovať Poissonovu rovnicu v sférických súradniciach (pozri tabuľku 23)

$$\Delta_r V'(r) = \frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V'}{\partial r} = \frac{qa^2 \mathrm{e}^{-ar}}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{\rho'(r)}{\varepsilon_0}$$

z čoho hustota náboja zodpovedajúca potenciálu $V'(r)$ je

$$\rho'(r) = -\frac{qa^2\mathrm{e}^{-ar}}{4\pi r}$$

Ak hustotu bodového náboja vyjadríme pomocou Diracovej δ-funkcie

$$\rho_0 = \delta(r)q$$

potom výsledná hustota náboja je superpozíciou ρ_0 a $\rho'(r)$, teda

$$\rho(r) = \rho_0 + \rho'(r)$$

Yukawov potenciál je teda budený bodovým nábojom q a záporným nábojom, ktorý je rozložený so sférickou symetriou okolo náboja q s hustotou $\rho'(r)$. Celkový náboj rozloženia $\rho'(r)$ je

$$\int_0^\infty \rho'(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r = -qa^2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ar} r \mathrm{d}r = -q$$

Rovnica pre Yukawov potenciál sa dá napísať v tvare

$$\Delta V - a^2 V = -\frac{q\delta(r)}{\varepsilon_0}$$

v ktorom je známa z literatúry.

9. a) Celkový náboj

$$Q = \int_\infty \rho \, d\tau = -\frac{4e}{a_0^3}\int_0^\infty r'^2 \exp\left(\frac{-2r'}{a_0}\right)\mathrm{d}r' = -e$$

b) Intenzita elektrického poľa budená elektrónovým mrakom

$$E_e(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{e}{\pi a_0^3}\int_0^r \exp\left(\frac{-2r'}{a_0}\right) 4\pi r'^2 \mathrm{d}r' =$$

$$= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3 r^2}\left[1 - \left(1 + \frac{2r}{a_0}\right)\exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)\right] + \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a_0^2}\exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)$$

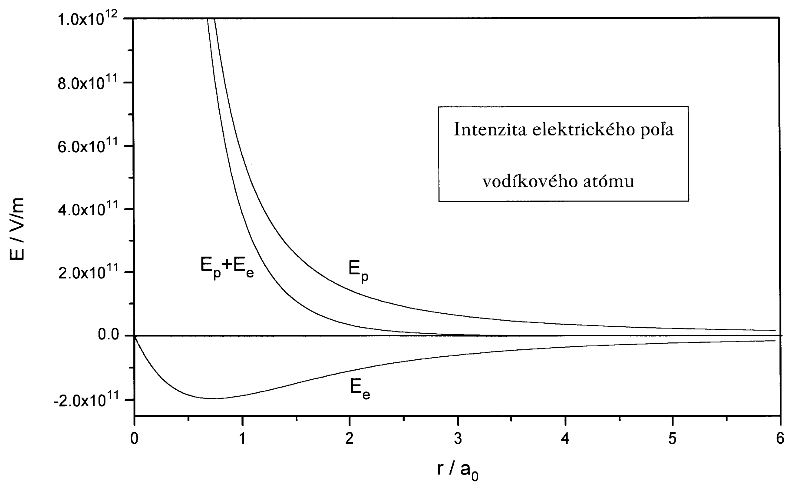
Protón nachádzajúci sa v strede symetrie budí v svojom okolí elektrické pole s intenzitou

$$E_p(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

takže výsledná intenzita elektrického poľa vodíkového atómu je

$$E(r) = E_e(r) + E_p(r)$$

Závislosť intenzity poľa od argumentu r/a_0 je graficky znázornená na *obr. R9a* (Bohrov polomer $a_0 = 5{,}29.10^{-11}$ m, náboj protónu a elektrónu $e = \pm 1{,}602.10^{-19}$ C). Z grafu vidíme, že intenzita elektrického poľa vo vnútri atómu je obrovská a nedá sa porovnať so žiadnym makroskopickým poľom v bežnom živote.



Obr. R9a

c) Podľa výrazu (2.88) potenciál sféricky symetrického rozloženia náboja je daný výrazom

$$V_e(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\int_0^r \rho(r')r'^2 \mathrm{d}r' + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^\infty \rho(r')r'\mathrm{d}r' = -\frac{e}{\pi\varepsilon_0 a_0^3}\left(\frac{1}{r}I_1 + I_2\right)$$

kde

$$I_1 = \int_0^r \exp\left(\frac{-2r'}{a_0}\right) r'^2 \mathrm{d}r' = \frac{a_0^3}{4}\left[1 - \left(1 + \frac{2r}{a_0} + \frac{2r^2}{a_0^2}\right)\exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)\right]$$

$$I_2 = \int_r^\infty \exp\left(\frac{-2r'}{a_0}\right) r'\mathrm{d}r' = \frac{a_0^2}{4}\left(1 + \frac{2r}{a_0}\right)\exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)$$

takže

$$V_e(r) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[1 - \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)\right] + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0}\exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)$$

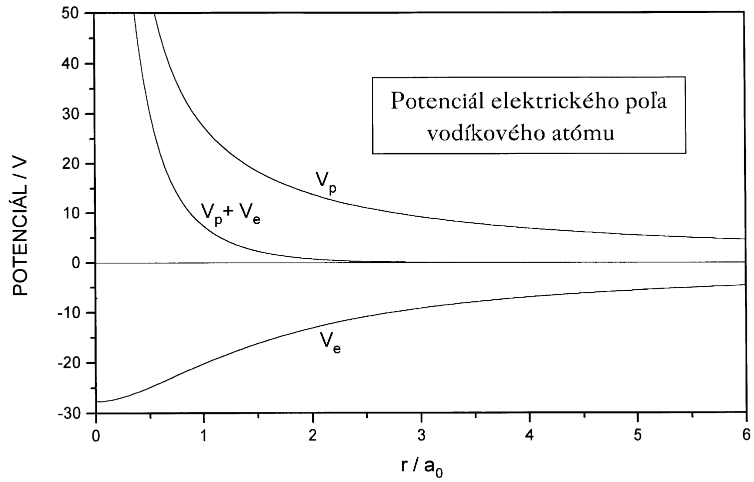
Potenciál od celého vodíkového atómu je

$$V(r) = V_e(r) + V_p(r)$$

kde

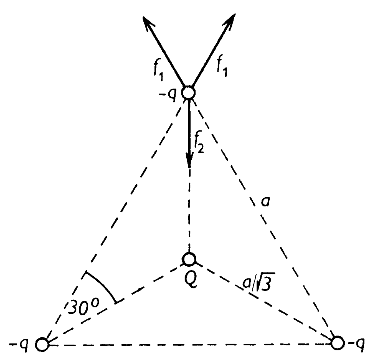
$$V_p(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

je potenciál jadra (protónu). Závislosť potenciálu od argumentu r/a_0 je pre uvedené numerické hodnoty e a a_0 graficky znázornená na *obr. R9b*.



Obr. R9b

10. a) Dĺžka dipólu $d = p/e$ = 3,85.10^{-11} m. b) Intenzita poľa na osi dipólu je 4,1.10^{6} V/m, kolmo na os dipólu je –2,05.10^{-6} V/m. c) Maximálna sila, ktorou dipól pôsobí na vodíkový ión je 6,55.10^{-13} N. d) Elektrická sila medzi dvoma molekulami vody je 3,27.10^{-11} N.



Obr. R11

11. a) Z *obr. R11* vidieť, že výsledná sila pôsobiaca na jeden z nábojov $-q$ je

$$f = 2f_1\cos 30^\circ - f_2 = \frac{\sqrt{3}q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(q - \sqrt{3}Q\right)$$

Ak $q > \sqrt{3}Q$, sila pôsobí von z trojuholníka, ak $q < \sqrt{3}Q$, potom sila pôsobí dovnútra.

b) Energia sústavy

$$W = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(q - \sqrt{3}Q\right)$$

c) Sila pôsobiaca na náboj $-q$ bude nulová, ak $q = \sqrt{3}Q$. Energia sústavy je vtedy nulová. Systém je nestabilný, pretože akákoľvek zmena polohy jedného z nábojov vedie k vzniku nenulovej sily pôsobiacej na náboj Q, čím sa celý systém zrúti. Elektrostatický systém voľných nábojov je vždy nestabilný (Earnshawova veta).

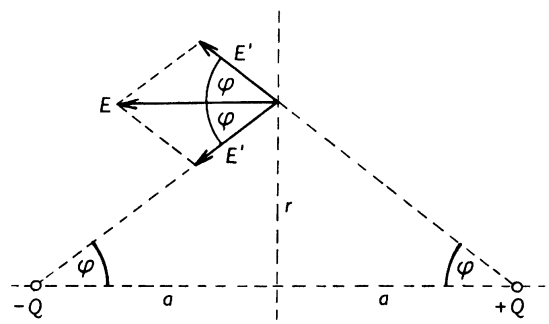
12. Intenzita bude maximálna vo vzdialenosti $x = 7{,}1.10^{-2}$ m od stredu kružnice na jej osi a jej hodnota je $E_{max} = 1{,}73.10^3$ V/m.

13. Podľa *obr. R13* je v rovine symetrie nábojov intenzita elektrického poľa daná výrazom

$$E = 2E'\cos\varphi = \frac{Qa}{2\pi\varepsilon_0\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

a je kolmá na rovinu symetrie nábojov. Tok vektora intenzity elektrického poľa je

$$\Psi = \int \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^R \frac{Qa}{2\pi\varepsilon_0\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}} 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right)$$



Obr. R13

14. Dosku možno rozložiť na prúžky podľa *obr. R14,* pričom potenciál od jedného prúžku v strede dosky je

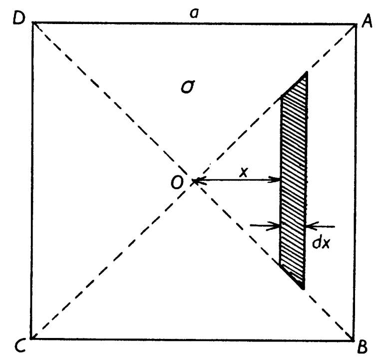
$$\mathrm{d}V' = \frac{\sigma \mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x + \sqrt{2}x}{x} = \frac{\sigma \mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Potenciál od trojuholníkovej časti *OAB*

$$V' = \frac{\sigma\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{a/2}\mathrm{d}x = \frac{\sigma a}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

a od celej dosky

$$V = 4V' = \frac{\sigma a}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$



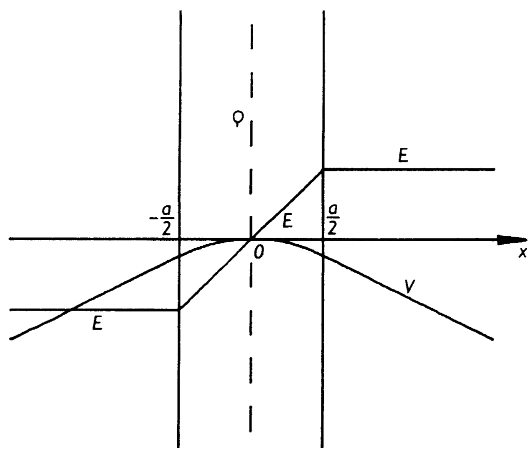
Obr. R14

15. Z vyjadrenia intenzity elektrického poľa v sférických súradniciach (pozri tabuľku 22)

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

dostaneme pre zložky poľa výrazy

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2a\cos\vartheta}{r^3} + \frac{b}{r^2} \qquad E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \qquad E_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{a\sin\vartheta}{r^2}$$



Obr. R16

16. Nech os x smeruje kolmo na vrstvu, pričom $x = 0$ v strede vrstvy. Použitím Gaussovho zákona:

– pre $|x| < a/2$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}x\boldsymbol{i} \qquad V = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2$$

– pre $|x| > a/2$

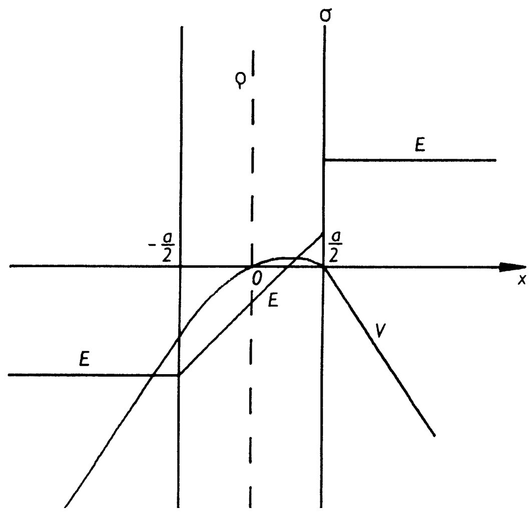
$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}\boldsymbol{i} \qquad V = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}|x| + \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0}$$

$\boldsymbol{i}$ je jednotkový vektor v smere osi x. V rovine $x = 0$ je $V = 0$. Grafické závislosti E a V od x sú na *obr. R16.*

17. Nech os x smeruje kolmo na vrstvu, pričom $x = 0$ v strede vrstvy a nekonečná rovina nabitá plošným nábojom σ je vo vzdialenosti $a/2$ na vrstve vpravo. Potom:

– pre $|x| < a/2$

$$\boldsymbol{E} = \frac{2\rho x - \sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{i} \qquad\qquad V = -\frac{\rho x^2 - \sigma x}{2\varepsilon_0}$$



Obr. R17

– pre $|x| > a/2$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho a + \sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}\boldsymbol{i} \qquad\qquad V = -\frac{\rho a + \sigma}{2\varepsilon_0}|x| + \frac{\rho a^2}{8\varepsilon_0} + \frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}\left(1 + \frac{x}{|x|}\right)$$

$\boldsymbol{i}$ je jednotkový vektor v smere osi x. Pre $x = 0$ je $V = 0$. Priebehy E a V v závislosti od x sú pre $\sigma = a\rho/2$ zobrazené na *obr. R17.*

18. Intenzita elektrického poľa na osi disku vo vzdialenosti z od jeho stredu

$$E = \frac{Az}{2\varepsilon_0}\left(\ln\frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

a potenciál

$$V = \frac{A}{4\varepsilon_0}\left(R\sqrt{R^2 + z^2} - z^2\ln\frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z}\right)$$

19. Na disku možno zvoliť nekonečne tenké kruhové prúžky podľa *obr. R19* s plochou $\mathrm{d}S = 2r\vartheta\mathrm{d}r$, pričom $r = 2R\cos\vartheta$ a $\mathrm{d}r = -2R\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$, takže $\mathrm{d}S = -8R\ \vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$. Potenciál, ktorý budí náboj na prúžku v bode 0 je

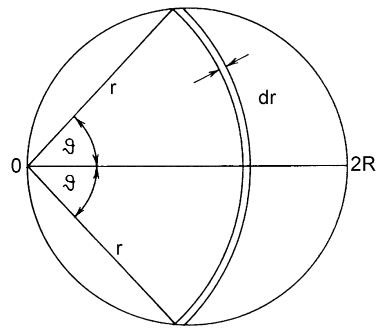
$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\mathrm{d}S}{r} = -\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}\vartheta\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta$$

a od celého disku $$V = -\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}\int_{\pi/2}^{0}\vartheta\sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$$

V strede disku je potenciál [pozri výraz (2.84), pri $z = 0$]

$$V_{stred} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} > V \qquad \text{takže pomer} \qquad \frac{V_{stred}}{V} = \frac{\pi}{2} > 1$$

Potenciál na disku teda smerom od stredu disku k jeho okraju klesá.



Obr. R19

20. Využitím výrazu (2.88) dostaneme potenciál a intenzitu elektrického poľa pre $0 < r < R$ v tvare

$$V = \frac{A\left(4R^3 - r^3\right)}{12\varepsilon_0} \qquad E = \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0}$$

Pre $r > R$

$$V = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r} \qquad E = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$

Intenzita má radiálny smer zo stredu symetrie.

21. Použitím Poissonovej rovnice dostaneme pre hľadané nábojové rozloženie výraz

$$\rho = \frac{\alpha A}{4\pi}\mathrm{e}^{-ar}\left(\frac{2}{r} - \alpha\right)$$

22. $\rho = -6\varepsilon_0 a$; náboj na guli je rovnomerne rozložený.

23. Intenzita elektrického poľa

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -(\alpha y\boldsymbol{i} + \alpha x\boldsymbol{j} - 2\alpha z\boldsymbol{k})$$

kde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory v smeroch súradnicových osí. Priemet $\boldsymbol{E}$ do smeru vektora $\boldsymbol{a}$ je daný výrazom

$$E_a = \boldsymbol{E}.\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\alpha(6z - y)}{\sqrt{10}}$$

V bode M je $E_a = -\left(19/\sqrt{10}\right)\alpha$.

24. Pre $r < r_1$

$$\boldsymbol{E} = 0 \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r_1}\right)$$

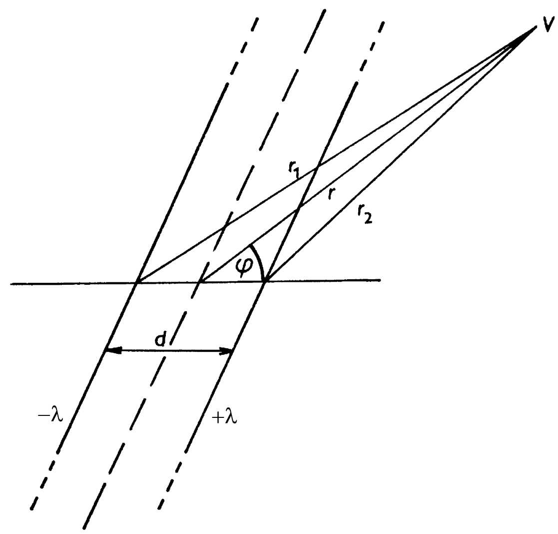
pre $r_1 < r < r_2$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r}\right)$$

a pre $r > r_2$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 - q_1}{r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 - q_1}{r}$$

$\boldsymbol{e}_r$ je jednotkový vektor v radiálnom smere zo stredu symetrie. Ak sa gule navzájom posunú, potenciál vo vzdialenom bode bude superpozíciou potenciálu bodového náboja veľkosti $q_2 - q_1$ a potenciálu dipólu s momentom $p = q_2\delta x$.



Obr. R25

25. Z *obr. R25* plynie pre potenciál vo veľkej vzdialenosti r (v rovine kolmej na dvojicu priamok)

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln r_1 - \ln r_2\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

pričom pre $r \gg d$

$$\ln\frac{r_1}{r_2} = \ln\frac{r_1^2}{r_1 r_2} \approx \ln\frac{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + rd\cos\varphi}{r^2} \approx \ln\left(1 + \frac{d}{r}\cos\varphi\right) \approx \frac{d}{r}\cos\varphi$$

Potenciál priamkového dipólu je teda

$$V = \frac{\lambda d\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\boldsymbol{p}'.\boldsymbol{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

kde $\boldsymbol{p}' = \lambda \boldsymbol{d}$ je moment priamkového dipólu. Intenzita elektrického poľa

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\, V = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{p}')}{r^4} - \frac{\boldsymbol{p}'}{r^2}\right]$$

26. Pre $r > a$ je hľadaný potenciál riešením Poissonovej rovnice, ktorá má v cylindrických súradniciach pri osovej symetrii tvar (pozri tabuľku 23)

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = -\frac{k}{\varepsilon_0 r}$$

Po úprave rovnice a prvej integrácii dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -E = -\frac{k}{\varepsilon_0} + \frac{C_1}{r}$$

kde C_1 je prvá integračná konštanta. V oblasti $r \le a$ je intenzita elektrického poľa nulová, a teda pre $r = a$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{k}{\varepsilon_0} + \frac{C_1}{r} = 0$$

odkiaľ pre integračnú konštantu plynie hodnota

$$C_1 = a\frac{k}{\varepsilon_0}$$

Potenciál dostaneme ďalšou integráciou výrazu $\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$ v tvare

$$V = -\frac{k}{\varepsilon_0}r + C_1 \ln r + C_2 = \frac{k}{\varepsilon_0}(a \ln r - r) + C$$

kde $C_2 = C$ je druhá integračná konštanta. V oblasti $r < a$ je potenciál konštantný a rovný jeho hodnote pri $r = a$, teda

$$V = \frac{k}{\varepsilon_0}(a \ln a - a) + C$$

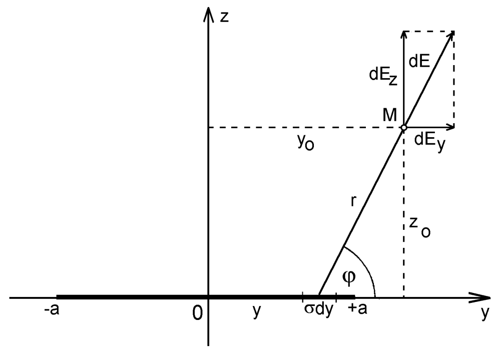
27. Umiestnime pásik symetricky okolo osi x pravouhlého súradnicového systému podľa *obr. R27*. Nekonečne úzky prúžok $\mathrm{d}y$ s dĺžkovým nábojom $\mathrm{d}\tau = \sigma(y)\mathrm{d}y$ vytvorí v bode $M(y_0, z_0)$ elementárnu intenzitu

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma(y)\mathrm{d}y}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{(y_0 - y)^2 + z_0^2}}$$

Priemety intenzity do smerov osí y a z sú

$$E_y = \int \mathrm{d}E \cos\varphi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\sigma(y)(y_0 - y)\mathrm{d}y}{(y_0 - y)^2 + z_0^2}$$

$$E_z = \int \mathrm{d}E \sin\varphi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\sigma(y)z_0\mathrm{d}y}{(y_0 - y)^2 + z_0^2}$$



Obr. R27

a) Ak $\sigma = \sigma_0$ = konšt., integráciou posledných výrazov dostaneme

$$E_y = -\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(y_0-a)^2+z_0^2}{(y_0+a)^2+z_0^2} \qquad E_z = \frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\left(\operatorname{arctg}\frac{a+y_0}{z_0}+\operatorname{arctg}\frac{a-y_0}{z_0}\right)$$

b) V tomto prípade integrácia vedie na tvary

$$E_y = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda}|z_0|\right)\cos\frac{2\pi}{\lambda}y_0 \qquad E_z = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda}|z_0|\right)\frac{z_0}{|z_0|}\sin\frac{2\pi}{\lambda}y_0$$

Poznámka: V prípade b) treba využiť integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b+cy}{p+2qy+y^2}\sin(ay)\mathrm{d}y = \pi\exp\left(-a\sqrt{p-q^2}\right)\left[\frac{cq-b}{\sqrt{p-q^2}}\sin(aq)+c\cos(aq)\right]$$

28. $E_e = (q_1+q_2)/(2\varepsilon_0)$, $E_i = (q_1-q_2)/(2\varepsilon_0)$, $\sigma_1 = \sigma_2 = (q_1+q_2)/2$, $\sigma_1' = -\sigma_2' = (q_1-q_2)/2$.

29. Hľadaný potenciál je riešením Laplaceovej rovnice

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

a v rovine $y = 0$ predstavuje periodickú obdĺžnikovú funkciu, ktorú možno rozvinúť do Fourierovho radu

$$V(x,0) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_n \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{a}x$$

kde $n = 1, 3, 5, \ldots$ sú všetky nepárne kladné čísla. Riešenie Laplaceovej rovnice možno hľadať v tvare

$$V(x,y) = X(x).Y(y)$$

Dosadením tohto výrazu do Laplaceovej rovnice a po jej úprave dostaneme rovnicu

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}=0$$

Prvý člen tejto rovnice závisí iba od x a druhý iba od y. Aby rovnica bola splnená pre všetky x a y treba, aby sa jednotlivé členy rovnali konštantám. Položme teda

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=-k_x^2 \quad \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}=k_y^2$$

kde

$$k_x{}^2 = k_y{}^2 = k^2$$

je predbežne ľubovoľná konštanta. Riešenia týchto rovníc sú

$$X = A\ \sin kx + B\ \cos kx \qquad\qquad Y = C\ \mathrm{e}^{ky} + D\ \mathrm{e}^{-ky}$$

takže

$$V(x,y) = X.Y = (A\ \sin kx + B\ \cos kx).(\ C\ \mathrm{e}^{ky} + D\ \mathrm{e}^{-ky})$$

kde $A,\ B,\ C,\ D$ sú integračné konštanty. Riešením Laplaceovej rovnice bude aj superpozícia takýchto riešení, teda

$$V(x,y)=\sum_n \left(A_n \sin k_n x + B_n \cos k_n x\right)\left(C_n \mathrm{e}^{k_n y} + D_n \mathrm{e}^{-k_n y}\right)$$

pre n nepárne. Hodnoty konštánt A, B, C, D treba určiť z okrajových podmienok. Pre $|y| \to \infty$ potenciál musí klesať k nule, z čoho plynie, že musí platiť

$$C_n = 0 \text{ pre } y > 0 \qquad \text{a} \qquad D_n = 0 \text{ pre } y < 0$$

Tiež $B_n = 0$, pretože riešenie v rovine $y = 0$ neobsahuje členy s kosínusmi. Pre konštanty A_n a k_n z výrazu pre potenciál v rovine $y = 0$ plynie

$$A_n = \frac{4V_0}{n\pi} \qquad\qquad k_n = \frac{n\pi}{a}$$

Hľadaný potenciál je teda tvaru

$$V(x,y)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_n \frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad \text{pre } y \ge 0$$

$$V(x,y)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_n \frac{1}{n}\exp\left(+\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad \text{pre } y \le 0$$

Jednotlivé členy potenciálu (harmonické zložky) klesajú exponenciálne s nárastom $|y|$. n-tá harmonická klesne na 1/e-tinu vo vzdialenosti $y_n = a/(n\pi)$. Amplitúdy harmonických zložiek klesajú veľmi rýchle, takže už pre $|y| \ge a/\pi$ možno potenciál vyjadriť približnými výrazmi

$$V(x,y)\approx\frac{4V_0}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi}{a}y\right)\sin\frac{\pi}{a}x \qquad \text{pre } y \ge a/\pi$$

$$V(x,y)\approx\frac{4V_0}{\pi}\exp\left(\frac{\pi}{a}y\right)\sin\frac{\pi}{a}x \qquad \text{pre } y \le -a/\pi$$

30. Z výrazov (2.21) alebo (2.119) plynie pre intenzity v bode A hodnota $E_y = 3{,}1.10^7$ V/m, a v bode B hodnota $E_y = -6{,}2.10^7$ V/m.

31. Energia dipólu $\boldsymbol{p}_1$ v elektrickom poli $\boldsymbol{E}_2$ dipólu $\boldsymbol{p}_2$ je $W = -\boldsymbol{p}_1.\boldsymbol{E}_2$, pričom

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}_2.\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}_2}{r^3}\right]$$

takže

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{p}_1.\boldsymbol{p}_2}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{p}_1.\boldsymbol{r})(\boldsymbol{p}_2.\boldsymbol{r})}{r^5}\right]$$

Výraz pre energiu je symetrický vzhľadom na $\boldsymbol{p}_1$ a $\boldsymbol{p}_2$ – ide o vzájomnú (interakčnú) energiu.

32. Vo vzdialenosti r od priamky je intenzita elektrického poľa

$$\boldsymbol{E}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r$$

kde $\boldsymbol{e}_r$ je jednotkový vektor v smere vzdialenosti r.

a) Vektory $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{e}_r$ resp. $\boldsymbol{E}_r$ sú kolineárne. Veľkosť sily pôsobiacej na dipól je daná výrazom

$$F_r = \boldsymbol{p}.\mathrm{grad}\, E_r = \boldsymbol{p}.\frac{\mathrm{d}E_r}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r = \pm\frac{\lambda p}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

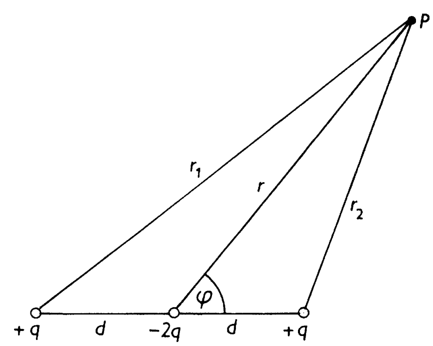
a smeruje k priamke alebo od nej podľa orientácie dipólu. Moment sily

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}_r = 0$$

b) Vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{E}_r$ sú navzájom kolmé. Sila $\boldsymbol{F}_r = 0$ a moment sily

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}_r = \pm\frac{\lambda p}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_\varphi$$

kde $\boldsymbol{e}_\varphi$ je jednotkový vektor v azimutálnom smere.



Obr. R33

33. Potenciál v bode P na *obr. R33* je daný superpozíciou potenciálov od jednotlivých nábojov, teda

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{2}{r}\right)$$

pričom

$$r_1 = \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd\cos\varphi} = r\sqrt{1 + p^2 + 2p\cos\varphi}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi} = r\sqrt{1 + p^2 - 2p\cos\varphi}$$

kde $p = d/r$. Výraz pre potenciál možno teda napísať v tvare

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2+2p\cos\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2-2p\cos\varphi}} - 2\right)$$

Keďže $p \ll 1$, možno prvé dva členy v zátvorke rozvinúť do mocninného MacLaurinovho radu podľa mocnín p s využitím rozvoja

$$\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 - \cdots \qquad \text{kde v našom prípade} \qquad \delta = p^2 \pm 2p\cos\varphi$$

takže dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2 \pm 2p\cos\varphi}} = 1 \mp p\cos\varphi + \frac{p^2}{2}\left(3\cos^2\varphi - 1\right) \pm \textit{ členy vyšších rádov}$$

Ak sa obmedzíme na členy s mocninami najviac p^2, potom pre potenciál dostaneme výraz

$$V = \frac{qd^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\varphi - 1\right)$$

34. Podľa *obr. R34* a výrazu (2.127) je potenciál na osi kruhovej dvojvrstvy vo vzdialenosti z daný výrazom

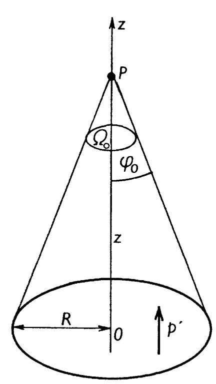
$$V = \frac{p'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega_0} \mathrm{d}\Omega$$

kde $\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ je element priestorového uhlu Ω_0 , takže

$$V = \frac{p'}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\varphi_0} 2\pi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{p'}{2\varepsilon_0}\left(1 - \cos\varphi_0\right)$$

Keďže $\cos\varphi_0 = z/\sqrt{R^2+z^2}$ možno výraz pre potenciál napísať v tvare

$$V = \frac{p'}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|}$$



Obr. R34

Intenzita elektrického poľa v bode P je

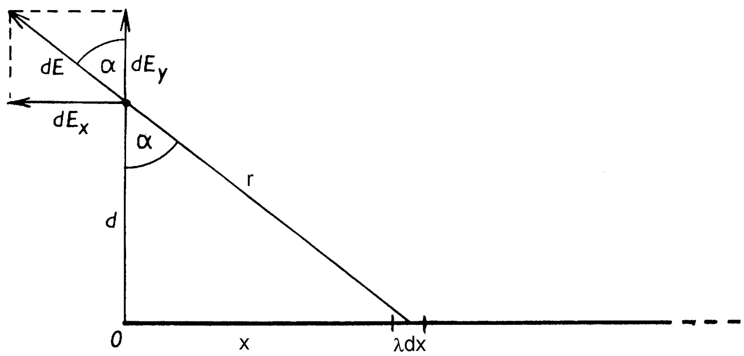
$$E = E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = \frac{p'R^2}{2\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\frac{z}{|z|}$$

35. Intenzita elektrického poľa od nábojového elementu $\lambda\mathrm{d}x$ (*obr. R35*) vo vzdialenosti r je daná výrazom

$$\mathrm{d}E = \frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

a zložky v smeroch osí x a y

$$\mathrm{d}E_x = -\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha \qquad\qquad \mathrm{d}E_y = \frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha$$



Obr. R35

Ak vezmeme do úvahy, že $x = d\,\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{d}x = (d/\cos^2\alpha)\mathrm{d}\alpha$ a $r = d/\cos\alpha$, možno posledné výrazy uviesť na tvar

$$\mathrm{d}E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha \qquad\qquad \mathrm{d}E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\cos\alpha\mathrm{d}\alpha$$

Integráciou týchto výrazov podľa α od 0 po $\pi/2$ dostaneme

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} \qquad\qquad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

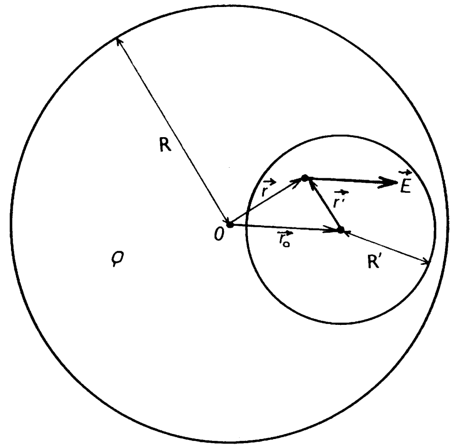
Veľkosť vektora intenzity elektrického poľa

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

a uhol, ktorý zviera vektor $\boldsymbol{E}$ s osou x

$$\alpha_0 = \mathrm{arctg}\frac{E_y}{|E_x|} = 45^\circ$$

36. Pole v dutine možno považovať za superpozíciu poľa od náboja rovnomerne rozloženého v celom objeme gule s hustotou $+\rho$ a poľa náboja rovnomerne rozloženého s hustotou $-\rho$ v guľovom objeme s polomerom R'. V dutine bude teda platiť (*obr. R36*):



Obr. R36

a) $\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r} - \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}' = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}_0$

Je dobre všimnúť si, že elektrické pole v dutine je homogénne a pre kladné ρ má smer vektora $\boldsymbol{r}_0$.

b) Pri danom R bude elektrické pole v dutine maximálne, ak bude $\boldsymbol{r}_0$ maximálne, a teda ak $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}'$, t. j. ak sa dutina svojím okrajom bude dotýkať vonkajšej guľovej plochy. Objem dutiny $\tau = 4\pi R'^3/3$. Súčin

$$\tau E = \frac{4\pi\rho}{9\varepsilon_0}\left(RR'^3 - R'^4\right)$$

bude maximálny pre také R', ktoré spĺňa podmienku

$$\frac{\partial \tau E}{\partial R'} = \frac{4\pi\rho}{9\varepsilon_0}\left(3RR'^2 - 4R'^3\right) = 0 \qquad \text{a teda ak} \qquad R'/R = 3/4$$

37. Z výrazu pre nulový potenciál

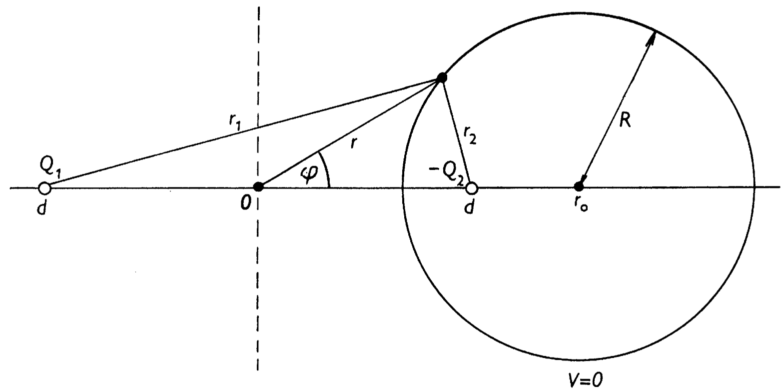
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_2}{r_2}\right) = 0$$

plynie vzťah medzi vzdialenosťami r_1 a r_2 nábojov od ľubovoľného bodu na ploche nulového potenciálu (pozri *obr. R37*)

$$Q_1 r_2 = Q_2 r_1$$

Podľa kosínusovej vety

$$r_1^2 = r^2 + d^2 + 2rd\cos\varphi$$
$$r_2^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi$$



Obr. R37

takže rovnicu pre plochu nulového potenciálu možno napísať v tvare

$$r^2 + d^2 - 2rd\,\frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1^2 - Q_2^2}\cos\varphi = 0$$

V polárnych súradniciach je to rovnica kružnice s polomerom

$$R = d\,\frac{2Q_1Q_2}{Q_1^2 - Q_2^2}$$

a stredom ležiacim na polárnej osi vo vzdialenosti od bodu 0

$$r_0 = d\,\frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1^2 - Q_2^2}$$

Plocha nulového potenciálu je teda guľová plocha s polomerom R a vzdialenosťou stredu r_0 od začiatku zvolenej súradnej sústavy.

3 Elektrostatické pole za prítomnosti vodičov

38. Intenzita elektrického poľa v guľovom kondenzátore podľa *obr. R38* (pre $a < r < b$) je

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{a na povrchu vnútornej gule} \qquad E(a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

Rozdiel potenciálov gulí je

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \qquad \text{z čoho} \qquad q = 4\pi\varepsilon_0 U\,\frac{ab}{b-a}$$

takže intenzitu elektrického poľa na povrchu vnútornej gule možno vyjadriť ako

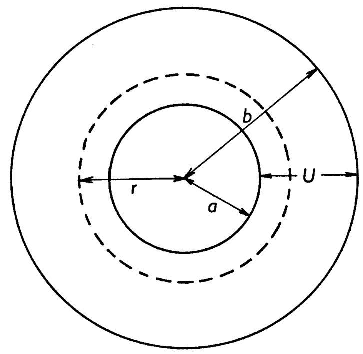
$$E(a) = \frac{bU}{a(b-a)}$$

Intenzita bude mať extrém (v tomto prípade minimum) pre takú hodnotu a, pre ktorú platí

$$\frac{\partial E(a)}{\partial a} = bU\frac{2a - b}{a^2 (b - a)^2} = 0$$

odkiaľ pre polomer vnútornej gule s minimálnou intenzitou plynie hodnota $a = b/2$. Kondenzátor bude mať pritom kapacitu

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} = 4\pi\varepsilon_0 b$$



Obr. R38

39. Intenzita elektrického poľa v koaxiálnom kábli je

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

a na povrchu vnútorného vodiča s polomerom a

$$E(a) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

kde λ je náboj na jednotku dĺžky vodiča. Napätie na kábli možno vyjadriť ako

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \qquad \text{z čoho} \qquad \lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln\frac{b}{a}}$$

takže

$$E(a) = \frac{U}{a\ln\frac{b}{a}}$$

Intenzita bude minimálna pre taký polomer vnútorného vodiča a_0 , pre ktorý platí

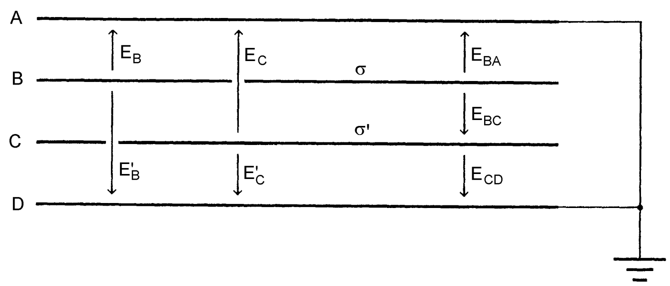
$$\left(\frac{\partial E(a)}{\partial a}\right)_{a=a_0} = U\frac{1-\ln\frac{b}{a_0}}{a_0^2\ln^2\frac{b}{a_0}} = 0$$

z čoho pre polomer vnútorného vodiča plynie hodnota $a_0 = b/\mathrm{e}$, kde e je základ prirodzených logaritmov.

40. Roviny B a C sú na potenciáloch

$$V_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} a \qquad V_C = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} b$$

oproti zemi.



Obr. R41

41. Úlohu možno riešiť napríklad s využitím zákona superpozície. Možno vybrať dosku C a počítať intenzitu elektrického poľa od náboja na doske B. Pre tento prípad platí (pozri *obr. R41*)

$$E_B a = E'_B \, 2a \qquad \text{a z Gaussovho zákona} \qquad E_B + E'_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

takže
$$E_B = \frac{2\sigma}{3\varepsilon_0} \qquad E'_B = \frac{\sigma}{3\varepsilon_0}$$

Podobne, ak sa odstráni doska B, potom intenzity elektrického poľa od nábojov na doske C sú

$$E_C = \frac{\sigma'}{3\varepsilon_0} \qquad E'_C = \frac{2\sigma'}{3\varepsilon_0}$$

Podľa *obr. R41* sú výsledné intenzity

$$E_{BA} = E_B + E_C = \frac{1}{3\varepsilon_0}(2\sigma + \sigma') \qquad E_{CD} = E'_B + E'_C = \frac{1}{3\varepsilon_0}(\sigma + 2\sigma')$$

$$E_{BC} = E'_B - E_C = \frac{1}{3\varepsilon_0}(\sigma - \sigma')$$

Potenciály rovín B a C oproti zemi sú

$$V_B = E_{BA} a = \frac{a}{3\varepsilon_0}(2\sigma + \sigma') \qquad V_C = E_{CD} a = \frac{a}{3\varepsilon_0}(\sigma + 2\sigma')$$

a napätie medzi rovinami B a C

$$U_{BC} = V_B - V_C = \frac{a}{3\varepsilon_0}(\sigma - \sigma')$$

42. Platí (pozri *obr. R42*)

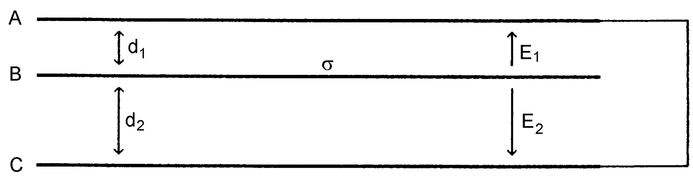
$$E_1 d_1 = E_2 d_2 \qquad E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

z čoho

$$E_1 = \frac{\sigma d_2}{\varepsilon_0 (d_1 + d_2)} = -\frac{\sigma_A}{\varepsilon_0} \qquad E_2 = \frac{\sigma d_1}{\varepsilon_0 (d_1 + d_2)} = -\frac{\sigma_C}{\varepsilon_0}$$

kde σ_A a σ_C sú plošné náboje na rovinách *A* a *C*, takže

$$\sigma_A = -\frac{\sigma d_2}{d_1 + d_2} \qquad \sigma_C = -\frac{\sigma d_1}{d_1 + d_2}$$



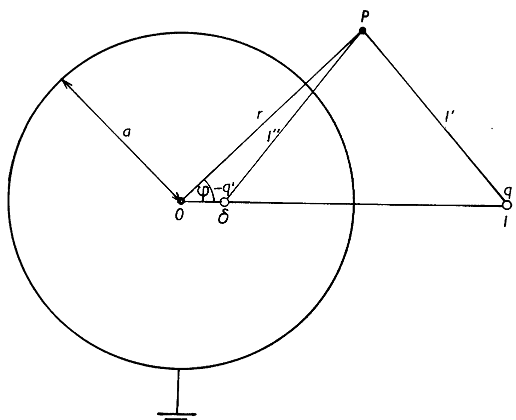
Obr. R42

43. Náboje na rovinách *A* a *B* sú

$$q_A = \left(\frac{x}{d} - 1\right) q \qquad q_B = -\frac{x}{d} q$$

44. Použitím podobného postupu ako v predchádzajúcej úlohe dostaneme

$$q_a = -q \frac{a}{r} \frac{b - r}{b - a}; \qquad q_b = -q \frac{b}{r} \frac{r - a}{b - a}$$



Obr. R45

45. Podľa úlohy 37 dva bodové náboje $+Q_1$ a $-Q_2$ budia vo svojom okolí elektrostatické pole s guľovou plochou nulového potenciálu. Polomer tejto plochy a poloha jej stredu je riešením spomínanej úlohy. Elektrostatické pole takejto dvojice z vonkajšej strany guľovej plochy sa nezmení, ak sa plocha nahradí guľovou vodivou uzemnenou plochou, pričom vnútorný náboj sa odstráni, pretože ho nahradí indukovaný náboj na ploche.

