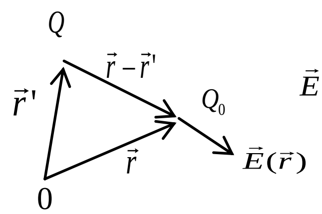
Otázka č.1

Definujte intenzitu a potenciál v elektrostatickom poli, odvodte vzťahy medzi nimi.

E (r) – funkcia sily pôsobiacej na jednotkový náboj v priestore.

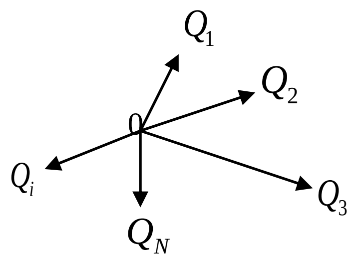
$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \dfrac{\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})}{Q_0}$ $\quad \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$ - intenzita elektrického poľa
- sila pôsobiaca v priestore na jednotkový kladný náboj



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q_0} = \frac{1}{Q_0}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q.Q_0}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}.(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}.(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}.(\vec{r}-\vec{r}')$$

Intenzita v okolí bodového náboja



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{Q_0} = \frac{1}{Q_0}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i0} = \frac{1}{Q_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i.Q_0}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)$$

Elektrický potenciál pre nabité teleso. $dQ(\vec{r}') = \varsigma(\vec{r})dV$

objemová hustota elektrického náboja

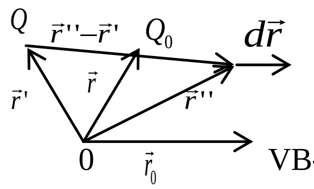
$$\varsigma(\vec{r}) = \frac{dQ(\vec{r})}{dV'} \quad \left[\frac{As}{m^3}\right] \qquad Q = \int \varsigma(\vec{r})dV'$$

celkový náboj telesa

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varsigma(\vec{r}')dV'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\varsigma(\vec{r}')dV'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

Pre elektrický potenciál platí: $\quad E_{pol}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0}\vec{F}(\vec{r}'').d\vec{r} + E_p(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} Q_0\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}'' + E_p(\vec{r}_0) =$



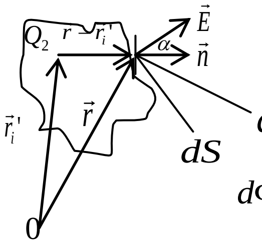
$$= Q_0\int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0}\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r}''-\vec{r}'\right|^3}(\vec{r}''-\vec{r}').d\vec{r}'' =$$

VB-vzťažný bod

$(\vec{r}''-\vec{r}') = \vec{R}$

Otázka č.2

Odvodte Gaussovu vetu v elektrostatickom poli.



elementárna ploška

$$dS.\cos(\alpha) = dS_n$$

$$d\Phi_{\vec{E}_i} = \vec{E}.\vec{n}.dS = \frac{Q_i(\vec{r}-\vec{r}_i')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i'|^3}.\vec{n}.dS = \frac{Q_i(\vec{r}-\vec{r}_i')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i'|^3}.\cos(\alpha).dS =$$

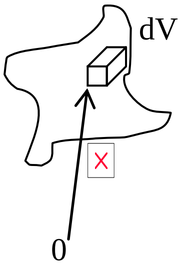
$$= \frac{Q_i dS_n}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'_i|^2} \qquad d\Phi_{\vec{E}_i} = \frac{Q_i|\vec{r}-\vec{r}_i|^2 d\Omega}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|^2} = \frac{Q_i d\Omega}{4\pi\varepsilon_0}$$

plocha S je uzavretá

$$\Phi_{\vec{E}_i} = \oint_S d\Phi_{\vec{E}_i} = \oint_S \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}.d\Omega = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{celý-priestor.uhol} d\Omega = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}.4\pi = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

z toho vyplýva , že pre Gaussovu vetu elektrostatiky (v integrálnom tvare) platí :

Tok intenzity elektrostatického poľa **E** uzavretou plochou S sa rovná podielu celkového náboja Q a permitivity vákua ε_0 .



$$dQ = \varsigma dV \qquad dQ(\vec{r}) = \varsigma(\vec{r})dV$$

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\int_V \varsigma dV}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \varsigma dV$$

Gaussova veta elekt. v integrálnom tvare

z Gaussovej vety Matematickej analýzy vyplýva : $\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \int_V div\vec{E}.dV$

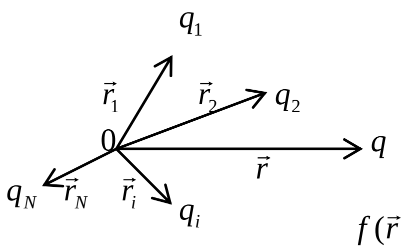
$$\int_V div\vec{E}.dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \varsigma.dV \Rightarrow div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varsigma$$

$$div\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\varsigma(\vec{r})$$

Gaussova veta elektrostatiky v diferenciálnom tvare.