Potenciál guľovej uzemnenej plochy a bodového náboja podľa *obr. R45* možno teda modelovať dvoma nábojmi – reálnym nábojom $+q$ a "zrkadlovým" nábojom $-q'$, ktorého veľkosť a uloženie možno určiť pomocou výsledkov úlohy 37 s uvážením označení na *obr. R45*. Pre polomer guľovej plochy platí

$$a = (l - \delta)\frac{qq'}{q^2 - q'^2}$$

a vzdialenosť δ jej stredu od náboja $-q'$

$$\delta = (l - \delta)\frac{q'^2}{q^2 - q'^2}$$

Riešením posledných dvoch rovníc pre q' a δ dostaneme

$$q' = \frac{a}{l}q \qquad\qquad \delta = \frac{a^2}{l}$$

a) Potenciál v oblasti $r > a$ (mimo gule) bude superpozíciou potenciálu od nábojov q a $-q'$, teda vzhľadom na *obr. R45*

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{l'} - \frac{q'}{l''}\right)$$

kde

$$l' = \sqrt{r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi} \qquad\qquad l'' = \sqrt{r^2 + \delta^2 - 2r\delta\cos\varphi}$$

takže

$$V(r,\varphi) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi}} - \frac{a}{l\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{l^2} - 2r\frac{a^2}{l}\cos\varphi}}\right)$$

b) Ak je guľová plocha izolovaná nenabitá, potom k potenciálu vypočítanému v bode a) treba superponovať potenciál bodového náboja $+q_0'$, umiestneného v strede guľovej plochy.

c) Ak je guľová plocha izolovaná a nabitá nábojom q_0, treba k potenciálu z bodu b) superponovať potenciál bodového náboja q_0 umiestneného v strede gule.

Vo vnútri guľovej plochy je potenciál v prípadoch a) nulový, b)

$$V = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = \text{konšt.} \qquad \text{a v prípade c)} \qquad V = \frac{q' + q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \text{konšt.}$$

46. Podobne ako v úlohe 45 možno nájsť "zrkadlový" náboj q' (z vonkajšej strany guľovej plochy), ktorého veľkosť je $q' = -(a/\delta)q$ a je umiestnený vo vzdialenosti $d = a^2/\delta$ od stredu guľovej plochy. Náboj q bude priťahovaný ku guľovej ploche silou

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(d-\delta)^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\delta}{\left(a^2 - \delta^2\right)^2}$$

ktorá nezávisí od elektrického stavu gule, t. j. či je guľa uzemnená, izolovaná, nabitá alebo nenabitá.

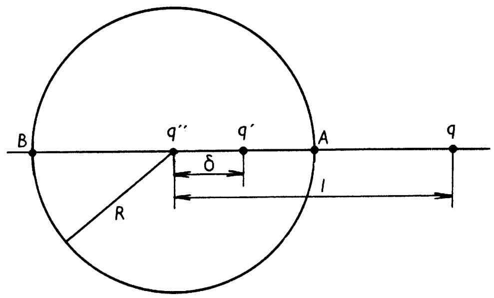
47. Nenabitú kovovú guľu možno podľa úlohy 45 modelovať dvoma nábojmi $q' = -(R/l)q$ a $q'' = -q'$, pričom q'' je umiestnený v strede gule a q' vo vzdialenosti $\delta = R^2/l$ od stredu gule smerom k náboju q (pozri *obr. R47*). Intenzita týchto troch nábojov v bode A (najbližší k náboju q) je

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(R-l)^2} - \frac{q'}{(R-\delta)^2} - \frac{q''}{R^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3l-R}{l(l-R)^2}$$

a v bode B (najvzdialenejší od náboja q)

$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(R+l)^2} + \frac{q'}{(R+\delta)^2} + \frac{q''}{R^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3l+R}{l(l+R)^2}$$

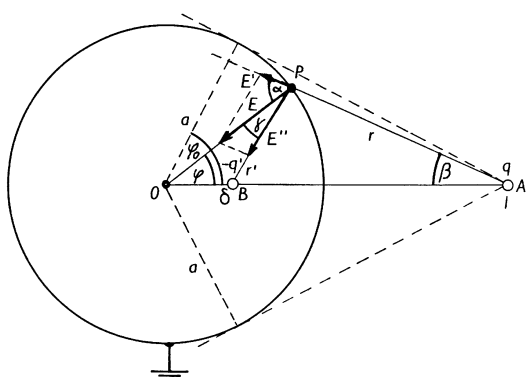
Po dosadení číselných hodnôt dostaneme E_A = 2 246,9 V/m, E_B = 349,5 V/m. Intenzity v oboch bodoch smerujú na *obr. R47* doľava.



Obr. R47

48. Pri výpočte plošnej hustoty náboja na uzemnenej guli v prítomnosti bodového náboja q možno vychádzať zo skutočností, že

a) intenzita elektrického poľa na povrchu guľovej plochy má smer normály (smeruje do vnútra guľovej plochy),



Obr. R48

b) plošná hustota náboja na guli je viazaná s intenzitou poľa podľa Coulombovej vety.

Intenzitu elektrického poľa na povrchu gule možno vypočítať ako priemet intenzít elektrického poľa od náboja q a zrkadlového náboja $-q' = -(a/l)q$ na polomer gule podľa *obr. R48*. Zaveďme označenie $p = a/l$, takže zrkadlový náboj $q' = pq$ a jeho vzdialenosť od stredu guľovej plochy $\delta = pa$. Z *obr. R48* ďalej plynie, že

$$r = \sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos\varphi} = l\sqrt{1 + p^2 - 2p\cos\varphi}$$

$$r' = \sqrt{a^2 + \delta^2 - 2a\delta\cos\varphi} = a\sqrt{1 + p^2 - 2p\cos\varphi} = pr$$

Intenzita poľa v bode P na *obr. R48* je

$$E = E'\cos\alpha + E''\cos\gamma$$

kde

$$E' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad\qquad E'' = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 pr^2}$$

Ak ďalej uvážime, že

$$\alpha = \beta + \varphi \qquad \text{a tiež} \qquad \gamma = \beta$$

čo plynie z podobnosti trojuholníkov OAP a OPB, možno dôjsť k výrazu pre intenzitu elektrického poľa na guľovej ploche v tvare

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 la}\frac{1 - p^2}{\left(1 + p^2 - 2p\cos\varphi\right)^{3/2}}$$

Podľa Coulombovej vety je na povrchu gule záporný plošný náboj s hustotou

$$\sigma(\varphi) = -\varepsilon_0 E = \frac{-q}{4\pi la}\frac{1 - p^2}{\left(1 + p^2 - 2p\cos\varphi\right)^{3/2}}$$

Celkový náboj na guli dostaneme integráciou σ po celej guľovej ploche. Ako plošné elementy na guli zvolíme pásiky s plôškami $\mathrm{d}S = 2\pi a^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. Celkový náboj na guli

$$Q = 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \sigma \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = -\frac{a}{l}q = -q'$$

Z bodu A vidieť časť guľovej plochy, ktorá je na *obr. R48* vymedzená uhlom φ_0, pre ktorý platí

$$\cos\varphi_0 = \frac{a}{l} = p$$

takže náboj na tejto časti plochy je

$$Q = 2\pi a^2 \int_0^{\varphi_0} \sigma \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = -\frac{q'}{l}\left(1 + p - \sqrt{1 - p^2}\right)$$

49. Intenzity a potenciály elektrického poľa sú

$$E = \frac{q + q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad V = \frac{q + q'}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \textit{pre } r > r_3$$

$$E = 0 \qquad V = \frac{q + q'}{4\pi\varepsilon_0 r_3} \qquad \textit{pre } r_3 > r > r_2$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{q + q'}{r_3} - \frac{q}{r_2}\right) \qquad \textit{pre } r_2 > r > r_1$$

$$E = 0 \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q + q'}{r_3} - \frac{q}{r_2}\right) \qquad \textit{pre } r < r_1$$

Intenzity elektrického poľa majú radiálny smer.

Z Coulombovej vety plynú pre plošné náboje na jednotlivých guľových plochách výrazy

$$\sigma(r_1) = \frac{q}{4\pi r_1^2} \qquad \sigma(r_2) = -\frac{q}{4\pi r_2^2} \qquad \sigma(r_3) = \frac{q+q'}{4\pi r_3^2}$$

50. a) 10^3 V, b) $f = \dfrac{\varepsilon_0 U^2 S}{2d^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{CU^2}{d} = 0{,}5$ N

c) 2.10^3 V, d) 5.10^{-4} J

51.

$$C_1 = \frac{q}{U}\frac{(k+1)^2}{k-1} \qquad C_2 = \frac{q}{U}\frac{(k+1)^2}{k^2-k}$$

52.

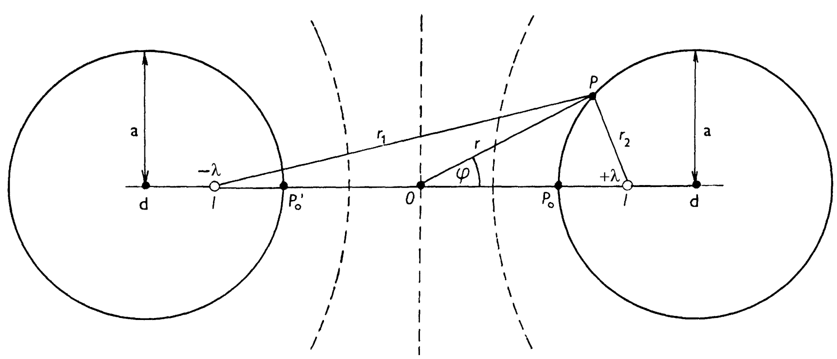
$$U' = \frac{Q}{C_1+C_2} = \frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}U$$

$$Q_1' = C_1\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}U \qquad Q_2' = C_2\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}U$$

Po spojení svoriek A a B dochádza k úbytku energie kondenzátora o

$$\Delta W = -2\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U^2$$

v dôsledku tepelných strát vo vodičoch a vyžiarenia elektromagnetického impulzu.



Obr. R53

53. Najprv ukážeme, že ekvipotenciálne plochy dvoch paralelných priamkových nábojov s hustotou $\pm\lambda$ (C/m) umiestnených paralelne vo vzdialenosti $2l$ (pozri *obr. R53*) sú valcové plochy. Pre potenciál v bode P platí

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2} + \text{konšt.}$$

Na ploche konštantného potenciálu

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{konšt.} = k \qquad \text{alebo} \qquad r_1^2 = k^2 r_2^2$$

Ak do posledného vzťahu s využitím kosínusovej vety dosadíme

$$r_1^2 = r^2 + l^2 + 2rl\cos\varphi \qquad \text{a} \qquad r_2^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos\varphi$$

po úprave dostaneme rovnicu

$$r^2 + l^2 + 2rl\frac{1+k^2}{1-k^2}\cos\varphi = 0$$

Táto rovnica je rovnicou prierezovej krivky ekvipotenciálnych plôch v polárnych súradniciach – je to rovnica kružnice, ktorej polomer a a vzdialenosť d jej stredu od začiatku 0 na polárnej osi spĺňajú vzťahy

$$d^2 - a^2 = l^2 \qquad d = l\frac{k^2+1}{k^2-1}$$

z čoho

$$a = 2l\frac{k}{k^2-1} \qquad d = l\frac{k^2+1}{k^2-1}$$

Ekvipotenciálne plochy sú teda valcové plochy obopínajúce náboje $\pm\lambda$, pričom valcové plochy rovnakého polomeru sú na potenciáloch, ktoré sú v absolútnej hodnote rovnaké a líšia sa znamienkom. Ekvipotenciálne plochy možno nahradiť vodivými valcami a náboje $\pm\lambda$ preniesť na ne – pole v okolí valcov bude také isté ako pole priamkových nábojov umiestnených vo vzájomnej vzdialenosti

$$l = \sqrt{d^2 - a^2}$$

K výpočtu kapacity valcov treba poznať rozdiel ich potenciálov (napätie). Pre ľubovoľný bod P na valci s nábojom $+\lambda$ a symetricky na valci s nábojom $-\lambda$ v bode P' sú potenciály

$$V_{1,2} = \frac{\pm\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2} + \text{ konšt.}$$

takže rozdiel potenciálov (napätie) valcov

$$U = V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

Tento výraz platí pre ľubovoľné dva body na valcoch, a preto tieto body možno zvoliť na priesečníkoch spojnice osí valcov s valcovými plochami (body P_0 a P_0' na *obr. R53*). Tam platí

$$U = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a+l}{a-d+l} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a+\sqrt{d^2-a^2}}{a-d+\sqrt{d^2-a^2}} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{a}+\sqrt{\frac{d^2}{a^2}-1}\right)$$

takže kapacita na jednotku dĺžky dvojice valcov

$$C' = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{a}+\sqrt{\frac{d^2}{a^2}-1}\right)} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\operatorname{argcosh}\frac{d}{a}} \qquad [\mathrm{F/m}]$$

V praxi sú polomery a valcov malé oproti vzdialenosti ich osí $2d$, t. j. $d/a \gg 1$. V takých prípadoch

$$\operatorname{argcosh}\frac{d}{a} \approx \ln\frac{2d}{a}$$

a kapacita $$C' \approx \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2d}{a}} \qquad \text{[F/m]}$$

Posledný výraz udáva kapacitu na jednotku dĺžky technicky dôležitého dvojvodičového symetrického vedenia (známeho tiež pod názvom "dvojlinka"). Spolu s indukčnosťou na jednotku dĺžky udávajú tieto parametre dôležitú elektrotechnickú veličinu vedenia – vlnovú impedanciu (vlnový odpor) vedenia.

54. Potenciál plášťa voči zemi je

$$U_0 = \frac{C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

55. Napätia na jednotlivých kondenzátoroch sú

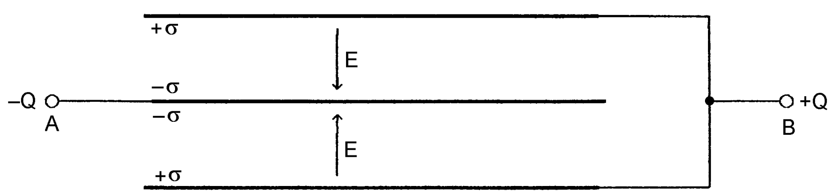
$$U_1' = \frac{C}{C_1}(U_1 + U_2 + U_3) \qquad U_2' = \frac{C}{C_2}(U_1 + U_2 + U_3) \qquad U_3' = \frac{C}{C_3}(U_1 + U_2 + U_3)$$

kde

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

56. Ak privedieme na svorky A a B náboje $\pm Q$, rozložia sa tieto náboje na doskách tak, ako je to znázornené na *obr. R56*. Plošné náboje sú $\sigma = Q/(2S)$ a intenzita elektrického poľa $E = \sigma/\varepsilon_0$. Medzi svorkami A a B je napätie

$$U_{AB} = Eh = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}h = \frac{Qh}{2\varepsilon_0 S} \qquad \text{a kapacita} \qquad C_{AB} = \frac{Q}{U_{AB}} = 2\frac{\varepsilon_0 S}{h} = 2C$$



Obr. R56

Uvažovaný systém dosiek predstavuje dva rovnaké kondenzátory s kapacitami $C = \varepsilon_0 S/h$ zapojené paralelne.

57. Náboje $\pm Q$ privedené na svorky A a B sa rozložia na doskách tak ako na *obr. R57a*. Pre plošné hustoty a intenzity platia vzťahy

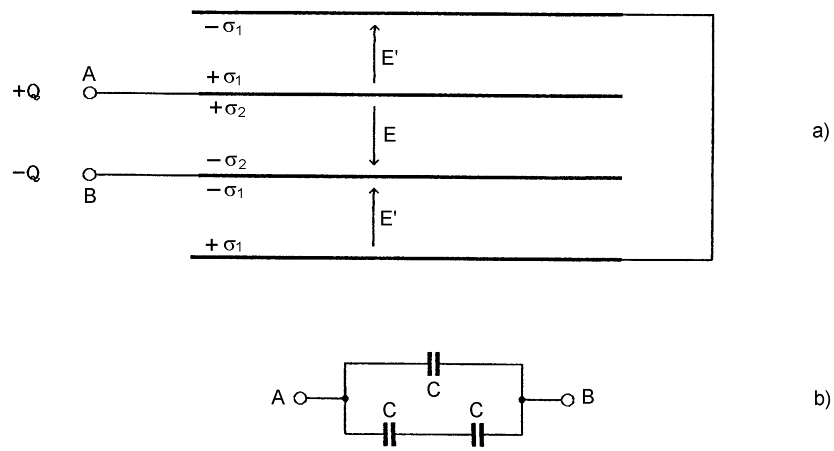
$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma = \frac{Q}{S} \qquad E' + E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad 2E'h - Eh = 0$$

Z týchto rovníc dostaneme intenzitu

$$E = \frac{2}{3}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{2}{3}\frac{Q}{\varepsilon_0 S} \qquad \text{a napätie medzi svorkami } A \text{ a } B \qquad U_{AB} = Eh = \frac{2}{3}\frac{Qh}{\varepsilon_0 S}$$

z čoho kapacita $$C_{AB} = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{h} = \frac{3}{2}C$$

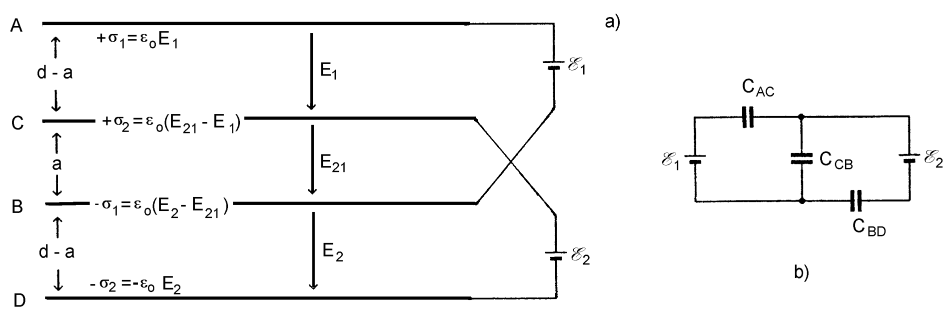
$C = \varepsilon_0 S/h$ je kapacita susedných dvoch dosiek. Výsledok možno dostať priamo, ak si uvedomíme, že sústava dosiek predstavuje sériovo-paralelné spojenie troch rovnakých kondenzátorov podľa *obr. R57b*.



Obr. R57

58. $C_{AB} = 3C$, kde $C = \varepsilon_0 S/h$

59. Integráciou napätí po uzavretých dráhach na *obr. R59a* dostaneme dve rovnice



Obr. R59

$$E_1(d-a) + E_{21}a = \mathscr{E}_1 \qquad\qquad E_{21}a + E_2(d-a) = \mathscr{E}_2$$

a z porovnania nábojových hustôt rovnicu

$$E_{21} = E_1 + E_2$$

Riešením tohto systému rovníc pre E_{21} dostaneme

$$E_{21} = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{d+a}$$

Napätie medzi doskami C a B je

$$U_{CB} = E_{21}a = \left(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2\right)\frac{a}{d+a}$$

Kladná je doska C.

Iný spôsob riešenia plynie zo zapojenia na *obr. R59b*, ktoré je elektrotechnickou obvodovou náhradou sústavy dosiek a zdrojov na *obr. R59a*. Hodnoty kapacít kondenzátorov sú

$$C_{AC} = C_{BD} = \frac{\varepsilon_0 S}{d-a} \qquad a \qquad C_{CB} = \frac{\varepsilon_0 S}{a}$$

a pre obvod na *obr. R59b* platia rovnice [pozri výrazy (3.20) a (3.21)]

$$\mathscr{E}_1 = \frac{Q_{AC}}{C_{AC}} + \frac{Q_{CB}}{C_{CB}} \qquad \mathscr{E}_2 = \frac{Q_{CB}}{C_{CB}} + \frac{Q_{BD}}{C_{BD}} \qquad Q_{AC} - Q_{CB} + Q_{BD} = 0$$

kde Q_{AC}, Q_{CB}, Q_{BD} sú náboje na jednotlivých kondenzátoroch. Riešením týchto rovníc dostaneme napätie U_{CB} na kondenzátore C_{CB} v tvare

$$U_{CB} = \frac{Q_{CB}}{C_{CB}} = \frac{C_{AC}\mathscr{E}_1 + C_{BD}\mathscr{E}_2}{C_{AC} + C_{CB} + C_{BD}} = \left(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2\right)\frac{a}{d+a}$$

60. Medzi kapacitami v trojuholníku a vo hviezde platia vzťahy

$$C_2 + \frac{C_1C_3}{C_1 + C_3} = \frac{C_1'C_3'}{C_1' + C_3'} \qquad C_1 + \frac{C_2C_3}{C_2 + C_3} = \frac{C_2'C_3'}{C_2' + C_3'}$$

$$C_3 + \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1'C_2'}{C_1' + C_2'}$$

Riešením týchto rovníc pre C_1', C_2', C_3' dostaneme

$$C_1' = \frac{C^2}{C_1} \qquad C_2' = \frac{C^2}{C_2} \qquad C_3' = \frac{C^2}{C_3}$$

kde

$$C^2 = C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3$$

alebo pre C_1, C_2, C_3

$$C_1 = \frac{C_2'C_3'}{C'} \qquad C_2 = \frac{C_1'C_3'}{C'} \qquad C_3 = \frac{C_1'C_2'}{C'}$$

kde

$$C' = C_1' + C_2' + C_3'$$

61. Úlohu možno riešiť dvoma spôsobmi:

a) použitím výrazu pre energiu v tvare [pozri výraz (3.32)]

$$W = \frac{1}{2}\int_\tau \rho V \mathrm{d}\tau$$

kde τ je objem gule a $\mathrm{d}\tau$ je elementárny objem, ktorý v prípade sférickej symetrie rozloženia náboja možno voliť v tvare guľových vrstiev, teda $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$. Ak uvážime, že hustota náboja v guli $\rho = Q/\tau = 3Q/(4\pi a^3)$ a potenciál v guli

$$V(r) = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{6}\right)$$

[možno ho vypočítať využitím výrazu (2.88)], potom dosadením do výrazu pre energiu dostaneme

$$W = 2\pi\rho\int_0^a V(r)r^2 \mathrm{d}r = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

b) z výrazu pre energiu v tvare

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2 \mathrm{d}\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\tau E_1^2 \mathrm{d}\tau + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\infty-\tau} E_2^2 \mathrm{d}\tau = W_1 + W_2$$

kde $\infty - \tau$ je celý priestor mimo objemu gule. Intenzita elektrického poľa vo vnútri gule

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \qquad \text{a mimo gule} \qquad E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

takže jednotlivé príspevky k energii sú

$$W_1 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^6}\int_0^a r^4 \mathrm{d}r = \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 a} \qquad \text{a} \qquad W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

Celková energia je znovu $$W = W_1 + W_2 = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

62. Zmena energie jadier po rozpade

$$\Delta W = W - 2W' \qquad \text{kde} \qquad W = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$

je energia jadra pred rozpadom (pozri úlohu 61) a

$$W' = \frac{3Q'^2}{20\pi\varepsilon_0 a'}$$

je energia každého z jadier s polomerom a' s celkovým nábojom Q' po rozpade, pričom

$$Q' = Q/2 \qquad \text{a} \qquad a' = a/(2^{1/3})$$

takže

$$\Delta W = W(1 - 2^{-2/3}) = 6{,}8.10^{-11}\ \mathrm{J} = 425\ \mathrm{MeV}$$

Pre hrubý odhad uvoľnenej jadrovej energie budeme predpokladať, že kilogram štiepneho materiálu obsahuje

$$n = \frac{1}{235 m_p} = 2{,}55.10^{24}\ \mathrm{kg}^{-1}$$

jadier U^{235}. Uvoľnená energia z jedného kilogramu štiepneho materiálu je

$$W_{\mathrm{kg}} = \Delta W n = 1{,}73.10^{14}\ \mathrm{J.kg}^{-1}$$

Explozívna energia výbušnín sa udáva v množstve uvoľnenej energie na jednu tonu trinitrotoluénu (1 t TNT), pričom 1 t TNT ~ $4{,}2.10^9$ J. Uvoľnená jadrová energia na jeden kilogram štiepneho materiálu je

$$W = 41\,254\ \mathrm{t\ TNT.kg}^{-1} \approx 41\ \mathrm{kiloton\ TNT.kg}^{-1}\ !!!$$

Pre porovnanie, táto energia sa rovná tepelnej energii získanej spálením približne 6000 ton kvalitného čierneho uhlia.

63. Intenzita elektrického poľa náboja rovnomerne rozloženého na guli s polomerom a je pre $r \geq a$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

a pre $r \leq a$ sa rovná nule. Energiu takéhoto nábojového rozloženia možno vypočítať použitím výrazu

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 \mathrm{d}\tau$$

integráciou cez celý objem okrem objemu gule, v ktorom je intenzita poľa nulová. Ak zvolíme objemové elementy $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ potom

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

z čoho pre polomer gule plynie

$$a = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 W}$$

Dosadením číselných hodnôt dostaneme pre polomer π-mezónu hodnotu $a = 1{,}56.10^{-16}$ m.

64. Energia molekuly (na jeden ión) je

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-2\frac{e^2}{a} + 2\frac{e^2}{2a} - 2\frac{e^2}{3a} + \cdots\right) = -\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = -\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln 2$$

Energia je záporná, čo znamená, že na rozloženie molekuly na ióny treba vynaložiť prácu.

4 Elektrostatické pole v dielektriku

65. Uhol φ sa nezmení, ak hustota kvapaliny bude

$$\rho = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\rho_0$$

kde $\rho_0 = 3m/(4\pi R^3)$ je hustota materiálu guľôčok.

66. Ak sa na guľové plochy privedú náboje $\pm Q$, potom napätie medzi nimi bude

$$U = \int_{R_1}^{R_1+h} E_1 \mathrm{d}r + \int_{R_1+h}^{R_2} E_2 \mathrm{d}r$$

kde

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r^2} \qquad \text{a} \qquad E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} r^2}$$

sú intenzity elektrického poľa v dielektrikách s permitivitami ε_{r1} a ε_{r2}. Integráciou dostaneme pre napätie výraz

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_{r1} R_1} - \frac{1}{\varepsilon_{r2} R_2} - \frac{1}{R_1 + h}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\right]$$

a pre kapacitu

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}R_1R_2(R_1+h)}{\varepsilon_{r1}(R_2-R_1)R_1+(\varepsilon_{r2}R_2-\varepsilon_{r1}R_1)h}$$

67. Ak sa na doskách nachádzajú náboje $\pm Q$, potom na kondenzátore je napätie

$$U = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{h}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d-h}{\varepsilon_{r2}}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}S}\left[\varepsilon_{r1}d + \left(\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}\right)h\right]$$

a kapacita kondenzátora

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}S}{\varepsilon_{r1}d + \left(\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}\right)h}$$

68. Ak je na kondenzátore náboj $\pm Q$, potom je na ňom napätie

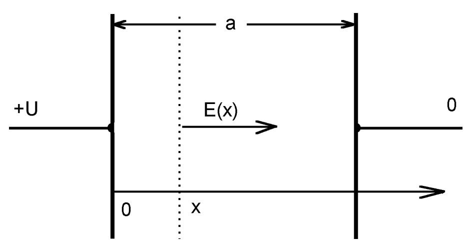
$$U = \frac{Q}{S}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\varepsilon(x)} = \frac{Qa}{\varepsilon_0 S}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \frac{Qa}{\varepsilon_0 S}\ln 2$$

z čoho kapacita

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{a\ln 2}$$

Intenzita elektrického poľa vo vzdialenosti x od kladnej elektródy (pozri *obr. R68*)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon(x)} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0(x+a)} \qquad \text{a polarizácia} \qquad P(x) = \left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)E = \sigma\frac{x}{x+a}$$



Obr. R68

kde

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{CU}{S} = \frac{\varepsilon_0 U}{a\ln 2}$$

(vektor polarizácie smeruje doprava). Pre hustoty plošných viazaných nábojov dostávame výrazy

$$\sigma_v(0) = P(0) = 0 \qquad\qquad \sigma_v(\mathrm{a}) = P(a) = \sigma/2$$

Priestorová hustota viazaného náboja v dielektriku je

$$\rho_v(x) = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{P} = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -\sigma\frac{a}{(x+a)^2}$$

Pri kladnej doske sa teda plošná hustota viazaného náboja rovná nule a pri zápornej je $\sigma_v(a) = \sigma/2 = \varepsilon_0 U/(2a\ \ln 2)$. Priestorový viazaný náboj v dielektriku je záporný a jeho celková hodnota je

$$Q_v = S\int_0^a \rho_v \mathrm{d}x = -\sigma S/2$$

Je to náboj, ktorý kompenzuje kladný viazaný plošný náboj $\sigma S/2$ na povrchu dielektrika pri zápornej elektróde.

69. a) Pretože pole vektorov ***D*** a ***E*** v priestore ohraničenom guľovými plochami je radiálne, možno zvoliť guľovú Gaussovu plochu s polomerom $a < r < b$, na ktorej platí $(D_1 + D_2)2\pi r^2 = Q$, kde D_1 je elektrická indukcia vo vákuovej časti objemu a D_2 v časti s dielektrikom. Na rozhraní vákuum-dielektrikum platí hraničná podmienka $D_1/\varepsilon_0 = D_2/\varepsilon$. Z posledných dvoch výrazov plynie, že

$$D_1 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon}\frac{Q}{2\pi r^2} \qquad\qquad D_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon}\frac{Q}{2\pi r^2}$$

b) Pre intenzity elektrického poľa platí

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0} \qquad\qquad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon}$$

takže

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{\varepsilon_0 + \varepsilon}\frac{Q}{2\pi r^2}$$

c) Na vnútornej guľovej ploche v časti kde je vákuum bude rozložený plošný náboj s hustotou

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 E_1 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon}\frac{Q}{2\pi a^2} = D_1(a) \quad \text{a v časti s dielektrikom} \quad \sigma_2 = \varepsilon E_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon}\frac{Q}{2\pi a^2} = D_2(a)$$

Na vonkajšej guľovej ploche budú náboje s hustotami $\sigma' = -D_1(b)$ vo vákuu a $\sigma' = -D_2(b)$ v dielektriku.

d) Na vnútornej ploche dielektrika bude viazaný náboj

$$\sigma_v = -P(a) = -(\varepsilon - \varepsilon_0)E(a) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi a^2}$$

a na vonkajšej ploche

$$\sigma_v = P(b) = (\varepsilon - \varepsilon_0)E(b) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi b^2}$$

Priestorový viazaný náboj v dielektriku nie je.

e) Napätie medzi guľovými plochami

$$U = \int_a^b E\mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_0 + \varepsilon)}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \qquad \text{a kapacita} \qquad C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi(\varepsilon_0 + \varepsilon)ab}{b - a}$$

70. Pole v kondenzátore je radiálne, a tak možno zvoliť guľovú Gaussovu plochu s polomerom $a < r < b$, na ktorej platí

$$Q = \varepsilon_0 \Omega r^2 E + (4\pi - \Omega)\varepsilon_0 r^2 E$$

z čoho intenzita elektrického poľa je

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 + \Omega(\varepsilon - \varepsilon_0)}\frac{1}{r^2}$$

Napätie na kondenzátore

$$U = \int_a^b E\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 + \Omega(\varepsilon - \varepsilon_0)}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

a jeho kapacita

$$C = \frac{Q}{U} = \left[4\pi\varepsilon_0 + \Omega(\varepsilon - \varepsilon_0)\right]\frac{ab}{b-a}$$

71. Pole v kondenzátore je centrálne symetrické, takže pri výpočte elektrickej indukcie v kondenzátore možno zvoliť guľovú Gaussovu plochu, na ktorej elektrická indukcia

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Intenzita elektrického poľa v kondenzátore

$$E = \frac{D}{\varepsilon(r)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \qquad \text{a napätie} \qquad U = \int_a^b E\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(a-b)$$

takže kapacita kondenzátora

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a^2}{a-b}$$

72. a) Na vnútornej ploche dielektrika je plošná hustota viazaného náboja

$$\sigma_v(R) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi R^2} \qquad \text{a na vonkajšej ploche} \qquad \sigma_v(R+h) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi(R+h)^2}$$

b) Priestorový náboj v dielektriku nie je.
c) Celkový viazaný náboj v dielektriku

$$Q_v(R+h) = \sigma_v(R+h)4\pi(R+h)^2 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}Q = -Q_v(R)$$

d) Vo vnútri vodivej gule je $\boldsymbol{D} = 0$, $\boldsymbol{E} = 0$ aj $\boldsymbol{P} = 0$. V dielektriku, t. j. pre $R < r < R + h$ je

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \qquad P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi r^2}$$

a vo vonkajšom priestore ($r > R + h$)

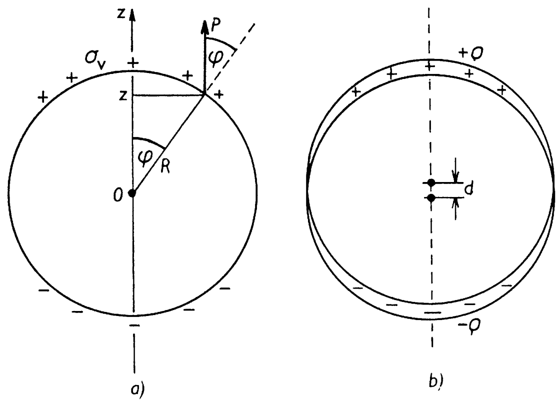
$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad P = 0$$

Všetky vektory poľa majú radiálny smer.

73. Homogénne polarizovaná guľa (pozri *obr. R73a*) má na svojom povrchu viazaný plošný náboj s hustotou, ktorá závisí od uhla φ podľa vzťahu

$$\sigma_v = P\cos\varphi$$

Takéto rozloženie náboja možno modelovať dvoma rovnomerne nabitými guľami, s konštantnými objemovými hustotami náboja $\pm\rho$. Gule sú preložené cez seba tak, že ich stredy sú posunuté o malú vzdialenosť d podľa obr. *R73b*. Keďže každá guľa vytvára v svojom okolí potenciál rovný potenciálu celkového náboja gule koncentrovaného do jej stredu, možno gule (z hľadiska ich vonkajšieho potenciálu) nahradiť bodovými nábojmi umiestnenými vo vzdialenosti d. Výsledné pole v okolí gule je teda poľom elektrického dipólu, ktorého moment treba určiť zo známej polarizácie gule. Ak koncentrácia elementárnych dipólov v guli je n a moment jedného dipólu je $\boldsymbol{p}_0 = q_0\boldsymbol{d}$, potom polarizácia



Obr. R73

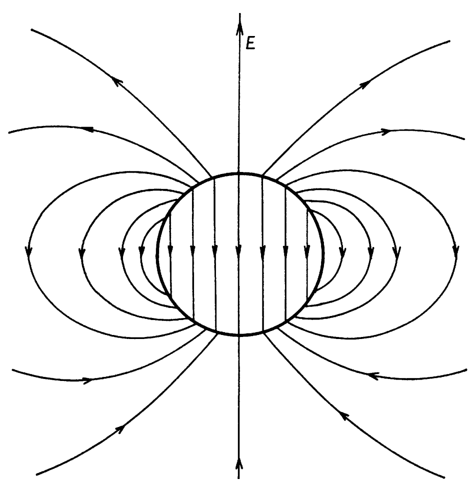
$$\boldsymbol{P} = n\boldsymbol{p}_0 = nq_0\boldsymbol{d} = \rho\boldsymbol{d}$$

kde ρ je objemová hustota nábojov v guli. Každá guľa má celkový náboj s absolútnou hodnotou

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{P}{d}$$

a celkový dipólový moment polarizovanej gule je

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d} = \frac{4}{3}\pi R^3 \boldsymbol{P}$$



Obr. R73c

Potenciál v okolí takého dipólu (teda v okolí polarizovanej gule)

$$V = \frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{P}.\boldsymbol{r}$$

Na povrchu gule je potenciál

$$V = \frac{\boldsymbol{P}.\boldsymbol{R}}{3\varepsilon_0} = \frac{PR\cos\varphi}{3\varepsilon_0} = \frac{Pz}{3\varepsilon_0}$$

Vo vnútri gule $V = Pz/(3\varepsilon_0)$ a závisí iba od vzdialenosti z od stredu gule v smere jej polarizácie. Intenzita elektrického poľa vo vnútri gule je konštantná a antiparalelná s osou z. Je daná výrazom

$$\boldsymbol{E} = -\frac{dV}{dz}\boldsymbol{e}_z = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$$

kde $\boldsymbol{e}_z$ je jednotkový vektor v smere osi z. V okolí gule je intenzita elektrického poľa intenzitou elektrického dipólu s momentom $4\pi R^3\boldsymbol{P}/3$. Siločiary elektrického poľa rovnomerne polarizovanej gule sú znázornené na *obr. R73c*.

74. a) Elektrické pole vo vnútri gule $\boldsymbol{E}_v$ je superpozíciou poľa $\boldsymbol{E}_0$ a poľa $\boldsymbol{E}_p$, ktoré je od polarizácie gule, teda

$$\boldsymbol{E}_v = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_p$$

Vektor polarizácie v guli je daný výrazom

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E}_v \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{E}_p = \frac{-\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$$

čo plynie z predchádzajúcej úlohy. Z posledných troch rovníc plynie, že

$$\boldsymbol{E}_v = \frac{3}{\varepsilon_r + 2}\boldsymbol{E}_0 \qquad \text{a polarizácia} \qquad \boldsymbol{P} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2}\boldsymbol{E}_0$$

Potenciál na povrchu gule a v jej vnútri

$$V = \frac{-3}{\varepsilon_r + 2}\boldsymbol{E}_0.\boldsymbol{r} = \frac{-3}{\varepsilon_r + 2}E_0 z$$

b) Vo vonkajšom priestore je potenciál superpozíciou potenciálu homogénneho elektrického poľa intenzity $\boldsymbol{E}_0$, teda $V_0 = -\boldsymbol{E}_0.\boldsymbol{r}$ a potenciálu od polarizovanej gule V_g. Potenciál od polarizovanej gule je potenciál dipólu, a teda podľa predchádzajúcej úlohy

$$V_g = \frac{R^3\boldsymbol{P}.\boldsymbol{r}}{3\varepsilon_0 r^3} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\frac{R^3}{r^3}\boldsymbol{E}_0.\boldsymbol{r}$$

takže výsledný potenciál v okolí gule

$$V_{vonk} = V_0 + V_g = -\boldsymbol{E}_0.\boldsymbol{r} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\frac{R^3}{r^3}\boldsymbol{E}_0.\boldsymbol{r}$$

Intenzita vonkajšieho elektrického poľa

$$\boldsymbol{E}_{vonk} = -\mathrm{grad}V_0 - \mathrm{grad}V_g = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_g$$

kde $\boldsymbol{E}_g$ je intenzita poľa od polarizovanej gule. Ide o superpozíciu homogénneho poľa $\boldsymbol{E}_0$ a poľa $\boldsymbol{E}_g$, ktoré má charakter poľa dipólu.

75. Limitným prechodom $\varepsilon_r \to \infty$ vo výraze pre potenciál v okolí dielektrickej gule v predchádzajúcej úlohe plynie

$$V_{vonk} = -\boldsymbol{E}_0.\boldsymbol{r} + \frac{R^3}{r^3}\boldsymbol{E}_0.\boldsymbol{r}$$

Na povrchu gule ($r = R$) a v jej vnútri je potenciál konštantný (nulový).

76. Pole je centrálne symetrické, možno teda zvoliť guľovú Gaussovu plochu s polomerom r, na ktorej platí

$$(D_1 + D_2)2\pi r^2 = Q$$

Na rozhraní platí $D_1/\varepsilon_1 = D_2/\varepsilon_2$, takže

$$D_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q}{2\pi r^2} \qquad D_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q}{2\pi r^2}$$

Elektrické pole a potenciál

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q}{2\pi r^2} \qquad V_1 = V_2 = \frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{Q}{2\pi r}$$

77. $\varepsilon_r = 2{,}66$

78. $W = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S U^2}{2d}(\varepsilon_r - 1) = \dfrac{CU^2}{2}(\varepsilon_r - 1)$

79. Označme: $r_1 = 1$ cm – polomer vnútorného vodiča, $r_2 = 5$ cm – polomer plášťa, r_0 – polomer rozhrania medzi dielektrikami. Pretože intenzita elektrického poľa v okolí valcového vodiča s dĺžkovým nábojom je

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

bude elektrické pole maximálne na vnútorných plochách dielektrík.

a) Bude teda platiť

$$E_{max1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r_1} \qquad E_{max2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r_0}$$

z čoho pre polomer rozhrania plynie

$$r_0 = \frac{E_{max1}\varepsilon_{r1}}{E_{max2}\varepsilon_{r2}}r_1 = 3\,\text{cm}$$

b) Maximálne povolené napätie na kábli je

$$U_{max} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\ln\frac{r_2}{r_0} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\ln\frac{r_0}{r_1} = r_0 E_{max2}\ln\frac{r_2}{r_0} + r_1 E_{max1}\ln\frac{r_0}{r_1} = 127{,}2\,\text{kV}$$

c) Kapacita kábla

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2}\ln\dfrac{r_0}{r_1} + \varepsilon_{r1}\ln\dfrac{r_2}{r_0}} = 157\,\text{pF/m}$$

d) Maximálna energia v kábli

$$W = \frac{CU_{max}^2}{2} = 1{,}27\,\text{J/m}$$

80. Maximálna hustota energie nahromadenej v dielektriku

$$w = \frac{\varepsilon E_{max}^2}{2} = 10^3 \ \mathrm{J/m^3}$$

a množstvo energie na kilogram dielektrika

$$w' = \frac{w}{10^3} = 1 \ \mathrm{J/kg}$$

Pre olovené akumulátory je w' = (36 – 144).10^3 J/kg a pre Ni-Cd akumulátory w' = (108 až 180).10^3 J/kg (Svět motorů, 21/75). Vidieť, že energia nahromadená v kilograme akumulátorov je oveľa (o päť rádov) väčšia ako energia, ktorú možno uskladniť v ekvivalentnej hmotnosti dielektrika.