Otázka č.3

Odvoďte vzorce pre potenciál a intenzitu v okolí elektrického dipólu.



$$f(\vec{r}) \equiv \frac{1}{|\vec{r}|} \qquad d\vec{r} = -\vec{r}_i \qquad \text{i= 1,2,3,…..,,N}$$

$$f(\vec{r} + d\vec{r}) = f(\vec{r}) + (gradf(\vec{r})).d\vec{r}...$$

$$f(\vec{r} + d\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = f(\vec{r}).d\vec{r}.\nabla f = \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}_i.\nabla \frac{1}{|\vec{r}|} =$$

$$= \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}_i.\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r}_i.\vec{r}}{r^3}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \left[\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}_i.\vec{r}}{r^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{r} . \sum_{i=1}^{N} q_i.\vec{r}_i.\frac{\vec{r}}{r^3} =$$

$$= \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r}}_{\varphi^{(0)}(\vec{r})} + \underbrace{\frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0}}_{\varphi^{(1)}(\vec{r})}$$

v nultom priblížení v prvom priblížení

Def: Dipólový moment $\vec{p}$ systému elektrických nábojov je $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r}_i$

V prípade, že $\sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r}_i = 0$ potom dipólový moment nezávisí od voľby počiatku.

Ak $\sum_{i=1}^{N} q_i = 0$ navonok je systém neutrálny

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi^{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}$$

Pre intenzitu platí :

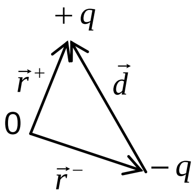
$$\vec{E}(\vec{r}) = -grad\varphi^{(1)}(\vec{r}) = -grad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3} =$$

$$= -grad(f.g) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}.\vec{r}).\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right]$$

Otázka č.4

Odvoďte vzťahy pre silu, moment sily a polohovú energiu el. dipólu vo vonkajšom elektrickom poli.

Pre výpočet potenciálnej energie



$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{2} q_i r_i = q\vec{r}^{\,+} + (-q)\vec{r}^{\,-} = q(\vec{r}^{\,+} - \vec{r}^{\,-}) = q\vec{d}$$

pre výpočet potenciálnej energie dipólu vo vonkajšom poli

$$E_{pot}(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r}^{\,+}) + (-q)\varphi(\vec{r}^{\,-}) = q[\varphi(\vec{r}^{\,+}) - \varphi(\vec{r}^{\,-})] =$$

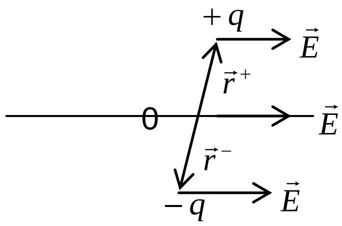
$$= q(\vec{r}^{\,+} - \vec{r}^{\,-}).\nabla\varphi(\vec{r}\ \ ) = q\vec{d}\nabla\varphi(\vec{r}) = -\vec{p}.\vec{E}_0$$

vonkajšieho poľa

Pre silu vonkajšieho poľa pôsobiaca na dipól v poli $\vec{E}_0$

$$\vec{F} = -grad(\vec{r}).E_p(\vec{r}) = -\nabla E_p(\vec{r}) = -\nabla.(-\vec{p}.\vec{E}_0(\vec{r})) = (\vec{p}.\nabla).\vec{E}_0$$