81. a) Na dosky pôsobia príťažlivé sily

$$f = C_0 \frac{U^2}{2a} = f_0$$

C_0 je kapacita kondenzátora bez dielektrika.

b) Intenzita elektrického poľa v kondenzátore naplnenom dielektrikom je ε_r-krát menšia ako v kondenzátore bez dielektrika, a preto aj sila bude ε_r-krát menšia, teda $f = f_0/\varepsilon_r$.

c) Intenzita elektrického poľa v štrbine medzi doskou a dielektrikom je taká istá ako v kondenzátore bez dielektrika, preto aj sila bude rovnaká ako v prípade a), teda $f = f_0$.

d) Na kondenzátor pritečie ε_r-krát väčší náboj ako v prípade a) a sila bude $f = \varepsilon_r f_0$.

e) Na kondenzátor pritečie ε_r-krát väčší náboj ako v prípade a) a intenzita elektrického poľa v štrbine bude tiež ε_r-krát väčšia, teda sila $f = \varepsilon_r^2 f_0$

82. a) Kapacita kondenzátora bez dielektrika

$$C_0 \approx \frac{2\pi\varepsilon_0 Rl}{d} \qquad \text{a s dielektrikom} \qquad C \approx \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r Rl}{d} = \varepsilon_r C_0$$

b) $W_0 = \frac{1}{2} C_0 U^2$

c) Kapacita kondenzátora s rúrkou zasunutou do hĺbky x

$$C(x) = C_0 \left[\frac{x}{l}(\varepsilon_r - 1) + 1 \right]$$

a jeho energia

$$W(x) = \frac{1}{2} C(x) U^2 = \frac{1}{2} C_0 \left[\frac{x}{l}(\varepsilon_r - 1) + 1 \right] U^2$$

Sila pôsobiaca na dielektrikum

$$f_x = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2} C_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{l} U^2$$

Sila smeruje do kondenzátora (kondenzátor "nasáva" dielektrikum). Celková práca

$$A_1 = f_x l = -\frac{1}{2} C_0 (\varepsilon_r - 1) U^2 = -W_0(\varepsilon_r - 1)$$

Túto prácu vykonáva zdroj tým, že nabíja kondenzátor.

d) $W_1=\varepsilon_r\dfrac{C_0U^2}{2}=\varepsilon_r W_0=W_0+|A_1|$

e) V tomto stave je na kondenzátore náboj $Q = \varepsilon_r C_0 U$ a energia kondenzátora s povytiahnutým dielektrikom je

$$W_2(x)=\frac{Q^2}{2C(x)}=\frac{Q^2}{2}\frac{1}{C_0\left[\dfrac{x}{l}(\varepsilon_r-1)+1\right]}=\varepsilon_r^2W_0\frac{l}{(\varepsilon_r-1)x+l}$$

Sila $\quad f_x=-\dfrac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}x}=-\varepsilon_r^2W_0\dfrac{(\varepsilon_r-1)l}{(\varepsilon_r-1)x+l}\quad$ a práca $\quad A_2=\displaystyle\int_l^0 f_x\mathrm{d}x=\varepsilon_r(\varepsilon_r-1)W_0=\varepsilon_r|A_1|$

Túto prácu konajú vonkajšie neelektrické sily.

f) Energia kondenzátora bez dielektrika

$$W_2=\frac{Q^2}{2C_0}=\varepsilon_r^2W_0=\varepsilon_rW_1=\varepsilon_r(W_0+|A_1|)=W_1+A_2$$

V celom cykle b) až f) sa energia kondenzátora zvýši ε_r^2-krát.

83. Kapacita valcového kondenzátora bez dielektrika

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{b}{a}}\qquad \text{a jeho energia}\qquad W=\frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{b}{a}}U^2$$

Ak kvapalina medzi valcami vystúpi o dl, vzrastie energia kondenzátora o

$$\mathrm{d}W=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{b}{a}}(\varepsilon_r-1)U^2\mathrm{d}l$$

a sila, ktorou je dielektrikum (kvapalina) vťahované do kondenzátora

$$f_e=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{b}{a}}(\varepsilon_r-1)U^2$$

Na stĺpec kvapaliny výšky h pôsobí gravitačná sila

$$f_g=mg=\pi\rho(b^2-a^2)hg$$

Kvapalina v kondenzátore vystúpi do výšky h, pri ktorej $f_g=f_e$, z čoho pre h plynie

$$h=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)U^2}{\rho g(b^2-a^2)\ln\dfrac{b}{a}}$$

84. $\quad h=\dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)U^2}{2d^2\rho g}$

85. Pri vsunutí dielektrika medzi dosky kondenzátora o dl zvýši sa jeho energia o

$$\mathrm{d}W=\frac{\varepsilon_0 aU^2\mathrm{d}l}{2d}(\varepsilon_r-1)$$

Sila, ktorou je dielektrikum vťahované medzi dosky má veľkosť

$$f = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l} = \frac{\varepsilon_0 a U^2}{2d}\left(\varepsilon_r - 1\right)$$

86. a) C = 177 pF,

b) $Q = CU = 1{,}06.10^{-7}$ C $= Q_1 + Q_2$, kde $Q_1 = 2{,}66.10^{-8}$ C v časti so vzduchovým dielektrikom a $Q_2 = 7{,}96.10^{-8}$ C v časti so skleneným dielektrikom,

c) $W = 3{,}17.10^{-5}$ J.

87. Podobným postupom ako pri riešení úlohy 73 dostaneme pre potenciál v okolí valca výraz

$$V(r) = \frac{R^2}{2\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{P}.\boldsymbol{r}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor so začiatkom na osi valca a kolmý na ňu. Vo vnútri valca

$$V = \frac{Pz}{2\varepsilon_0}$$

Intenzita elektrického poľa vo vnútri valca

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{P}}{2\varepsilon_0}$$

V okolí valca je intenzita elektrického poľa intenzitou priamkového dipólu (pozri úlohu 25) s momentom

$$\boldsymbol{p}' = \pi R^2 \boldsymbol{P}$$

88. Analogicky ako v úlohe 74 intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}_v$ vo vnútri valca je vektorovým súčtom intenzity $\boldsymbol{E}$ a intenzity $\boldsymbol{E}_p$ od polarizácie valca $\boldsymbol{P}$, teda $\boldsymbol{E}_v = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_p$, kde

$$\boldsymbol{E}_p = -\frac{\boldsymbol{P}}{2\varepsilon_0} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E}_v$$

Z týchto výrazov dostaneme

$$\boldsymbol{E}_v = \frac{2}{\varepsilon_r + 1}\boldsymbol{E} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{P} = \frac{2\varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)}{\varepsilon_r + 1}\boldsymbol{E}$$

Potenciál na povrchu valca a v jeho vnútri

$$V = -\frac{2}{\varepsilon_r + 1}\boldsymbol{E}.\boldsymbol{r} = -\frac{2}{\varepsilon_r + 1}Ez$$

Vo vonkajšom priestore ($r > R$) je potenciál superpozíciou potenciálu intenzity poľa $\boldsymbol{E}$, teda potenciálu $V_0 = -\boldsymbol{E}.\boldsymbol{r}$ a potenciálu V_v polarizovaného valca s polarizáciou $\boldsymbol{P}$. Podľa predchádzajúcej úlohy

$$V_v = \frac{R^2}{2\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{P}.\boldsymbol{r} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{R^2}{r^2}\boldsymbol{E}.\boldsymbol{r}$$

Výsledný potenciál v okolí valca

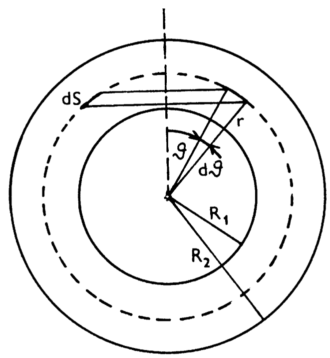
$$V_{vonk} = V_0 + V_v = -\boldsymbol{E}.\boldsymbol{r} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{R^2}{r^2}\boldsymbol{E}.\boldsymbol{r}$$

Intenzita vonkajšieho elektrického poľa je gradientom uvedeného potenciálu.

89. Limitným prechodom $\varepsilon_r \to \infty$ vo výraze pre potenciál v okolí dielektrického valca z predchádzajúcej úlohy dostaneme

$$V_{vonk} = -\boldsymbol{E}.\boldsymbol{r} + \frac{R^2}{r^2}\boldsymbol{E}.\boldsymbol{r} = -\frac{r^2 - R^2}{r^2}\boldsymbol{E}.\boldsymbol{r}$$

Na povrchu valca ($r = R$) a v jeho vnútri $V = 0$.



Obr. R90

90. Zvolíme si guľovú plochu s polomerom r ($R_1 < r < R_2$) a na nej pásik podľa *obr. R90*, ktorého plocha $\mathrm{d}S = 2\pi r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$. Vypočítame tok vektora $\boldsymbol{D}$ zvolenou guľovou plochou, ak je na kondenzátore náboj Q:

$$\oint_S D\mathrm{d}S = Q = E\oint_S \varepsilon \mathrm{d}S = 2\pi r^2 E\int_0^{\pi}\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1\cos^2\vartheta\right)\sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= -2\pi r^2 E\int_{+1}^{-1}\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1\cos^2\vartheta\right)\mathrm{d}(\cos\vartheta) = \frac{4\pi\left(3\varepsilon_0 + \varepsilon_1\right)r^2 E}{3}$$

z čoho intenzita poľa

$$E = \frac{3Q}{4\pi\left(3\varepsilon_0 + \varepsilon_1\right)r^2}$$

Napätie na kondenzátore

$$U = -\int_{R_2}^{R_1} E\mathrm{d}r = \frac{3Q}{4\pi\left(3\varepsilon_0 + \varepsilon_1\right)}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \qquad \text{a jeho kapacita} \qquad C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\left(3\varepsilon_0 + \varepsilon_1\right)R_1 R_2}{3(R_2 - R_1)}$$

91. Predovšetkým vypočítame kapacitu kondenzátora ako funkciu uhla α podľa *obr. 91*. Táto kapacita je

$$C(\alpha) = \left[\varepsilon_0\alpha + \varepsilon(\pi - \alpha)\right]\frac{R^2}{2h}$$

Ak je na kondenzátore napätie U, potom jeho energia je

$$W(\alpha) = \frac{1}{2}C(\alpha)U^2 = \left[\varepsilon_0\alpha + \varepsilon(\pi - \alpha)\right]\frac{R^2U^2}{4h}$$

Moment sily pôsobiacej na dielektrickú platňu je

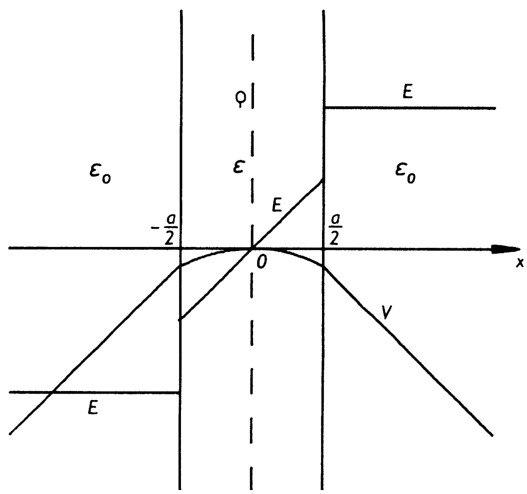
$$M = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\alpha} = -\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)\frac{R^2U^2}{4h}$$

Moment má taký smer, že sa snaží vtiahnuť dielektrikum do kondenzátora a nezávisí od uhla α. Avšak pre $\alpha = 0$, je $M = 0$, pretože v tomto prípade posledný výraz neplatí (pozri tiež úvahy v odseku 4.7)

92. $D = \dfrac{q}{4\pi r^2}$ $\quad E = \dfrac{q}{4\pi\alpha r}$ $\quad P = \dfrac{q}{4\pi r^2} - \dfrac{\varepsilon_0 q}{4\pi\alpha r}$

$$\rho_v = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P\right) = \frac{\varepsilon_0 q}{4\pi\alpha r^2}$$

Všetky vektory majú radiálny smer.



Obr. R93

93. a) Nech os x smeruje kolmo na vrstvu, pričom $x = 0$ v strede vrstvy. Potom:

– pre $|x| < a/2$ $\quad \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}x\boldsymbol{i}$ $\quad V = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon}x^2$

– pre $|x| > a/2$ $\quad \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}\dfrac{x}{|x|}\boldsymbol{i}$ $\quad V = -\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}|x| + \dfrac{\rho a^2}{8}\left(\dfrac{2}{\varepsilon_0} - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

kde $\boldsymbol{i}$ je jednotkový vektor v smere osi x. Grafické závislosti E a V od x sú znázornené na *obr. R93.*

b) Vektor polarizácie pre $|x| < a/2$

$$\boldsymbol{P} = \left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)\frac{\rho}{\varepsilon}x\boldsymbol{i}$$

a pre $|x| > a/2$ je $\boldsymbol{P} = 0$. Na povrchu vrstvy sú viazané plošné náboje

$$\sigma_v = \left|\boldsymbol{P}(a/2)\right| = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\rho\frac{a}{2}$$

a vo vnútri vrstvy je konštantný viazaný objemový náboj

$$\rho_v = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{P} = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\rho$$

94. a) Ak je náboj rozložený na vnútornej ploche dielektrickej guľovej vrstvy, potom
– pre $r < a$

$$E = 0 \qquad V = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon a} + \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{1}{b}\right]$$

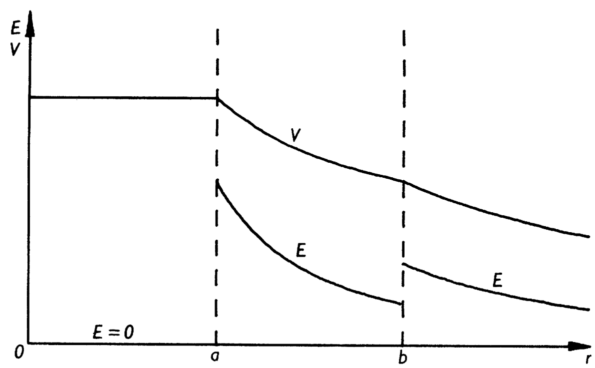
– pre $a < r < b$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \qquad V = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon r} + \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{1}{b}\right]$$

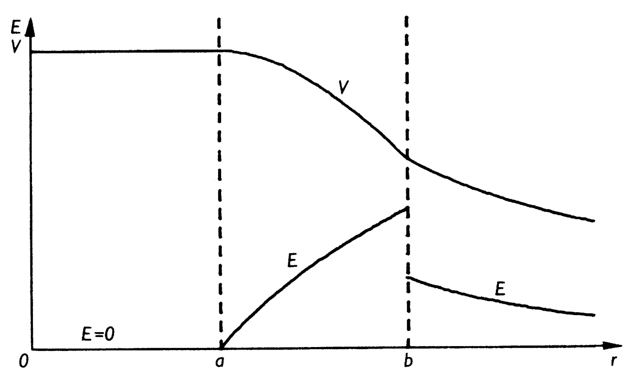
– pre $r > b$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Grafy závislostí E a V od r sú znázornené na *obr. R94a.*



Obr. R94a



Obr. R94b

b) Ak je náboj rozložený rovnomerne v objeme dielektrika, potom
– pre $r < a$

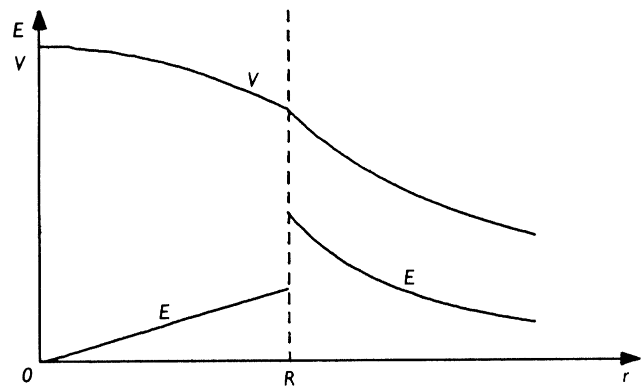
$$E = 0 \qquad V = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_0 b} + \frac{1}{2\varepsilon\left(b^3 - a^3\right)}\left(\frac{b^3 + 2a^3}{b} - 3a^2\right)\right]$$

– pre $a < r < b$

$$E = \frac{Q\left(r^3 - a^3\right)}{4\pi\varepsilon\left(b^3 - a^3\right)r^2} \qquad V = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_0 b} + \frac{1}{2\varepsilon\left(b^3 - a^3\right)}\left(\frac{b^3 + 2a^3}{b} - \frac{r^3 + 2a^3}{r}\right)\right]$$

– pre $r > b$ $\qquad E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Grafy závislostí E a V od r sú znázornené na *obr. R94b.*



Obr. R95

95. Intenzita elektrického poľa E a potenciál V pre $r < R$ sú

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3} \qquad V = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_0 R} + \frac{1}{2\varepsilon R} - \frac{r^2}{2\varepsilon R^3}\right)$$

Pre $r > R$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Grafické závislosti E a V od r sú na *obr. R95*. Na povrchu gule je viazaný plošný náboj $\sigma_v = Q/(4\pi R^2)$, objemový viazaný náboj je nulový ($\rho_v = -\mathrm{div}\boldsymbol{P} = 0$).

96. Na rozhraní platí pre normálovú zložku vektora elektrickej indukcie (pozri *obr. R96*) $D_{n1} = D_{n2}$, alebo $\varepsilon_{r1}E_{n1} = \varepsilon_{r2}E_{n2}$. Normálové zložky elektrických polí E_{n1} a E_{n2} sú suporpozíciami normálových zložiek poľa bodového náboja a poľa $\sigma_v/2\varepsilon_0$ od viazaných nábojov na rozhraní. Platí teda

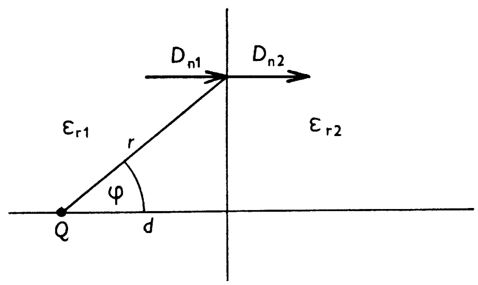
$$\varepsilon_{r1}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\frac{Q}{r^2}\cos\varphi - \frac{\sigma_v}{2\varepsilon_0}\right) = \varepsilon_{r2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\frac{Q}{r^2}\cos\varphi + \frac{\sigma_v}{2\varepsilon_0}\right)$$

Ak uvážime, že $\cos\varphi = d/r$, dostaneme výraz pre plošný viazaný náboj

$$\sigma_v = \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}} \frac{Qd}{2\pi r^3}$$

Ak $d = 0$, potom $\sigma_v = 0$. Ak sa náboj Q nachádza na rozhraní, potom viazané náboje na rozhraní nie sú. Integráciou σ_v po celom nekonečnom rozhraní dostaneme celkový viazaný náboj

$$Q_v = \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}} Q$$



Obr. R96

5 Elektrický prúd

97. a) $J = 1{,}27.10^6$ A/m^2, $v = 9{,}36.10^{-5}$ m/s; b) $E = 2{,}2.10^{-2}$ V/m;

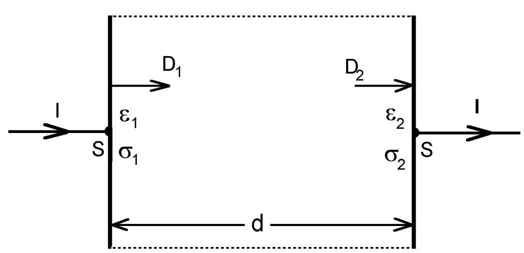
c) $Q = 20$ C, $n = 1{,}25.10^{20}$ elektrónov; d) $U = 2{,}2$ V

98. $I = 20$ mA

99. a) $I = 0{,}90$ A; b) $n = 1{,}35.10^{20}$ iónov, $m = 5{,}19$ mg

100. Ak kondenzátorom tečie prúd I, potom intenzita elektrického poľa v dielektriku kondenzátora je $E = I/(\sigma S)$ a elektrická indukcia $D = \varepsilon I/(\sigma S)$, kde

$$\sigma(x) = \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{d} x \qquad \varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x$$



Obr. R100

Celkový náboj v objeme dielektrika kondenzátora vypočítame integráciou vektora $\boldsymbol{D}$ po povrchu dielektrika (*obr. R100*)

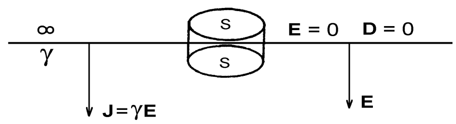
$$Q = \oint D \mathrm{d}S = (D_2 - D_1)S = \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)I = \varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_{r1}}{\sigma_1}\right)I = -19{,}5.10^{-12}\ \mathrm{C}$$

Ak sa zmení smer prúdu, zmení sa aj znamienko náboja. Odpor kondenzátora

$$R = \int_0^d \frac{\mathrm{d}x}{\sigma S} = \frac{d}{S(\sigma_2 - \sigma_1)} \ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 8.10^6\ \Omega$$

Výkon spotrebovaný v kondenzátore

$$P = RI^2 = 8.10^{-8}\ \mathrm{W}$$



Obr. R101

101. Ak zvolíme na rozhraní Gaussovu plochu v tvare valca podľa *obr. R101*, potom tok intenzity elektrického poľa touto plochou je

$$ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon}$$

kde S je plocha základne valca, ε je permitivita prostredia s konečnou vodivosťou γ, σ je plošná hustota náboja na rozhraní. Podľa Ohmovho zákona $E = J/\gamma$, takže pre plošnú hustota náboja na rozhraní plynie

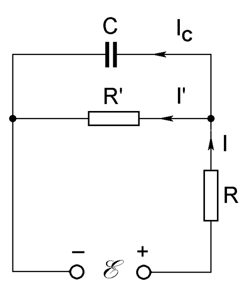
$$\sigma = \frac{\varepsilon J}{\gamma}$$

102. Kondenzátorom tečie prúd $I_C = ne\tau$, kde n je počet iónov (alebo elektrónov) vznikajúcich v jednotkovom objeme za jednotku času, e je elementárny náboj, τ je objem kondenzátora. Pre obvod na *obr. R102* platí

$$\mathscr{E} = RI + R'I' \qquad\qquad I = I' + I_C$$

z čoho

$$I = \frac{\mathscr{E} + ne\tau R'}{R + R'} = 8{,}1.10^{-8}\ \mathrm{A}$$



Obr. R102

103. Z princípu kontinuity prúdu a z geometrie kondenzátora plynie, že prúdové hustoty v obidvoch prostrediach sú rovnaké, teda $J_1 = J_2$, alebo využitím Ohmovho zákona platí $\gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2$. Napätia na jednotlivých vrstvách dielektrík sú

$$U_1 = E_1 h_1 \qquad\qquad U_2 = E_2 h_2$$

kde E_1 a E_2 sú intenzity elektrických polí v jednotlivých vrstvách dielektrík. Napätie na kondenzátore

$$U = U_1 + U_2 = E_1 h_1 + E_2 h_2$$

Z uvedených rovníc dostaneme pre intenzity elektrických polí výrazy

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1} \qquad\qquad E_2 = \frac{\gamma_1 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

Prúdové hustoty v dielektrikách

$$J_1 = J_2 = \frac{\gamma_1 \gamma_2 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

a elektrické indukcie

$$D_1 = \frac{\varepsilon_1 \gamma_2 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1} \qquad\qquad D_2 = \frac{\varepsilon_2 \gamma_1 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

Všetky vektory poľa smerujú od kladnej elektródy k zápornej. Na rozhraní dielektrík je voľný plošný náboj s hustotou

$$\sigma = D_2 - D_1 = \left(\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2\right) \frac{U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

a viazaný plošný náboj s hustotou

$$\sigma_v = P_2 - P_1 = \left[(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\gamma_1 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\gamma_2\right] \frac{U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

Na rozhraní dielektrika s kladnou elektródou je

$$\sigma_v = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 \qquad \text{a} \qquad \sigma = D_1$$

a na rozhraní dielektrika so zápornou elektródou je

$$\sigma_v = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_2 \qquad \text{a} \qquad \sigma = -D_2$$

Voľné a viazané náboje s priestorovou hustotou v dielektriku nie sú.

104. Intenzita elektrického poľa vo vodiči súvisí s prúdovou hustotou podľa Ohmovho zákona $E = J/\gamma$, kde γ je konduktivita. Z Gaussovho zákona ďalej plynie, že

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \mathrm{div}\frac{\boldsymbol{J}}{\gamma} = \frac{\rho(t)}{\varepsilon} \qquad \text{alebo} \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{J} = \frac{\gamma\rho(t)}{\varepsilon}$$

Porovnaním posledného výrazu s rovnicou kontinuity (pri zachovaní homogénneho rozloženia náboja)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{J} = -\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t}$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho(t) \qquad \text{ktorej riešením je} \qquad \rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}t\right)$$

Hustota náboja vo vodiči s časom exponenciálne klesá. Časová konštanta procesu je $\tau = \varepsilon/\gamma$.

105. $R_x = 220\ \Omega$

106. $U_{ab} = 0{,}22$ V, $I = 0{,}46$ A

107. Ak označíme napätia na kondenzátoroch $2C$ a C postupne U_1 a U_2 , potom:

a) $U_1 = 45$ V, $U_2 = 15$ V; b) $U_1 = 20$ V, $U_2 = 40$ V; c) $U_1 = 60$ V, $U_2 = 0$ V

108. $R_x = R/4$

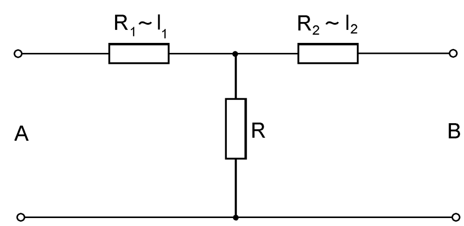
109. $U_1 = 55{,}1$ V, $U_2 = 44{,}9$ V

110. Náhradná schéma kábla so zvodom je na *obr. R110*, kde $R_1 \sim l_1$ je odpor kábla od stanice A po miesto zvodu (vzdialenosť l_1). Podobne $R_2 \sim l_2$ je odpor druhej časti kábla, úmerný vzdialenosti stanice B od miesta zvodu. R je odpor zvodu. Ak sa v stanici A pripojí kábel na napätie $\mathscr{E}_1$, potom v stanici B sa bezprúdovo meria napätie

$$U_1 = \frac{\mathscr{E}_1 R}{R_1 + R}$$

a pri meraní v opačnom smere (zdroj $\mathscr{E}_2$ v stanici B) je v stanici A napätie

$$U_2 = \frac{\mathscr{E}_2 R}{R_2 + R}$$



Obr. R110

Tieto výrazy možno upraviť na tvar

$$U_1 R_1 = (\mathscr{E}_1 - U_1)R \qquad\qquad U_2 R_2 = (\mathscr{E}_2 - U_2)R$$

Vzájomným delením obidvoch rovníc a ďalšou úpravou s uvážením, že $R_1/R_2 = l_1/l_2$ dostaneme

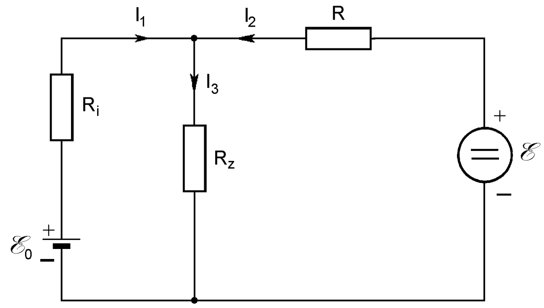
$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{U_2}{U_1}\frac{\mathscr{E}_1 - U_1}{\mathscr{E}_2 - U_2}$$

Keďže dĺžka celého kábla je $l = l_1 + l_2$, pre l_1 dostaneme

$$l_1 = \frac{U_2(\mathscr{E}_1 - U_1)l}{U_2\mathscr{E}_1 + U_1\mathscr{E}_2 - 2U_1U_2}$$

Ak dosadíme číselné hodnoty, potom pre vzdialenosť miesta zvodu od stanice A dostaneme hodnotu $l_1 = 19{,}047$ km.

111. a) Schéma zapojenia je na *obr. R111*.



Obr. R111

b) Ak zvolíme prúdy podľa *obr. R111*, potom riešením zodpovedajúcich Kirchhoffových rovníc pre prúd I_1 dostaneme

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_0(R + R_z) - \mathscr{E}R_z}{R_i R + R_i R_z + RR_z}$$

Ak $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1$, potom $I_1 = 0$, z čoho plynie, že R musí spĺňať podmienku

$$R = \left(\frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_0} - 1\right)R_z$$

Dosadením za R vo výraze pre I_1 dostaneme

$$I_1 = \frac{(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E})\mathscr{E}_0}{\mathscr{E}_1(R_i + R_z) - \mathscr{E}_0 R_z}$$

Ak $\mathscr{E} = \mathscr{E}_2$, potom

$$I_1 = \frac{(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)\mathscr{E}_0}{\mathscr{E}_1(R_i + R_z) - \mathscr{E}_0 R_z}$$

c) Riešením Kirchhoffových rovníc pre prúd spotrebičom R_z dostaneme

$$I_3 = \frac{\mathscr{E}_0\left[\mathscr{E}R_i + (\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_0)R_z\right]}{\mathscr{E}_1 R_i R_z + R_z^2(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_0)}$$

d) Numericky: Prúd odoberaný z batérie pri $\mathscr{E}_2 = 100$ V má hodnotu $I_1 = 104{,}17$ mA.

Prúd tečúci spotrebičom pri $\mathscr{E}_2 = 100$ V má hodnotu $I_3 = 598{,}96$ mA a pri $\mathscr{E}_1 = 120$ V hodnotu $I_3 = 600$ mA. Prúdy spotrebičom sa teda pri krajných hodnotách napätia $\mathscr{E}$ líšia veľmi málo.

112. Zapojenie na *obr. 112* v zadaní úlohy sa pre účely riešenia dá prekresliť na tvar podľa *obr. R112*, kde zdroj napätia U predstavuje postupne zdroje 0, $+\mathscr{E}_2$, $-\mathscr{E}_3$. Pre prúd I riešením príslušných Kirchhoffových rovníc dostaneme

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 R_2 - UR_1}{R^2}$$

kde $R^2 = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3$. Označme postupne prúdy pri jednotlivých polohách prepínača $I_1 = 60$ mA, $I_2 = 40$ mA a I_3 neznámy prúd. V jednotlivých polohách prepínača bude postupne platiť

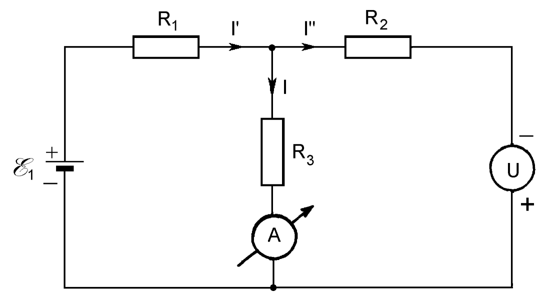
$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_1 R_2}{R^2} \qquad (U = 0)$$

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}_1 R_2 - \mathscr{E}_2 R_1}{R^2} \qquad (U = \mathscr{E}_2)$$

$$I_3 = \frac{\mathscr{E}_1 R_2 + \mathscr{E}_3 R_1}{R^2} \qquad (U = -\mathscr{E}_3)$$

Riešením uvedeného systému rovníc pre prúd I_3 dostaneme

$$I_3 = I_1 + \frac{\mathscr{E}_3}{\mathscr{E}_2}\left(I_1 - I_2\right) = 90 \text{ mA}$$

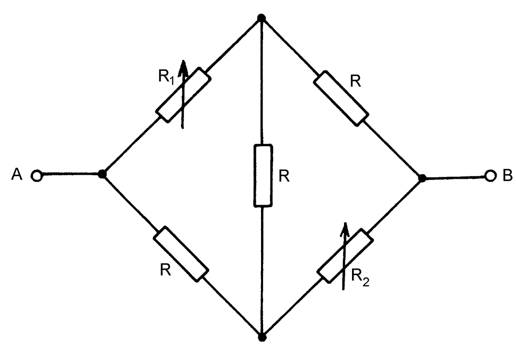


Obr. R112

113. Zapojenie na *obr. 113* v zadaní úlohy sa dá prekresliť na tvar podľa *obr. R113*. Odpor medzi svorkami *A-B* tohoto zapojenia vypočítaný napr. pomocou transformácie hviezda – trojuholník (pozri úlohu 250) alebo pomocou Kirchhoffových zákonov je

$$R_{AB} = \frac{3RR_1R_2 + 2R^2\left(R_1 + R_2\right) + R^3}{R_1R_2 + 2R\left(R_1 + R_2\right) + 3R^2}$$

pričom musí platiť $R_{AB} = R$, čo je splnené, ak $R_1R_2 = R^2$



Obr. R113

114. Najprv vypočítame odpor uzemnenia integráciou odporov pologuľových vrstiev v pôde od $r_0 = 30$ cm do nekonečna, teda

$$R = \frac{1}{\sigma}\int_{r_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{2\pi r^2} = \frac{1}{2\pi\sigma r_0} = 55\ \Omega$$

Celkový prúd tečúci do uzemnenia je

$$I = \frac{U}{R} = 2\pi\sigma r_0 U = 7\,547\ \mathrm{A}$$

Tento prúd sa radiálne rozteká do "nekonečného polopriestoru Zeme", a teda aj po povrchu Zeme. Vo vzdialenosti r od stožiara bude prúdová hustota

$$J = \frac{I}{2\pi r^2} = \frac{\sigma r_0 U}{r^2}$$

a intenzita elektrického poľa na povrchu Zeme

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{r_0 U}{r^2}$$

Krokové napätie vo vzdialenosti r od stožiara bude

$$U_k = \int_r^{r+l} E\mathrm{d}r = r_0 U \int_r^{r+l}\frac{dr}{r^2} = \frac{r_0 l U}{r(r+l)}$$

kde l = 80 cm je dĺžka kroku.

a) Pre r = 100 m je U_k = 9,5 V.

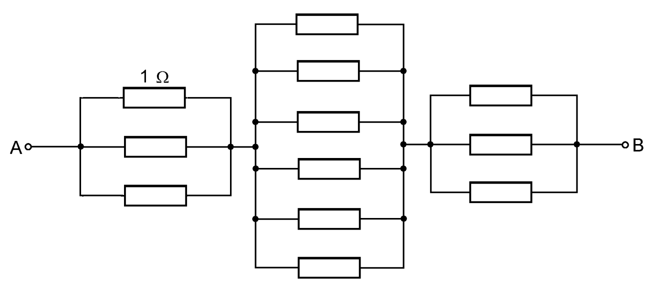
b) Pre r = 25 m je U_k = 149 V. Takéto napätie by mohlo vážne ohroziť život človeka idúceho priamu ku stožiaru.

115. Integráciou elementárnych odporov guľových vrstiev s hrúbkou dr dostaneme pre odpor guľového kondenzátora

$$R = \frac{\rho\left(R_2 - R_1\right)}{4\pi R_1 R_2}$$

116. $R = \dfrac{1}{2\pi\sigma_1}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) + \dfrac{1}{2\pi\sigma_2 b}$

117. Ak medzi vrcholmi A a B kocky prechádza prúd, potom vrcholy priľahlé k vrcholu A sú na rovnakom potenciáli a vrcholy priľahlé k B sú tiež na rovnakom potenciáli. Pre účely určenia celkového odporu možno vrcholy s rovnakým potenciálom bezodporovo spojiť, čím vznikne zapojenie podľa *obr. R117*. Výsledný odpor takého zapojenia je R_{AB} = 5/6 Ω.



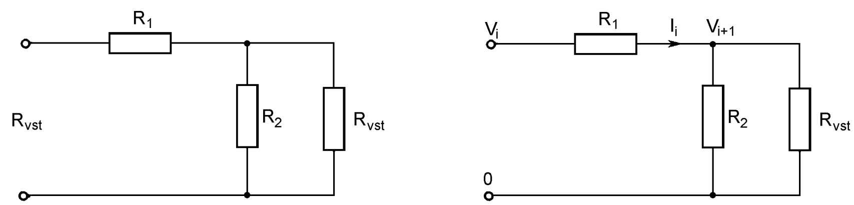
Obr. R117

118. a) Keďže odpor reťazca na *obr. 118* v zadaní úlohy sa pridaním jednej dvojice $R_1 - R_2$ nezmení, potom pre reťazec možno nakresliť náhradné zapojenie podľa *obr. R118a*. Pre vstupný odpor tohoto zapojenia platí

$$R_{vst} = \frac{R_2 R_{vst}}{R_2 + R_{vst}} + R_1 \qquad \text{z čoho} \qquad R_{vst} = R_1 \frac{1 + \sqrt{1 + 4\dfrac{R_2}{R_1}}}{2} = \frac{V_i}{I_i}$$

kde V_i je potenciál i-tého uzla a I_i je prúd tečúci medzi uzlami s potenciálmi V_i a V_{i+1} (pozri *obr. R118b*). Pre vetvu s prúdom I_i platí

$$V_i - V_{i+1} = R_1 I_i \qquad \text{alebo} \qquad \frac{V_{i+1}}{V_i} = 1 - R_1 \frac{I_i}{V_i} = 1 - \frac{R_1}{R_{vst}} = q$$



a) *b)*

Obr. R118

Postupnosť potenciálov V_0, V_1, V_2, … je skutočne geometrická, klesajúca s kvocientom

$$q = 1 - \frac{R_1}{R_{vst}} < 1$$

pretože $R_{vst} > R_1$. Ak má postupnosť klesať s kvocientom q = 1/2, potom musí platiť

$$\frac{R_1}{R_{vst}} = \frac{1}{2} \qquad \text{čo bude splnené vtedy, ak} \qquad \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

Z riešenia úlohy vidíme, že každý nekonečný reťazec podľa *obr. 118* možno nahradiť reálnym konečným reťazcom zakončeným odporom, ktorého hodnota sa rovná vstupnému odporu R_{vst} nekonečného reťazca. Elektrické vlastnosti konečného a nekonečného reťazca zo strany vstupných svoriek budú rovnaké. Podobne sa uvažuje aj pri analýze dlhých prenosových vedení elektromagnetických signálov, kde ekvivalentom vstupného odporu R_{vst} nekonečného reťazca je vlnový odpor (vlnová impedancia) vedenia (pozri časť 11.6).

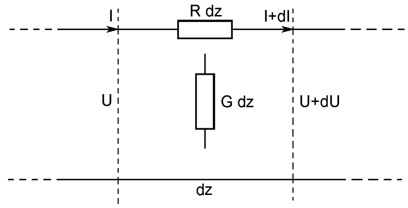
119. Obvody na *obr. 119a,b* v zadaní úlohy majú rovnaké vstupné odpory $R_{vst} = 2R$. Napätia $U_1 = U_0/2$, $U_2 = U_0/4$, $U_3 = U_0/8$. Vstupný odpor reťazca na *obr. 119c* v zadaní úlohy je tiež $2R$ a napätie v i-tom uzle je $U_i = U_0/2^i$. Výsledky sú v súhlase s výsledkami úlohy 118.

120. Na *obr. R120* je znázornený elementárny úsek kábla dlhý dz s pozdĺžnym odporom Rdz a priečnou vodivosťou Gdz. Pre zmeny napätia a prúdu v danom úseku platia vzťahy

$$-\mathrm{d}U = RI\mathrm{d}z \qquad\qquad -\mathrm{d}I = GU\mathrm{d}z$$

alebo

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = -RI \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = -GU$$



Obr. R120

Derivovaním druhej rovnice a dosadením do prvej dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd v tvare

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}z^2} = RGI$$

ktorej všeobecné riešenie je

$$I(z) = A_1 \exp\left(-\sqrt{RG}\,z\right) + A_2 \exp\left(+\sqrt{RG}\,z\right)$$

a napätie na kábli je dané funkciou

$$U(z) = -\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = \sqrt{\frac{R}{G}}\left[A_1 \exp\left(-\sqrt{RG}\,z\right) - A_2 \exp\left(+\sqrt{RG}\,z\right)\right]$$

A_1 a A_2 sú integračné konštanty, ktoré možno určiť z okrajových podmienok (napr. zadaním prúdu a napätia na vstupe kábla pre $z = 0$).

Podobné, ale dôležitejšie úlohy pre časovopremenné napätia a prúdy sú analyzované v časti 11.6.

121. Odpor kondenzátora

$$R = \frac{d}{\sigma S} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\sigma C} = 3{,}54.10^8\ \Omega \qquad \text{a prúd} \qquad I = U/R = 2{,}82\ \mu\mathrm{A}$$

122. Odpory kondenzátorov

$$R_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}}{\sigma_1 C_1} \qquad\qquad R_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}{\sigma_2 C_2}$$

sú spojené v sérii a pripojené na zdroj. Napätia na jednotlivých kondenzátoroch sú

$$U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R_2} = U\frac{\sigma_2 \varepsilon_{r1} C_2}{\sigma_2 \varepsilon_{r1} C_2 + \sigma_1 \varepsilon_{r2} C_1} = 1\,169\,V$$

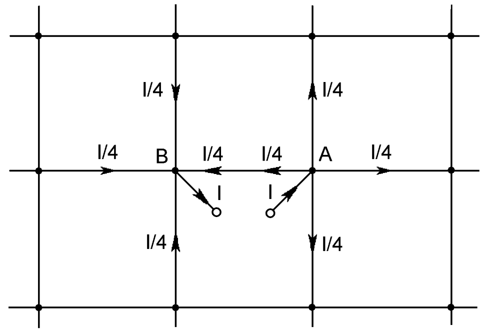
$$U_2 = U\frac{R_2}{R_1 + R_2} = U\frac{\sigma_1 \varepsilon_{r2} C_1}{\sigma_1 \varepsilon_{r2} C_1 + \sigma_2 \varepsilon_{r1} C_2} = 31\,V$$

123. Elektrické odpory jednotlivých gulí vo vodnom prostredí sú

$$R_1 = \frac{1}{\sigma}\int_{a_1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma a_1} \qquad \text{podobne} \qquad R_2 = \frac{1}{4\pi\sigma a_2}$$

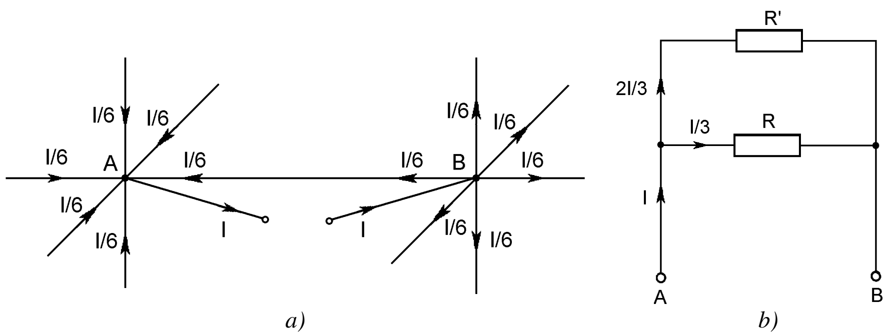
Odpor medzi guľami je $\quad R = R_1 + R_2 = \dfrac{a_1 + a_2}{4\pi\sigma a_1 a_2} = \dfrac{U}{I}$

z čoho vodivosť vody $$\sigma = \frac{(a_1 + a_2)I}{4\pi a_1 a_2 U}$$



Obr. R124

124. Predpokladajme, že k nekonečnej sieti na *obr. R124* sú pripojené dva rovnaké prúdové zdroje I, a to tak, že k uzlu A je pripojený kladný pól jedného zdroja a k uzlu B je pripojený záporný pól druhého zdroja. Zostávajúce dva póly obidvoch zdrojov sú k sieti pripojené formálne v nekonečne. Prvý zdroj dodáva do siete prúd I, ktorý sa symetricky rozteká do štyroch vetiev okolo uzla A. Do uzla B sa podobným spôsobom stekajú také isté prúdy. Z hľadiska uzlov A a B pôsobí v sieti prúdový zdroj I, ktorého polovica prúdu tečie vetvou medzi uzlami A a B a druhá polovica celou nekonečnou sieťou. Odpor vetvy R a odpor zvyšku siete sú teda rovnaké a sú zapojené paralelne. Z toho plynie, že odpor celej siete medzi uzlami A a B je $R_{AB} = R/2$.