Pre moment síl pôsobiacich na dipól

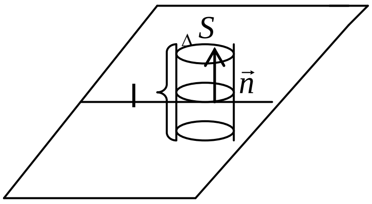


$$\vec{D} = \vec{r}^{\,+}x(\vec{F} + d\vec{F}) + \vec{r}^{\,-}x\vec{F} = \vec{r}^{\,+}x\vec{F} + \vec{r}^{\,+}xd\vec{F} + \vec{r}^{\,-}x\vec{F} =$$

$$= \vec{r}^{\,+}xq\vec{E} + \vec{r}^{\,-}x(-q)\vec{E} = q(\vec{r}^{\,+} - \vec{r}^{\,-})x\vec{E} = q\vec{d}x\vec{E} = \vec{p}x\vec{E}$$

Otázka č. 5

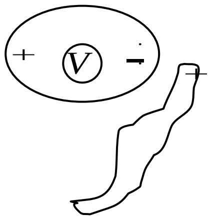
Odvodte vzťah pre intenzitu elektrického poľa tesne nad povrchom vodiča nabitého plošnou hustotou náboja σ . Zdvôvodnite, prečo v objeme vodiča, vrátane dutiny, je v ustálenom stave E=0.



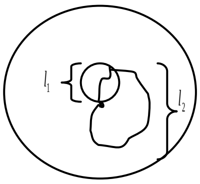
$$\oint_{Svalčva} \vec{E}.d\vec{S} = \vec{E}_2.\vec{n}._\Delta S + \vec{E}_1.(-\vec{n}).\Delta S = \frac{\sigma_\Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = E.\vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\vec{n} \Rightarrow E = \frac{\sigma_\Delta S}{\varepsilon_0}$$

je to Coulombova veta



Keďže v kove sú pohyblivé náboje a navonok je neutrálna vyplýva z toho, že $\sigma = 0$
Potom aj intenzita tohoto poľa z nulová.



$$0 = \oint_{l_1+l_2} \vec{E}.d\vec{r} = \int_{l_1} \vec{E}.d\vec{r} + \underbrace{\int_{l_2} \vec{E}_{vkove}.d\vec{r}}_{0} > 0$$

0>0 – spor

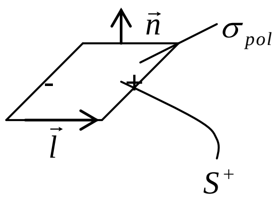
z toho vyplýva, že intenzita v dutine musí byť tiež nulová

Otázka č.6

Zaveďte vektor elektrickej polarizácie a vektor elektrickej indukcie, odvoďte vzťah medzi vektormi E,D,P.

Definujeme vektor polarizácie :

Na kvantitatívny popis polarizácie dielektrika **P**, ktorý je definovaný jako dipólový moment objemovej jednotky dielektrika vznikajúcej při jeho polarizácie.



$$\vec{P} = \frac{\sigma_{pol}.S.\vec{l}}{V} = \frac{\sigma_{pol}.S.\vec{l}}{S.\vec{l}.\vec{n}}$$

$$\vec{P}.\vec{n} = \frac{\sigma_{pol}.S.\vec{l}.\vec{n}}{S.\vec{l}.\vec{n}} = \sigma_{pol}$$

$$q_{pol} = \oint_S \vec{P}.(-\vec{n}).dS = -\oint_S \vec{P}.d\vec{S}$$

Definujeme vektor elektrickej indukcie **D**

$$\oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q + q_{pol})$$

$$\oint (\vec{E}\varepsilon_0 + \vec{P}).d\vec{S} = q$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0.\vec{E} + \vec{P}$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{D}.d\vec{S} = q$$

Gaussova veta pre elektrické pole s dielektrikami

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

Materiálový vzťah pre polarizáciu

$\chi -$ Elektrická susceptibilita

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

$1 + \chi = \varepsilon_r -$ Relatívna permitivita

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ $\qquad$ $\varepsilon -$ permitivita

$$\vec{D} = \varepsilon.\vec{E}$$

7. Odvoďte Maxwellovu rovnicu pre vektor D

D (vektor el. indukce) je definovaný nasledovne : ***D***=ε_0***E*** + ***P***

$$\oint_S \vec{D}.d\vec{S} = q$$

P … vektor el.polarizácie
E … intenzita el. poľa
ε_0 … permitivita vákua
q … len voľné náboje

Platí:

$$\int_V divDdV = \oint D.dS = q = \int_V \rho \quad dV$$

(Gaussova veta mat.analýzy)

ρ … objemová hustota voľného el.náboja

$$\int_V divDdV = \int_V \rho \quad dV$$

Z toho vyplýva:
div***D*** = ρ

D=***D***(***r***,t)
pre stacionárne pole teda platí $\dfrac{\partial D}{\partial t}$=0

8. Odvoďte vzorce pre energiu nabitého telesa a energiu nabitého kondenzátora

$$W_{el}= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1q_2}{|r_1-r_2|}+\frac{q_1q_3}{|r_1-r_3|}+\frac{q_2q_3}{|r_2-r_3|}+....+\frac{q_1q_n}{|r_1-r_n|}+\frac{q_2q_n}{|r_2-r_n|}+....+\frac{q_{n-1}q_n}{|r_{n-1}-r_n|}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{|r_i-r_j|} = \frac{1}{2}\sum q_i \sum \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0|r_i-r_j|} = \frac{1}{2}\sum q_i\varphi(r_i)$$

$$W_{el}=\frac{1}{2}\int_V \varphi(r)\,\rho(r)\,dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma(r)\,\varphi(r)\,dS$$

($\rho dV=dq$, $\sigma dS=d\sigma$)

pre $\sigma=0$

W_{el} =

$$\frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\,dV = \frac{1}{2}\int (divD)\,\varphi\,dV = \frac{1}{2}\int_V \left[div\,\varphi D - D.grad\varphi\right]dV = \frac{1}{2}\left[\oint_S \varphi\,D.dS + \int_V\right.$$

$$= \frac{1}{2}\int_V D.E dV = \int_V w_{el} dV$$

cez nekonečne veľkú plochu φ D.dS $\rightarrow$ 0

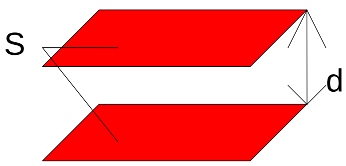
$w_{el}=\frac{1}{2}E.D$ w_{el} ………hustota energie el.poľa

$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$

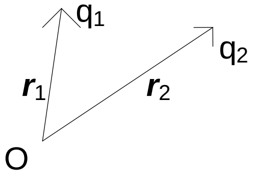
$w_{el}=\frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E}^2$

Energia elektrostat.poľa nabitého kondenzátora:

$$W_{el}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}.\boldsymbol{D}V=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\varepsilon\boldsymbol{E}Sd=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}E^2d^2=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}QU$$



9. Odvoďte vzorec pre hustotu energie elektrického poľa



Energia elektrostatického poľa:

$$W_{el}= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1q_2}{|r_1-r_2|}+\frac{q_1q_3}{|r_1-r_3|}+\frac{q_2q_3}{|r_2-r_3|}+....+\frac{q_1q_n}{|r_1-r_n|}+\frac{q_2q_n}{|r_2-r_n|}+....+\frac{q_{n-1}q_n}{|r_{n-1}-r_n|}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{|r_i-r_j|}=\frac{1}{2}\sum q_i\sum\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0|r_i-r_j|}=\frac{1}{2}\sum q_i\varphi(r_i)$$

$\frac{1}{2}$ je tu preto, aby sa nezrátal účinok i-teho k j-temu aj j-teho k i-temu

$$W_{el}=\frac{1}{2}\int_V\varphi\quad(r)\quad\rho\quad(r)\quad dV+\frac{1}{2}\int_S\sigma\quad(r)\quad\varphi\quad(r)\quad dS$$

($\rho dV=dq$, $\sigma dS=d\sigma$)

pre $\sigma=0$

W_{el} =

$$\frac{1}{2}\int_V\rho\varphi\quad dV=\frac{1}{2}\int(divD)\,\varphi\quad dV=\frac{1}{2}\int_V\left[div\,\varphi\quad D-D.grad\varphi\right]dV=\frac{1}{2}\left[\oint_S\varphi\quad D.dS+\int_V\right.$$

$$=\frac{1}{2}\int_V D.EdV=\int_V w_{el}dV$$

cez nekonečne veľkú plochu φ D.dS $\to$ 0

$w_{el}=\frac{1}{2}E.D$ $\qquad$ w_{el} ....hustota energie el.poľa

D=ε***E***

$w_{el}=\frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2$

10. Definujte el.prúd, vektor prúdovej hustoty, a odvoďte rovnicu kontinuity. Ukážte, že v stacionárnom prípade predstavuje I. Kirchhoffov zákon