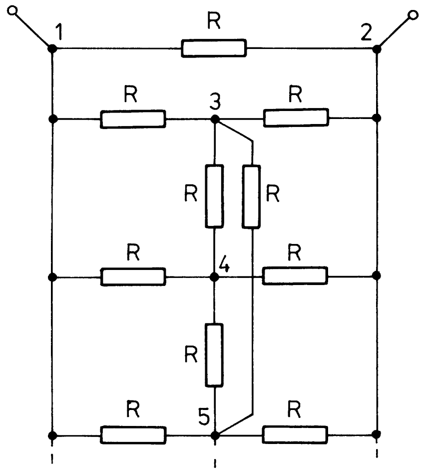
Obr. R125

125. Dva prúdové zdroje s prúdmi I pripojené k sieti podobným spôsobom ako v úlohe 124 dodávajú do siete rovnaké prúdy opačných smerov, ktoré sa vetvia do šiestich priľahlých vetiev podľa *obr. R125a*. Z hľadiska uzlov A – B je k sieti pripojený prúdový zdroj I, ktorý do vetvy medzi uzlami A a B dodáva prúd $I/6 + I/6 = I/3$ a zvyškom siete tečie prúd $2I/3$. Celú sieť možno teda nahradiť zapojením podľa *obr. R125b*, kde R' je odpor siete bez odporu vetvy A – B. Z *obr. R125b* je zrejmé, že

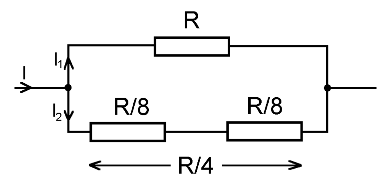
$$\frac{R'}{R} = \frac{I/3}{2I/3} = \frac{1}{2} \qquad \text{z čoho } R' = R/2 \text{ a odpor celej siete} \qquad R_{AB} = \frac{RR'}{R+R'} = \frac{R}{3}$$

126. Body treba usporiadať tak, ako na *obr. R126*. Ak sa k bodom 1 – 2 pripojí zdroj EMN, potom body 3 až n sú v dôsledku symetrie zapojenia na rovnakom potenciáli a možno ich bezodporovo spojiť. Výsledný odpor medzi bodmi 1 a 2 je teda

$$R_c = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{n-2}{2R}} = \frac{2R}{n}$$



Obr. R126



Obr. R127

127. Desať bodov je navzájom prepojených 45 odpormi R. Ak k dvom bodom pripojíme zdroj EMN $\mathcal{E}$, celkový prúd dodávaný zdrojom bude

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R_c}$$

kde R_c je celkový odpor siete medzi uvažovanými bodmi. Podľa predchádzajúcej úlohy

$$R_c = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{4}{R}} = \frac{R}{5}$$

Odpor R_c je teda výsledkom paralelného radenia odporu R medzi uvažovanými bodmi a odporu $R/4$, ktorý je dvojnásobkom odporu vzniknutého paralelným spojením ôsmich odporov R (*obr. R127*). Pre prúdy na obrázku platí

$$I = I_1 + I_2 \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{4}$$

z čoho $$I_1 = \frac{1}{5} I \qquad \text{a} \qquad I_2 = \frac{4}{5} I$$

Prúd I_1 tečie odporom R, ktorý je paralelný k svorkám zdroja. Jeho veľkosť je

$$I_1 = \frac{1}{5} I = \frac{\mathcal{E}}{5R_i + R} = 0{,}2 \text{ A}$$

Prúd I_2 sa rovnakým dielom rozteká do ôsmich odporov, ktoré sú jedným koncom pripojené ku kladnej svorke zdroja EMN a steká ôsmimi odpormi, ktoré sú pripojené jedným koncom k zápornej svorke zdroja. Teda prúd I'_2 každým z týchto šestnástich odporov je

$$I'_2 = \frac{I_2}{8} = \frac{1}{10} I = \frac{\mathscr{E}}{10R_i + 2R} = 0{,}1 \text{ A}$$

Ostatnými odpormi prúd netečie.

128. $I = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \mathscr{E}C_t = 10^{-8}$ A

129. Zmena energie kondenzátora po dobe t je

$$\Delta W_C = \frac{1}{2}\Delta Q\mathscr{E} = \frac{1}{2}\mathscr{E}It$$

a energia dodaná zdrojom $W = \mathscr{E}It$. Zdroj dodáva dvojnásobnú energiu ako je energia kondenzátora. Rozdiel energie sa spotrebuje na mechanickú prácu spojenú so zmenou kapacity kondenzátora.

130. Výkon v odpore R_3

$$P_3 = I_3^2 R_3 = \frac{\mathscr{E}^2 R_2^2 R_3}{\left[R_1R_2 + R_3\left(R_1 + R_2\right)\right]^2}$$

nezávisí od malých zmien R_3 v maxime funkcie $P_3(R_3)$. Derivovaním tejto funkcie podľa R_3 a z podmienky pre jej maximum $\partial P_3 / \partial R_3 = 0$ dostaneme hľadaný vzťah medzi odpormi

$$R_3 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

131. a) $R = 48{,}4\ \Omega$; b) $l = 38$ cm; c) $P = 1$ kW

132. Zvodový prúd v kábli tečie radiálne medzi vnútorným vodičom a plášťom. Priečny odpor kábla je

$$R = \frac{1}{\sigma l}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi\sigma l}\ln\frac{r_2}{r_1} = 11\,031{,}78\ \Omega$$

kde r_1 je polomer vnútorného vodiča, r_2 je polomer plášťa a l je dĺžka kábla.

a) Zvodový prúd kábla je

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2\pi\sigma lU}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = 54{,}39 \text{mA}$$

b) Hustota prúdu v dielektriku kábla

$$J = \frac{I}{2\pi rl} = \frac{\sigma U}{r\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = \frac{8{,}656.10^{-7}}{r} \qquad \left[\text{A/m}^2;\ \text{m}\right]$$

c) Hustota tepelného výkonu v dielektriku

$$p = JE = \frac{J^2}{\sigma} = \frac{\sigma U^2}{r^2 \ln^2\dfrac{r_2}{r_1}} = \frac{7{,}493.10^{-4}}{r^2} \qquad \left[\text{W/m}^3;\ \text{m}\right]$$

d) Celkové tepelné straty v kábli

$$P = 2\pi l \int_{r_1}^{r_2} pr\mathrm{d}r = \frac{2\pi\sigma l U^2}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = 32{,}6\ \mathrm{W}$$

133. Celkový odpor zapojenia zo svoriek zdroja $\mathscr{E}_1$ (pri skratovanom $\mathscr{E}_2$) je $R' = 11R/5$ a zo svoriek zdroja $\mathscr{E}_2$ (pri skratovanom $\mathscr{E}_1$) $R'' = 11R/4$, takže hodnoty elektromotorických napätí možno vyjadriť vzťahmi

$$\mathscr{E}_1 = \sqrt{R'P_1} = \sqrt{\frac{11RP_1}{5}} = 11\sqrt{R}, \quad [\mathrm{V}; \Omega] \qquad \mathscr{E}_2 = \sqrt{R''P_2} = \sqrt{\frac{11RP_2}{4}} = 22\sqrt{R}, \quad [\mathrm{V}; \Omega]$$

kde P_1 a P_2 sú výkony, ktoré dodávajú zdroje $\mathscr{E}_1$ a $\mathscr{E}_2$ samostatne. Pre výpočet výkonu dodávaného do odporov zapojenia obidvoma zdrojmi súčasne treba nájsť prúdy v jednotlivých odporoch. Pomocou Kirchhoffových zákonov dostaneme pre prúdy v jednotlivých odporoch výrazy

$$I_R = \frac{3\mathscr{E}_2 - 5\mathscr{E}_1}{11R} = \frac{1}{\sqrt{11R}}\left(3\frac{\sqrt{P_2}}{2} - 5\sqrt{\frac{P_1}{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad [\mathrm{A}; \Omega]$$

$$I_{2R} = \frac{4\mathscr{E}_2 - 3\mathscr{E}_1}{11R} = \frac{1}{\sqrt{11R}}\left(2\sqrt{P_2} - 3\sqrt{\frac{P_1}{5}}\right) = \frac{5}{\sqrt{R}}, \quad [\mathrm{A}; \Omega]$$

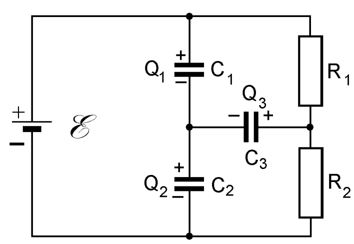
$$I_{3R} = \frac{2\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{11R} = \frac{1}{\sqrt{11R}}\left(2\sqrt{\frac{P_1}{5}} + \frac{\sqrt{P_2}}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{R}}. \quad [\mathrm{A}; \Omega]$$

Celkový výkon dodávaný do zapojenia obidvoma zdrojmi je

$$P = RI_R^2 + 2RI_{2R}^2 + 3RI_{3R}^2 = 99\ \mathrm{W}$$

alebo

$$P = P_1 + P_2 - 6\sqrt{\frac{P_1P_2}{20}} = 99\ \mathrm{W}$$



Obr. R134

134. Ak označíme náboje na kondenzátoroch tak, ako na *obr. R134*, potom platia rovnice

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \mathscr{E} \qquad -Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0 \qquad \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = \mathscr{E}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Riešením týchto rovníc pre náboje dostaneme

$$Q_1 = \mathscr{E}\frac{C_1\left(C_2R_1 + C_2R_2 + C_3R_1\right)}{\left(R_1 + R_2\right)\left(C_1 + C_2 + C_3\right)} \qquad Q_2 = \mathscr{E}\frac{C_2\left(C_1R_1 + C_1R_2 + C_3R_1\right)}{\left(R_1 + R_2\right)\left(C_1 + C_2 + C_3\right)}$$

$$Q_3 = Q_2 - Q_1 = \mathscr{E}\frac{C_3\left(C_2R_2 - C_1R_1\right)}{\left(R_1 + R_2\right)\left(C_1 + C_2 + C_3\right)}$$

Náboj a napätie na kondenzátore C_3 budú nulové, keď bude splnená podmienka

$$C_2R_2 - C_1R_1 = 0$$

135. Prúdová hustota vo vodiči je

$$J = \frac{E}{\rho} = \frac{r^2E}{\alpha}$$

a celkový prúd vodičom

$$I = \int_0^a J\,2\pi r\mathrm{d}r = \frac{2\pi E}{\alpha}\int_0^a r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi E a^4}{2\alpha} \qquad \text{z čoho} \qquad E = \frac{2\alpha I}{\pi a^4}$$

Elementárna vodivosť $\mathrm{d}G'$ nekonečne tenkej valcovej vrstvy s plochou $\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}r$ jednotkovej dĺžky je

$$\mathrm{d}G' = \frac{\mathrm{d}S}{\rho} = \frac{2\pi r^3\mathrm{d}r}{\alpha}$$

a celková vodivosť na jednotku dĺžky

$$G' = \frac{2\pi}{\alpha}\int_0^a r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi a^4}{2\alpha}$$

Odpor na jednotku dĺžky valca

$$R' = \frac{1}{G'} = \frac{2\alpha}{\pi a^4}$$

Vidíme, že intenzita elektrického poľa vo vodiči je daná súčinom prúdu a odporu na jednotku dĺžky vodiča, teda $E = IR'$.

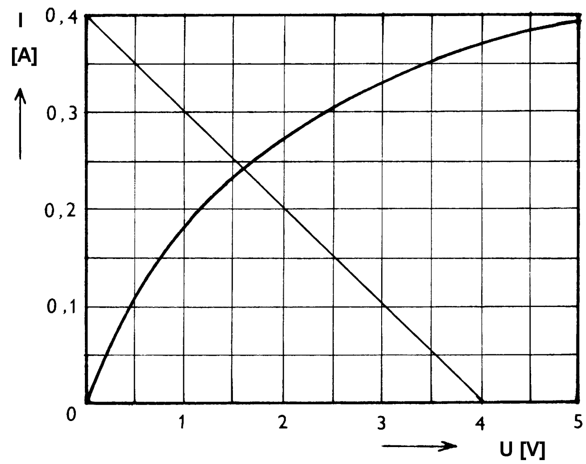
136. V grafe voltampérovej charakteristiky žiarovky zostrojíme zaťažovaciu charakteristiku odporu R (*obr. R136*), t. j. závislosť

$$U = \mathscr{E} - RI$$

Je to priamka prechádzajúca bodmi $I = 0{,}4$ A, $U = 0$ V a $I = 0$ A, $U = 4$ V. Priesečník tejto priamky s charakteristikou žiarovky dáva prúd v obvode s odporom R a žiarovkou $I = 0{,}24$ A a napätie na žiarovke $U_ž = 1{,}6$ V. Napätie na odpore R je teda $U_R = RI = \mathscr{E} - U_ž = 2{,}4$ V. Zapojenie predstavuje mostík, v ktorom, ak má byť vyvážený, t. j. ak napätie medzi svorkami A a B má byť nulové, musí byť odpor potenciometra $R' = R_1 + R_2$ delený v pomere

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2{,}4}{1{,}6} = 1{,}5$$

Časti potenciometra nad a pod bežcom majú hodnoty odporov $R_1 = 24\ \Omega$ a $R_2 = 16\ \Omega$.



Obr. R136

137. Energia uvoľnená pri jednom blesku je $W_0 = UIt = 2.10^{10}$ J a celková ročná energia bleskov $W \approx 6.10^{19}$ J. Ak sú vstupné údaje úlohy vieryhodné (sú prebrané z Feynmanovej učebnice), potom ročná energia bleskov je porovnateľná s ročnou celosvetovou produkciou elektrickej energie (porovnaj údaj v odseku 7.4).

138. Pre obvod platí rovnica

$$\mathscr{E} = RI + \sqrt{\frac{I}{k}}$$

ktorej vyhovuje prúd $I = 0{,}0979$ A. Výkon v odpore R

$$P = RI^2 = 0{,}958 \text{ W}$$

Napätie a výkon na nelineárnom prvku sú

$$U = \sqrt{\frac{I}{k}} = 2{,}2 \text{ V} \qquad\qquad P = UI = 0{,}215 \text{ W}$$

Treba pripomenúť, že pre nelineárny prvok neexistuje pojem odporu v obyčajnom zmysle, teda ako pomer U/I, preto výrazy pre výkon tvaru $P = RI^2 = U^2/R$ sú pre neho nepoužiteľné.

139. Pre prúdy v obvode na *obr. 139* v zadaní úlohy platí

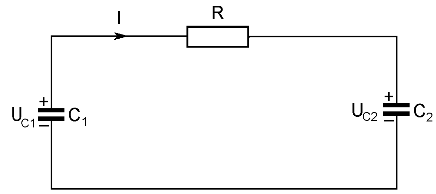
$$I_1 = \frac{P_z}{U_z} = 36 \text{ mA} \qquad\qquad I_2 = \frac{U_z}{R_0} = 39 \text{ mA}$$

Napätie na odpore R je $U_R = (I_1 + I_2)R = U - U_z = 4{,}2$ V, z čoho $R = 56\ \Omega$.

140. $P = 6{,}4$ W

141. Pre obvod na *obr. R141a* platí rovnica

$$-U_{C1} + U_{C2} + RI = 0 \qquad \text{alebo} \qquad \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)\int I\mathrm{d}t + RI = 0$$



Obr. R141a

Deriváciou poslednej rovnice podľa času a s označením

$$\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{1}{C}$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd v obvode

$$R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{C}=0$$

ktorej riešenie so začiatočnou podmienkou $I_0 = U_0/R$ v čase $t_0 = 0$ je

$$I=\frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)=\frac{U_0}{R}\exp\left[-\frac{(C_1+C_2)t}{RC_1C_2}\right]$$

Napätie na kondenzátore C

$$U_{C2}=\frac{1}{C_2}\int Idt=\frac{U_0}{RC_2}\int\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\mathrm{d}t=-\frac{U_0C}{C_2}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)+\text{konšt.}$$

Hodnota integračnej konštanty plynie zo začiatočnej podmienky. V čase $t = 0$ je $U_{C2} = 0$, a tak z posledného výrazu plynie, že

$$\text{konšt.}=\frac{U_0C}{C_2}$$

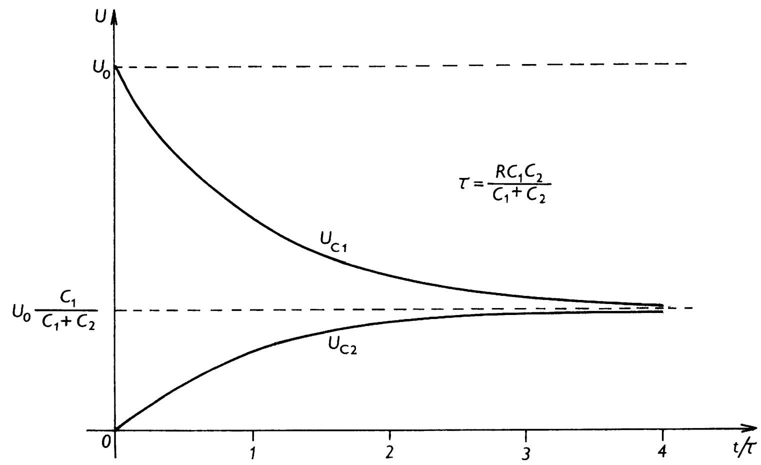
Napätie na kondenzátore C_2 je teda

$$U_{C2}=\frac{U_0C}{C_2}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]=\frac{U_0C_1}{C_1+C_2}\left\{1-\exp\left[-\frac{(C_1+C_2)t}{RC_1C_2}\right]\right\}$$

Napätie na kondenzátore C_1 je

$$U_{C1}=RI+U_{C2}=\frac{U_0}{C_1+C_2}\left\{C_1+C_2\exp\left[-\frac{(C_1+C_2)t}{RC_1C_2}\right]\right\}$$

Priebehy napätí na kondenzátoroch sú znázornené na *obr. R141b*.



Obr. R141b

142. Pre prúdy v obvode na *obr. R142* platí

$$I_C + I_R = I \qquad \text{alebo} \qquad C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + \frac{U_C}{R} = I$$

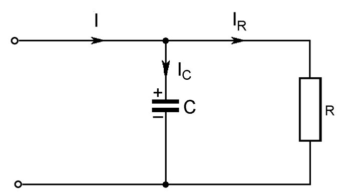
Riešenie tejto rovnice pre napätie na kondenzátore U_C so začiatočnou podmienkou $U_c = 0$ v čase $t = 0$ je

$$U_C = IR\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$

Na kondenzátore bude napätie $U_{C0} = 500$ V v čase t_0, pre ktorý z posledného výrazu plynie

$$t_0 = RC \ln \frac{IR}{IR - U_{C0}}$$

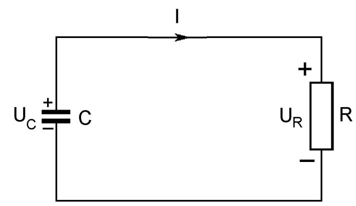
Dosadením číselných hodnôt $R = 200$ MΩ, $C = 5$ μF, $I = 3$ μA a $U_{C0} = 500$ V dostaneme pre čas hodnotu $t_0 = 1\,792$ s.



Obr. R142

143. Kondenzátor s kapacitou C nabitý na potenciálový rozdiel U má energiu

$$W = \frac{CU^2}{2}$$



Obr. R143

Po pripojení kondenzátora na odpor R v každom okamihu platí rovnica (*obr. R143*) $U_C + U_R = 0$, alebo

$$\frac{1}{C}\int I\mathrm{d}t + RI = 0$$

Derivovaním tejto rovnice dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd v obvode

$$R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I = 0$$

ktorej riešenie s počiatočnou podmienkou $I_0 = U/R$ pre $t = 0$ je

$$I = \frac{U}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Pri vybíjaní kondenzátora sa odporom vyžiari tepelná energia

$$W = \int_0^\infty RI^2\mathrm{d}t = \frac{U^2}{R}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)\mathrm{d}t = \frac{CU^2}{2}$$

ktorá sa rovná energii kondenzátora pred začiatkom vybíjania. Pri vybíjaní kondenzátora sa v skutočnosti vždy vyžiari nejaká časť energie vo forme elektromagnetického impulzu do okolia (v okamihu zopnutia obvodu), čo v riešení nebolo vzaté do úvahy.

144. Časová konštanta $\tau = RC = \varepsilon/\sigma$ závisí iba od vlastnosti dielektrika a nezávisí od geometrie kondenzátora

145. a) $I(t) = 0{,}003\ \mathrm{e}^{-3\,000t}$ A; b) $U_{C1} = 2$ V, $U_{C2} = U_{C3} = 1$ V; c) $Q = 1$ μC

146. 1. $C' = 2\,000$ pF

2. Ak sa nemá v časovom intervale Δt náboj na kondenzátore podstatne zmeniť, musí byť časová konštanta obvodu oveľa väčšia ako Δt, t. j. musí platiť $RC \gg \Delta t$, teda $R \gg 10^7\ \Omega$.

3. Po zmene kapacity na hodnotu $C' = 2C$ je prúd v obvode

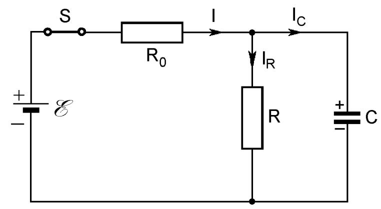
$$I(t) = I_0\exp\left(-\frac{t}{2RC}\right) = \frac{\mathscr{E}}{2R}\exp\left(-\frac{t}{2RC}\right)$$

a energia spotrebovaná v odpore

$$W = R\int_0^\infty I^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}C\mathscr{E}^2$$

147. Pre prúdy I, I_C a I_R v obvode podľa *obr. 147a* po zopnutí spínača S platia rovnice

$$R_0 I + R I_R = \mathscr{E} \qquad R I_R - \frac{1}{C}\int I_C \mathrm{d}t = 0 \qquad I = I_C + I_R$$



Obr. R147a

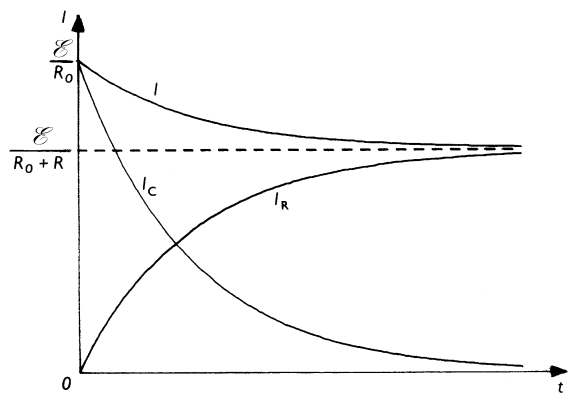
Riešením tohoto systému rovníc so začiatočnou podmienkou $t = 0$, $I_R = 0$, $I = I_C = \mathscr{E}/R_0$, dostaneme pre prúdy výrazy

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_0 + R}\left[1 + \frac{R}{R_0}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \qquad I_C = \frac{\mathscr{E}}{R_0}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad I_R = \frac{\mathscr{E}}{R_0 + R}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

kde

$$\tau = \frac{R_0 R}{R_0 + R}$$

je časová konštanta obvodu. Grafy závislostí prúdov od času sú znázornené na *obr. R147b*.



Obr. R147b

148. Graf závislosti na *obr. 148* v zadaní úlohy je daný výrazmi

$$U_C = \frac{U_0}{T}t \qquad \text{pre } 0 < t < T$$

$$U_C = U_0\left(2 - \frac{t}{T}\right) \qquad \text{pre } T < t < 2T$$

Pre $0 < t < T$ musí platiť

$$U = RI + \frac{1}{C}\int I \mathrm{d}t \qquad \text{kde} \qquad \frac{1}{C}\int I \mathrm{d}t = U_C$$

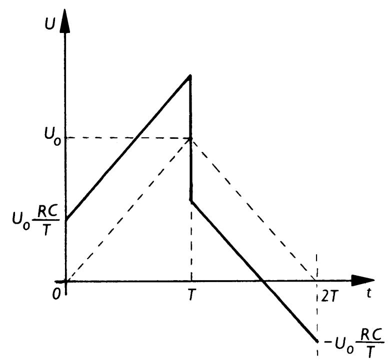
a $$I = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0 C}{T} \qquad \text{teda} \qquad U = U_0\left(\frac{t}{T} - \frac{RC}{T}\right)$$

Pre $T < t < 2T$ podobne musí platiť

$$U = RI + \frac{1}{C}\int I\mathrm{d}t \qquad \text{kde} \qquad I = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{U_0 C}{T}$$

takže $$U = U_0\left(2 - \frac{RC}{T} - \frac{t}{T}\right)$$

Graf závislosti vstupného napätia od času je na *obr. R148*.



Obr. R148

149. Podľa *obr. 149a* v zadaní úlohy v okamihu nástupu čela impulzu ($t = 0$) je kondenzátor C nenabitý a správa sa ako skrat. Prúd dodávaný do obvodu je limitovaný paralelnou dvojicou $R_1 - R_2$ a má maximálnu hodnotu

$$I_{max} = U_0\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

kde U_0 je amplitúda impulzu generátora. V tom istom okamihu v obvode na *obr. 149b* je

$$I_{max} = \frac{U_0}{R_1'}$$

pretože kondenzátor C' predstavuje skrat. V čase $t = \Delta t$ je na kondenzátore C náboj $I_C\Delta t$, kde $I_C = U_0/R_1$ je nabíjací prúd kondenzátora. Napätie na kondenzátore

$$U_C = \frac{I_C\Delta t}{C} = \frac{U_0\Delta t}{CR_1}$$

V čase $t = \Delta t$ sa kondenzátor cez skratovaný generátor začne vybíjať so začiatočným prúdom

$$I_{min} = \frac{U_C}{R_1} = \frac{U_0\Delta t}{CR_1^2}$$

V obvode na *obr. 149b* je v čase $t = \Delta t$ kondenzátor C' nabitý na napätie

$$U_C' = \frac{U_0\Delta t}{C'R_1'}$$

a začne sa cez generátor vybíjať so začiatočným prúdom

$$I_{min} = \frac{U'_C}{R'_1} = \frac{U_0 \Delta t}{C' R_1'^2}$$

Časová konštanta vybíjania kondenzátora C cez skratovaný generátor je $\tau = CR_1$ a kondenzátora C'

$$\tau' = \frac{R'_1 R'_2}{R'_1 + R'_2} C'$$

Porovnaním výrazov pre I_{max}, I_{min} a τ obidvoch obvodov dostaneme rovnice

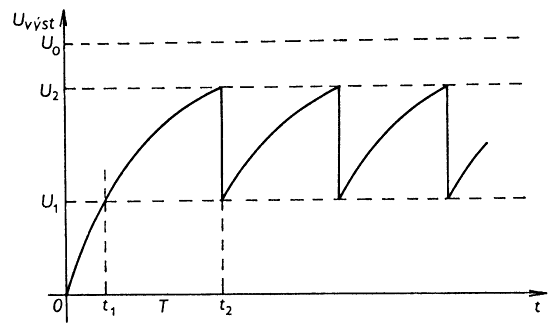
$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R'_1 \qquad CR_1^2 = C' R_1'^2 \qquad CR = \frac{R'_1 R'_2}{R'_1 + R'_2} C'$$

z ktorých plynie, že obvody budú identické, ak

$$C' = C\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right)^2 \qquad R'_1 = R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad R'_2 = \frac{R_2^2}{R_1 + R_2}$$

alebo

$$C = C'\left(\frac{R'_2}{R'_1 + R'_2}\right)^2 \qquad R_1 = R'_1 \frac{R'_1 + R'_2}{R'_2} \qquad R_2 = R'_1 + R'_2$$



Obr. R150

150. Napätie na kondenzátore má časový priebeh

$$U = U_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$

a v čase t_1 dosiahne hodnotu

$$U_1 = U_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t_1}{RC}\right)\right]$$

čo je minimálna úroveň napätia generátora. Maximálna hodnota napätia na kondenzátore je v čase t_2, kedy

$$U_2 = U_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t_2}{RC}\right)\right]$$

Z posledných dvoch výrazov možno vyjadriť časy t_1 a t_2

$$t_1 = -RC\ln\left(1-\frac{U_1}{U_0}\right) \qquad\qquad t_2 = -RC\ln\left(1-\frac{U_2}{U_0}\right)$$

Perióda kmitov relaxačného generátora

$$T = t_2 - t_1 = RC\ln\frac{U_0-U_1}{U_0-U_2}$$

Časový priebeh napätia relaxačného generátora je znázornený na *obr. R150.*

151. Ak označíme $C' = 10^{-2}$ F/m^2 kapacitu bunečnej membrány na jednotku plochy, tak hrúbku bunečnej membrány možno určiť zo vzťahu

$$d = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{C'} = 2{,}65.10^{-9}\ \text{m}$$

časová konštanta bunečného kondenzátora

$$\tau = R'C' = \rho\varepsilon = 1\ \text{ms}$$

kde R' je priečny odpor jednotkovej plochy bunečnej membrány (v jednotkách $\Omega.\text{m}^2$), ρ je rezistivita bunečnej membrány a ε je jej permitivita. Rezistivitu možno určiť zo vzťahu

$$\rho = \frac{R'}{d} = 3{,}76.10^{7}\ \Omega.\text{m}$$

čo je veľká hodnota v porovnaní s rezistivitou dobrých izolantov.

6 Magnetizmus elektrických prúdov

152. Priame časti vodiča s prúdom k magnetickej indukcii v strede polkružnice neprispievajú, pretože smer prúdu je paralelný, resp. antiparalelný so sprievodičom k stredu polkružnice. K magnetickej indukcii prispieva iba časť prúdu tečúceho polkruhovým vodičom. Hodnota tohto príspevku je

$$B = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

153. Magnetická indukcia v bode P je superpozíciou indukcie B' od prúdu v polkružnici a B'' od prúdu v dvojici paralelných nekonečných vodičov (*obr. R153*). Magnetická indukcia od elementu prúdu na polkružnici je

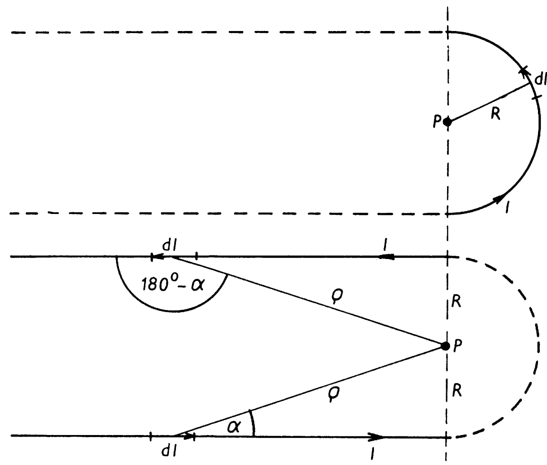
$$\mathrm{d}B' = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi R^2}$$

a celkový príspevok od prúdu v polkruhovej časti je

$$B' = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

Pri danom smere prúdu vektor B' smeruje pred nákresňu. Od dvoch symetrických elementov dl na paralelných častiach vodiča magnetická indukcia je

$$\mathrm{d}B'' = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}l\sin\alpha}{2\pi\rho^2} = \frac{\mu_0 I\sin\alpha\mathrm{d}\alpha}{2\pi R} \qquad \text{a} \qquad B'' = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\int_0^{\pi/2}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Obr. R153

Vektor B'' smeruje tiež pred nákresňu. Od dvoch symetrických elementov dl na paralelných častiach vodiča magnetická indukcia je

$$B = B' + B'' = \frac{\mu_0 I(2+\pi)}{4\pi R}$$

154. $B = \dfrac{4\mu_0 I a^2}{\pi\left(a^2+4d^2\right)\left(2a^2+4d^2\right)^{1/2}}$

155. a) Pole v bode x bude superpozíciou polí dvoch kruhových prúdov nI, teda

$$B = \frac{\mu_0 n I a^2}{2}\left\{\frac{1}{\left[a^2+(b/2+x)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[a^2+(b/2-x)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

b) Rozvinieme výraz pre B do mocninného radu podľa mocnín x. Pretože $x \ll a, b$ obmedzíme sa na prvé tri členy rozvoja, takže

$$B(x) = B(0) + \left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} x + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=0} x^2$$

Funkcia $B(x)$ takto nadobudne tvar

$$B = \frac{\mu_0 n I a^2}{3}\left[1+\left(\frac{15}{4}\frac{b^2}{r_0^4} - \frac{3}{r_0^2}\right)\frac{x^2}{2}\right] \qquad \text{kde} \qquad r_0 = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

c) Pri danej presnosti nebude B závisieť od x, ak

$$\frac{15}{4}\frac{b^2}{r_0^4} - \frac{3}{r_0^2} = 0$$

čo je splnené pri $a = b$, pritom $r_0 = \sqrt{5/4}a$.

d) V bode 0 má magnetická indukcia hodnotu

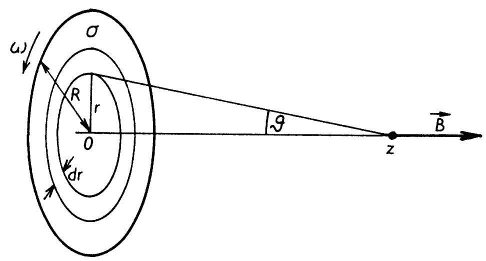
$$B(0) = \frac{\mu_0 n I a^2}{r_0^3} = 0{,}715541\frac{\mu_0 n I}{a} = 0{,}899176.10^{-6}\,\frac{nI}{a} \qquad [\mathrm{T;\,A;\,m}]$$

156. Disk možno rozložiť na medzikružia s polomerom r a šírkou dr, pričom príspevok k magnetickej indukcii od jedného medzikružia podľa *obr. R156* je

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r}\sin^3\vartheta = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2}\frac{r^2}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

kde dI = $\omega\sigma r$dr. Celková magnetická indukcia v bode z je

$$B = \frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\int_0^R \frac{r^3\mathrm{d}r}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\left(\frac{2z^2+R^2}{\sqrt{z^2+R^2}} - 2|z|\right)$$

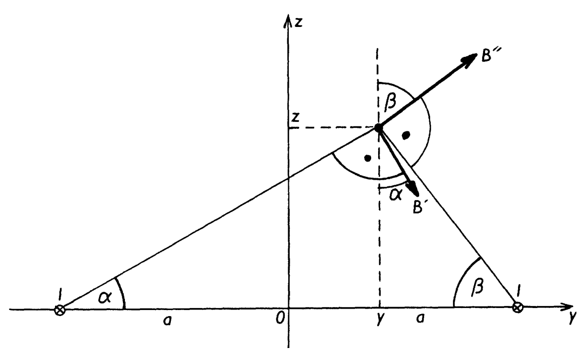


Obr. R156

alebo vo vektorovom tvare

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0\sigma}{2}\left(\frac{2z^2+R^2}{\sqrt{z^2+R^2}} - 2|z|\right)\vec{\omega}$$

157. a) Magnetická indukcia bude mať zložky iba v rovine kolmej na vodiče (rovina yz podľa *obr. R157*). Prúdy I tečú za nákresňu *obr. R157* a magnetické indukcie od jednotlivých prúdov v bode (y, z) sú



Obr. R157

$$B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(a+y)^2 + z^2}} \qquad B'' = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(a-y)^2 + z^2}}$$

Zložky magnetickej indukcie v smere súradných osí sú

$$B'_y = B' \sin\alpha = \frac{\mu_0 I z}{2\pi\left[(a+y)^2 + z^2\right]} \qquad B''_y = B'' \sin\beta = \frac{\mu_0 I z}{2\pi\left[(a-y)^2 + z^2\right]}$$

$$B'_z = -B' \cos\alpha = \frac{-\mu_0 I (a+y)}{2\pi\left[(a+y)^2 + z^2\right]} \qquad B''_y = B'' \cos\beta = \frac{\mu_0 I (a-y)}{2\pi\left[(a-y)^2 + z^2\right]}$$

a výsledné zložky magnetickej indukcie od oboch prúdov

$$B_y = B'_y + B''_y = \frac{\mu_0 I z}{2}\left[\frac{1}{(a-y)^2 + z^2} + \frac{1}{(a+y)^2 + z^2}\right]$$

$$B_z = B'_z + B''_z = \frac{\mu_0 I}{2}\left[\frac{a-y}{(a-y)^2 + z^2} + \frac{a+y}{(a+y)^2 + z^2}\right]$$

b) V prípade, ak prúd vľavo od osi z na *obr. R157* tečie pred nákresňu, zložky magnetickej indukcie budú

$$B_y = -B'_y + B''_y \qquad B_z = -B'_z + B''_z$$

158. Použitím zákona celkového prúdu dostávame pre magnetickú indukciu výrazy:
– pre $r < a$

$$B = \frac{\mu I r}{2\pi a^2}$$

– pre $a < r < b$

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

– pre $b < r < b + d$

$$B = \frac{\mu I\left[(b+d)^2 - r^2\right]}{2\pi r\left(2bd + d^2\right)}$$

– pre $r > b + d$

$$B = 0$$

159. Podľa *obr. R159* platí pre pomer priečnej zložky prúdu I_p k pozdĺžnej I_z

$$\frac{I_p}{I_z} = \frac{2a}{\delta}$$

Magnetická indukcia vo vnútri solenoidu je

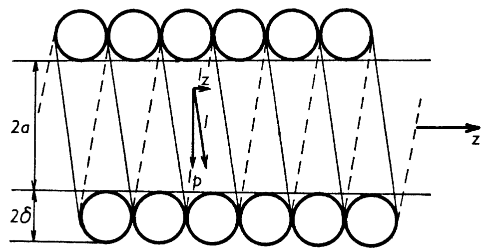
$$B_{int} = \mu_0 I_p n = \frac{\mu_0 I_p}{2\delta}$$

kde $n = 1/(2\delta)$ je počet závitov na jednotku dĺžky solenoidu. Na povrchu solenoidu

$$B_{ext} = \frac{\mu_0 I_z}{2\pi a}$$

Pre pomer týchto indukcií platí

$$\frac{B_{int}}{B_{ext}} = 2\pi \frac{a^2}{\delta^2}$$



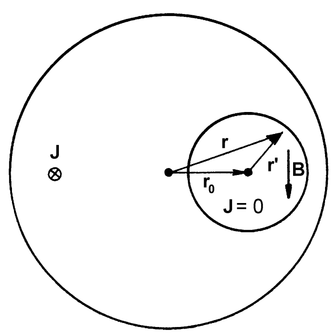
Obr. R159

160. Odpor vinutia solenoidu $R = 184\ \Omega$. Tepelný výkon

$$P = \frac{U^2}{R} = 3{,}13\ \text{W} \qquad \text{a prúd v solenoide} \qquad I = \frac{P}{U} = 131\ \text{mA}$$

Magnetická indukcia v strede solenoidu s dĺžkou d, polomerom r a s počtom závitov n na jednotku dĺžky pri prúde I je

$$B = \frac{\mu_0 I n d}{2\sqrt{\dfrac{d^2}{4} + r^2}} = 8{,}05.10^{-4}\ \text{T}$$



Obr. R161

161. Dané prúdové rozloženie možno považovať za superpozíciu prúdovej hustoty J v celom valci a prúdovej hustoty $-J$ v dutine valca. Podľa *obr. R161* intenzita magnetického poľa v bode danom polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$, spôsobená prúdovou hustotou J bude

$$B' = \mu_0 \frac{Jr}{2} \qquad \text{alebo vo vektorovom vyjadrení} \qquad \boldsymbol{B}' = \mu_0 \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}}{2}$$

Intenzita poľa od prúdu s hustotou $-\boldsymbol{J}$ v tom istom bode je

$$\boldsymbol{B}'' = \mu_0 \frac{-\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}'}{2}$$

Výsledné pole v dutine je

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}'' = \mu_0 \frac{\boldsymbol{J} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{2} = \mu_0 \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}_0'}{2}$$

kde $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ je polohový vektor stredu dutiny vzhľadom na stred valca. Pole v dutine je homogénne.

162. Podľa *obr. R162* priestorový uhol, v ktorom vidno prúdovú slučku l z bodu P je Ω. Pri zmene polohy bodu P o d$\boldsymbol{u}$ sa zmení priestorový uhol o dΩ. Posunutie bodu P o d$\boldsymbol{u}$ je ekvivalentné posunutiu slučky o $-$d$\boldsymbol{u}$. Zmena priestorového uhla dΩ je rovná súčtu elementárnych priestorových uhlov malých rovnobežníkov tvorených vektormi d$\boldsymbol{l}$ a $-$d$\boldsymbol{u}$. Plocha takého rovnobežníka je

$$\mathrm{d}S = |\mathrm{d}\boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}|$$

a plošný vektor rovnobežníka

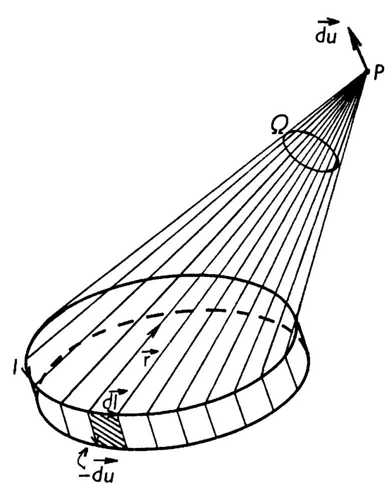
$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\mathrm{d}\boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

ktorého priemet do smeru vektora $\boldsymbol{r}$ delený s r^2 dáva elementárny priestorový uhol

$$-\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^3}\right)\boldsymbol{r} = -\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}\right).\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

Integráciou posledného výrazu pozdĺž celej slučky l dostaneme zmenu dΩ v tvare

$$\mathrm{d}\Omega = -\mathrm{d}\boldsymbol{u}.\oint_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$



Obr. R162

avšak $d\Omega = \text{grad}\,\Omega.d\boldsymbol{u}$, takže

$$-\text{grad}\Omega = \oint_l \frac{d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Magnetická indukcia prúdovej slučky sa teda v bode P dá vyjadriť výrazom

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l \frac{d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\text{grad}\Omega = -\text{grad}\frac{\mu_0 I\Omega}{4\pi} = -\text{grad}V_m$$

kde

$$V_m = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega$$

je skalárny magnetický potenciál.