Vektor prúdovej hustoty ***j***
a..rozne typy nosičov náboja

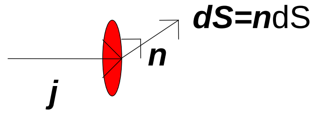
j$=\sum_a q_a n_a v_a$

q_a…..náboj nosiča
n_a…..koncentrácia typov
$\boldsymbol{v}_a$…..stredná rýchlosť pri pohybe v danom médiu (driftová rýchlosť)

$q_a n_a = \rho_a$

j$=\sum_a \rho_a v_a$
j……množstvo kladného náboja ktorý pretečie za jednotku času jednotkovou plochou ktorá je kolmá na $\boldsymbol{v}_a$

Elementárny el.prúd dI



dI=***j.dS***
dI …množstvo náboja ktorý pretečie za jednotku času cez orientovanú plošku

$I=\int_S j.dS$
I…..elektrický prúd cez orientovanú plochu

Rovnica kontinuity

j=j(***r***,t)

$I=\int_S j.dS$
množstvo náboja kt.vytečie von z plochy je celkový náboj vo vnútri za jednotku času =>koľko vtečie toľko vytečie

$I=-\frac{dQ}{dt}$ $\qquad\qquad$ $Q(t)=\int_V \rho \quad (r,t) \quad dV$

11. Na základe klasických predstáv odvoďte Ohmov zákon v diferenciálnom tvare

Ohmov zákon v integrálnom tvare:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$$

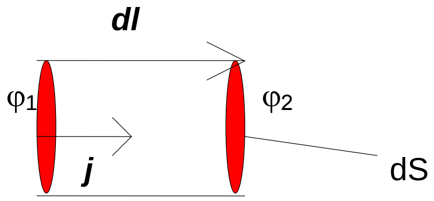
T=const.

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S} \quad , \qquad \sigma>0$$

σ…..špecifická vodivosť

ρ…..špecifický odpor, $\rho = \frac{1}{\sigma}$

Ohmov zákon v diferenciálnom tvare:



infinitizimálny valček (fyzikálne veľmi malý)

$$dI = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = -\frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{R} = \frac{-d\varphi}{\frac{1}{\sigma}\frac{dl}{dS}} = \sigma \frac{dS}{dl}(-d\varphi)$$

j || ***dl***

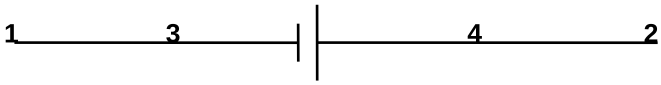
$$j = \frac{dI}{dS} = \sigma \left(\frac{-d\varphi}{dl}\right) = \sigma \quad (-grad\, \varphi) = \sigma \quad E$$

j=σ ***E*** ….. Ohmov zákon v diferenciálnom tvare (platí pre homogénne dielektriká)

12. Definujte elektromotorické napatie a ukážte, že v elektrickom obvode prácu konajú iné ako elektrostatické sily

$\boldsymbol{j} = \sigma\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*)$

$\boldsymbol{E}^*$…..intenzita vnútenej sily (sily neelektrického povodu)



$$\int_1^2 (E + E^*).dl = \int_1^2 \frac{1}{\sigma}\, j.dl = \int_1^2 E.dl + \int_1^2 E^*.dl = \int_1^2 \frac{1}{\sigma}\frac{I}{S}\, dl$$

$\boldsymbol{j} \uparrow\uparrow \boldsymbol{dl}$

$$\int_1^2 E.dl = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\int_1^2 E^*.dl = \int_3^4 E^*.dl = \varepsilon_{12}$$

ε_{12}………..elektromotorické napatie medzi bodom 3 a 4

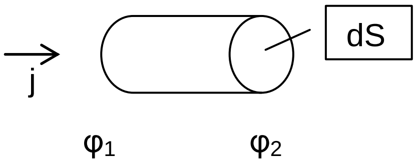
Ukážte ako súvisí 2. Kirchhoffov zákon s Ohmovým zákonom v diferenciálnom tvare.