163. Valcovo symetrické pole od priameho vodiča

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

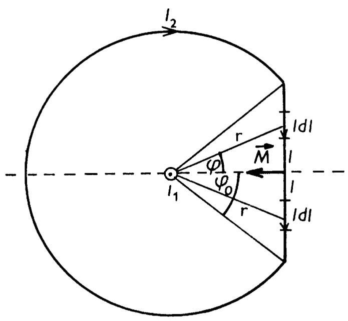
bude pôsobiť iba na priamy úsek uzavretého okruhu, pretože na jeho kruhovej časti je magnetická indukcia paralelná s prúdovými elementmi. Podľa *obr. R163* elementárny moment dvojice síl pôsobiaci na dva symetrické prúdové elementy $I_2 dl$ je

$$dM = 2l dF = 2lI_2 B\sin\varphi\, dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l^2 dl}{\pi r^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R\cos\varphi_0}{\pi}\text{tg}^2\varphi\, d\varphi$$

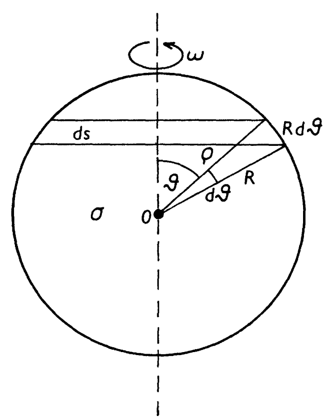
Celkový moment

$$M = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R\cos\varphi_0}{\pi}\int_0^{\varphi_0}\text{tg}^2\varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi}\left(\sin\varphi_0 - \varphi_0\cos\varphi_0\right)$$

smeruje na *obr. R163* doľava.



Obr. R163



Obr. R164

164. Magnetický moment dutej gule možno vypočítať integráciou elementárnych magnetických momentov prúžkov na guľovej ploche podľa *obr. R164*. Označme: $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ plošnú hustotu náboja na guľovej ploche, $ds = 2\pi\rho R d\vartheta$ plochu prúžka, $dI = \omega dQ/(2\pi) = \sigma\omega ds/(2\pi)$ prúd vzniklý otáčaním prúžka s nábojom dQ uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$, $S = \pi\rho^2$ plochu obopnutú prúdom dI. Pre magnetický moment prúžka platí

$$\mathrm{d}m = S\mathrm{d}I = \frac{Q}{4}\omega R^2 \sin^3 \vartheta \mathrm{d}\vartheta$$

Celkový magnetický moment dutej gule dostaneme integráciou príspevkov dm v intervale uhlov od $\vartheta = 0$ po $\vartheta = \pi$, teda

$$m = \frac{Q}{4}\omega R^2 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \mathrm{d}\vartheta = \frac{Q}{3}\omega R^2$$

Moment hybnosti otáčajúcej sa dutej gule s hmotnosťou M je $L = (2/3)\omega MR^2$, takže gyromagnetický (magnetomechanický) pomer (pozri odsek 8.1)

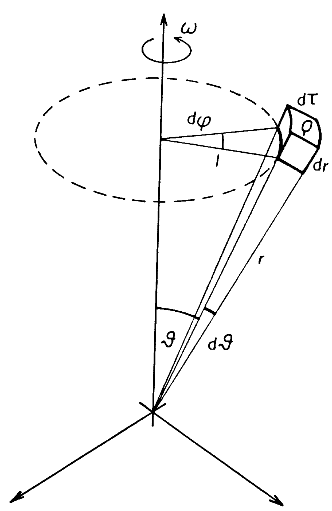
$$\gamma = \frac{m}{L} = \frac{Q}{2M}$$

165. Guľu možno rozložiť na objemové elementy dτ = $r^2 \sin\vartheta$ dϑ dφ dr vo sférických súradniciach podľa *obr. R165*. Objemová hustota náboja v guli je $\rho = 3Q/(4\pi R^3)$ a náboj v objemovom elemente dτ

$$\mathrm{d}Q = \rho \mathrm{d}\tau = \frac{3Q}{4\pi R^3} r^2 \sin \vartheta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r$$

Tento náboj sa otáča okolo osi rotácie gule uhlovou rýchlosťou ω a vytvára tak kruhový prúd $\delta I = \omega \mathrm{d}Q / (2\pi)$ s polomerom $l = r \sin\vartheta$. Elementárny magnetický moment tohoto prúdu je

$$\mathrm{d}m = \pi l^2 \mathrm{d}I = \frac{3\omega Q}{8\pi R^3} r^4 \sin^3 \vartheta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r$$



Obr. R165

Celkový magnetický moment gule dostaneme integráciou týchto príspevkov cez φ od 0 po 2π, cez ϑ od 0 po π a cez r od 0 po R, teda

$$m = \frac{3\omega Q}{8\pi R^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4 \sin^3\vartheta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r = \frac{\omega Q R^2}{5}$$

Moment hybnosti plnej gule s polomerom R a hmotnosťou M je $L = 2\omega MR^2/5$ a gyromagnetický pomer

$$\gamma = \frac{m}{L} = \frac{Q}{2M}$$

Vektor magnetického momentu má smer vektora uhlovej rýchlosti.

166. Podľa vzťahu (6.59) z odseku 6.1.9 magnetická indukcia na osi dipólu vo vzdialenosti R je daná výrazom

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3} \qquad \text{z čoho magnetický moment} \qquad m = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0}$$

Dosadením hodnôt $R = 6.10^6$ m a $B = 0{,}62.10^{-4}$ T dostaneme pre magnetický moment zemského dipólu hodnotu $m = 6{,}7.10^{22}$ A.m^2.

Ekvivalentný prúd na rovníku by bol obrovský a mal by hodnotu

$$I = \frac{m}{\pi R^2} = 5{,}92.10^8 \text{ A}$$

167. Podľa výsledku úlohy 165 magnetický moment plnej gule s nábojom Q a polomerom R rotujúcej uhlovou rýchlosťou ω je rovný $m = \omega QR^2/5$, pričom podľa vzťahu (6.59) z odseku 6.1.9 magnetická indukcia vo vzdialenosti R v smere magnetického momentu je

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3} = \frac{\mu_0 \omega Q}{10\pi R} \qquad \text{z čoho} \qquad Q = \frac{10\pi RB}{\mu_0 \omega}$$

a objemová hustota náboja $$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} = \frac{15B}{2\mu_0 \omega R^2}$$

Dosadením hodnôt $B = 0{,}62.10^{-4}$ T, $R = 6.10^6$ m a $\omega = 2/(24.60.60) = 7{,}3.10^{-5}$ rad/s, dostaneme objemovú hustotu náboja v Zemi $\rho = 1{,}41.10^{-7}$ C/m^3, čo zodpovedá koncentrácii $n = \rho/e = 8{,}8.10^{11}$ elementárnych nábojov na 1 m^3. Na povrchu Zeme by bola intenzita elektrického poľa

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = 3{,}18.10^{10} \text{ V / m}$$

Q je celkový náboj a R je polomer Zeme. Je to obrovská nereálna intenzita elektrického poľa, a preto uvažovaná hypotéza je neprijateľná.

168. Intenzita magnetického poľa vo vnútri kábla je

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

Zvoľme objemový element dτ s jednotkovou dĺžkou v dutine kábla d$\tau = 2\pi r$dr, potom energia nahromadená vo ferite na jednotku dĺžky kábla je

$$W_1=\frac{\mu_0\mu_r}{2}\int_\tau H^2\mathrm{d}\tau=\frac{\mu_0\mu_r I^2}{4\pi}\int_1^2\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0\mu_r I^2}{4\pi}\ln 2=3{,}465.10^{-6}\,\mathrm{J/m}$$

a energia vo zvyšku dutiny kábla na jednotku dĺžky

$$W_2=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\int_2^5\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln 2{,}5=9{,}1.10^{-8}\,\mathrm{J/m}$$

Celková energia na jednotku dĺžky kábla

$$W=W_1+W_2=3{,}556.10^{-6}\ \mathrm{J/m}$$

Percentuálny podiel energie vo ferite

$$\eta=\frac{W_1}{W_1+W_2}100\ \%=97{,}6\ \%$$

169. Celková magnetická indukcia dipólu je daná výrazom (6.60) z odseku 6.1.9

$$B=\sqrt{B_r^2+B_\vartheta^2}=\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}=B_0\frac{R^3}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}$$

kde

$$B_0=\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}=3{,}1.10^{-5}\ \mathrm{T}$$

je magnetická indukcia na rovníku. Energiu magnetického poľa Zeme dostaneme integráciou

$$W=\frac{\mu_0}{2}\int_\infty\left(\frac{B}{\mu_0}\right)^2\mathrm{d}\tau$$

cez celý nekonečný priestor mimo objemu Zeme. Integrovať je najvýhodnejšie v sférických súradniciach s objemovými elementmi $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ takže

$$W=\frac{B_0^2R^6}{2\mu_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_R^{\infty}\frac{1+3\cos^2\vartheta}{r^4}\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}r=\frac{4\pi B_0^2R^3}{3\mu_0}=6{,}9.10^{17}\ \mathrm{J}\approx 165\ \text{megaton TNT}$$

1 tona TNT = $4{,}2.10^9$ J. Z výsledku je zrejmé, že výbuch atómovej bomby s energiou jednej megatony TNT nemôže podstatne ovplyvniť magnetické pole Zeme. Aj odpovede na takéto otázky trápili konštruktérov prvej atómovej bomby v Los Alamos National Laboratory, New Mexico, USA, na jar v roku 1945.

170. a) $I=\dfrac{ev}{2\pi a}=1{,}05.10^{-3}\,\mathrm{A}$

b) Magnetická indukcia v strede atómu

$$B=\frac{\mu_0 I}{2a}=12{,}5168\ \mathrm{T}$$

Je to obrovská indukcia, ktorú nemožno dosiahnuť bežnými prostriedkami experimentálnej fyziky, ale iba v solenoidoch v impulznom režime prípadne v supravodivých magnetoch.

c) Magnetický moment (Bohrov magnetón)

$$m = \frac{e}{2} a v = \frac{eh}{4\pi m_e} = \mu_B \approx 9{,}274.10^{-24}\ \mathrm{A.m^2}$$

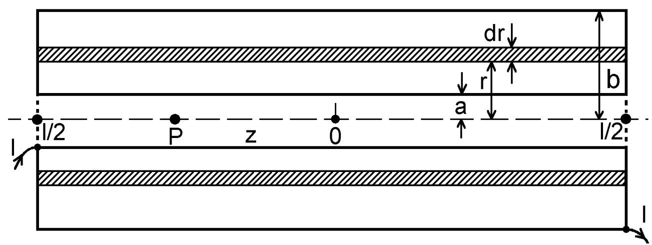
je jedna z dôležitých fyzikálnych konštánt.

171. Hrubú cievku možno rozložiť na nekonečne tenké valcové prúdy (solenoidy) podľa *obr. R171*, pričom magnetická indukcia od takého solenoidu vo vzdialenosti z od stredu cievky je

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 n \mathrm{d}I}{2l}\left[\frac{l/2 - z}{\sqrt{r^2 + (l/2 - z)^2}} + \frac{l/2 + z}{\sqrt{r^2 + (l/2 + z)^2}}\right]$$

kde

$$\mathrm{d}I = \frac{pI\mathrm{d}r}{b - a}$$



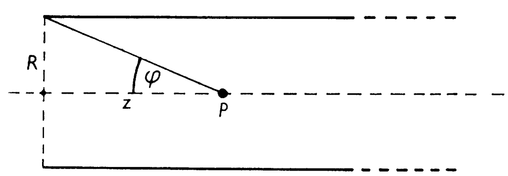
Obr. R171

je prúd v elementárnom solenoide s hrúbkou dr. Integráciou dB cez r od a po b dostaneme celkovú magnetickú indukciu

$$B = \frac{\mu_0 n p I}{2l(b - a)}\left[(l/2 - z)\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(l/2 - z)^2 + r^2}} + (l/2 + z)\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(l/2 + z)^2 + r^2}}\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 n p I}{2l(b - a)}\left[f \ln\frac{b + \sqrt{b^2 + f^2}}{a + \sqrt{a^2 + f^2}} + g \ln\frac{b + \sqrt{b^2 + g^2}}{a + \sqrt{a^2 + g^2}}\right]$$

kde $f = l/2 - z$ a $g = l/2 + z$.



Obr. R172

172. Veľmi dlhý solenoid možno považovať za "polonekonečný" s jedným koncom v nekonečne (*obr. R172*). Magnetická indukcia v bode P vo vzdialenosti z od čela solenoidu je daná výrazom

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\varphi - \cos\pi) = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} + 1\right)$$

Sila pôsobiaca na paramagnetickú vzorku bude maximálna v tom mieste, kde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(B\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}\right) = 0$$

čo je splnené vo vzdialenosti $z = R/\sqrt{15}$ od čela solenoidu.

173. Využitím vektorovej identity (pozri tabuľku 2)

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b}.\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}.\nabla)\boldsymbol{b}$$

dostaneme

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = k\boldsymbol{J}_z \mathrm{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -k\frac{\boldsymbol{J}_z}{r^3}$$

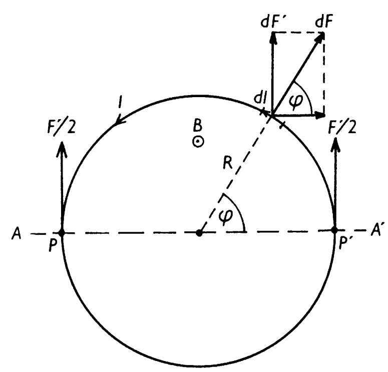
Príklad možno riešiť aj inak. Vektor $\boldsymbol{B}$ má iba azimutálnu zložku

$$B_\varphi = \frac{kJ_z}{r^2}$$

takže v cylindrických súradniciach (pozri tabuľku 22)

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}\boldsymbol{e}_z = -k\frac{\boldsymbol{J}_z}{r^3}$$

174. $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = k\boldsymbol{J}_z\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{r} - k\boldsymbol{r}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{J}_z = 2k\boldsymbol{J}_z$



Obr. R175

175. Na každý element závitu pôsobí sila (*obr. R175*)

$$\mathrm{d}F = \frac{1}{2}IB\mathrm{d}l$$

ktorej zložka kolmá na rovinu AA' je

$$\mathrm{d}F' = \frac{1}{2}IB\mathrm{d}l\sin\varphi = \frac{1}{2}IBR\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

Integráciou cez φ od 0 po π dostaneme celkovú silu

$$F' = \frac{1}{2} IBR \int_0^{\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = IBR$$

ktorá napína závit v miestach P a P'. Závit sa začne trhať, keď sila F' dosiahne hodnotu $F' = 2\eta\pi a^2$, kde η je pevnosť v ťahu materiálu závitu a a je polomer drôtu. Porovnaním posledných výrazov a uvážením, že

$$I = \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{2Ba}{\mu_0}$$

dostaneme výraz pre kritickú magnetickú indukciu v tvare

$$B_{krit} = \sqrt{\frac{\pi\mu_0\eta a}{R}}$$

Dosadením numerických hodnôt $a = 0{,}15$ mm, $\eta = 2.10^8$ N/m^2 a $R = 3$ cm dostaneme $B_{krit} = 1{,}98$ T.

176. Pohybová rovnica pre vektor momentu hybnosti gule je tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \qquad \text{alebo} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \gamma\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

Zaveďme súradnicový systém xyz tak, že $\boldsymbol{B}$ má iba z-ovú zložku B_z. V tom prípade možno poslednú rovnicu napísať v zložkovom tvare

$$\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t} = \gamma L_y B \qquad \frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t} = -\gamma L_x B \qquad \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = 0$$

Riešenie tohto systému možno hľadať tak, že si zavedieme komplexnú veličinu

$$\boldsymbol{L}_{kompl} = L_x - \mathrm{j}L_y$$

a od prvej rovnice odpočítame druhú, násobenú imaginárnou jednotkou j. Tak dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{kompl}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\gamma B\boldsymbol{L}_{kompl}$$

ktorej riešenie je tvaru

$$\boldsymbol{L}_{kompl} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma Bt} = A(\cos\gamma Bt + \mathrm{j}\sin\gamma Bt)$$

Z čoho

$$L_x = A\cos\gamma Bt \qquad\qquad L_y = -A\sin\gamma Bt$$

Riešenie tretej rovnice je

$$L_z = \text{konšt.}$$

Z týchto riešení vidieť, že vektor $\boldsymbol{L}$ (viazaný s osou otáčania gule) skutočne vykonáva precesný pohyb okolo smeru magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ s uhlovou rýchlosťou

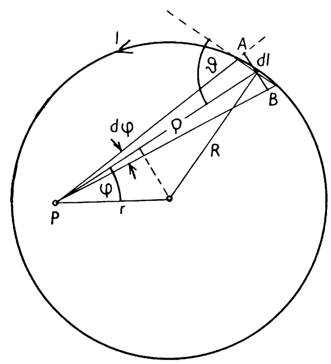
$$\omega_L = \gamma B = \frac{Q}{2m}B$$

177. Magnetická indukcia v rovine kruhového závitu má iba zložku B_z kolmú na rovinu závitu. V bode P (*obr. R177*) vo vzdialenosti r od stredu závitu príspevok k magnetickej indukcii od prúdového elementu $I\mathrm{d}l$ je

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}l \sin\vartheta}{\rho^2}$$

a indukcia od celého závitu s prúdom I

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{\mathrm{d}l \sin\vartheta}{\rho^2}$$



Obr. R177

pričom integrujeme po dĺžke celého závitu $2\pi R$. Z obrázka vidieť, že $\mathrm{d}l \sin\vartheta = \overline{\mathrm{AB}} = \rho \mathrm{d}\varphi$ a

$$\rho = \sqrt{R^2 - (r\sin\varphi)^2} + r\cos\varphi = R\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + k\cos\varphi\right)$$

kde $k = r/R < 1$. Dosadením za $\mathrm{d}l \sin\vartheta$ a ρ vo výraze pre B_z dostávame

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi(1-k^2)R}\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi - k\int_0^{2\pi}\cos\varphi \mathrm{d}\varphi\right)$$

Druhý integrál sa rovná nule. Hodnota $\sin^2\varphi$ sa opakuje v každom zo štyroch kvadrantov závitu, takže

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{\pi(1-k^2)R}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi(1-k^2)R}\mathrm{E}(k)$$

kde

$$\mathrm{E}(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

je úplný eliptický integrál druhého druhu. Niekoľko jeho hodnôt je uvedených v nasledujúcej tabuľke:

k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
E(k)	1,571	1,567	1,554	1,534	1,504	1,467	1,416	1,351	1,277	1,165	1,000

Hodnoty magnetickej indukcie mimo stredu závitu sú vyššie ako v strede. Tak napr. vo vzdialenosti $r = R/2$ ($k = 0{,}5$)

$$B_z = \frac{2.1{,}467}{\pi\left(1-0{,}5^2\right)}\frac{\mu_0 I}{2R} = 1{,}245\frac{\mu_0 I}{2R}$$

čo je hodnota o 24,5 % väčšia ako hodnota $B_0 = \mu_0 I/(2R)$ v strede závitu.

178. Uvažujme integrálnu identitu

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{A}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Phi$$

kde S je ľubovoľná plocha ohraničená krivkou l a Φ je indukčný tok plochou S. Platí teda

$$\oint_l \boldsymbol{A}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \Phi$$

t. j. integrál z vektorového potenciálu $\boldsymbol{A}$ po uzavretej krivke l sa rovná celkovému indukčnému toku Φ plochou S. Môžeme teda vedľa seba napísať dva integrálne výrazy

$$\oint_l \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_S \mu_0 \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mu_0 I \qquad\qquad \oint_l \boldsymbol{A}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_S \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Phi$$

Analogickými veličinami sú teda $\mu_0 I$ a Φ, alebo $\mu_0\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{B}$. Zvoľme cylindrický súradnicový systém r, φ, z, v ktorom pozdĺž osi z môže byť uložený valcový vodič alebo solenoid rovnakého polomeru R. Vo vodiči existuje z-ová zložka prúdovej hustoty a z-ová zložka vektorového potenciálu (pozri odsek 6.1.8), zatiaľ čo magnetická indukcia má azimutálny smer. V solenoide existuje z-ová zložka magnetickej indukcie a teda indukčného toku, zatiaľ čo vektorový potenciál má iba azimutálnu zložku (pozri odsek 6.1.9.1). Analogickými veličinami sú teda $\mu_0 I$ a Φ, kde I je prúd tečúci pozdĺž osi vodiča (v smere osi z) a Φ je indukčný tok priečnym prierezom solenoidu, alebo zložky vektorov $\mu_0 J_z$ a B_z.

Pre magnetickú indukciu vo vnútri valcového vodiča s polomerom R (pre $r < R$) platí

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 J_z}{2} r$$

a analogicky pre vektorový potenciál v solenoide polomeru R pre $r < R$

$$A_\varphi = \frac{\Phi r}{2\pi R^2} = \frac{B_z}{2} r$$

Pre $r > R$ v okolí valcového vodiča

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 J_z R^2}{2r} \qquad \text{a v okolí solenoidu} \qquad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi r} = \frac{B_z R^2}{2r}$$

Ak vypočítame rotáciu vektorového potenciálu, dostaneme pre $r < R$

$$\operatorname{rot}(A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi) = B_z \boldsymbol{e}_z \qquad \text{a pre } r > R \qquad \operatorname{rot}(A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi) = 0$$

$\boldsymbol{e}_\varphi$ a $\boldsymbol{e}_z$ sú jednotkové vektory v smeroch súradníc φ a z.

179. Ak je vedenie pod napätím U, potom na vodičoch vznikajú náboje s dĺžkovou hustotou $\pm\lambda$. Jeden vodič pôsobí na druhý príťažlivou silou

$$F_e = \lambda E = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

na jednotku dĺžky vedenia. Podľa úlohy 53 možno λ vyjadriť ako

$$\lambda = C'U = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{a}}U$$

kde C' je kapacita na jednotku dĺžky vedenia. Po dosadení za λ vo výraze pre F_e dostaneme

$$F_e = \frac{\pi\varepsilon_0}{2d\ln^2\frac{d}{a}}U^2$$

Magnetická sila medzi vodičmi je odpudivá a vyplýva z Ampérovho zákona:

$$F_m = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$$

na jednotku dĺžky vedenia. Pre pomer týchto síl platí

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\frac{\ln^2\frac{d}{a}}{\pi^2 R^2}$$

kde $R = U/I$ je odpor záťaže vedenia. Výsledná sila pôsobiaca medzi vodičmi vedenia môže byť príťažlivá (ak $F_e > F_m$) alebo odpudivá (ak $F_e < F_m$). Tvrdenie, že dva vodiče, ktorými tečie ten istý elektrický prúd v opačných smeroch sa odpudzujú, platí iba vtedy, ak elektrické pôsobenie je zanedbateľné, t. j. ak odpor R je dostatočne malý. Sily sa kompenzujú vtedy, ak $F_e/F_m = 1$, t. j. pri hodnote odporu

$$R = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ln\frac{d}{a} \approx 120\ln\frac{d}{a} \qquad [\Omega]$$

Je zaujímavé, že je to hodnota, ktorá sa rovná vlnovému odporu $\sqrt{L'/C'}$ vedenia, kde L' a C' sú indukčnosť a kapacita na jednotku dĺžky vedenia (pozri úlohy 53 a 207 a tiež odsek 11.6.3).

180. $M = \frac{\mu_0 I I_0}{\pi}(b-a)\sin\varphi$. Pri danom smere prúdov vektor $\boldsymbol{M}$ smeruje na obrázku doprava.

181. Čiara, po ktorej sa má počítať cirkulácia vektora $\boldsymbol{H}$, je kružnica so stredom na osi pohybu náboja q a prechádzajúca bodom P (pozri *obr. R181a*). Označme polomer kružnice R. Teda

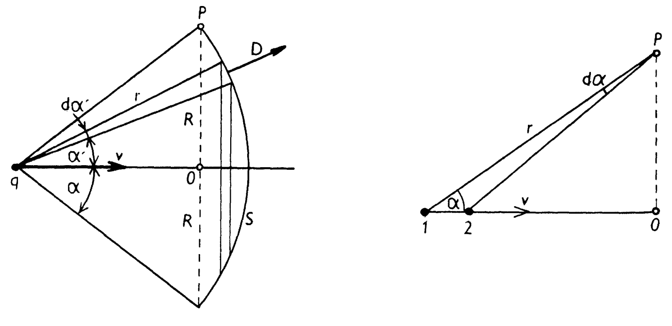
$$2\pi RH = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{D}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Plocha S je ľubovoľná plocha napnutá na zvolenej kružnici. Pre výpočet toku vektora elektrickej indukcie $\boldsymbol{D}$ je najvýhodnejšie vziať guľovú plochu s polomerom r. Na tejto ploche zvolíme elementárne kruhové prúžky s plochou $\mathrm{d}S = 2\pi r^2 \sin\alpha'\mathrm{d}\alpha'$. Elementárny tok

$$D\mathrm{d}s = \frac{q}{4\pi r^2}2\pi r^2\sin\alpha'\mathrm{d}\alpha' = \frac{q}{2}\sin\alpha'\mathrm{d}\alpha'$$

a tok celou plochou

$$\int_S D dS = \frac{q}{2}\int_\alpha^{\pi/2}\sin\alpha'\mathrm{d}\alpha' = \frac{q}{2}(1-\cos\alpha)$$



a) b)

Obr. R181

Derivujme tento výraz podľa času:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S D\mathrm{d}S = \frac{q}{2}\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

Pri premiestnení náboja z bodu 1 do bodu 2 (*obr. R181b*) na vzdialenosť $v\mathrm{d}t$ je $v\mathrm{d}t\ \sin\alpha = r\mathrm{d}\alpha$, z čoho

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{v\sin\alpha}{r}$$

Dosadením výsledku do predchádzajúceho a potom do prvého vzťahu dostaneme

$$H = \frac{qv}{4\pi r^2}\sin\alpha$$

pričom sme využili skutočnosť, že $R = r\ \sin\alpha$. Vo vektorovom tvare

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \text{alebo} \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

čo je rovnaký výsledok ako udáva výraz (6.5) získaný z experimentálnej skúsenosti.

182. a) Napätie na kondenzátore

$$U_C = U_0\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

kde $C = \varepsilon_0\pi b^2/l$.

b) Intenzita elektrického poľa medzi doskami kondenzátora

$$E_C = \frac{U_C}{l} = \frac{U_0}{l}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

c) Pri osovej symetrii kondenzátora má posuvný prúd medzi doskami kondenzátora hustotu

$$J_{pos} = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon_0\frac{E_C}{RC}$$

paralelnú s osou symetrie kondenzátora. Siločiary magnetického poľa budú sústredné kružnice so stredmi na osi symetrie. Zo zákona celkového prúdu aplikovaného na kružnicu s polomerom r plynie pre intenzitu magnetického poľa H

$$2\pi rH = \pi r^2 J_{pos} = -\frac{\pi\varepsilon_0 r^2 E_C}{RC} \qquad \text{z čoho} \qquad H = -\frac{\varepsilon_0 r E_C}{2RC} = -\frac{lr}{2RS}E_C$$

183. Označme začiatočnú plošnú hustotu náboja na doske kondenzátora $\sigma_0 = Q_0/S$, kde $S = \pi a^2$ je plocha dosky kondenzátora a $C = \varepsilon_0 S/d$ je kapacita kondenzátora. Potom:

a) $\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ b) $Q = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ c) $I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\sigma_0 S}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$

d) Hustota posuvného prúdu v kondenzátore

$$J_{pos} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma_0}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

a celkový posuvný prúd ako funkcia vzdialenosti d od osi kondenzátora a od času

$$I_{pos} = J_{pos}\pi r^2 = -\frac{\sigma_0 \pi r^2}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

e) Magnetická indukcia má v kondenzátore iba azimutálnu zložku B_φ, pre ktorú platí

$$2\pi r B_\varphi = \mu_0\left(I + I_{pos}\right)$$

z čoho

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 Q_0}{2\pi RC}\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{a^2}\right)\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

184. a) $n = 3{,}32.10^{11}$;
b) 16×20 cm^2, vzdialenosť dosiek $d = 2$ mm, $n = 3{,}32.10^{11}$, $E = 1{,}875.10^5$ V/m;
c) 20×20 cm^2, $d = 1{,}6$ mm, $n = 3{,}32.10^{11}$, $E = 1{,}5.10^5$ V/m.

185. V pohybujúcej sa (čiarkovanej) sústave polia sú dané výrazmi

$$\boldsymbol{E}_\parallel' = \boldsymbol{E}_\parallel \qquad \boldsymbol{B}_\parallel' = \boldsymbol{B}_\parallel$$

$$\boldsymbol{E}_\perp' = \frac{\boldsymbol{E}_\perp}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad \boldsymbol{B}_\perp' = \frac{-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}_\perp}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

kde zložky s označením $\parallel$ sú paralelné so smerom rýchlosti sústavy a zložky s označením $\perp$ sú kolmé na jej rýchlosť. Pre zložky polí v smere súradných osí z týchto výrazov plynie

$$E_x' = \frac{E_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{E_0\cos\varphi}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad E_y' = E_y = E_0 \sin\varphi$$

$$E_z' = B_x' = B_y' = 0$$

$$B_z' = \frac{vE_x}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{vE_0\cos\varphi}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Číselne: $E_x' = 35{,}72$ V/m, $E_y' = 16{,}5$ V/m, $E_z' = B_x' = B_y' = 0$, $B_z' = 7{,}15.10^{-8}$ T.

186. a) V sústave, v ktorej sú elektróny v pokoji, pôsobia na seba iba elektrostatickou odpudivou silou

$$\boldsymbol{F} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r = e\boldsymbol{E} \qquad \text{kde} \qquad \boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

je intenzita elektrického poľa vytvorená prvým elektrónom v mieste druhého elektrónu a $\boldsymbol{e}_r$ je jednotkový vektor v smere od prvého ku druhému elektrónu.

b) V laboratórnej sústave, v ktorej sa elektróny pohybujú rýchlosťou v, odpudivá sila medzi elektrónmi je

$$\boldsymbol{F}' = e\left(\boldsymbol{E}'_\perp + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}'_\perp\right)$$

kde

$$\boldsymbol{E}'_\perp = \frac{\boldsymbol{E}_\perp}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad \boldsymbol{B}'_\perp = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}'_\perp}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}'_\perp}{c^2}$$

sú elektrické a magnetické polia elektrónu v laboratórnej sústave. Sila $\boldsymbol{F}_\perp'$ je potom

$$\boldsymbol{F}'_\perp = e\left(\boldsymbol{E}'_\perp + \boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}'_\perp}{c^2}\right) = e\boldsymbol{E}'_\perp\left[1-(v/c)^2\right] = e\boldsymbol{E}_\perp\sqrt{1-(v/c)^2} = \boldsymbol{F}_\perp\sqrt{1-(v/c)^2}$$

Priečna sila k smeru pohybu sa do laboratórnej sústavy transformuje vzťahom

$$\boldsymbol{F}_\perp = \frac{\boldsymbol{F}'_\perp}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

čo dáva taký istý výsledok ako v predchádzajúcom prípade. Pre malé rýchlosti $\boldsymbol{F}'_\perp = \boldsymbol{F}_\perp$. Ak $v \to \infty$, potom $\boldsymbol{F}_\perp \to 0$.

187. Ak $|\varepsilon| \ll 1$, potom

$$\sin\vartheta = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) \approx \cos\varepsilon \qquad \text{a keďže} \qquad \frac{v^2}{c^2} = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}$$

možno výraz pre intenzitu elektrického poľa elektrónu napísať v tvare

$$E' = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\frac{\gamma}{\left(\gamma^2\sin^2\varepsilon+\cos^2\varepsilon\right)^{3/2}}$$

Ak dosadíme $\sin^2\varepsilon \approx \varepsilon^2$, $\cos^2\varepsilon \approx 1$, potom

$$E' \approx \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\frac{\gamma}{\left(\gamma^2\varepsilon^2+1\right)^{3/2}}$$

188. Polovica toku intenzity elektrického poľa elektrónu je $e/(2\varepsilon_0)$ a je daná výrazom

$$\frac{e}{2\varepsilon_0} = \int E'\mathrm{d}S = \frac{e\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2}\frac{2\pi r'^2\cos\varepsilon\,\mathrm{d}\varepsilon}{r'^2\left(\gamma^2\varepsilon^2+1\right)^{3/2}} = \frac{e}{2\varepsilon_0}\frac{2\gamma\alpha}{\sqrt{4+\gamma^2\alpha^2}}$$

z čoho

$$\alpha = \alpha_{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}\gamma}$$

189. Z transformačných vzťahov pre polia

$$\boldsymbol{E}_{\parallel}' = \boldsymbol{E}_{\parallel} \qquad\qquad \boldsymbol{B}_{\parallel}' = \boldsymbol{B}_{\parallel}$$

$$\boldsymbol{E}_{\perp}' = \frac{\boldsymbol{E}_{\perp} + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_{\perp}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad\qquad \boldsymbol{B}_{\perp}' = \frac{\boldsymbol{B}_{\perp} - (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})_{\perp}/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

plynie, že sústavy, v ktorých je elektrické alebo magnetické pole nulové, sa musia pohybovať kolmo na E_y a B_z, teda pozdĺž súradnice x. V takýchto sústavách má elektrické a magnetické pole zložky

$$E_y' = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad\qquad B_z' = \frac{c^2 B_z - vE_y}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

a) Elektrické pole E_y' bude nulové v sústave, ktorá sa pohybuje v smere osi x rýchlosťou $v = E_y/B_z$ pričom musí platiť $cB_z > E_y$. Magnetické pole má v tomto prípade zložku

$$B_z' = \sqrt{B_z^2 - \frac{E_y^2}{c^2}}$$

V prípade ak $cB_z < E_y$, potom neexistuje sústava s nulovým elektrickým poľom.

b) Magnetické pole B_z' bude nulové v sústave, ktorá sa pohybuje v smere osi x rýchlosťou

$$v = c^2\frac{B_z}{E_y}$$

za predpokladu, že $cB_z < E_y$. Elektrické pole má pritom zložku

$$E_y' = \sqrt{E_y^2 - c^2 B_z^2}$$

190. V sústave, v ktorej je náboj a priamka v pokoji, pôsobí na náboj odpudivá sila

$$\boldsymbol{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 a}\boldsymbol{e}_r = q\boldsymbol{E}$$

kde $\boldsymbol{e}_r$ je jednotkový vektor kolmý na priamku a smerujúci k náboju q. V pohybujúcej sa sústave pôsobí na náboj elektrické pole dané výrazom

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 a}\boldsymbol{e}_r \qquad \text{kde} \qquad \lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

je dĺžkový náboj pohybujúcej sa priamky, u ktorej dochádza k relativistickej kontrakcii, takže

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\lambda'\boldsymbol{e}_r}{2\pi\varepsilon_0 a\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\boldsymbol{E}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Okrem elektrického poľa pôsobí na náboj magnetické pole

$$\boldsymbol{B}' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi a}\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\mu_0\lambda' v}{2\pi a}\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{v}{c^2}\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 a}\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{v}{c^2}\frac{E}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\boldsymbol{e}_\varphi$$

kde $\boldsymbol{e}_\varphi$ je jednotkový vektor. V pohybujúcej sa sústave pôsobí na náboj q celková sila

$$F' = q(E' + v \times B') = \frac{qE}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{v^2}{c^2}\frac{qE}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = qE\sqrt{1-(v/c)^2}$$

191. a) Vektory elektrického a magnetického poľa možno rozložiť na zložky paralelné a kolmé na smer pohybu sústavy, teda

$$E' = E_{\parallel}' + E_{\perp}' \qquad\qquad B' = B_{\parallel}' + B_{\perp}'$$

Skalárny súčin je

$$E'.B' = E_{\parallel}'.B_{\parallel}' + E_{\perp}'.B_{\perp}'$$

Z transformačných vzťahov pre polia plynie, že

$$E'.B' = E_{\parallel}'.B_{\parallel}'$$

Pre kolmé zložky platí

$$E_{\perp}'.B_{\perp}' = \frac{\left[E_{\perp} + (v \times B)_{\perp}\right].\left[B_{\perp} - (v \times E)_{\perp}/c^2\right]}{1-(v/c)^2} =$$

$$= \frac{1}{1-(v/c)^2}\left[E_{\perp}.B_{\perp} + (v \times B)_{\perp}.B_{\perp} - E_{\perp}.\frac{(v \times E)_{\perp}}{c^2} - \frac{(v \times B)_{\perp}.(v \times E)_{\perp}}{c^2}\right]$$

Druhý člen v hranatej zátvorke sa rovná nule pretože vektor $(v \times B)_{\perp}$ je kolmý na $B_{\perp}$, takisto tretí člen sa rovná nule, lebo $(v \times E)_{\perp}$ je kolmé na $E_{\perp}$. Štvrtý člen možno napísať v tvare

$$-\frac{v^2}{c^2}E_{\perp}.B_{\perp}$$

takže $E_{\perp}'.B_{\perp}' = E_{\perp}.B_{\perp}$, z čoho plynie, že

$$E'.B' = E_{\parallel}.B_{\parallel} + E_{\perp}.B_{\perp} = E.B$$

Súčin $E.B$ je teda relativistický invariant.

b) Pri dôkaze možno postupovať podobným spôsobom.

192. a) Na každý elektrón pôsobí príťažlivá sila od roviny

$$F_{\sigma} = \frac{e\sigma}{2\varepsilon_0}$$

a v laboratórnej sústave tiež odpudivá sila medzi elektrónmi (pozri úlohu 186)

$$F_e = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{1-(v/c)^2}$$

Tieto sily budú v rovnováhe ($F_{\sigma} = F_e$), ak

$$\sigma = \frac{e}{8\pi a^2}\sqrt{1-(v/c)^2}$$

b) Plošný náboj, ktorý bude kompenzovať odpudivú silu medzi elektrónmi v pokoji, je

$$\sigma_0 = \frac{e}{8\pi a^2} \qquad \text{takže} \qquad \frac{\sigma}{\sigma_0} = \sqrt{1-(v/c)^2}$$

Pokojová energia elektrónu je $W_0 = m_0c^2$ a energia pohybujúceho sa elektrónu

$$W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad \text{a teda} \qquad \frac{W_0}{W} = \sqrt{1-(v/c)^2} = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

Pre číselné hodnoty $W_0 = 0{,}5$ MeV a $W = 500$ MeV je

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 10^{-3}$$

193. a) V sústave spojenej s tyčami pôsobí na tyče príťažlivá sila elektrického pôvodu

$$F_e = \tau E = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

kde $E = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 d)$ je intenzita elektrického poľa v kolmej vzdialenosti d od tyče.

b) V pohybujúcej sa sústave existuje elektrické pole E' a magnetické pole

$$\boldsymbol{B}' = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}'}{c^2}$$

takže výsledná sila pôsobiaca medzi tyčami je

$$\boldsymbol{F}' = \lambda'(\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}') = \lambda'\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\boldsymbol{E}'$$

Avšak $E' = \lambda'/(2\pi\varepsilon_0 d)$ a $\lambda' = \lambda/\sqrt{1-(v/c)^2}$, takže $F' = F_e$.

7 Elektromagnetická indukcia

194. Intenzita indukovaného elektrického poľa v tyči je

$$E = vB = r\omega B$$

a napätie medzi koncami tyče

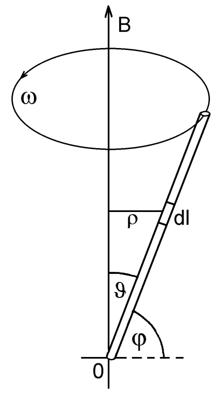
$$U = B\left(\int_0^{2l/3}\omega r\mathrm{d}r - \int_0^{l/3}\omega r\mathrm{d}r\right) = \frac{\omega Bl^2}{6} = 66{,}7\ \text{mV}$$

195. Z *obr. R195* je zrejmé, že indukované napätie $\mathrm{d}\mathscr{E}$ v elemente dl precesujúcej tyče je

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = vB\mathrm{d}l\cos\varphi = vB\mathrm{d}l\sin\vartheta$$

kde $v = \omega r = \omega l\sin\vartheta$ je obvodová rýchlosť elementu dl. Teda

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = \omega lB\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}l \qquad \text{a} \qquad \mathscr{E} = \omega B\sin^2\vartheta\int_0^{l_0} l\mathrm{d}l = \frac{\omega Bl_0^2}{2}\sin^2\vartheta$$



Obr. R195

196. a) Pri pohybe tyče vzniká v nej elektromotorické napätie $\mathscr{E}_{ind} = vbB$ a v obvode tečie prúd

$$I = \frac{\mathscr{E}_{ind}}{R} = \frac{vbB}{R}$$

Na tyč bude pôsobiť sila

$$F = bIB = \frac{vb^2B^2}{R}$$

smerujúca proti smeru pohybu tyče. Táto sila je zviazaná s rýchlosťou tyče pohybovou rovnicou

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{vb^2B^2}{R} = -F$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice so začiatočnou podmienkou $v = v_0$ v čase $t = 0$ dostaneme pre rýchlosť tyče výraz

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{b^2B^2t}{mR}\right)$$

Tyč sa bude pohybovať nekonečne dlho s exponenciálne klesajúcou rýchlosťou v čase.

b) Dráha, ktorú tyč prejde, je

$$s = \int_0^\infty v(t)\mathrm{d}t = \frac{v_0 mR}{b^2B^2}$$

c) Pohybujúca sa tyč vykonáva prácu proti pôsobiacej sile od magnetického poľa. Táto práca sa vznikom elektrického prúdu v obvode mení na Joulovo teplo v odpore R. Energia premenená na teplo

$$W_T = R\int_0^\infty I^2\mathrm{d}t = \frac{b^2B^2}{R}\int_0^\infty v^2(t)\mathrm{d}t = \frac{mv_0^2}{2}$$

je rovná začiatočnej kinetickej energii tyče. Číselne: $W_T = 5.10^{-5}$ J, $s = 1$ m.