Ohmov zákon v diferenciálnom tvare:

σ špecifická vodivosť, materiálová konštanta

$\sigma = \frac{1}{\rho} \qquad \sigma > 0$

Infinitizimálne malý valček



$$dI = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{-(\varphi_2 - \varphi_1)}{R} = \frac{-d\varphi}{\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\ell}{dS}} = \sigma \frac{dS}{d\ell} \cdot (-d\varphi)$$

$$j = \frac{dI}{dS} = \sigma\left(-\frac{d\varphi}{d\ell}\right) = -\sigma \cdot grad\varphi = \sigma E$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

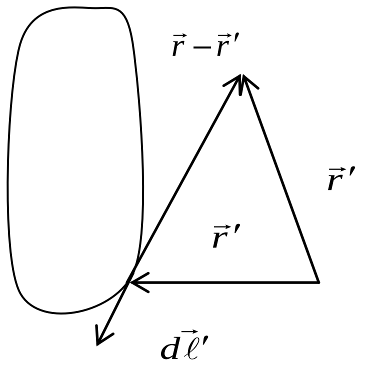
2 Kirchhoffov zákon

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \xi_{12} = R_{12} I_{12}$$
$$\varphi_2 - \varphi_3 + \xi_{23} = R_{23} I_{23}$$
$$\varphi_3 - \varphi_1 + \xi_{13} = R_{31} I_{31}$$
$$\xi_{12} + \xi_{23} + \xi_{31} = R_{12} I_{12} + R_{23} I_{23} + R_{31} I_{31}$$

V uzavretej slučke vodičov aj nehomogénnych je súčet elektromotorických napätí rovný súčinu prúdov a odporov (celkových) jej jednotlivých častí (vetiev).

Zavedte indukciu magnetického pola a vyjadrite silu pôsobiacu na prúdový element

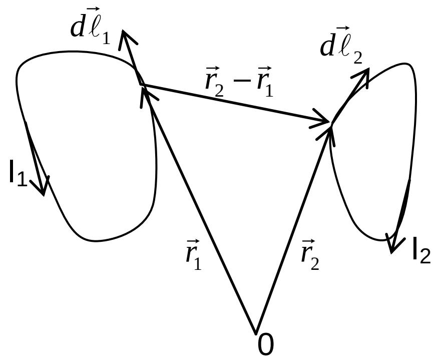
Biotov – Savartov zákon



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\nu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{\ell}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Permeabilita vákua

$$\nu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{Henry}{m}$$



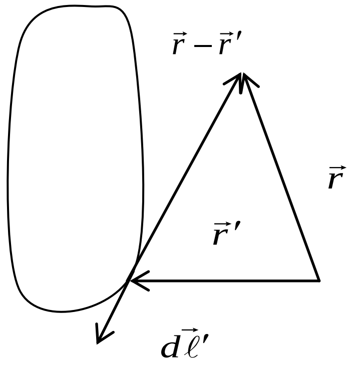
$$\vec{F}_2 = \frac{\nu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{\ell_1} \oint_{\ell_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \times \left[d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2-\vec{r}_1)\right]}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} = \oint_{\ell_2} I_2 d\vec{\ell}_2 \times \left\{ \frac{\nu_0}{4\pi} \oint_{\ell_1} \frac{I_1 d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} \right\} = \oint_{\ell_2} I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}(\vec{r}_2)$$

Vektor magnetickej indukcie $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}_2)$

Magnetické pole vyjadruje sily pôsobiace na prúdové vlnenie.

Vyjadrite Biotov – Savartov zákon, zavedte vektorový potenciál, odvodte Maxwellovú rovnicu pre vektor $\vec{B}$

Biotov – Savartov zákon



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\nu_0}{4\pi}\oint \frac{Id\vec{\ell}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

Permeabilita vákua

$$\nu_0 = 4\pi 10^{-7}\,\frac{Henry}{m}$$

Vektorový potenciál:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\nu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dV'$$

Ovodenie pre Maxwelovú rovnicu pre vektor $\vec{B}$:

1. $\vec{j}' = \vec{j}(\vec{r}')$
2. $\dfrac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} = -\nabla\dfrac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$
3. $\nabla \equiv \nabla_{\vec{r}}\,;\nabla' \equiv \nabla_{\vec{r}'}$
4. $dV' = dx'dy'dz'$
5. $\nabla\vec{r}$ je vektor
6. $\nabla\times\varphi\vec{a} = \nabla\varphi\times\vec{a} - \varphi\nabla\times\vec{a}$

$$\vec{a}\times\nabla\varphi = \varphi\nabla\times\vec{a} - \nabla\times\varphi\vec{a}$$