197. V čase, keď sa rámček pohybuje, tečie ním prúd $I = \mathscr{E}_{ind}/R$, kde $\mathscr{E}_{ind} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. Náboj, ktorý pretečie rámčekom, je

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathscr{E}_{ind}}{R}\mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \mathrm{d}\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

Veľkosť pretečeného náboja závisí teda iba od začiatočného a konečného indukčného toku. Tieto toky sú

$$\Phi_1 = \int_{b-a}^{b} \frac{\mu_0 Ia}{2\pi r}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{b}{b-a} \qquad \Phi_2 = -\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{b+a}{b}$$

takže

$$Q = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi R}\ln\frac{b+a}{b-a}$$

198. Indukované EMN v prstenci v dôsledku jeho otáčania v magnetickom poli je

$$\mathscr{E}_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

kde $\Phi = BS\cos\omega t = \pi a^2 B\cos\omega t$ je magnetický indukčný tok plochou ohraničenou prstencom. Po dosadení dostaneme

$$\mathscr{E}_{ind} = \pi\omega Ba^2\sin\omega t = U_m\sin\omega t$$

Stredný tepelný výkon v prstenci je

$$P = \frac{U_m^2}{2R} = \frac{\pi^2\omega^2 B^2 a^4}{2R}$$

kde R je celkový elektrický odpor prstenca. Jediným zdrojom tohoto tepelného výkonu je kinetická energia prstenca $W = \omega^2 J/2$, kde $J = ma^2/2$ je moment zotrvačnosti prstenca vzhľadom na os otáčania (m je hmotnosť prstenca). Podľa zákona zachovania energie

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -P \qquad \text{teda} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{ma^2\omega^2}{4}\right) = -\frac{\pi^2\omega^2 B^2 a^4}{2R}$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je

$$\omega = \omega_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

kde τ je hľadaný charakteristický čas, za ktorý kruhová frekvencia poklesne na 1/e-tinu začiatočnej hodnoty ω_0. Tento čas je daný výrazom

$$\tau = \frac{mR}{\pi^2 B^2 a^2}$$

Ak si uvedomíme, že hmotnosť prstenca $m = 2\pi a\rho S$, odpor $R = 2\pi a/(\sigma S)$ (S je prierezová plocha prstenca), potom

$$\tau = \frac{4\rho}{\sigma B^2} = 1{,}5\ \mathrm{s}$$

199. V padajúcom rámčeku sa indukuje prúd

$$I = \frac{\mathscr{E}_{ind}}{R} = \frac{aBv}{R}$$

kde v je rýchlosť rámčeka a R jeho elektrický odpor. Sila pôsobiaca na rámček je

$$F = mg - aIB = mg - v\frac{a^2b^2}{R}$$

kde m je hmotnosť rámčeka a g je gravitačné zrýchlenie. Pohybová rovnica pre rámček je

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F = mg - v\frac{a^2B^2}{R} \qquad \text{ktorej riešenie je} \qquad v(t) = v_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

kde

$$v_0 = \frac{gRm}{a^2B^2} = \frac{16g\rho}{\sigma B^2} = 12\ \mathrm{mm/s} \qquad \tau = \frac{Rm}{a^2B^2} = \frac{16\rho}{\sigma B^2} = 1{,}23.10^{-3}\ \mathrm{s}$$

200. Intenzita elektrického poľa vo vode $E = vB$ a prúdová hustota

$$J = \sigma E = \sigma vB = 0{,}14.10^{-4}\ \mathrm{A/m^2}$$

201. Magnetická indukcia v okolí priameho vodiča

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

je kolmá na rovinu slučky. Indukované napätie v slučke

$$\mathscr{E} = av_0\left[B(r) - B(r+b)\right] = \frac{\mu_0 Iabv_0}{2\pi r(r+b)}$$

202. V obvode sa indukuje elektromotorické napätie

$$\mathscr{E}_{ind} = \oint \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\mathscr{E}t\right) = \mathscr{E}$$

Toto napätie spôsobí prúd v slučke $I = \mathscr{E}/R$. Označme R_1 odpor kratšieho oblúka AB, dlhší oblúk BA má odpor $R - R_1$. Výsledok merania napätia závisí od spôsobu pripojenia voltmetra. Ak sa voltmeter pripojí vodičmi pozdĺž kratšieho oblúka AB, nameria sa napätie $U_{AB} = IR_1 = \mathscr{E}R_1/R$, ak sa pripojí pozdĺž dlhšieho oblúka BA, nameria sa napätie $U_{BA} = I(R - R_1) = \mathscr{E}(R - R_1)/R$. Predpokladá sa, že spojovacie vodiče nepretínajú indukčný tok. Medzi dvoma bodmi A a B nameria teda voltmeter dve rôzne hodnoty napätia.

Tento na prvý pohľad paradoxný výsledok súvisí so skutočnosťou, že elektrické pole v závite je vírovým poľom a dráhový integrál jeho intenzity je nenulový, na rozdiel od elektrostatických prípadov. Súčet napätí v obvode je teda tiež nenulový a v danom prípade

$$U_{AB} + U_{BA} = \mathscr{E} \neq 0$$

203. Vo veľkej vzdialenosti od závitu je magnetické pole poľom dipólu a magnetická indukcia na jeho osi je

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} = \frac{\mu_0 Ia^2}{2r^3}$$

kde $m = \pi a^2 I$ je magnetický moment závitu. Magnetický tok pretínajúci druhý závit je

$$\Phi_2 = \pi a^2 B(b) = \frac{\pi\mu_0 I a^4}{2b^3} \qquad \text{takže vzájomná indukčnosť} \qquad M = \frac{\Phi_2}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^4}{2b^3}$$

204. $Q = \dfrac{SB}{R_i}$

205. Ak je prúd vo valcovom vodiči rozložený homogénne, potom vo zvolenej valcovej časti vodiča o polomere $r < R$ tečie časť prúdu $I' = r^2 I/R^2$ ktorý vytvára vo vzdialenosti r od osi valca magnetickú indukciu

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

Elementárny indukčný tok v dutine vymedzenej valcami s polomermi r a $r + \mathrm{d}r$ a s jednotkovou dĺžkou viazaný s prúdom I' je

$$\mathrm{d}\Phi = B\frac{r^2}{R^2}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I r^3}{2\pi R^4}\mathrm{d}r \qquad \text{a celkový tok} \qquad \Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^4}\int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

z čoho indukčnosť na jednotku dĺžky

$$L' = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

Výraz platí iba pre jednosmerné a nízkofrekvenčné prúdy, keď možno zanedbať skinefekt.

206. Ak páskovým vedením tečie prúd I v navzájom opačných smeroch, potom magnetická indukcia medzi páskami je (pozri odsek 6.1.9, bod 6.)

$$B = \mu_0 J = \frac{\mu_0 I}{w}$$

a indukčný tok medzi páskami na jednotku dĺžky vedenia je

$$\Phi = Bd = \frac{\mu_0 I d}{w}$$

takže indukčnosť na jednotku dĺžky vedenia je

$$L' = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 d}{w}$$

207. Ak vodičmi tečie prúd I v navzájom opačných smeroch, potom každý z vodičov budí vo svojom okolí magnetickú indukciu

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

a celkový tok medzi vodičmi na jednotku dĺžky vedenia je

$$\Phi = 2\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^{d-a}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

Indukčnosť na jednotku dĺžky vedenia

$$L' = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} \qquad \text{a ak } d \gg a \text{, potom} \qquad L' \approx \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}$$

208. Systém valcový vodič – rovina sa dá pre potreby výpočtu indukčnosti nahradiť dvojicou paralelných valcových vodičov uložených vo vzdialenosti $2d$, ktorými tečú prúdy I v navzájom opačných smeroch. Indukčný tok medzi vodičom a rovinou je rovný polovici indukčného toku medzi vodičmi, teda indukčnosť systému valcový vodič – rovina bude rovná polovici indukčnosti dvojlinky. Využijúc výsledok predchádzajúcej úlohy dostaneme

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{2d-R}{R} \qquad \text{alebo približne} \qquad L' \approx \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{2d}{R}$$

209. Ak vonkajším solenoidom tečie prúd I_1, potom magnetická indukcia v jeho vnútri je

$$B = \frac{\mu_0 I_1 N_2}{b^2}$$

a pretína N_1 závitov vnútorného solenoidu s celkovou plochou $N_1 \pi a_1^{\,2}$. Indukčný tok vnútorným solenoidom je teda

$$\Phi_2 = \pi\mu_0 I_1 N_1 N_2 \frac{a_1^2}{b_2} \qquad \text{a vzájomná indukčnosť} \qquad M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \pi\mu_0 N_1 N_2 \frac{a_1^2}{b_2}$$

210. Magnetická indukcia v okolí priameho vodiča s prúdom I_1 je

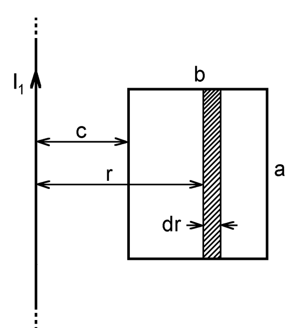
$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

a tok štvoruholníkovou slučkou podľa *obr. R210*

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi}\int_c^{c+b}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi}\ln\frac{c+b}{c}$$

z čoho vzájomná indukčnosť

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{c+b}{c}$$



Obr. R210

211. $M = \mu_0 p\left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{p^2}}\right)$

212. Pole závitu 1 vo veľkej vzdialenosti d je poľom magnetického dipólu. Na osi dipólu je magnetická indukcia

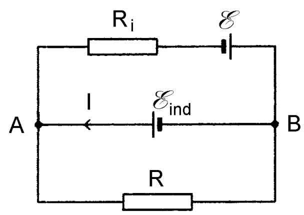
$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi d^3}$$

Indukované elektromotorické napätie v závite 2 je

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

kde $S = \pi a^2 \cos\omega t$, takže

$$\mathscr{E} = \frac{\omega\mu_0 I a^4}{2d^4}\sin\omega t$$



Obr. R213

213. Predovšetkým treba vypočítať prúd, ktorý tečie pohybujúcim sa vodičom AB. Tento prúd je daný zdrojom EMN $\mathscr{E}$ a indukovaným EMN $\mathscr{E}_{ind} = lvB$, závislým od rýchlosti v vodiča. Pre sústavu možno nakresliť náhradný obvod podľa *obr. R213*, v ktorom prúd vodičom AB je

$$I = \frac{\mathscr{E}_{ind}}{R'} + \frac{\mathscr{E}}{R_i} = \frac{lvB}{R'} + \frac{\mathscr{E}}{R_i}$$

kde $R' = R_i R/(R_i + R)$. Sila pôsobiaca na vodič v gravitačnom a magnetickom poli B je výslednicou gravitačnej sily mg smerujúcej nadol a magnetickej sily lIB smerujúcej nahor, teda

$$F = mg - lIB = mg - \frac{lB\mathscr{E}}{R_i} - v\frac{l^2B^2}{R'}$$

Pre pohyb vodiča AB platí pohybová rovnica

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F = mg - \frac{lB\mathscr{E}}{R_i} - v\frac{l^2B^2}{R'}$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice pre v je tvaru

$$v(t) = v_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \qquad \text{kde} \qquad v_0 = \frac{(mgR_i - \mathscr{E}lB)R}{(R_i + R)l^2B^2} = 0{,}31\ \mathrm{m/s}$$

je hľadaná ustálená rýchlosť vodiča. Časová konštanta pohybu

$$\tau = \frac{mR_i R}{(R_i + R)l^2 B^2} = 1\,\mathrm{s}$$

Doba, po ktorej možno rýchlosť považovať za ustálenú, je väčšia ako 5τ.

214. Vodičom AB pri jeho pohybe rýchlosťou υ nadol tečie prúd

$$I = \frac{2\mathscr{E}_{ind}}{3R} = \frac{2\upsilon lB}{3R}$$

Na vodič pôsobí výsledná sila smerom nadol

$$F = mg - \frac{2\upsilon l^2 B^2}{3R}$$

Riešením pohybovej rovnice pre rýchlosť vodiča

$$m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = mg - \frac{2\upsilon l^2 B^2}{3R}$$

dostaneme riešenie v tvare $\upsilon(t) = \upsilon_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$

kde

$$\upsilon_0 = \frac{3mgR}{2l^2 B^2} = 1{,}47\,\mathrm{cm/s}$$

je hľadaná rýchlosť (bez započítania odporu vzduchu).

215. Na obidvoch stranách pásky budú plošné náboje veľkosti $\sigma = \varepsilon_0 \upsilon B = 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$. Kladné náboje na páske sa posunú v smere vektora $\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{B}$ a záporné v opačnom smere.

216. V otáčajúcom sa valci pôsobí na viazané náboje Lorentzova sila, ktorej je ekvivalentná intenzita elektrického poľa

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B} = \omega B\boldsymbol{r}$$

ak vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{B}$ majú rovnaký smer. Vzniknuté viazané náboje znížia túto intenzitu ε_r-krát, takže výsledná intenzita $\boldsymbol{E}$ v objeme valca bude daná výrazom

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{E}_0}{\varepsilon_r} = \frac{1}{\varepsilon_r}\omega B\boldsymbol{r}$$

Vektor polarizácie $\boldsymbol{P}$ v objeme valca (pre $r_1 < r < r_2$) je daný výrazom

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\omega B\boldsymbol{r}$$

a) $\rho_v = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{P} = -2\varepsilon_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\omega B$

b) $Q_v = \pi(r_2^2 - r_1^2)\rho = 2\pi(r_2^2 - r_1^2)\varepsilon_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\omega B$

c) $\sigma_v(r_1) = -P(r_1) = -\varepsilon_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\omega B r_1 \qquad \sigma_v(r_2) = -P(r_2) = -\varepsilon_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\omega B r_2$

d) $Q_v' = 2\pi r_2\sigma_v(r_2) - 2\pi r_1\sigma_v(r_1) = 2\pi(r_2^2 - r_1^1)\varepsilon_0\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)\omega B$

e) $Q_v + Q_v' = 0$

217. V súhlase s výsledkom úlohy 209 vzájomná indukčnosť cievočky a solenoidu je

$$M = \mu_0 nNS = 10^{-2}\,\mathrm{H}$$

a napätie indukované v solenoide

$$\mathscr{E} = \pm M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \pm\omega MI\cos\omega t = \pm 2{,}5\cos\omega t \quad [\mathrm{V}]$$

Znamienko závisí od vzájomného smeru vinutí.

218. a) Časová zmena indukčného toku na kruhu s polomerom R je

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \pi R^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

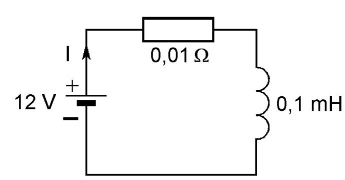
pričom indukované elektrické pole na kružnici s polomerom R je dané výrazom

$$\oint \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi RE = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad \text{z čoho plynie, že} \qquad E = \frac{R}{2}\frac{\mathrm{d}\overline{B}}{\mathrm{d}t}$$

b) Zmena hybnosti elektrónu spôsobená zmenou magnetickej indukcie na polomere R je $m\mathrm{d}v = eR\mathrm{d}B_R$ a musí byť rovná zmene hybnosti od účinku intenzity elektrického poľa E, teda

$$m\mathrm{d}v = eE\mathrm{d}t = \frac{eR}{2}\mathrm{d}\overline{B}$$

Z posledných dvoch výrazov plynie, že $\mathrm{d}B_R = \mathrm{d}\overline{B}/2$.



Obr. R219

219. a) Náhradný obvod cievky a zdroja je na *obr. R219*. Pre prúd I v obvode platí diferenciálna rovnica

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = \mathscr{E}$$

ktorej riešenie so začiatočnou podmienkou $I = 0$ pre $t = 0$ je

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right]$$

Prúd dosiahne maximálnu hodnotu $I_{max} = \mathscr{E}/R$ po nekonečnej dobe. Pre čas t_0, v ktorom prúd dosiahne 90 % maximálnej hodnoty, t. j. $I = 0{,}9I_{max}$, z posledného výrazu plynie

$$t_0 = \frac{L}{R}\ln\frac{I_{max}}{I_{max} - 0{,}9I_{max}} = \frac{L}{R}\ln 10 = 0{,}115\ \text{s}$$

b) Energia magnetického poľa v čase $t = t_0$ je

$$W_{mag} = \frac{L}{2}\left(0{,}9I_{max}\right)^2 = 291{,}5\ \text{J}$$

c) Celková energia odobratá zo zdroja v čase $t = t_0$ je

$$W_{zdroj} = \int_0^{t_0} \mathscr{E}I\mathrm{d}t = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\int_0^{t_0}\left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right]\mathrm{d}t = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\left\{t_0 - \frac{L}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}\right)\right]\right\} = 1\,010\ \text{J}$$

220. Pre prúdy v zapojení na *obr. R220* platia rovnice

$$I_1 + I_2 = I \qquad L\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + R_i I = \mathscr{E} \qquad RI_1 - L\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

Postupnými substitúciami v druhej rovnici a jej úpravou dostaneme rovnicu

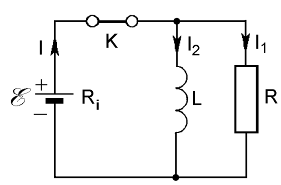
$$\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + \frac{R_i}{kL}I_2 = \frac{\mathscr{E}}{kL}$$

kde $k = (1 + R_i/R)$. V čase $t = 0$ je $I_2 = 0$, a v čase $t = \infty$ je $I_2 = \mathscr{E}/R_i$. Riešenie poslednej rovnice je potom tvaru

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_i}\left[1 - \exp\left(-\frac{R_i}{kL}t\right)\right] \quad \text{a prúd odporom } R \quad I_1 = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathscr{E}}{kR}\exp\left(-\frac{R_i}{kL}t\right)$$

Celkový náboj Q_R, ktorý pretečie odporom R dostaneme integráciou tohto prúdu v časovom intervale $t = 0$ až po $t = \infty$, teda

$$Q_R = \int_0^{\infty} I_1\mathrm{d}t = \frac{\mathscr{E}L}{RR_i}$$



Obr. R220

Úlohu však možno riešiť oveľa jednoduchšie. Pre prúdy I_1 a I_2 v zapojení podľa *obr. R220* platí

$$RI_1 = L\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

Prúd $I_1 = \mathrm{d}Q_R/\mathrm{d}t$, kde Q_R je náboj tečúci odporom R. Po dosadení do poslednej rovnice dostaneme rovnicu

$$R\frac{\mathrm{d}Q_R}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \qquad \text{a jej integráciou dostaneme} \qquad Q_R = \frac{L}{R}\int_0^{I_\infty} \mathrm{d}I_2 = \frac{L}{R} I_\infty$$

Prúd indukčnosťou v okamihu zopnutia kľúča sa rovná nule. Prúd $I_\infty = \mathcal{E}/R_i$ je prúd po nekonečne dlhom čase (ustálený prúd v indukčnosti). Teda

$$Q_R = \frac{\mathcal{E}L}{RR_i}$$

221. Uvažujme najprv elektromagnet s nulovým odporom, premostený kapacitou C a napájaný konštantným prúdom I_0 podľa *obr. R221a*. Po prerušení prúdu bude pre obvod v každom okamihu platiť rovnica

$$U_L + U_C = 0 \qquad \text{alebo} \qquad L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int I\mathrm{d}t = 0$$

Derivovaním tejto rovnice podľa času dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd v obvode

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{I}{C} = 0$$

ktorej riešenie so začiatočnou podmienkou $I = I_0$ v čase $t = 0$ (v okamihu prerušenia prúdu dodávaného do elektromagnetu) je

$$I = I_0 \cos\omega t$$

kde $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Napätie na indukčnosti reprezentovanej elektromagnetom je

$$U_L = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \omega L I_0 \sin\omega t$$

Z tohoto výrazu vidieť, že napätie na indukčnosti má periodický priebeh s amplitúdou

$$U_m = \omega L I_0 = I_0\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Pri požiadavke $U_m = 10\,000$ V plynie pre kapacitu hodnota

$$C = \frac{L I_0^2}{U_m^2} = 10^{-6}\ \mathrm{F} = 1\ \mu\mathrm{F}$$

Obr. R221

Ak odpor vinutia elektromagnetu je R = 1 Ω, možno indukované napätie odhadnúť nasledovným spôsobom: Stacionárny prúd v indukčnosti je 10 A a pri prerušení obvodu sa skokom nezmení. Na odpore je v začiatočnom okamihu napätie I_0R = 10 V, ktoré sa odčíta od indukovaného napätia 10 000 V. Teda na vinutí elektromagnetu bude napätie asi 9 990 V.

Pri presnejšom výpočte možno postupovať nasledovne: Náhradný obvod pre elektromagnet s nenulovým odporom a paralelným kondenzátorom je na *obr. R221b*. Pre tento obvod platí rovnica

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = 0$$

ktorej všeobecné riešenie je

$$I = K\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi)$$

kde K a φ sú konštanty, ktoré sa určia zo začiatočných podmienok. α a ω sú dané výrazmi

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad\qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Napätie na kondenzátore (a teda aj na svorkách elektromagnetu) je

$$U_C = \frac{1}{C}\int I\mathrm{d}t = -\frac{K}{C}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2}\left[\alpha\sin(\omega t + \varphi) + \omega\cos(\omega t + \varphi)\right] =$$

$$= -KL\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\alpha\sin(\omega t + \varphi) + \omega\cos(\omega t + \varphi)\right]$$

Z výrazu vidno, že napätie na svorkách elektromagnetu má po prerušení prúdového obvodu periodický priebeh, ktorého amplitúda exponenciálne klesá s faktorom $\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

V ďalšom treba určiť extrémy napätia na svorkách elektromagnetu. Časy t_n, v ktorých napätie na svorkách elektromagnetu dosahuje extremálne hodnoty, sa určia z podmienky

$$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = KL\mathrm{e}^{-\alpha t}(\alpha + \omega)\sin(\omega t + \varphi) = 0$$

čo je splnené, ak $\omega t_n + \varphi = n\pi$, ($n$ = 0, 1, 2, ...). Pretože faktor $\mathrm{e}^{-\alpha t}$ so zvyšovaním času klesá, napätie bude najväčšie pre najmenší čas t_0, pre ktorý platí

$$\omega t_0 + \varphi = 0 \qquad \text{z čoho} \qquad t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$$

Maximálne napätie na svorkách elektromagnetu sa určí z výrazu pre U_C v čase $t = t_0$. Jeho hodnota je

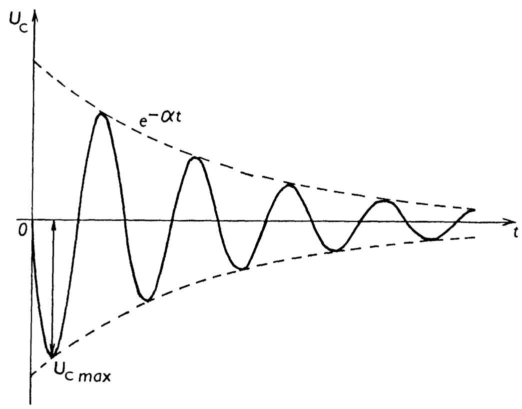
$$U_{C\,max} = -KL\omega\mathrm{e}^{-\alpha t_0}$$

Na výpočet tohto napätia ešte treba určiť konštanty K a φ. V čase t = 0 prúd v obvode má hodnotu I_0 = 10 A a napätie na kondenzátore sa rovná napäťovému spádu na odpore elektromagnetu, teda $U_{C0} = RI_0$ = 10 V. Z výrazov pre I a U_C v čase t = 0 plynie

$$I_0 = K\sin\varphi \qquad\qquad U_{C0} = -KL(\alpha\sin\varphi + \omega\cos\varphi)$$

Riešením týchto rovníc pre K a φ dostaneme

$$K = \pm I_0\sqrt{1 + \left(\frac{U_{C0}}{\omega L I_0} + \frac{\alpha}{\omega}\right)^2} \qquad \text{a} \qquad \varphi = \arcsin\frac{I_0}{K} = \pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_{C0}}{\omega L I_0} + \frac{\alpha}{\omega}\right)^2}}$$



Obr. R221c

Dosadením číselných hodnôt dostaneme $K = \pm 10\sqrt{1 + 2{,}225.10^{-6}}$ A $\approx \pm 10$ A a $\varphi \approx \pm \pi/2$. Pretože t_0 musí byť kladné (čas po prerušení obvodu), treba voliť

$$\varphi = -\pi/2 \qquad\qquad K = +10 \text{ A}$$

takže

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$$

Dosadením číselných hodnôt do výrazu pre $U_{C\,max}$ dostaneme

$$U_{C\,max} = -K\omega L \exp\left(-\frac{\alpha\pi}{2\omega}\right) = -9\,992 \text{ V}$$

Znamienko "–" vo výsledku vyjadruje skutočnosť, že polarita prvého maxima napätia na kondenzátore je opačná ako polarita napätia v ustálenom stave (pred rozopnutím obvodu). Priebeh napätia na svorkách elektromagnetu je znázornený na *obr. R221c*.

222. V ustálenom stave tečie indukčnosťou prúd $I = U_0/R_L$ za predpokladu, že vnútorný odpor zdroja je zanedbateľný. V okamihu odpojenia zdroja prúd v indukčnosti má hodnotu I, ale uzatvára sa cez odpor R. Napätie na odpore R (teda na svorkách indukčnosti) je vtedy maximálne a má hodnotu

$$U_{max} = RI = U_0 \frac{R}{R_L}$$

teda napätie na svorkách indukčnosti po odopnutí zdroja je R/R_L-krát väčšie ako napätie zdroja.

223. Pre obvod na *obr. 223* v zadaní úlohy platia rovnice podľa II. Kirchhoffovho zákona

$$RI_1 + L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} = \mathscr{E} \qquad\qquad L\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = 0$$

Substitúciou $\mathrm{d}I_2/\mathrm{d}t$ v prvej rovnici z druhej dostaneme rovnicu

$$L'\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - RI_1 = \mathscr{E} \qquad \text{kde} \qquad L' = L\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right) = 0{,}64L$$

Riešením rovnice pre I_1 so začiatočnou podmienkou $I_1 = 0$ v čase $t = 0$ dostaneme výrazy pre prúdy v primárnom obvode

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R}\left[1 - \exp\left(-1{,}56\frac{R}{L}t\right)\right]$$

a v sekundárnom obvode

$$I_2 = \frac{M}{L}\int \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = 0{,}6 I_1 \ + \text{konšt.}$$

Hodnotu integračnej konštanty určíme zo začiatočnej podmienky. V čase $t = 0$ je $I_2 = 0$, z čoho plynie, že konšt. = 0, teda

$$I_2 = 0{,}6 I_1 = 0{,}6\frac{\mathscr{E}}{R}\left[1 - \exp\left(-1{,}56\frac{R}{L}t\right)\right]$$

Výsledok riešenia je na prvý pohľad prekvapivý, pretože po ustálení prechodového javu (po čase väčšom ako $5\tau = 5L/1{,}56R$) tečie v sekundárnom obvode prakticky stály prúd s asymptotickou hodnotou

$$I_{02} = 0{,}6\frac{\mathscr{E}}{R} \qquad \text{a v primárnom obvode prúd} \qquad I_{01} = \frac{\mathscr{E}}{R}$$

Tento stav sa zachová dovtedy, dokiaľ sa nerozopne spínač v primárnom obvode. Samozrejme takáto situácia je možná iba vtedy, ak sekundárny obvod je supravodivý (pozri odsek 8.5), teda ak jeho odpor je nulový. V opačnom prípade by prúd v sekundárnom obvode exponenciálne klesal k nule. Takýto princíp sa využíva pre počiatočné vzbudenie prúdu v cievkach supravodivých magnetov.

8 Magnetizmus látok

224. Ak vo výraze (8.50) pre diamagnetickú susceptibilitu dosadíme $n = N_A$ (Avogadrovo číslo) dostaneme výraz pre susceptibilitu vztiahnutú na kilomol, teda

$$\chi_M = -5{,}9.10^{-15} N_A \sum_Z \langle r^2 \rangle = -3{,}553.10^{12} \sum_Z \langle r^2 \rangle$$

Keďže susceptibilita jedného kilomolu hélia je $\chi_M = -2{,}4.10^{-8}$, z posledného výrazu vyplýva, že

$$\sum_{Z=2} \langle r^2 \rangle = 6{,}755.10^{-21} = 2{,}423 a_0^2 \qquad [\mathrm{m}^2]$$

z čoho na jednu elektrónovú dráhu (dva elektróny hélia) pripadá hodnota stredného kvadratického polomeru $1{,}21\, a_0^2$.

225. Ak vo výraze (8.57) pre paramagnetickú susceptibilitu urobíme zámenu $n \to N_A$ (Avogadrovo číslo) dostaneme výraz pre susceptibilitu na kilomol v tvare

$$\chi = \frac{\mu_0 N_A m^2}{3kT} = 1{,}827.10^{43}\frac{m^2}{T}$$

Porovnaním tejto hodnoty s hodnotou uvedenou v zadaní úlohy dostávame pre permanentný dipólový moment pripadajúci na jeden ión Ni^{2+} za uvedených predpokladov hodnotu

$$m = 2{,}96.10^{-23}\ \mathrm{A.m^2}$$

226. Označme magnetické pole v prstenci B, H a pole v štrbine B_0, H_0. Potom platí

$$Hl + H_0 l_0 = NI$$

$$B = B_0 \qquad \text{alebo} \qquad \mu H = \mu_0 H_0$$

Riešením týchto rovníc pre H a H_0 a dosadením numerických hodnôt dostaneme

$$H = \frac{\mu_0 NI}{\mu_0 l + \mu l_0} = 49{,}2 \text{ A/m} \qquad H_0 = \frac{\mu}{\mu_0} H = 1{,}475.10^5 \text{ A/m}$$

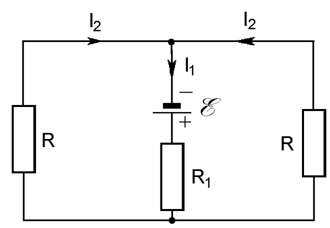
$$B = B_0 = \mu_0 H_0 = \mu H = 0{,}185 \text{ T}$$

227. Magnetické odpory (reluktancie) jednotlivých častí magnetického obvodu na *obr. 227* v zadaní úlohy sú: od bodu 0 po bod P doprava

$$R_m = \frac{2l_1 + l_2}{\mu S}$$

a rovnaká reluktancia je od bodu 0 k P smerom doľava. Od 0 po P cez štrbinu je reluktancia

$$R_{m1} = \frac{l_2 - l_3}{\mu S} + \frac{l_3}{\mu_0 S}$$



Obr. R227

Uvažovaný magnetický obvod možno modelovať elektrickým obvodom podľa *obr. R227*, v ktorom prúd

$$I_1 = \frac{2\mathscr{E}}{R + 2R_1}$$

Pre magnetický obvod treba urobiť náhradu $I_1 \to \Phi$ (magnetický indukčný tok v štrbine), $\mathscr{E} \to NI$ (magnetomotorické napätie pôsobiace v obvode), $R \to R_m$ a $R_1 \to R_{m1}$. Potom dostaneme

$$\Phi = \frac{2NI}{R_m + 2R_{m1}}$$

Magnetická indukcia v štrbine

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{2\mu NI}{2l_1 + 3l_2 + 2l_3\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)} = 1{,}87.10^{-2} \text{ T}$$

a intenzita magnetického poľa v štrbine

$$H = \frac{B}{\mu_0} = 14\,880 \text{ A/m}$$

228. Pre magnetický obvod prstenca platí $2\pi RH = NI$, kde $R = (R_1 + R_2)/2 = 11$ cm je stredný polomer prstenca. Prúd vo vinutí

$$I = \frac{2\pi R}{N} H = 0{,}0346 H \quad [\mathrm{A;\ A/m}]$$

Z magnetizačnej krivky na *obr. 228* v zadaní úlohy zistíme, že na vytvorenie magnetickej indukcie $B = 1{,}2$ T je potrebná intenzita magnetického poľa $H = 130$ A/m. Dosadením tejto hodnoty do posledného výrazu dostaneme magnetizačný prúd $I = 4{,}5$ A.

229. Hysterézne straty na jednotku objemu a počas jedného magnetizačného cyklu sú dané výrazom

$$W = \oint_{-B_0 \leftrightarrow +B_0} H \mathrm{d}B$$

a graficky predstavujú plochu ohraničenú hysteréznou slučkou. Táto plocha sa rovná integrálu z rozdielu funkcií B^+ a B^- v hraniciach od $-H_0$, po $+H_0$, teda

$$W = \int_{-H_0}^{+H_0} \left(B^+ - B^-\right) \mathrm{d}H = a \int_{-H_0}^{+H_0} \left(H_0^2 - H^2\right) \mathrm{d}H = \frac{4}{3} a H_0^3$$

230. Z výrazu pre intenzitu Hallovho elektrického poľa

$$E_H = \frac{JB}{ne}$$

dostaneme počet vodivostných elektrónov na jednotku objemu

$$n = \frac{JB}{eE_H} = 2{,}5.10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$$

Počet atómov sodíka na jednotku objemu

$$n_{at} = \frac{\rho N_A}{M} = 2{,}5.10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$$

kde N_A je Avogadrovo číslo. Na jeden atóm sodíka pripadá jeden vodivostný elektrón.

9 Striedavé elektrické prúdy

231. Stredné hodnoty priebehov na *obr. 231* v zadaní úlohy sú:

a) 0, b) U_m/π, c) $U_m/2$, d) $2U_m/\pi$, e) 0, f) $U_m/2$, g) 0, h) $U_m/2$.

Efektívne hodnoty:

a) $U_m/\sqrt{2}$, b) $U_m/2$, c) $U_m/\sqrt{3}$, d) $U_m/\sqrt{2}$, e) U_m, f) $U_m/\sqrt{3}$, g) $U_m/\sqrt{3}$, h) $U_m/\sqrt{2}$.

232. Prúd zaostáva za napätím vo fáze o $\varphi = 63{,}4°$, teda obvod pozostáva z odporu a indukčnosti. Kruhová frekvencia $\omega = 500$ rad/s. Pre pomer amplitúd napätia a prúdu platí

$$\frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \qquad \text{a pre fázu} \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R}$$

z čoho $$R = \frac{U_m}{I_m\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}$$ a $$L = \frac{R}{\omega}\mathrm{tg}\varphi$$

Dosadením číselných hodnôt U_m = 150 V, I_m = 13,42 A, φ = 63,4° dostaneme

$$R = 5\ \Omega \qquad\qquad L = 20\ \mathrm{mH}$$

233. R = 20 Ω, C = 33,3 μF

234. R = 16 Ω, L = 16 mH, C = 250 μF

235. a) Napätie na vstupných svorkách $U_{ef} = R_2 I_{3ef}$ = 120 V.
b) Ďalej platí

$$\frac{I_{2ef}}{U_{ef}} = \sqrt{\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2}$$ z čoho $$X_L = \frac{U_{ef}R_2}{\sqrt{I_{2ef}^2 R_2^2 - U_{ef}^2}} = 5{,}76\ \Omega$$

Odpor R_1 možno určiť zo vzťahu

$$\frac{I_{1ef}^2}{U_{ef}^2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 + \frac{1}{X_L^2}$$ teda $$R_1 = \frac{U_{ef}}{\sqrt{I_{1ef}^2 - I_{2ef}^2 + I_{3ef}^2} - I_{3ef}} = 8{,}82\ \Omega$$

c) Aktívny výkon v obvode je súčtom výkonov v jednotlivých odporoch, teda

$$P = P_1 + P_2 = \frac{U_{ef}^2}{R_1} + I_{3ef}^2 R_2 = 2\,592\ \mathrm{W}$$

d) Pre komplexnú impedanciu obvodu platí

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathrm{j}X_L} = 0{,}18 - \mathrm{j}0{,}17\ \mathrm{S}$$ alebo $\mathbf{Z}$ = 2,88 + j2,77 Ω.

Absolútna hodnota impedancie $|\mathbf{Z}| = Z$ = 4 Ω.

236. Obvod má impedanciu **Z**, ktorej absolútna hodnota spĺňa vzťah

$$\left|\frac{1}{\mathbf{Z}}\right| = \left|\frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C\right|$$ z čoho $$|\mathbf{Z}| = Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 C^2 R^2 + \left(1 - \omega^2 LC\right)^2}} = 282{,}8\ \Omega$$

Amplitúda prúdu je

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = 0{,}5\ \mathrm{A}$$

237. a) Impedancia obvodu

$$\mathbf{Z} = R_1 + \mathrm{j}X_L - \frac{R_2 X_C}{R_2 - \mathrm{j}X_C} = 70 + \mathrm{j}10\ \Omega$$

má absolútnu hodnotu Z = 70,71 Ω, takže efektívna hodnota prúdu v obvode

$$I_{ef} = \frac{U_{ef}}{Z} = 3{,}39\ \mathrm{A}$$

b) Absolútna hodnota impedancie paralelnej RC dvojice

$$Z_{RC} = \frac{R_2 X_C}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}} = 70{,}71\,\Omega$$

a amplitúda napätia na kondenzátore $U_m = \sqrt{2} I_{ef} Z_{RC} = 339{,}4$ V. Náboj na kondenzátore má amplitúdu

$$Q_m = CU_m = \frac{U_m}{\omega X_C} = 10^{-2}\ \mathrm{C}$$

c) Celkový činný výkon v obvode

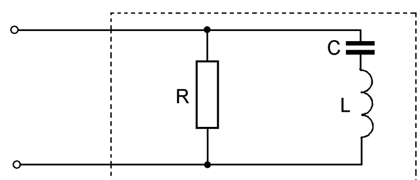
$$P = I_{ef}^2 R_1 + \frac{U_{ef}^2}{R_2} = 805{,}8\,W$$

238. Pre sériovú RC dvojicu je:
a) $\mathbf{Z} = 10^4\,(1 - \mathrm{j}1{,}59)\ \Omega$,
b) $I_{ef} = 11{,}7$ mA,
c) $P = 1{,}37$ W,
d) $U_{efR} = 117$ V, $U_{efC} = 186$ V

Pre paralelnú RC dvojicu je:
a) $\mathbf{Z} = 10^3\,(7{,}17 - \mathrm{j}4{,}50)\ \Omega$,
b) $I_{ef} = 26$ mA,
c) $P = 4{,}84$ W,
d) $I_{efR} = 22$ mA, $I_{efC} = 13{,}82$ mA

239. Rezonančné maximum prúdu napovedá, že v skrinke je sériovo spojená indukčnosť L a kapacita C. Obvod je vodivý pre jednosmerný prúd, teda k sériovej LC dvojici je paralelne pripojený odpor R. Skrinka obsahuje obvod podľa *obr. R239*. Treba vypočítať hodnoty R, L, C. Označme $U_0 = 100$ V, $I_0 = 0{,}01$ A, $U_{ef} = 220$ V, $I_{ef} = 2$ A, $f = \omega/2\pi = 50$ Hz a $f_0 = \omega_0/2\pi = 1$ kHz. Hodnota odporu je

$$R = \frac{U_0}{I_0} = 10\,000\ \Omega$$



Obr. R239

Absolútna hodnota impedancie obvodu je daná výrazom

$$Z = \frac{\left|R\left(\omega^2 LC - 1\right)\right|}{\sqrt{\left(\omega^2 LC - 1\right)^2 + \left(\omega RC\right)^2}} = \frac{U_{ef}}{I_{ef}} = 110\,\Omega$$

Ak uvážime, že $LC = 1/\omega_0^2$, potom pre C z posledného výrazu dostaneme

$$C = \frac{\sqrt{\left(\frac{R^2 I_{ef}^2}{U_{ef}^2} - 1\right)\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2}}{\omega R} = 28{,}86\ \mu\mathrm{F}$$

Hodnota indukčnosti je daná výrazom

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = 0{,}878\ \text{mH}$$

240. Na kružnici s polomerom r a so stredom na osi kondenzátora podľa zákona celkového prúdu platí

$$2\pi r H = \left(i + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) \pi r^2$$

kde $i = \sigma E$ je prúdová hustota v dielektriku kondenzátora. Z posledného výrazu dostaneme

$$H = \frac{r}{2}\left(\sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{E_m}{2} r(\sigma \cos \omega t - \omega\varepsilon \sin \omega t) = \frac{E_m}{2} r\sigma\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi}\, \cos(\omega t + \varphi)$$

kde tg $\varphi = \omega\varepsilon/\sigma$.

241. Admitancia kondenzátora s daným dielektrikom je

$$\boldsymbol{Y}_C = \mathrm{j}\omega\varepsilon_r C_0 = \mathrm{j}\omega C_0 + \frac{1}{\dfrac{\gamma}{\omega_p^2 C_0} + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_p^2 C_0}}$$

Admitancia obvodu podľa *obr. 241* v zadaní úlohy je

$$\boldsymbol{Y} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}$$

Porovnaním $\boldsymbol{Y}$ s $\boldsymbol{Y}_C$ dostaneme

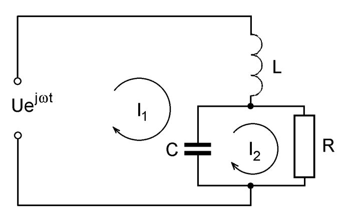
$$C = C_0 \qquad L = \frac{1}{\omega_p^2 C_0} \qquad R = \frac{\gamma}{\omega_p^2 C_0}$$

242. Označme $X_L = \omega L$ a $X_C = 1/\omega C$. Pre komplexné amplitúdy prúdov na *obr. R242* platí

$$\mathrm{j}(X_L - X_C)\boldsymbol{I}_1 + \mathrm{j}X_C\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{U} \qquad (R - \mathrm{j}X_C)\boldsymbol{I}_2 + \mathrm{j}X_C\boldsymbol{I}_1 = 0$$

Ak $X_L = X_C = X$, potom z prvej rovnice plynie pre prúd odporom

$$\boldsymbol{I}_R = \boldsymbol{I}_2 = -\mathrm{j}\frac{\boldsymbol{U}}{X_C} = -\mathrm{j}\omega C\boldsymbol{U} = -\mathrm{j}\frac{\boldsymbol{U}}{\omega L}$$



Obr. R242

Prúd tečúci cez odpor zaostáva vo fáze o π/2 za napätím a nezávisí od veľkosti odporu R. Výsledok je platný iba v prípade ideálnych prvkov L, C a napäťového zdroja s nulovou vnútornou impedanciou.

243. $\boldsymbol{I}_R = \mathrm{j}\omega CU = \mathrm{j}U/\omega L$. Prúd predbieha vo fáze napätie zdroja o $\pi/2$ a nezávisí od veľkosti odporu R.