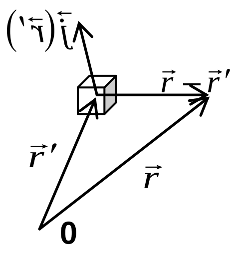
$$\vec{a}\times\vec{j}(\vec{r}') = const \qquad \varphi = -\frac{1}{(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$\vec{j}(\vec{r}')\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} = \vec{j}(\vec{r}')\times\nabla\left(\frac{-1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\right) = \left[\frac{-1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\nabla\times\vec{j}(\vec{r}') - \nabla\times\frac{-\vec{j}(\vec{r}')}{(\vec{r}-\vec{r}')}\right]$$

$$\vec{B} = \frac{\nu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dV' = \frac{\nu_0}{4\pi}\int_V \nabla\times\frac{-\vec{j}(\vec{r}')}{(\vec{r}-\vec{r}')}dV' = \nabla\times\frac{\nu_0}{4\pi}\int_V\frac{-\vec{j}(\vec{r}')}{(\vec{r}-\vec{r}')}dV' = \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

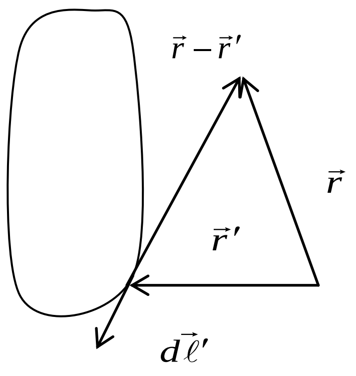
$$\boldsymbol{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}(\vec{r}) = rot\vec{A}(\vec{r})}$$

$div\vec{B} = div\left(rot\vec{A}(\vec{r})\right) = 0 \Rightarrow div\vec{B} = 0 \Rightarrow$ Magnetická indukcia nemá začiatok ani koniec.



Vyjadrite Biotov – Savartov zákon, zavedte vektorový potenciál, odvodte Maxwellovú rovnicu pre vektor $\vec{B}$

Biotov – Savartov zákon



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\nu_0}{4\pi}\oint \frac{I d\vec{\ell}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Permeabilita vákua

$$\nu_0 = 4\pi 10^{-7}\,\frac{Henry}{m}$$

Vektorový potenciál:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\nu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

Ovodenie pre Maxwelovú rovnicu pre vektor $\vec{B}$:

1. $\vec{j}' = \vec{j}(\vec{r}')$
2. $\dfrac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\nabla \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$
3. $\nabla \equiv \nabla_{\vec{r}}\,;\nabla' \equiv \nabla_{\vec{r}'}$
4. $dV' = dx'dy'dz'$
5. $\nabla\vec{r}$ je vektor
6. $\nabla \times \varphi\vec{a} = \nabla\varphi \times \vec{a} - \varphi\nabla \times \vec{a}$

$$\vec{a} \times \nabla\varphi = \varphi\nabla \times \vec{a} - \nabla \times \varphi\vec{a}$$

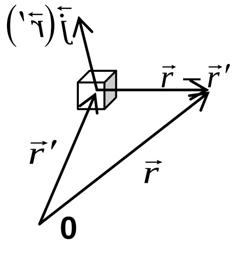
$$\vec{a} \times \vec{j}(\vec{r}') = const \qquad \varphi = -\frac{1}{(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$\vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \vec{j}(\vec{r}') \times \nabla\left(\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = \left[\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla \times \vec{j}(\vec{r}') - \nabla \times \frac{-\vec{j}(\vec{r}')}{(\vec{r}-\vec{r}')}\right]$$

$$\vec{B} = \frac{\nu_0}{4\pi}\int_V \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' = \frac{\nu_0}{4\pi}\int_V \nabla \times \frac{-\vec{j}(\vec{r}')}{(\vec{r}-\vec{r}')}dV' = \nabla \times \frac{\nu_0}{4\pi}\int_V \frac{-\vec{j}(\vec{r}')}{(\vec{r}-\vec{r}')}dV' = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

$$\boldsymbol{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = rot\vec{A}(\vec{r})}$$

$div\vec{B} = div(rot\vec{A}(\vec{r})) = 0 \Rightarrow div\vec{B} = 0 \Rightarrow$ Magnetická indukcia nemá začiatok ani koniec.