244. a) Zapojenie podľa *obr. 244* v zadaní úlohy možno znázorniť náhradnou schémou na *obr. R244a*, kde $X_L = \omega L$ a $X_C = 1/\omega C$. Impedancia zapojenia na vstupných svorkách je

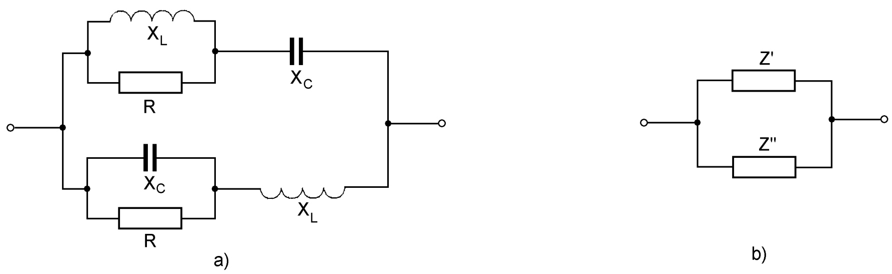
$$\boldsymbol{Z} = \frac{X_L X_C + \mathrm{j}R\left(X_L - X_C\right)}{2R + \mathrm{j}\left(X_L - X_C\right)}$$

Táto impedancia bude reálna, ak $X_L = X_C$, čo bude splnené pri frekvencii

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b) Pri frekvencii ω_0 je

$$Z = \frac{X_L X_C}{2R} = \frac{L}{2RC}$$



Obr. R244

Impedancia Z sa bude rovnať R vtedy, ak

$$\frac{L}{C} = 2R^2$$

c) Ak sú splnené body a) a b), potom pre daný obvod možno nakresliť náhradnú schému *obr. R244b*, kde

$$\boldsymbol{Z}' = \frac{2R}{3}\left(1 - \mathrm{j}\sqrt{2}\right) \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{Z}'' = \frac{2R}{3}\left(1 + \mathrm{j}\sqrt{2}\right)$$

takže

$$\left|\boldsymbol{Z}'\right| = \left|\boldsymbol{Z}''\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}R$$

čo znamená, že výkon vo vetvách sa bude deliť na polovice.

245. Komplexná amplitúda prúdu, ktorý tečie vetvou OAO' je

$$\boldsymbol{I}_A = \frac{\mathrm{j}\omega C\boldsymbol{U}_{vst}}{1 + \mathrm{j}\omega CR'} \quad \text{a prúdu vetvou } OBO' \quad \boldsymbol{I}_B = \frac{\boldsymbol{U}_{vst}}{2R}$$

Komplexné amplitúdy napätí uzlov A a B vzhľadom k uzlu O' sú

$$\boldsymbol{U}_A = \frac{\boldsymbol{U}_{vst}}{1 + \mathrm{j}\omega CR'} \qquad\qquad \boldsymbol{U}_B = \frac{\boldsymbol{U}_{vst}}{2}$$

Napätie na výstupe fázového posúvača je

$$\boldsymbol{U}_{\varphi} = \boldsymbol{U}_A - \boldsymbol{U}_B = \frac{\boldsymbol{U}_{vst}}{2}\frac{1 - j\omega CR'}{1 + j\omega CR'} = \frac{\boldsymbol{U}_{vst}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi}$$

kde $\varphi = \mathrm{arctg}(\omega CR')$. Z posledných dvoch výrazov vidno, že amplitúda napätia fázového posúvača je konštantná a rovná $U_0/2$ a fáza napätia sa pri zmene R od 0 do nekonečna mení v intervale od 0 po $-\pi$.

246. Impedancie jednotlivých vetiev Owenovho mostu sú:

$$\boldsymbol{Z}_1 = 1/\mathrm{j}\omega C_1 \qquad \boldsymbol{Z}_2 = R_2 \qquad \boldsymbol{Z}_3 = (1 + \mathrm{j}\omega C_3 R_3)/(\mathrm{j}\omega C_3) \qquad \boldsymbol{Z}_x = R_x + \mathrm{j}\omega L_x$$

Podmienka rovnováhy mostu je

$$\frac{\boldsymbol{Z}_1}{\boldsymbol{Z}_2} = \frac{\boldsymbol{Z}_3}{\boldsymbol{Z}_x}$$

čo je splnené, ak

$$R_x = \frac{C_1 R_2}{C_3} \qquad \text{a} \qquad L_x = C_1 R_2 R_3$$

247. Podmienky rovnováhy Wienovho mostu sú:

$$\omega^2 C_1 C_3 R_1 R_3 = 1 \qquad \text{a} \qquad \frac{C_1}{C_3} = \frac{R_4}{R_2} - \frac{R_3}{R_1}$$

Ak $R_1 = R_3 = R$, $C_1 = C_3 = C$ a $R_2 = R_4/2 = R_0$, potom druhá podmienka je splnená automaticky a prvá nadobudne tvar

$$\omega RC = 1$$

248. Podmienky rovnováhy Scheringovho mostu sú:

$$\frac{R_1}{C_4} = \frac{R_2}{C_3} \qquad \text{a} \qquad \frac{C_1}{R_4} = \frac{C_3}{R_2}$$

Most je frekvenčne nezávislý.

249. Podmienky rovnováhy Maxwellovho mostu:

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} \qquad \text{a} \qquad L_4 = C_1 R_2 R_3$$

Most je frekvenčne nezávislý.

250. Impedancia trojuholníkového zapojenia zo strany 1 – 2 musí byť rovná impedancii hviezdy z tej istej strany, teda musí platiť

$$\frac{\boldsymbol{Z}_B(\boldsymbol{Z}_A + \boldsymbol{Z}_C)}{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 \qquad \text{kde} \qquad \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_A + \boldsymbol{Z}_B + \boldsymbol{Z}_C$$

Podobne z ostatných strán

$$\frac{\boldsymbol{Z}_C(\boldsymbol{Z}_A + \boldsymbol{Z}_B)}{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3 \qquad \frac{\boldsymbol{Z}_A(\boldsymbol{Z}_B + \boldsymbol{Z}_C)}{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_3$$

Riešením týchto rovníc pre $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$ a $\boldsymbol{Z}_3$ dostaneme pre ekvivalentné impedancie trojuholníka výrazy

$$\boldsymbol{Z}_1 = \frac{\boldsymbol{Z}_A\boldsymbol{Z}_B}{\boldsymbol{Z}} \qquad \boldsymbol{Z}_2 = \frac{\boldsymbol{Z}_B\boldsymbol{Z}_C}{\boldsymbol{Z}} \qquad \boldsymbol{Z}_3 = \frac{\boldsymbol{Z}_A\boldsymbol{Z}_C}{\boldsymbol{Z}}$$

Pre rovnosť admitancií z každej strany trojuholníka a hviezdy podobne platí

$$\boldsymbol{Y}_B + \boldsymbol{Y}_C = \frac{\boldsymbol{Y}_2(\boldsymbol{Y}_3 + \boldsymbol{Y}_1)}{\boldsymbol{Y}} \qquad \boldsymbol{Y}_A + \boldsymbol{Y}_B = \frac{\boldsymbol{Y}_1(\boldsymbol{Y}_2 + \boldsymbol{Y}_3)}{\boldsymbol{Y}} \qquad \boldsymbol{Y}_C + \boldsymbol{Y}_A = \frac{\boldsymbol{Y}_3(\boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{Y}_2)}{\boldsymbol{Y}}$$

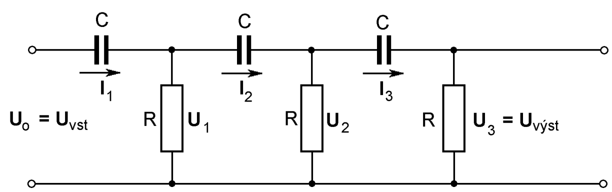
kde $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{Y}_2 + \boldsymbol{Y}_3$.

Riešením týchto rovníc pre admitancie trojuholníka dostaneme

$$\boldsymbol{Y}_A = \frac{\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Y}_3}{\boldsymbol{Y}} \qquad \boldsymbol{Y}_B = \frac{\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Y}_2}{\boldsymbol{Y}} \qquad \boldsymbol{Y}_C = \frac{\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{Y}_3}{\boldsymbol{Y}}$$

alebo pre impedancie

$$\boldsymbol{Z}_A = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_3 + \frac{\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_3}{\boldsymbol{Z}_2} \qquad \boldsymbol{Z}_B = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 + \frac{\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_3} \qquad \boldsymbol{Z}_C = \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3 + \frac{\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{Z}_3}{\boldsymbol{Z}_1}$$



Obr. R251

251. Podľa *obr. R251* pre komplexnú amplitúdu napätia $\boldsymbol{U}_3 = \boldsymbol{U}_{výst}$ platí

$$\boldsymbol{U}_3 = \boldsymbol{I}_3 R \qquad \text{a pre amplitúdu } \boldsymbol{U}_2 \qquad \boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{U}_3 + \frac{\boldsymbol{I}_3}{\mathrm{j}\omega C} = \boldsymbol{U}_3\left(1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega RC}\right)$$

Ďalej
$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{\boldsymbol{U}_2}{R} + \boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{U}_3\left(\frac{2}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega R^2 C}\right)$$

a
$$\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2 + \frac{\boldsymbol{I}_2}{\mathrm{j}\omega C} = \boldsymbol{U}_3\left(1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega RC} + \frac{2}{\mathrm{j}\omega RC} - \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}\right)$$

Nakoniec
$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{\boldsymbol{U}_1}{R} + \boldsymbol{I}_2$$

a
$$\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{U}_1 + \frac{\boldsymbol{I}_1}{\mathrm{j}\omega C} = \boldsymbol{U}_3\left(1 + \frac{6}{\mathrm{j}\omega RC} - \frac{5}{\omega^2 R^2 C^2} - \frac{1}{\mathrm{j}\omega^3 R^3 C^3}\right)$$

Ak v poslednom výraze dosadíme $\omega = 1/\sqrt{6}RC$, dostaneme $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{U}_{vst} = -29\boldsymbol{U}_3 = -29\boldsymbol{U}_{výst}$, alebo

$$\boldsymbol{U}_{výst} = -\frac{1}{29}\boldsymbol{U}_{vst}$$

252. Ak efektívna hodnota prúdu v obvode je rovnaká pri zopnutom aj rozopnutom kľúči, potom absolútna hodnota impedancie obvodu je v obidvoch prípadoch rovnaká, teda platí

$$\sqrt{r_L^2 + X_L^2} = \sqrt{r_L^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

z čoho pre hodnotu induktívnej reaktancie plynie

$$X_L = \frac{X_C}{2} = 24\ \Omega$$

Z rovnosti

$$U_{ef} = I_{ef}\sqrt{r_L^2 + X_L^2}$$

vyplýva pre odpor indukčnosti hodnota

$$r_L = \sqrt{\left(\frac{U_{ef}}{I_{ef}}\right)^2 - X_L^2} = 31{,}1\ \Omega$$

253. Pre dve vhodne zvolené slučky možno napísať rovnice pre komplexné obvodové amplitúdy prúdov v tvare

$$R_1\boldsymbol{I}_1 + R_2(\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_2) = U_0$$
$$R_2(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{I}_1) + (R_3 - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C})\boldsymbol{I}_2 = 0$$

Po úprave a dosadením numerických hodnôt dostaneme sústavu rovníc

$$2\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_2 = 10$$
$$-\boldsymbol{I}_1 + (2 - \mathrm{j})\boldsymbol{I}_2 = 0$$

Riešením týchto rovníc dostaneme komplexné amplitúdy obvodových prúdov v tvare

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{10}{3 - \mathrm{j}2} = 2{,}77\mathrm{e}^{\mathrm{j}33^\circ 41'}\ \mathrm{A}$$
$$\boldsymbol{I}_1 = (2 - \mathrm{j})\boldsymbol{I}_2 = 6{,}20\mathrm{e}^{\mathrm{j}7^\circ 7'}\ \mathrm{A}$$

Komplexné amplitúdy prúdov jednotlivými odpormi

$$\boldsymbol{I}_{R1} = \boldsymbol{I}_1 = (2 - \mathrm{j})\boldsymbol{I}_2 = 6{,}20\mathrm{e}^{\mathrm{j}7^\circ 7'}\ \mathrm{A}$$
$$\boldsymbol{I}_{R2} = \boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{I}_1 = 3{,}92\mathrm{e}^{-\mathrm{j}11^\circ 19'}\ \mathrm{A}$$
$$\boldsymbol{I}_{R3} = \boldsymbol{I}_2 = \frac{10}{3 - \mathrm{j}2} = 2{,}77\mathrm{e}^{\mathrm{j}33^\circ 41'}\ \mathrm{A}$$

Fázové uhly prúdov sa vzťahujú k nulovému fázovému uhlu napätia. Fázový posuv prúdu v odpore R_2 oproti prúdu v odpore R_3 je

$$\Delta\varphi = \varphi_{R3} - \varphi_{R2} = 33°41' + 11°19' = 45°$$

Posledný výsledok možno získať aj ako rozdiel fáz impedancií vetvy R_2 ($\varphi = 0$) a vetvy $R_3 - \mathrm{j}/(\omega C) = 1 - \mathrm{j}\ \Omega = \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}45°}\ \Omega$.

254. Podľa II. Kirchhoffovho zákona platí v prípade:

a) $$u_{vst} = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t + iR \qquad \text{kde} \qquad iR = u_{v\acute{y}st}$$

teda

$$u_{vst} = u_{v\acute{y}st} + \frac{1}{RC}\int u_{v\acute{y}st}\mathrm{d}t$$

Po derivovaní tejto rovnice podľa času dostaneme rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{vst} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{v\acute{y}st} + \frac{u_{v\acute{y}st}}{RC}$$

z ktorej vidieť, že ak

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{v\acute{y}st}\right| \ll \left|\frac{u_{v\acute{y}st}}{RC}\right| \qquad \text{potom} \qquad u_{v\acute{y}st} \approx RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{vst}$$

b) $$u_{vst} = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t + iR \qquad \text{kde} \qquad \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t = u_{v\acute{y}st}$$

takže

$$u_{vst} = RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{v\acute{y}st} + u_{v\acute{y}st}$$

Ak

$$RC\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{v\acute{y}st}\right| << \left|\int u_{v\acute{y}st}\mathrm{d}t\right| \qquad \text{potom} \qquad u_{v\acute{y}st} \approx \frac{1}{RC}\int u_{vst}\mathrm{d}t$$

Nech $u_{vst} = U_0\cos\omega t$ alebo v komplexnej forme $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{U}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. Výstupné napätie bude

$$\boldsymbol{u}_{v\acute{y}st} = \boldsymbol{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)} \qquad \text{pričom} \qquad \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{v\acute{y}st}\right| = \omega\left|u_{v\acute{y}st}\right|$$

takže z podmienky a) pre derivačný obvod plynie

$$\omega << \frac{1}{RC}$$

Obvod na *obr. 254a* v zadaní úlohy bude teda derivačným pre signály, ktorých frekvencie sú oveľa menšie ako $1/(RC)$.

V prípade b)

$$\frac{1}{\omega}\left|u_{v\acute{y}st}\right| = \left|\int u_{v\acute{y}st}\mathrm{d}t\right|$$

a z podmienky pre integračný obvod plynie, že

$$\omega >> \frac{1}{RC}$$

Obvod na *obr. 254b* bude integračným pre signály, ktorých frekvencie sú oveľa väčšie ako $1/(RC)$.

255. Rezonančná frekvencia obvodu tlmeného sériovým odporom R_L je

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_L^2}{4L^2}}$$

a kvalita obvodu

$$Q_0 = \frac{\omega L}{R} \qquad \text{takže} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q_0^2}}$$

z čoho

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}} \approx \left(1 - \frac{1}{8Q_0^2}\right)\omega_0 = (1 - 3{,}125.10^{-6})\omega_0$$

Zmena rezonančnej frekvencie (pokles)

$$|\delta\omega| = |\omega - \omega_0| = \frac{1}{8Q_0^2}\omega_0 = 3{,}125.10^{-6}\,\omega_0$$

čo predstavuje $3{,}125.10^{-4}$ % rezonančnej frekvencie ω_0 obvodu bez tlmenia.

256. V obvode na *obr. 256b* môžu vzniknúť tlmené kmity s frekvenciou f = 3 082 Hz.

257. Vstupná impedancia obvodu na *obr. 257a* je

$$\mathbf{Z}_a \approx \frac{\mathrm{j}\omega L}{1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega RC}$$

a impedancia obvodu na *obr. 257b*

$$\mathbf{Z}_b = \frac{\mathrm{j}\omega L}{1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\dfrac{\omega L}{R'}}$$

Impedancie $\mathbf{Z}_a$ a $\mathbf{Z}_b$ budú rovnaké, ak imaginárne časti menovateľov budú rovnaké, t. j. ak

$$\omega RC = \frac{\omega L}{R'} \qquad \text{alebo} \qquad R' = \frac{L}{RC}$$

258. Kapacita m sériovo zapojených kondenzátorov je $C_m = C/m$

a) Impedancia sériovo zapojeného odporu, indukčnosti a m kondenzátorov je

$$Z = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{m}{\omega C}\right)$$

a činný výkon na odpore R

$$P = \frac{RU_0^2}{2Z^2} = \frac{RU_0^2}{2\left[R^2 + \left(\omega L - \dfrac{m}{\omega C}\right)^2\right]}$$

b) Výkon v odpore bude maximálny, keď je obvod v rezonancii, t. j. ak

$$\omega L - \frac{m}{\omega C} = 0$$

Pre dané číselné hodnoty je obvod v rezonancii pri m = 2. Vtedy

$$P = P_{max} = \frac{U_0^2}{2R}$$

c) Amplitúda prúdu v obvode, keď je obvod v rezonancii, je $I = U_0/R$. Amplitúda napätia na sériovej RL-dvojici $U_{RL} = I_0\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 141{,}4\ \mathrm{V}$ a amplitúda napätia na odpore $U_R = I_0 R = U_0 = 100$ V.

259. Magnetická indukcia B v toroidálnej dutine rezonátora je daná výrazom

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

a indukčný tok priečnym rezom S dutiny

$$\Phi = \int_S B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I h}{2\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = I\frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a} = LI$$

z čoho indukčnosť toroidu

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

Kapacita vyšrafovanej časti rezonančnej dutiny na *obr. 259* v zadaní úlohy je

$$C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d} \qquad \text{a rezonančná frekvencia dutiny} \qquad f_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{c}{2\pi a}\sqrt{\frac{2d}{h\ln\frac{b}{a}}}$$

kde $c = 1\big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ je rýchlosť svetla vo vákuu. Dosadením číselných hodnôt dostaneme pre rezonančnú frekvenciu dutiny hodnotu f_{rez} = 2 565 MHz = 2,565 GHz. Je to oblasť decimetrových elektromagnetických vĺn.

260. a) Ak po povrchu veľmi dlhého valca tečie, vzhľadom k jeho osi priečne, prúd s plošnou prúdovou hustotou J_s, potom vo vnútri valca je osové magnetické pole s indukciou $B = \mu_0 J_s$ a indukčný tok prierezom valca

$$\Phi = \mu_0 J_s \pi a^2 = \frac{\mu_0 \pi I a^2}{b}$$

kde $I = bJ_s$ je celkový prúd tečúci po povrchu valca. Indukčnosť valca

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{b} \qquad \text{a kapacita rovinných plôch} \qquad C = \frac{\varepsilon_0 w b}{s}$$

takže rezonančná frekvencia

$$f_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{c}{2\pi a}\sqrt{\frac{s}{w}}$$

kde $c = 1\big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

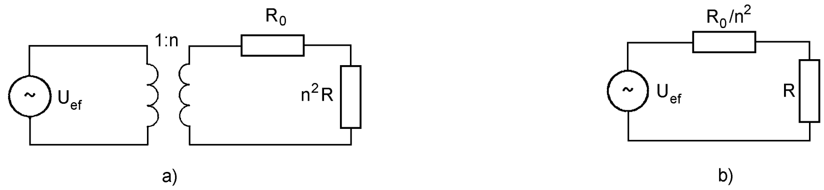
b) f_{rez} = 8 979 MHz = 8,979 GHz. Je to mikrovlnová oblasť elektromagnetického spektra

261. Výkon v spotrebiči v prvom obvode

$$P_s = \frac{U_{ef}^2 R}{\left(R_0 + R\right)^2} \qquad \text{a vo vedení} \qquad P_v = \frac{U_{ef}^2 R_0}{\left(R_0 + R\right)^2}$$

takže

$$\frac{P_s}{P_v} = \frac{R}{R_0}$$



Obr. R261

V druhom prípade možno pretransformovať záťažový odpor na vstup druhého transformátora, čím vznikne náhradný obvod podľa *obr. R261a*. Ďalšou transformáciou odporov R_0 a n^2R na vstup prvého transformátora dostaneme náhradný obvod podľa *obr. R261b*. Výkon v záťažovom odpore tohoto obvodu je

$$P_s' = \frac{U_{ef}^2 R}{\left(\dfrac{R_0}{n^2} + R\right)^2} \qquad \text{a stratový výkon vo vedení} \qquad P_v' = \frac{U_{ef}^2 R_0}{n^2\left(\dfrac{R_0}{n^2} + R\right)^2}$$

Pomer výkonov v spotrebiči a vo vedení

$$\frac{P_s'}{P_v'} = n^2 \frac{R}{R_0}$$

Vidíme, že v druhom prípade je účinnosť prenosu energie do spotrebiča n^2-krát väčšia.

262. Absolútna hodnota impedancie medzi bodmi A a B je

$$Z_{AB} = \sqrt{R_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C_1^2}} = 50\ \Omega$$

a efektívna hodnota prúdu v obvode

$$I_{ef} = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}} = 0{,}48\ \text{A}$$

Absolútna hodnota celkovej impedancie obvodu je

$$Z = \sqrt{\left(R_1 + R_2\right)^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^2} = 250\ \Omega$$

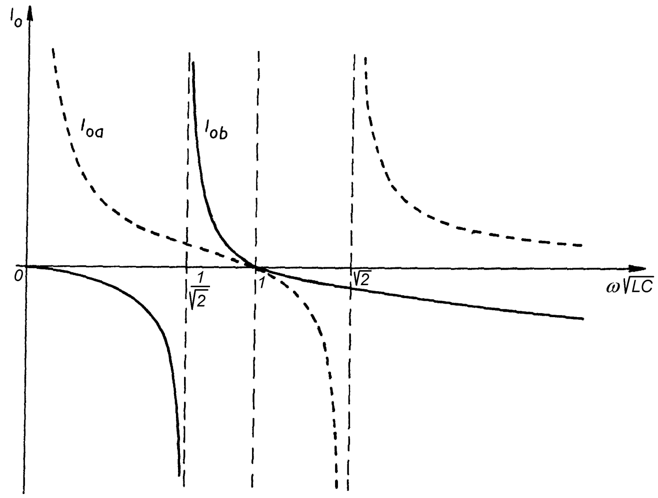
a efektívna hodnota napätie zdroja $U_{ef} = I_{ef} Z = 120$ V.

263. Vstupné impedancie obvodov na *obr. 263a,b* v zadaní úlohy sú

$$\boldsymbol{Z}_a = \mathrm{j}\omega L \frac{2 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} \qquad\qquad \boldsymbol{Z}_b = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\frac{1 - 2\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}$$

a komplexné amplitúdy prúdov v obvodoch

$$\boldsymbol{I}_a = \frac{U_0}{\boldsymbol{Z}_a} = -\mathrm{j}\frac{U_0}{\omega L}\frac{1 - \omega^2 LC}{2 - \omega^2 LC} \qquad\qquad \boldsymbol{I}_b = -\mathrm{j}\omega C U_0 \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - 2\omega^2 LC}$$



Obr. R263

Zodpovedajúce časové závislosti prúdov v obvodoch sú

$$i_a(t) = \frac{U_0}{\omega L}\frac{1-\omega^2 LC}{2-\omega^2 LC}\sin\omega t = I_{0a}(\omega)\sin\omega t$$

$$i_b(t) = \omega C U_0 \frac{\omega^2 LC - 1}{1-2\omega^2 LC}\sin\omega t = I_{0b}(\omega)\sin\omega t$$

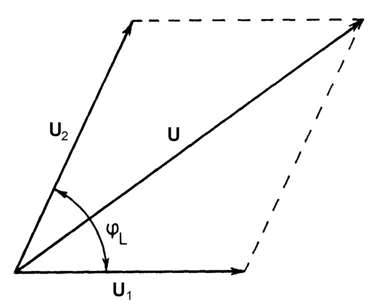
Amplitúdy $I_{0a}(\omega)$ a $I_{0b}(\omega)$ v závislosti od $\omega\sqrt{LC}$ sú grafmi znázornené na *obr. R263*.

264. Pre efektívne hodnoty napätí v obvode možno nakresliť vektorový diagram podľa *obr. R264*, z ktorého plynie

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\cos(\pi - \varphi_L) = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi_L$$

Výkon v indukčnosti je daný výrazom

$$P = IU_2\cos\varphi_L = \frac{U_1U_2}{R}\cos\varphi_L$$



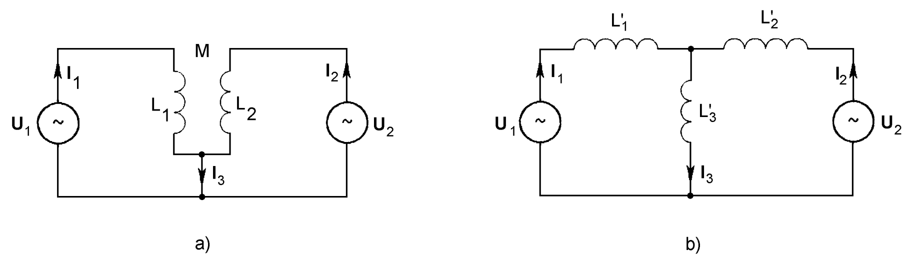
Obr. R264

Dosadením za $U_1 U_2 \cos\varphi$ z prvého výrazu dostaneme

$$P = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R}$$

265. Pripojme k obidvom obvodom dva zdroje s komplexnými amplitúdami $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{U}_2$ a spodné konce indukčností L_1 a L_2 spojme. Vzniknú obvody podľa *obr. R265a,b*. Pre prúdy v obvode na *obr. R265a* platia Kirchhoffove rovnice

$$\boldsymbol{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \boldsymbol{I}_1 \pm \mathrm{j}\omega M \boldsymbol{I}_2 \qquad \boldsymbol{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2 \boldsymbol{I}_2 \pm \mathrm{j}\omega M \boldsymbol{I}_1$$



Obr. R265

Ak uvážime, že $\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{I}_3$, možno rovnice prepísať do tvaru

$$\boldsymbol{U}_1 = \mathrm{j}\omega(L_1 \mp M)\boldsymbol{I}_1 \pm \mathrm{j}\omega M I_3 \qquad \boldsymbol{U}_2 = \mathrm{j}\omega(L_2 \mp M)\boldsymbol{I}_2 \pm \mathrm{j}\omega M I_3$$

Pre obvod na *obr. R265b* platia rovnice

$$\boldsymbol{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1' \boldsymbol{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_3' \boldsymbol{I}_3 \qquad \boldsymbol{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2' \boldsymbol{I}_2 + \mathrm{j}\omega L_3' \boldsymbol{I}_3$$

Ak majú byť obvody elektricky ekvivalentné, potom aj sústavy rovníc musia byť ekvivalentné, teda musí platiť

$$L_1' = L_1 \mp M \qquad L_2' = L_2 \mp M \qquad L_3' = \pm M$$

Znamienka závisia od magnetickej väzby medzi indukčnosťami.

266. a) Sériové spojenie indukčností dáva výslednú indukčnosť

$$L_s = L_1 + L_2 \pm 2M$$

Číselne: 16 H a 4 H.

b) Paralelné spojenie indukčností dáva výslednú indukčnosť

$$L_p = \frac{L_1 L_2 - M}{L_1 + L_2 \pm 2M}$$

Číselne: 0,9375 H a 3,75 H.

c) Ak sa jedna cievka skratuje, potom indukčnosť na svorkách druhej cievky je daná výrazom [pozri odsek 7.6, výraz (7.51)]

$$L_c = L_{1,2} - \frac{M^2}{L_{2,1}}$$

Číselne: 3,75 H a 2,5 H.

267. Pre zapojenie na *obr. 267* možno písať rovnice

$$(R_1 + \mathrm{j}X_{L1})\boldsymbol{I}_1 - \mathrm{j}X_M\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{U}_1 \qquad (R_2 + \mathrm{j}X_{L2})\boldsymbol{I}_2 - \mathrm{j}X_M\boldsymbol{I}_1 = 0$$

kde $\boldsymbol{I}_1$ a $\boldsymbol{I}_2$ sú komplexné amplitúdy prúdy v primárnom a sekundárnom obvode. Riešením tejto sústavy pre prúd $\boldsymbol{I}_2$ dostaneme

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{\mathrm{j}X_M}{(R_1 + \mathrm{j}X_{L1})(R_2 + \mathrm{j}X_{L2}) + X_M^2}\boldsymbol{U}_1$$

Komplexná amplitúda výstupného napätia je

$$\boldsymbol{U}_2 = R_2\boldsymbol{I}_2 = R_2\frac{\mathrm{j}X_M}{(R_1 + \mathrm{j}X_{L1})(R_2 + \mathrm{j}X_{L2}) + X_M^2}\boldsymbol{U}_1$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$\boldsymbol{U}_2 = 3{,}922\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}11{,}3°}\ \mathrm{V}$$

Výstupné napätie má teda amplitúdu 3,922 V a zaostáva za vstupným napätím vo fáze o 11,3°.

268. $\boldsymbol{U}_{v\acute{y}st} = 8{,}22\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}99{,}5°}$ V

269. Vstupná impedancia obvodu na *obr. 269a* v zadaní úlohy je

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = \mathrm{j}\omega L_1 + \boldsymbol{Z} - \frac{(\boldsymbol{Z} + \mathrm{j}\omega M)^2}{\boldsymbol{Z} + \mathrm{j}\omega L_2}$$ a na *obr. 269b* $$\boldsymbol{Z}_{vst} = \frac{\mathrm{j}\omega L_1\boldsymbol{Z} + \omega^2(M^2 - L_1L_2)}{\mathrm{j}\omega(L_1 + L_2 - 2M) + \boldsymbol{Z}}$$

270. a) $\boldsymbol{U}_{ab} = 14{,}14\ \mathrm{e}^{+\mathrm{j}45°}$ V, b) $\boldsymbol{I}_{ab} = 1{,}67\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°}$ A.

271. Podľa *obr. 271* v zadaní úlohy možno pre zapojenie napísať rovnice podľa II. Kirchhoffovho zákona

$$[R + \mathrm{j}(X_L - X_C)]\boldsymbol{I}_1 - \mathrm{j}X_M\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{U}_1 \qquad [R + \mathrm{j}(X_L - X_C)]\boldsymbol{I}_2 - \mathrm{j}X_M\boldsymbol{I}_1 = 0$$

kde $\boldsymbol{I}_1$ a $\boldsymbol{I}_2$ sú komplexné amplitúdy prúdov v obvode a $\boldsymbol{U}_1$ je komplexná amplitúda vstupného napätia. Riešením tejto sústavy pre prúd $\boldsymbol{I}_2$ dostaneme

$$\boldsymbol{I}_2 = \frac{-\mathrm{j}X_M\boldsymbol{U}_1}{(X_L - X_C)^2 - X_M^2 - R^2 - \mathrm{j}2R(X_L - X_C)}$$

Komplexná amplitúda výstupného napätia je

$$\boldsymbol{U}_2 = -\mathrm{j}X_C\boldsymbol{I}_2 = \frac{-X_C X_M\boldsymbol{U}_1}{(X_L - X_C)^2 - X_M^2 - R^2 - \mathrm{j}2R(X_L - X_C)} = 19{,}23\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°}\ \mathrm{V}$$

Výstupné napätie je vo fáze so vstupným napätím.

272. a) $C = \dfrac{1}{\omega X_{L1}} = 50\ \mu\mathrm{F}$

b) Pri sériovej rezonancii tečie v primárnom obvode prúd s amplitúdou

$$I_1 = \frac{U_1}{R} = 10\ \mathrm{A}$$

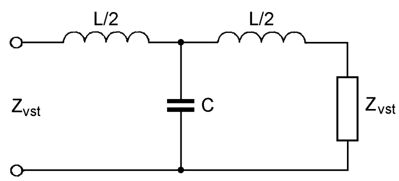
a v sekundárnom obvode sa indukuje napätie s komplexnou amplitúdou

$$\boldsymbol{U}_2 = \mathrm{j}X_M \boldsymbol{I}_1 = 100\mathrm{e}^{\mathrm{j}90°}\ \mathrm{V}$$

Výstupné napätie má amplitúdu 100 V a predbieha vstupné napätie vo fáze o 90°.

273. Impedancia nekonečného reťazca podľa *obr. 273* v zadaní úlohy sa nezmení, ak ku vstupu reťazca reprezentovaného vstupnou impedanciou $\boldsymbol{Z}_{vst}$ sa pripojí jeden článok $L/2$-C podľa *obr. R273*. Pre zapojenie na *obr. R273* platí

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{2} + \boldsymbol{Z}'$$



Obr. R273

kde $\boldsymbol{Z}'$ je impedancia paralelnej dvojice $1/\mathrm{j}\omega C$ a $\boldsymbol{Z}_{vst} + \mathrm{j}\omega L/2$, teda

$$\boldsymbol{Z}' = \frac{2\boldsymbol{Z}_{vst} + \mathrm{j}\omega L}{2 - \omega^2 LC + \mathrm{j}2\omega C\boldsymbol{Z}_{vst}}$$

takže

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{2} + \frac{2\boldsymbol{Z}_{vst} + \mathrm{j}\omega L}{2 - \omega^2 LC + \mathrm{j}2\omega C\boldsymbol{Z}_{vst}}$$

z čoho vstupná impedancia reťazca

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}$$

Táto impedancia je reálna pre všetky frekvencie, ktoré spĺňajú podmienku

$$\omega < \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

Reťazec je dolnofrekvenčný priepust.

274. Vstupná impedancia reťazca na *obr. 274* v zadaní úlohy je

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}}$$

ktorá je reálna pre všetky frekvencie, ktoré spĺňajú podmienku

$$\omega > \frac{1}{2\sqrt{LC}}$$

Reťazec je hornofrekvenčný priepust.

275. Výkon v odpore po zopnutí spínača stúpne štyrikrát. Aby sa kondenzátor počas jednej periódy nestačil znateľne vybiť, treba jeho hodnotu voliť tak, že časová konštanta $RC \gg 1/f$.

276. Výkon v obvode na *obr. 276a* v zadaní úlohy je

$$P = \frac{7}{4}\frac{U_{ef}^2}{R} \qquad \text{a v obvode na } \textit{obr. 276b} \qquad P = \frac{5}{3}\frac{U_{ef}^2}{R}$$

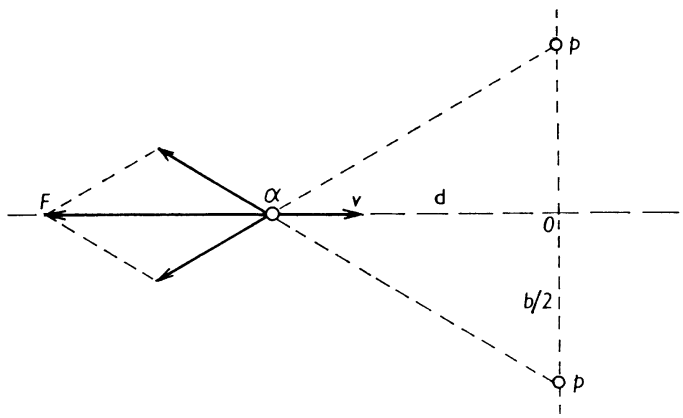
10 Pohyb nabitých častíc v elektrických a magnetických poliach

277. Podľa *obr. R277* na α-časticu pôsobí odpudivá sila

$$F = \frac{e^2 d}{\pi\varepsilon_0\left(d^2 + \frac{b^2}{4}\right)^{3/2}}$$

ktorá je maximálna vo vzdialenosti

$$d_0 = \pm\frac{b}{\sqrt{8}}$$



Obr. R277

278. $m = 2{,}39.10^{-25}$ kg.

279. Elektróny urýchlené napätím U na rýchlosť (*obr. R279*)

$$v_x = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

sa budú medzi doskami pohybovať pod vplyvom sily kolmej na v_x

$$F = eE = e\frac{U'}{D}$$

Pohybová rovnica pre elektrón medzi doskami je

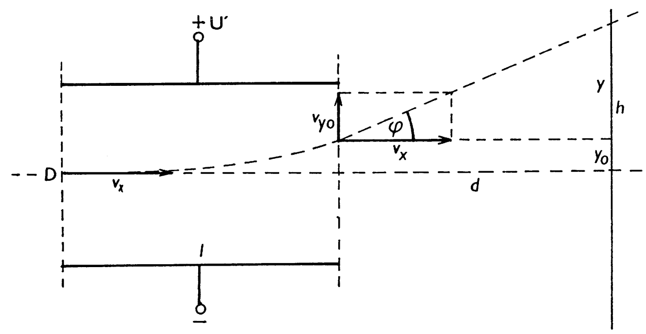
$$m_e\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = e\frac{U'}{D} \qquad \text{a jej riešenie je} \qquad v_y = \frac{eU'}{m_e D}t$$

pretože v čase vstupu elektrónov medzi dosky je ich priečna rýchlosť nulová. Medzi doskami sa budú elektróny pohybovať po dobu $t_0 = l/v_x$, takže pri výstupe z priestoru dosiek ich priečna rýchlosť bude

$$v_{y0} = \frac{eU'}{m_e D} t_0 = \frac{eU'l}{m_e D v_x}$$

V smere y prejdú elektróny dráhu

$$y_0 = \frac{eU'l^2}{2m_e D v_x^2} = \frac{l^2 U'}{4DU}$$



Obr. R279

Po výstupe z priestoru medzi doskami sa budú elektróny pohybovať pod uhlom φ, pre ktorý platí

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{v_{y0}}{v_x} = \frac{y}{d} \qquad \text{z čoho} \qquad y = \frac{v_{y0}}{v_x} = \frac{lU'd}{2DU}$$

Odchýlka elektrónového lúča na tienidle

$$h = y_0 + y = \frac{lU'}{2DU}\left(\frac{l}{2} + d\right)$$

Číselne: $h = 3{,}6$ cm.

280. a) Elektrón opustí kondenzátor 2 rýchlosťou

$$v = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{el\mathscr{E}}{v_0 m_e d}\right)^2 \left(\frac{R}{R_0 + R}\right)^2} \qquad \text{pod uhlom} \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{el\mathscr{E}}{v_0^2 m_e d}\frac{R}{R_0 + R}\right)$$

b) Elektrón opustí kondenzátor 2 vo vzdialenosti

$$y_0 = \frac{el^2\mathscr{E}}{2v_0^2 m_e d}\frac{R - 2R_0}{R_0 + R}$$

od osi Ox v rovine AA'.

c) Elektrón opustí kondenzátor 2 rýchlosťou rovnobežnou s osou Ox, ak $R = 0$. Rýchlosť elektrónu je $v_x = v_0$, a vystúpi z kondenzátora 2 vo vzdialenosti

$$y_0 = -\frac{el^2\mathscr{E}}{v_0^2 m_e d}$$

od osi Ox v rovine AA'.

d) $\mathscr{E} = \dfrac{W_k d^2}{el^2} = 400\ \text{V}$

e) Energia elektrónu je najväčšia pri jeho prechode z kondenzátora 1 do kondenzátora 2. Jej hodnota

$$W = W_k + \frac{1}{W_k}\left(\frac{el\mathscr{E}}{2d}\right)^2 = 10{,}1\ \text{keV}$$

281. Ak sa elektrón s nábojom $-e$ nachádza vo vzdialenosti x od jednej z rovín, potom na druhej rovine podľa úlohy 43 je indukovaný náboj $q = ex/d$. Ak sa v čase dt elektrón premiestni o dx, potom sa na druhej rovine zvýši náboj o

$$\mathrm{d}q = e\frac{\mathrm{d}x}{d}$$

Vytvorením časových zmien a s uvážením, že dq/dt = I je prúd v skrate a dx/dt = v je rýchlosť elektrónu, dostaneme jednoduchý výraz

$$I = e\frac{v}{d}$$

čo je špeciálny tvar vety o indukovaných prúdoch (Shockleyho – Ramova veta z oblasti fyzikálnej a katódovej elektroniky). Indukovaný prúd v skrate tečie iba v čase pohybu elektrónu medzi rovinami. Smer prúdu v skrate je totožný so smerom pohybu elektrónu. Dosadením číselných hodnôt dostaneme: $I = 8.10^{-11}$ A, dĺžka prúdového impulzu $t = d/v = 2.10^{-9}$ s.

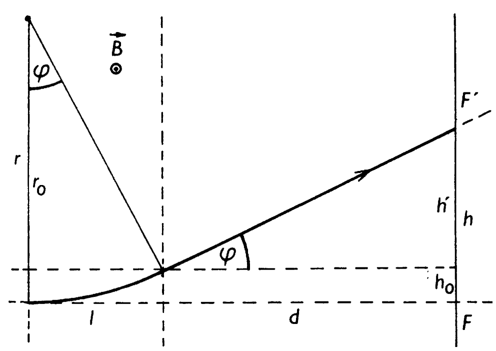
282. Ak je horná doska kondenzátora záporná, elektrón vnikne do kondenzátora do hĺbky $h = 5$ mm. Ak je polarita opačná, elektrón dopadne na hornú dosku vo vzdialenosti $l = 4{,}23$ mm od kolmice.

283. Pod účinkom napätia U nadobudnú elektróny rýchlosť

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

a v priestore magnetického poľa sa budú pohybovať po kružnici s polomerom r (*obr. R283*), pre ktorý platí

$$r = \frac{m_e v}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$



Obr. R283

Vo vertikálnom smere prejdú elektróny v magnetickom poli dráhu

$$h_0 = r - r_0 = r - \sqrt{r^2 - l^2}$$

Po výstupe z priestoru magnetického poľa sa elektróny pohybujú pod uhlom φ, pre ktorý platí

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{h'}{d} = \frac{l}{\sqrt{r^2 - l^2}} \qquad \text{z čoho} \qquad h' = \frac{l}{\sqrt{r^2 - l^2}} d$$

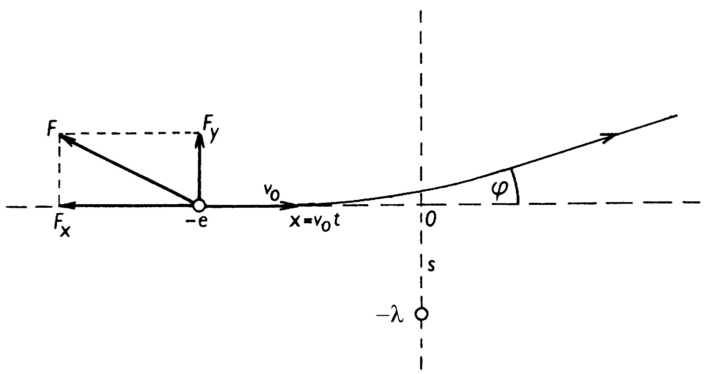
Odchýlka lúča na tienidle

$$h = FF' = h_0 + h' = r - \sqrt{r^2 - l^2} + \frac{l}{\sqrt{r^2 - l^2}} d$$

Číselne: h = 9,2 mm.

284. $W_k = 8.10^{-17}$ J = 500 eV, $\omega_c = 1{,}2.10^6$ rad/s.

285. $E_y = v_x B_z$.



Obr. R286

286. Na pohybujúci sa elektrón pôsobí sila (*obr. R286*)

$$F = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{s^2 + x^2}}$$

ktorej zložka kolmá na smer pohybu je

$$F_y = \frac{e\lambda s}{2\pi\varepsilon_0\left(s^2 + x^2\right)}$$

Zložka hybnosti v pozdĺžnom smere $p_x = mv_0$ sa nemení a zložku hybnosti v priečnom smere možno vypočítať z rovnice

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = F_y \qquad \text{teda} \qquad p_y = \int_{-\infty}^{0} F_y \mathrm{d}t = \frac{e\lambda s}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{s^2 + v_0^2 t^2} = \frac{e\lambda}{4\varepsilon_0 v_0}$$

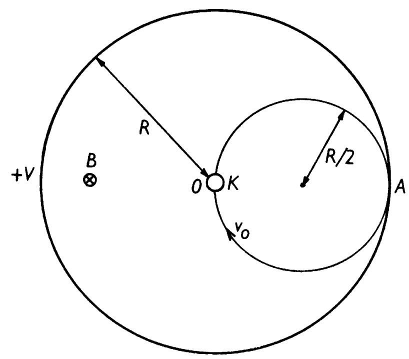
Pre uhol odchýlky lúča platí

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{e\lambda}{4\varepsilon_0 m v_0} \approx \varphi \ = \text{konšt.}$$

Uhol odchýlky teda nezávisí od s.

287. Ak je polomer katódy zanedbateľne malý oproti polomeru anódy (*obr. R287*), potom intenzita elektrického poľa v blízkosti katódy je veľmi veľká a potenciál narastá so vzdialenosťou od katódy veľmi rýchlo, takže nadobúda už v malých vzdialenostiach od katódy hodnotu prakticky rovnú potenciálu anódy. Elektróny nadobúdajú rýchlosť

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$



Obr. R287

už vo veľmi malej vzdialenosti od katódy a vo zvyšnom priestore medzi anódou a katódou sa pohybujú prakticky konštantnou rýchlosťou. Pod účinkom magnetického poľa indukcie B sa pohybujú po kružniciach s polomerom

$$r = \frac{m_e v_0}{eB}$$

Prúd diódou prestane tiecť vtedy, keď elektróny pri svojom kruhovom pohybe už nedosiahnu anódu (*obr. R287*), t. j. vtedy, keď polomer dráhy elektrónu bude $r = R/2$. Tomuto polomeru zodpovedá hodnota kritickej magnetickej indukcie

$$B_{krit} = \frac{m_e v_0}{eR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{8m_e V}{e}}$$

288. a) Pohybová rovnica elektrónu v danom elektrickom a magnetickom poli je

$$m_e \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -e\boldsymbol{E} - e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

alebo v zložkách pravouhlého súradnicového systému (bodkami sú vyznačené časové derivácie)

$$m_e\ddot{x} = eB\dot{y} \qquad m_e\ddot{y} = eE - eB\dot{x} \qquad m_e\ddot{z} = 0$$

V čase $t = 0$ je $x = y = z = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Z rovnice $m_e\ddot{z} = 0$ plynie, že z = konšt. = 0, takže elektrón sa pohybuje v rovine xy. Deriváciou druhej rovnice podľa času dostaneme

$$m_e \ddot{y} = -eB\ddot{x}$$

a dosadením za $\ddot{x}$ z prvej rovnice prejde posledná rovnica na tvar

$$\dddot{y} = -\omega_c^2 \dot{y}$$

kde $\omega_c = eB/m_e$ je cyklotrónová frekvencia. Všeobecné riešenie tejto rovnice má tvar

$$y = -\frac{A}{\omega_c} \cos \omega_c t + C$$

kde A a C sú konštanty, ktoré sa určia zo začiatočných podmienok. V čase t = 0 je y = 0, $\ddot{y} = eE / m_e$. Uvážením týchto podmienok dostaneme pre integračné konštanty hodnoty

$$A = C = \frac{eE}{m_e \omega_c^2} \qquad \text{takže} \qquad y = \frac{eE}{m_e \omega_c^2}\left(1 - \cos \omega_c t\right)$$

Derivovaním riešenia pre y a dosadením do prvej zložkovej rovnice dostaneme rovnicu

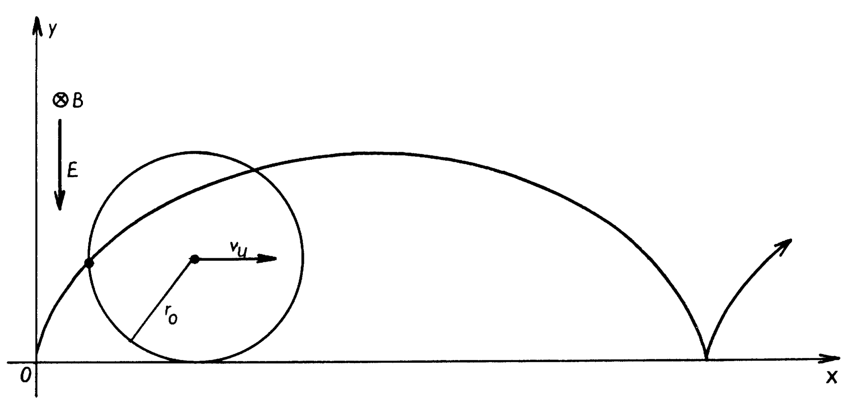
$$\ddot{x} = \frac{eE}{m_e} \sin \omega_c t$$

ktorej dvojnásobnou integráciou dostaneme všeobecné riešenie v tvare

$$x = -\frac{eE}{m_e \omega_c^2} \sin \omega_c t + Dt + F$$

D a F sú integračné konštanty. V čase t = 0 je x = 0, $\dot{x} = 0$, z čoho plynú pre integračné konštanty hodnoty

$$D = \frac{eE}{m_e \omega_c} \qquad\qquad F = 0$$



Obr. R288

Riešenie pre x je teda

$$x = \frac{eE}{m_e \omega_c^2}\left(\omega_c t - \sin \omega_c t\right)$$

Elektrón sa bude pohybovať po dráhe danej výrazmi

$$x = \frac{eE}{m_e\omega_c^2}\left(\omega_c t - \sin\omega_c t\right) \qquad y = \frac{eE}{m_e\omega_c^2}\left(1 - \cos\omega_c t\right)$$

Z týchto výrazov vidno, že dráha je cykloida (*obr. R288*) s vytvárajúcou kružnicou s polomerom

$$r_0 = \frac{eE}{m_e\omega_c^2}$$

b) Zložky rýchlosti elektrónu sú

$$\dot{x} = \frac{E}{B}\left(1 - \cos\omega_c t\right) \qquad \dot{y} = \frac{E}{B}\sin\omega_c t$$

c) Elektrón sa pohybuje unášavou (driftovou) rýchlosťou

$$v_u = \frac{E}{B}$$

pozdĺž osi x.

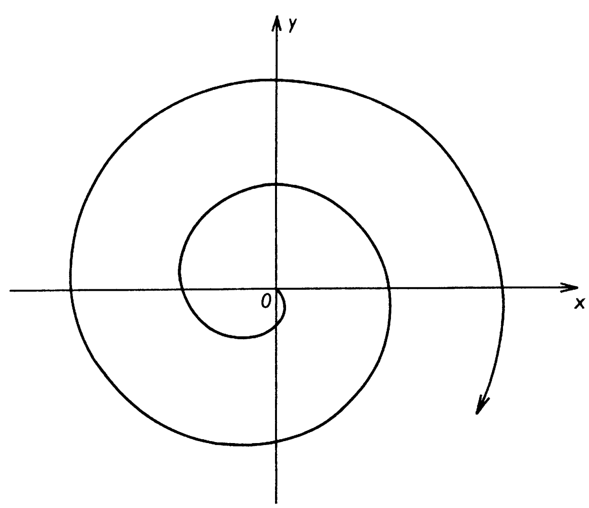
289. a) $0{,}5.10^7$ rad/s, b) $0{,}25.10^7$ rad/s, c) $0{,}5.10^7$ rad/s.

290. a) 0,9 T, b) $7{,}6.10^{-13}$ J = 4,7 MeV.

291. $\omega_{ce} = 1{,}76.10^{11}$ rad/s, $\omega_{cp} = 9{,}59.10^7$ rad/s, $R_e = 0{,}184$ mm, $R_p = 7{,}91$ mm.

292. Pohybová rovnica častice v cyklotróne je tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$



Obr. R292

alebo v zložkovom tvare

$$m\ddot{x} = qE\cos\omega_c t + q\dot{y}B \qquad m\ddot{y} = -qE\sin\omega_c t - q\dot{x}B \qquad m\ddot{z} = 0$$

V čase t = 0 je $x = y = z = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Z rovnice $m\ddot{z} = 0$ plynie, že $z = \dot{z} = 0$ takže častica sa pohybuje v rovine xy. Deriváciou prvej zložkovej rovnice a dosadením za $\ddot{y}$ z druhej rovnice dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\dddot{x} + \omega_c^2 \dot{x} = -\frac{2qE\omega_c}{m} \sin \omega_c t$$

a podobne deriváciou druhej zložkovej rovnice s dosadením za $\ddot{x}$ z prvej rovnice dostaneme

$$\dddot{y} + \omega_c^2 \dot{y} = -\frac{2qE\omega_c}{m} \cos \omega_c t$$

Riešenia týchto diferenciálnych rovníc pri zadaných začiatočných podmienkach sú

$$x = \frac{qE}{m\omega_c^2}\left(\omega_c t \sin \omega_c t + \cos \omega_c t - 1\right) \qquad y = \frac{qE}{m\omega_c^2}\left(\omega_c t \cos \omega_c t - \sin \omega_c t\right)$$

Pohyb častice opísaný týmito výrazmi je pohybom po špirále podľa *obr. R292*.

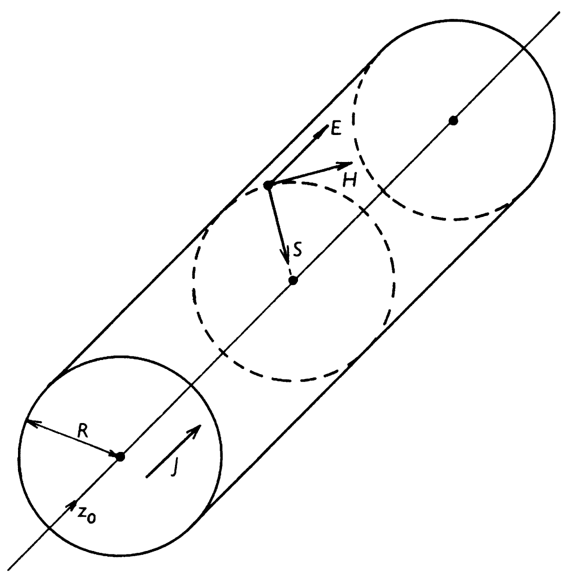
11 Elektromagnetické vlny

297. Vo vodiči tečie prúd s hustotou (*obr. R297*)

$$\boldsymbol{J} = \frac{I}{\pi R^2} \boldsymbol{e}_z$$

kde $\boldsymbol{e}_z$ je jednotkový vektor v smere osi vodiča. Elektrické pole vo vodiči a na jeho povrchu je

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\sigma} = \frac{I}{\pi \sigma R^2} \boldsymbol{e}_z$$



Obr. R297

Intenzita magnetického poľa na povrchu vodiča je

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi R}\boldsymbol{e}_\varphi$$

kde $\boldsymbol{e}_\varphi$ je jednotkový vektor na valci kolmý na os z. Pretože elektrické a magnetické polia sú navzájom kolmé, Poyntingov vektor $\boldsymbol{S}$ smeruje od povrchu vodiča k jeho osi a jeho veľkosť je

$$S = EH = \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma R^3}$$

Výkon vstupujúci do valca na jednotku jeho dĺžky je

$$P' = 2\pi RS = \frac{I^2}{\pi\sigma R^2} = R_0 I^2$$

kde $R_0 = 1/(\pi\sigma R^2)$ je odpor jednotkovej dĺžky valca.

298. Elektrické a magnetické polia v dutine koaxiálneho kábla sú dané výrazmi

$$E = \frac{\mathscr{E}}{r\ln\frac{b}{a}} \qquad H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{\mathscr{E}}{2\pi rR}$$

pričom vektory polí sú na seba kolmé, a to tak, že vektorový súčin $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ smeruje pozdĺž osi kábla od zdroja k záťaži. Poyntingov vektor má veľkosť

$$S = EH = \frac{\mathscr{E}^2}{2\pi r^2 R\ln\frac{b}{a}}$$

a výkon postupujúci pozdĺž osi kábla

$$P = \int_a^b 2\pi rS\mathrm{d}r = \frac{\mathscr{E}^2}{R}$$

299. Podľa výsledkov predchádzajúcej úlohy je veľkosť Poyntingovho vektora v koaxiálnom kábli

$$S = EH = \frac{\mathscr{E}^2}{2\pi r^2 R\ln\frac{b}{a}}$$

a hustota energie elektromagnetického poľa

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2\right) = \frac{\mathscr{E}^2}{2r^2}\frac{4\pi^2\varepsilon_0 R^2 + \mu_0\ln^2\frac{b}{a}}{4\pi^2 R^2\ln^2\frac{b}{a}}$$

takže

$$v_p = \frac{S}{w} = \frac{2R}{R^2\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}} + \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}}$$

Ak uvážime, že kapacita jednotky dĺžky kábla je

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}} \qquad \text{a jeho indukčnosť na jednotku dĺžky je} \qquad L' = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

potom výraz pre v_p možno písať v tvare

$$v_p = \frac{2R}{R^2C' + L'}$$

Ak vezmeme do úvahy tiež, že $L'C' = 1/c^2$, potom

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1+\delta^2}} \qquad \text{kde} \qquad \delta = \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C'}{L'}} - \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L'}{C'}}\right)$$

Z týchto výrazov vidno, že rýchlosť prenosu energie káblom je vždy menšia ako rýchlosť svetla, s výnimkou keď $\delta = 0$, kedy

$$R = Z_v = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

V tom prípade $v_p = c$. Hodnota Z_v je charakteristická veličina pre kábel a nazýva sa vlnová impedancia (vlnový odpor) kábla.

300. a) $v_f = c$
b) Z prvej Maxwellovej rovnice plynie, že

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\boldsymbol{j} = -\frac{\omega}{c}E_x\boldsymbol{j} = -\mathrm{j}\mu_0\omega\boldsymbol{H}$$

kde $\boldsymbol{j}$ je jednotkový vektor v smere osi y. Z rovnice vyplýva, že magnetické pole má iba y-ovú zložku s veľkosťou

$$H = H_y = \frac{E_x}{\mu_0 c} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_x = \frac{1}{Z_0}E_x$$

c) Pre pomer elektrickej a magnetickej zložky vlny z posledného výrazu plynie

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376{,}73\ \Omega = Z_0$$

Veličina Z_0 je jednou z univerzálnych konštánt a nazýva sa charakteristická impedancia vákua.

d) $$\overline{\boldsymbol{S}} = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}_k\} = \frac{E_{x0}^2}{2Z_0}\boldsymbol{k} = \frac{H_{x0}^2 Z_0}{2}\boldsymbol{k}$$

kde H_{y0} je amplitúda magnetického poľa a $\boldsymbol{k}$ je jednotkový vektor v smere osi z.

301. $Z = 376{,}73\ d/w$ [Ω].

302. Fázová rýchlosť vlny $v_f = f\lambda = 2.10^8$ m/s.
Relatívna permitivita prostredia $\varepsilon_r = c^2/v_f^2 = 2{,}25$.
Index lomu prostredia $n = c/v_f = 1{,}5$.
Dĺžka vlny vo vákuu $\lambda_0 = c/f = 7{,}5.10^{-7}$ m.

303. $P = E^2/(2Z_0) \approx 1{,}2.10^{10}$ W/m^2, kde $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ = 376,73 Ω je charakteristická impedancia vákua (približne aj vzduchu).

304. $\mathscr{E}_{ind} = \sqrt{2\overline{P}\mu_0}\left(\varepsilon_0\mu_0\right)^{1/4}\omega S$ = 9,15.10^{-4} V.

305. Intenzita elektrického poľa medzi vodičmi na *obr. 305* v zadaní úlohy smeruje dolu a intenzita magnetického poľa smeruje za rovinu nákresu. Poyntingov vektor smeruje doprava, teda zdroj je vľavo.

306. V rovine impedancie **Z** je koeficient odrazu

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{U}^-}{\boldsymbol{U}^+} = \frac{\boldsymbol{Z}' - \boldsymbol{Z}_1}{\boldsymbol{Z}' + \boldsymbol{Z}_1} = \frac{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}_2 - \boldsymbol{Z}_1) - \boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_1) + \boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2}$$

kde $\boldsymbol{Z}' = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}_2/(\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Z}_2)$. Amplitúda odrazenej vlny

$$\boldsymbol{U}^- = \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{U}^+ = \frac{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}_2 - \boldsymbol{Z}_1) - \boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_1) + \boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2}\boldsymbol{U}^+$$

a amplitúda postupujúcej vlny

$$\boldsymbol{U}^{+'} = (1 + \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{U}^+ = \frac{2\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_1) + \boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2}\boldsymbol{U}^+$$

Amplitúda prúdu v impedancii **Z**

$$\boldsymbol{I}_Z = \frac{\boldsymbol{U}^{+'}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{2\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_1) + \boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2}\boldsymbol{U}^+$$

a v impedancii $\boldsymbol{Z}_2$

$$\boldsymbol{I}_{Z2} = \frac{\boldsymbol{U}^{+'}}{\boldsymbol{Z}_2} = \frac{2\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_1) + \boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2}\boldsymbol{U}^+$$

307. Ak $\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{Z}_2 = \boldsymbol{Z} = R$, potom podľa predchádzajúcej úlohy

$$\boldsymbol{U}^- = -\frac{1}{3}\boldsymbol{U}^+ \qquad\qquad \boldsymbol{U}^{+'} = -\frac{2}{3}\boldsymbol{U}^+$$

a amplitúdy prúdov

$$I_Z = I_{Z2} = \frac{2U^+}{3R}$$

Označme výkon postupujúcej napäťovej vlny ako

$$P^+ = \frac{\left(U^+\right)^2}{2R}$$

Výkon spotrebovaný v impedancii **Z** a výkon postupujúci po vedení s vlnovým odporom $\boldsymbol{Z}_2$ je rovnaký a je daný výrazom

$$P_Z = P_{Z2} = \frac{\left(U^{+'}\right)^2}{2R} = \frac{2\left(U^+\right)^2}{9R} = \frac{4}{9}P^+$$

Výkon odrazenej vlny

$$P^{-} = \frac{\left(U^{-}\right)^2}{2R} = \frac{\left(U^{+}\right)^2}{18R} = \frac{1}{9}P^{+}$$

Teda 4/9-tiny výkonu zdroja vlny U^{+} sa spotrebujú v impedancii $Z = R$, 4/9-tiny výkonu postupujú po vedení s vlnovým odporom $Z_2 = R$ a 1/9-tina výkonu sa odrazí a postupuje späť k zdroju.

308. Ak $\boldsymbol{Z}_1 = R$, $\boldsymbol{Z}_2 = \boldsymbol{Z} = 2R$, potom podľa úlohy 306

$$\boldsymbol{U}^{-} = 0 \qquad\qquad \boldsymbol{U}^{+\prime} = \boldsymbol{U}^{+}$$

Amplitúdy prúdov v $\boldsymbol{Z}_1$ a $\boldsymbol{Z}_2$

$$I_Z = I_{Z2} = \frac{U^{+}}{2R}$$

Výkon sa delí rovnakým dielom do impedancie $\boldsymbol{Z}$ a $\boldsymbol{Z}_2$ s hodnotou

$$P_Z = P_{Z2} = \frac{\left(U^{+}\right)^2}{4R}$$

Odrazený výkon je nulový. Zdroj pracuje do prispôsobenej záťaže.

309. Ak $\boldsymbol{Z} = 0$, potom v rovine skratu

$$\boldsymbol{U}^{-} = -\boldsymbol{U}^{+}$$

a ak $\boldsymbol{Z} = \infty$, potom v rovine otvoreného konca vedenia

$$\boldsymbol{U}^{-} = \boldsymbol{U}^{+}$$

V prvom prípade je v rovine skratu výsledná amplitúda napäťovej stojatej vlny

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{+} + \boldsymbol{U}^{-} = 0$$

V rovine skratu je uzol napäťovej stojatej vlny. V druhom prípade v rovine otvoreného konca vedenia je amplitúda napäťovej stojatej vlny

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{+} + \boldsymbol{U}^{-} = 2\boldsymbol{U}^{+}$$

t. j. v rovine otvoreného konca vedenia je kmitňa stojatej vlny. Stojaté vlny v skratovanom a otvorenom vedení sú posunuté o $\lambda/4$.

310. Pri frekvencii $f = 1\,000$ Hz vlnová impedancia kábla

$$\boldsymbol{Z}_v = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{\mathrm{j}\omega C}} = 461{,}9 - \mathrm{j}141{,}4\ \Omega$$

Konštanta šírenia

$$\boldsymbol{\gamma} = \sqrt{(R + \mathrm{j}\omega L)\mathrm{j}\omega C} = \alpha + j\beta = 7{,}8.10^{-6} + \mathrm{j}2{,}3.10^{-5}\ \mathrm{m}^{-1}$$

z čoho konštanta útlmu je

$$\alpha' = 20\alpha \log \mathrm{e} = 8{,}686\ \alpha = 6{,}77.10^{-5}\ \mathrm{dB/m}$$

fázová rýchlosť

$$v_f = \omega/\beta = 2{,}732.10^{8}\ \mathrm{m/s} \qquad \text{a vlnová dĺžka} \qquad \lambda = 2\pi/\beta = 273\ 182\ \mathrm{m}$$

Straty na vlnovú dĺžku sú

$$\alpha'' = \alpha'\lambda = 18{,}5 \text{ dB}$$

Pri frekvencii f = 100 MHz je $\boldsymbol{Z}_v$ = 377,5 – j0,14 Ω, $\alpha = 8.10^{-4}$ m^{-1} = 6,97.10^{-3} dB/m, β = 2,096 966 rad/m, v_f = 2,996 32.10^8 m/s, λ = 2,996 3 m, α'' = 2,08.10^{-1} dB.

311. a) $Z_v = \dfrac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\dfrac{b}{a} = 73{,}65\ \Omega$ b) $L = Z_v^2 C = 3{,}63.10^{-7}$ H/m.

312. $R_1 = 150\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$.

313. $Z_{v1} = 80\ \Omega$, $Z_{v2} = 120\ \Omega$, $Z_{v3} = 240\ \Omega$.

314. Riešenie úlohy je dané výrazmi (11.70 a,b) pre $z = l$, teda

$\boldsymbol{U}(l) = \boldsymbol{U}_{výst} = \boldsymbol{U}_{vst}\cosh\boldsymbol{\gamma}l - \boldsymbol{Z}_v\boldsymbol{I}_{vst}\sinh\boldsymbol{\gamma}l$ $\boldsymbol{I}(l) = \boldsymbol{I}_{výst} = \boldsymbol{I}_{vst}\cosh\boldsymbol{\gamma}l - (\boldsymbol{U}_{vst}/\boldsymbol{Z}_v)\sinh\boldsymbol{\gamma}l$

Výstupná impedancia

$$\boldsymbol{Z}_{výst} = \frac{\boldsymbol{U}_{výst}}{\boldsymbol{I}_{výst}} = \boldsymbol{Z}_v \frac{\boldsymbol{Z}_{vst} - \boldsymbol{Z}_v \operatorname{tgh}\boldsymbol{\gamma}l}{\boldsymbol{Z}_v - \boldsymbol{Z}_{vst}\operatorname{tgh}\boldsymbol{\gamma}l}$$

kde $\boldsymbol{Z}_{vst} = \boldsymbol{U}_{vst}/\boldsymbol{I}_{vst}$ [pozri tiež odsek 11.6.2 výraz (11.84)].

315. Vedenie je bezstratové, takže konštanta šírenia $\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{j}\beta$, kde $\beta = \omega/c$ je fázová konštanta. Využitím výrazov pre amplitúdy napätia a prúdu získaných v predchádzajúcom príklade dostaneme vzťahy

$\boldsymbol{U}_{výst} = \boldsymbol{U}_{vst}\cos\beta l - \mathrm{j}Z_v\boldsymbol{I}_{vst}\sin\beta l$ $0 = \boldsymbol{I}_{vst}\cos\beta l - \mathrm{j}(\boldsymbol{U}_{vst}/Z_v)\sin\beta l$

Riešením týchto rovníc dostaneme pre výstupné napätie výraz a hodnotu

$$\boldsymbol{U}_{výst} = \frac{\boldsymbol{U}_{vst}}{\cos\beta l} = 64{,}72 \text{ V}$$

316. Riešením telegrafných rovníc s uvážením, že $\boldsymbol{I}_{výst} = 0$ dostaneme pre amplitúdy napätia a prúdu hodnoty

$\boldsymbol{U}_m(l) = \boldsymbol{U}_{výst}\cos\beta l = 401{,}5$ V $\boldsymbol{I}_m(l) = \mathrm{j}(\boldsymbol{U}_{výst}/Z_v)\sin\beta l = \mathrm{j}1{,}486$ A

kde $\beta = 2\pi/\lambda = 0{,}0209$ rad/m.

317. Vedenie je na konci otvorené, teda $\boldsymbol{I}_{výst} = 0$. Amplitúda prúdu vo vzdialenosti z od konca vedenia je

$$\boldsymbol{I}_m(z) = \mathrm{j}\frac{\boldsymbol{U}_{výst}}{Z_v}\sin\beta z$$

kde $\beta = 2\pi/\lambda = 0{,}314$ rad/m. Pre $z = l = 2$ m je $I_m(l) = 0{,}5$ A, teda

$$Z_v = \frac{\boldsymbol{U}_{výst}}{\boldsymbol{I}_m(l)}\sin\beta l = 235\ \ \Omega$$

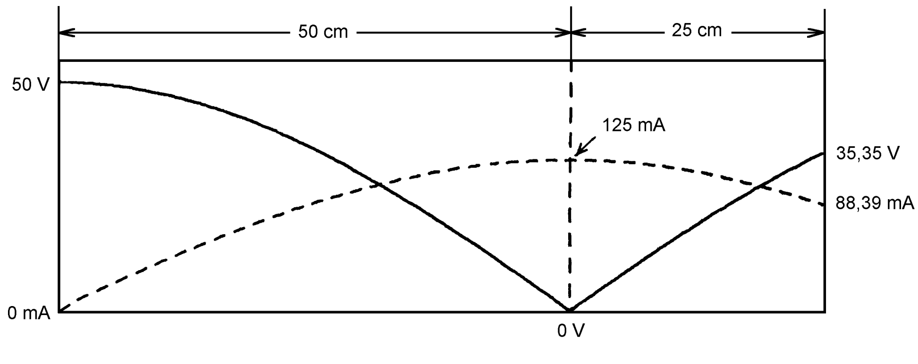
Amplitúda prúdu v maxime prúdovej stojatej vlny je

$$I_{m\,max} = \frac{U_{výst}}{Z_v} = 0{,}85 \text{ A}$$

318. a) Vlnová dĺžka $\lambda = c/f = 2$ m, $\beta l = 2\pi l/\lambda = 0{,}75\pi$ rad. Vstupná impedancia

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = Z_v \frac{\boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st} + \mathrm{j}Z_v \mathrm{tg}\beta l}{Z_v + \mathrm{j}\boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st}\mathrm{tg}\beta l} = \infty$$

b) Napäťová a prúdová stojatá vlna sú znázornené na *obr. R318*.



Obr. R318

c) Na vstupe vedenia je kmitňa napäťovej stojatej vlny a uzol prúdovej stojatej vlny ($\boldsymbol{I}_{vst} = 0$). Amplitúda napätia na výstupe

$$\boldsymbol{U}_{v\acute{y}st} = \boldsymbol{U}_{vst}\cos\beta l = -35{,}35 \text{ V}$$

a amplitúda prúdu na výstupe

$$\boldsymbol{I}_{v\acute{y}st} = -\mathrm{j}(\boldsymbol{U}_{vst}/Z_v)\sin\beta l = -\mathrm{j}88{,}39 \text{ mA}$$

Amplitúda prúdu v maxime prúdovej stojatej vlny

$$\boldsymbol{I}_{max} = -\mathrm{j}\boldsymbol{U}_{vst}/Z_v = -\mathrm{j}125 \text{ mA}$$

319. Vlnová dĺžka na vedení je $\lambda = v_f/f = 1{,}9$ m a počet vlnových dĺžok pozdĺž vedenia $l/\lambda = 1{,}184$. Fázová konštanta $\beta = 2\pi/\lambda = 3{,}307$ rad/m, fázový uhol vstupných veličín $\beta l = 7{,}44$ rad. Vstupná impedancia vedenia

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = Z_v \frac{\boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st} + \mathrm{j}Z_v \mathrm{tg}\beta l}{Z_v + \mathrm{j}\boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st}\mathrm{tg}\beta l} = 26{,}23 - \mathrm{j}35{,}73\,\Omega = 44{,}32\mathrm{e}^{-\mathrm{j}53{,}72°}\,\Omega$$

Koeficient odrazu na výstupe

$$\boldsymbol{\rho}_{v\acute{y}st} = \frac{\boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st} - Z_v}{\boldsymbol{Z}_{v\acute{y}st} + Z_v} = 0{,}459 + \mathrm{j}0{,}237 = 0{,}517\mathrm{e}^{\mathrm{j}27{,}31°}$$

a na vstupe

$$\boldsymbol{\rho}_{vst} = \frac{\boldsymbol{Z}_{vst} - Z_v}{\boldsymbol{Z}_{vst} + Z_v} = -0{,}134 - \mathrm{j}0{,}499 = 0{,}517\mathrm{e}^{-\mathrm{j}105{,}03°}$$

Pomer stojatej vlny (PSV) na vedení

$$r = \frac{1+|\boldsymbol{\rho}|}{1-|\boldsymbol{\rho}|} = 3{,}14$$

Komplexná amplitúda vstupného prúdu

$$\boldsymbol{I}_{vst} = \frac{\boldsymbol{U}_g}{Z_g + \boldsymbol{Z}_{vst}} = 1{,}17 + \mathrm{j}0{,}631\ \mathrm{A} = 1{,}329\mathrm{e}^{\mathrm{j}28{,}34°}\ \mathrm{A}$$

a vstupného napätia

$$\boldsymbol{U}_{vst} = \boldsymbol{I}_{vst}\boldsymbol{Z}_{vst} = 53{,}2 - \mathrm{j}25{,}2\ \mathrm{V} = 58{,}90\mathrm{e}^{-\mathrm{j}25{,}35°}\ \mathrm{V}$$

Komplexná amplitúda výstupného prúdu

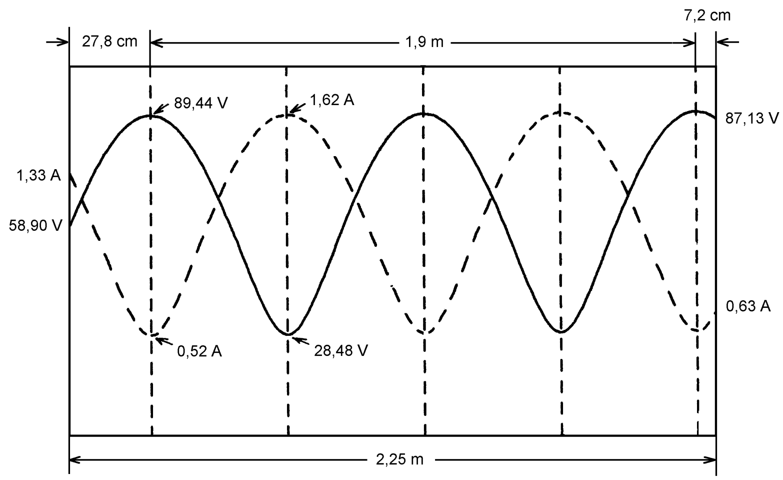
$$\boldsymbol{I}_{výst} = \boldsymbol{I}_{vst}\cos\beta l - \mathrm{j}(\boldsymbol{U}_{vst}/Z_v)\sin\beta l = 0{,}052 - \mathrm{j}0{,}631\ \mathrm{A} = 0{,}635\mathrm{e}^{-\mathrm{j}87{,}29°}\ \mathrm{A}$$

a výstupného napätia

$$\boldsymbol{U}_{výst} = \boldsymbol{U}_{vst}\cos\beta l - \mathrm{j}Z_v\boldsymbol{I}_{vst}\sin\beta l = 53{,}20 - \mathrm{j}69{,}05\ \mathrm{V} = 87{,}13\mathrm{e}^{-\mathrm{j}52{,}39°}\ \mathrm{V} = \boldsymbol{Z}_{výst}\boldsymbol{I}_{výst}$$

Vstupný a výstupný výkon

$$P = P_{vst} = P_{výst} = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{I}_{vst}\right|^2 R_{vst} = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{I}_{výst}\right|^2 R_{výst} = 23{,}16\ \mathrm{W}$$



Obr. R319

V minimách a maximách stojatých vĺn pre prenášaný výkon platí

$$P = \frac{1}{2}U_{max}I_{min} = \frac{1}{2}U_{min}I_{max}$$

Ak uvážime, že

$$\frac{U_{max}}{I_{min}} = rZ_v \qquad \text{a} \qquad \frac{U_{min}}{I_{max}} = \frac{Z_v}{r}$$

potom možno napísať

$$I_{max} = \sqrt{\frac{2P}{Z_v}r} = 1{,}62\ \mathrm{A} \qquad I_{min} = \sqrt{\frac{2P}{rZ_v}} = 0{,}52\ \mathrm{A}$$

$$U_{max} = rZ_vI_{min} = 89{,}44\ \mathrm{V} \qquad U_{min} = \frac{Z_vI_{max}}{r} = 28{,}48\ \mathrm{V}$$

Prvé napäťové maximum (prúdové minimum) sa od konca vedenia nachádza vo vzdialenosti x_0, pre ktorú platí

$$\frac{\boldsymbol{Z}_{výst} + \mathrm{j}Z_v \mathrm{tg}\beta x_0}{Z_v + \mathrm{j}\boldsymbol{Z}_{výst} \mathrm{tg}\beta x_0} = \frac{Z_{max}}{Z_v} = r$$

pretože $Z_{max} = rZ_v$. Riešením tejto rovnice pre x_0 dostaneme

$$x_0 = 7{,}2 \text{ cm}$$

Využitím tejto hodnoty a skutočnosti, že $\lambda = 1{,}9$ m možno graficky znázorniť prúdovú a napäťovú stojatú vlnu pozdĺž vedenia (pozri *obr. R319*).

320. Konštanta šírenia na danom vedení $\gamma = \alpha = \sqrt{RG} = 9{,}11.10^{-3}$ km^{-1} a charakteristický odpor vedenia $Z_v = \sqrt{R/G} = 5\,865\ \Omega$. Útlm celého vedenia $\alpha l = 1{,}09$, kde $l = 120$ km je dĺžka vedenia. Medzi vstupnými a výstupnými veličinami platia vzťahy

$$U_{výst} = U_{vst}\cosh\alpha l - I_{vst}Z_v\sinh\alpha l = 0 \qquad I_{výst} = I_{vst}\cosh\alpha l - (U_{vst}/Z_v)\sinh\alpha l$$

Riešením rovníc pre I_{vst} a $I_{výst}$ dostaneme

$$I_{vst} = \frac{U_{vst}}{Z_v \mathrm{tgh}\alpha l} = 5{,}13 \text{ mA} \qquad I_{výst} = \frac{U_{vst}}{Z_v \sinh\alpha l} = 3{,}10 \text{ mA}$$

Vstupný odpor vedenia

$$Z_{vst} = \frac{U_{vst}}{I_{vst}} = Z_v \mathrm{tgh}\alpha l = 4\,674\ \Omega$$

321. a) Fázová rýchlosť vlny na vedení $v_f = \omega/\beta = 288\,219$ km/s ($\beta = 2{,}18.10^{-2}$ rad/km) a vlnová dĺžka $\lambda = v_f/f = 288{,}219$ km.

b) Vzhľadom na to, že záťaž tvorí impedancia rovná vlnovej impedancii vedenia, platí

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = \boldsymbol{Z}_{výst} = \boldsymbol{Z}_v = 615 - \mathrm{j}78\ \Omega$$

takže amplitúda vstupného prúdu

$$\boldsymbol{I}_{vst} = \frac{\boldsymbol{U}_{vst}}{\boldsymbol{Z}_{vst}} = 8{,}00 + \mathrm{j}1{,}015 \text{ mA} = 8{,}064\mathrm{e}^{\mathrm{j}7{,}228°} \text{ mA}$$

a vstupný výkon

$$P_{vst} = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{I}_{vst}\right|^2 R_{vst} = 20 \text{ W}$$

Amplitúda prúdu na výstupe vedenia

$$\boldsymbol{I}_{výst} = \boldsymbol{I}_{vst}\mathrm{e}^{-\gamma l} = 3{,}878\mathrm{e}^{\mathrm{j}67{,}46°} \text{ mA} = 1{,}487 + \mathrm{j}3{,}582 \text{ mA}$$

a napätie na výstupe vedenia

$$\boldsymbol{U}_{výst} = \boldsymbol{Z}_{výst}\boldsymbol{I}_{výst} = 2{,}404\mathrm{e}^{\mathrm{j}60{,}23°} \text{ V} = 1{,}194 + \mathrm{j}2{,}087 \text{ V}$$

Výstupný výkon

$$P_{výst} = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{I}_{výst}\right|^2 R_{výst} = P_{vst}\mathrm{e}^{-2\alpha l} = 4{,}62 \text{ mW}$$

322. Vlnový odpor vedenia

$$Z_v = 120 \ln \frac{2l - D}{D} = 504\,\Omega$$

Vstupná reaktancia 35-metrového vedenia:

a) na konci skratovaného

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = \mathrm{j} Z_v \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} d = \mathrm{j}1551\ \Omega = \mathrm{j}X_L$$

b) na konci otvoreného

$$\boldsymbol{Z}_{vst} = -\mathrm{j} Z_v \operatorname{cotg} \frac{2\pi}{\lambda} d = -\mathrm{j}163\,\Omega$$

Vstupná reaktancia 16-metrového vedenia

c) na konci skratovaného $\boldsymbol{Z}_{vst} = -\mathrm{j}1071\ \Omega$,

d) na konci otvoreného $\boldsymbol{Z}_{vst} = \mathrm{j}237\ \Omega$.

V prípade a) vedenie predstavuje ekvivalentnú indukčnosť

$$L = \frac{\lambda X_L}{2\pi c} = 41\,\mu\mathrm{H}$$

v prípade b) ekvivalentnú kapacitu

$$C = \frac{\lambda}{2\pi c X_C} = 163\,\mathrm{pF}$$

v prípade c) $C = 25$ pF,

v prípade d) $L = 6{,}3$ μH.

323. Paralelné spojenie bezstratového, na konci skratovaného vedenia so vstupnou susceptanciou $\boldsymbol{Y}_{ved}$ a kondenzátora so susceptanciou $\boldsymbol{Y}_C = \mathrm{j}\omega C$ bude predstavovať paralelný rezonančný obvod (rezonátor), ak:

a) vstupná susceptancia vedenia $\boldsymbol{Y}_{ved}$ bude mať induktívny charakter, teda

$$\boldsymbol{Y}_{ved} = -\mathrm{j} \frac{1}{Z_v} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{c} l$$

b) celková výsledná susceptancia bude nulová, teda

$$Y_C + Y_{ved} = 0$$

Musí teda platiť

$$\mathrm{j}\omega C - \mathrm{j} \frac{1}{Z_v} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{c} l = 0$$

z čoho hľadaná dĺžka vedenia je

$$l = \frac{c}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega C Z_v} = 55{,}2\ \ \mathrm{cm}$$

324. V LC-obvode hodnota kapacity kondenzátora je $C = 1/(\omega_0^2 L) = 50$ pF. Fázová konštanta kábla pri frekvencii ω je daná výrazom

$$\beta = \frac{\omega}{v_f} = \omega \sqrt{L_v C_v} = \omega Z_v C_v$$

Vstupná susceptancia kábla (na druhom konci otvoreného) je

$$\boldsymbol{Y}_{vst} = \mathrm{j}\frac{\mathrm{tg}\,\beta d}{Z_v} = \mathrm{j}\frac{\mathrm{tg}(\omega Z_v C_v d)}{Z_v}$$

Po pripojení kábla k rezonančnému obvodu bude mať celý systém novú rezonančnú frekvenciu ω_0', ktorú možno získať z podmienky nulovej výslednej susceptancie systému

$$\mathrm{j}\frac{\mathrm{tg}(\omega_0' Z_v C_v d)}{Z_v} + \mathrm{j}\omega_0' C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0' L} = 0 \qquad \text{alebo} \qquad \frac{\mathrm{tg}(\omega_0' Z_v C_v d)}{Z_v} + \omega_0' C - \frac{1}{\omega_0' L} = 0$$

Posledná rovnica pre ω_0' je transcendentná a možno ju riešiť graficky. Ak uvážime, že v danom prípade možno očakávať $\omega_0' Z_v C_v d \ll 1$, potom približne platí $\mathrm{tg}(\omega_0' Z_v C_v d) \approx \omega_0' Z_v C_v d$, a teda rovnicu možno prepísať do tvaru

$$\omega_0' C_v d + \omega_0' C - \frac{1}{\omega_0' L} = 0$$

z čoho

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L(C + C_v d)}} = 8{,}129.10^6 \text{ rad / s} \qquad \text{alebo} \qquad f_0' = \frac{\omega_0'}{2\pi} = 1{,}294 \text{ MHz}$$

325. Označme $Z_{vst} = 70\ \Omega$ impedanciu dipólu, $Z_{výst} = 300\ \Omega$ vlnovú impedanciu zvodu. Vlnová impedancia štvrťvlnového vedenia

$$Z_v = \sqrt{Z_{vst} Z_{výst}} = 145\,\Omega \qquad \text{a jeho dĺžka} \qquad d = \frac{\lambda}{4} = 1{,}21 \text{ m}$$

326. a) $Z_1 = Z_v$, $Z_2 = \infty$, $Z_3 = Z_v$. Celý výkon postupuje do záťaže Z_R'.

b) $Z_1 = \infty$, $Z_2 = Z_v$, $Z_3 = Z_v$. Celý výkon postupuje do záťaže Z_R''.

c) Ak sú obidva spínače zapnuté, potom $Z_1 = Z_v$, $Z_2 = Z_v$, $Z_3 = Z_v/2$.

Koeficient odrazu v rovine AA' je $\boldsymbol{\rho} = -1/3$, 1/9-ina výkonu sa v danej rovine odráža späť ku zdroju a do každej jednotlivej záťaže postupujú 4/9-iny výkonu.

Ak sú obidva spínače rozopnuté, potom $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \infty$. Výkon do záťaží nepostupuje, medzi rovinami spínačov je napäťová stojatá vlna s uzlami v rovinách spínačov.

Register

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

R

S

Š

T

U

V

W

Y

Z