Ukážte ako možno dospieť k vzorcu pre cirkuláciu vektora $\vec{B}$

1) $div\vec{j} = 0$
2) $div\vec{j} \neq 0$ len v ohraničenej oblasti priestoru

a) $\nabla \dfrac{\vec{j}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \vec{j}' \cdot \nabla' \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underbrace{\nabla' \cdot \vec{j}'}_{0}$

b)

$$div\vec{A} = \nabla \cdot \frac{\nu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = \frac{\nu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{j}'(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = \frac{\nu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}'(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = -\frac{\nu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{}{|\vec{r}}$$

$$= \frac{\nu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = \frac{\nu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{S}$$

Gausová veta

$$rot\vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \cdot \vec{A} = grad(div\vec{A}) = \Delta\vec{A}$$

$$-\Delta\vec{A} = -\Delta \frac{\nu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = -\Delta \frac{\nu_0}{4\pi} \int_V \frac{\sum_{K=1}^{3} \vec{\ell}_K \vec{j}_k(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = \sum_{K=1}^{3} \vec{\ell}_K \Delta \frac{\nu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = \sum_{K=1}^{3} \ell_K (-\nu_0$$

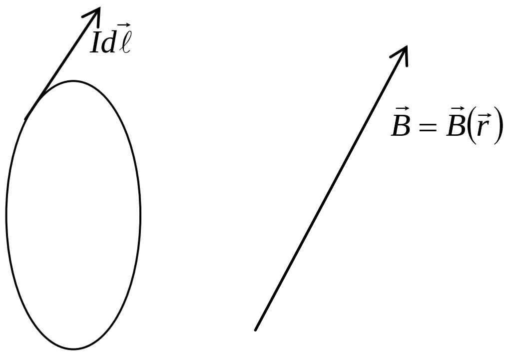
$$= \nu_0 j$$

$$\Delta\vec{A} = -\nu_0 j_K$$

$$rot\vec{B} = \nu_0 \vec{j}$$

Odvodte vzorec pre moment sily pôsobiaci na prúdovú slučku v homogénnom magnetickom poli

Sila ktorou pôsobí magnetické pole na prúdový závit:



$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$

$\vec{F} = I\oint_{\ell} d\vec{\ell} \times \vec{B}$ $\quad /\vec{a}$ konštantný vektor

$\vec{a} \cdot \vec{F} = I\vec{a} \cdot \oint_{\ell} d\vec{\ell} \times \vec{B} = I\oint_{\ell} \vec{a} \cdot \left(d\vec{\ell} \times \vec{B}\right) = I\oint_{\ell} d\vec{\ell}\left(\vec{B} \times \vec{a}\right) =$ Stokesová veta=

$= I\int d\vec{S}\left[\nabla \times \left(\vec{B} \times \vec{a}\right)\right] = I\int d\vec{S}\left[\left(\vec{a} \cdot \nabla\right) \cdot \vec{B} - \underbrace{\vec{a} \cdot \left(\nabla \cdot \vec{B}\right)}_{div\vec{B}=0}\right] = I\int \left[\left(\vec{a} \cdot \nabla\right) \cdot \vec{B}\right] d\vec{S} = \vec{a}\int I\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) d\vec{S}$

$\vec{F} = \int I\left(\nabla \vec{B}\right) d\vec{S} = \iint I.grad\vec{B}d\vec{S}$

$\vec{F} = \iint I.grad\vec{B}d\vec{S}$

$\vec{F} = I\oint_{\ell} d\vec{\ell} \times \vec{B}$

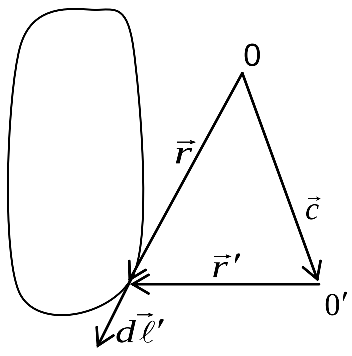
a) $\vec{B} = konst \quad \vec{F} = 0$

b)

$grad.\vec{B} = const$

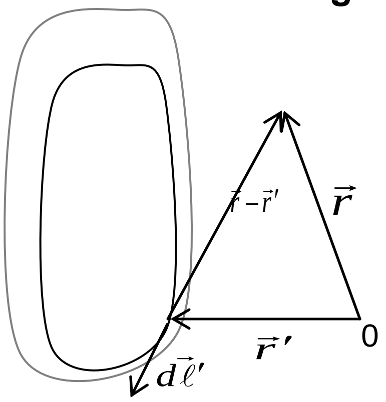
$\vec{F} = \left(grad\vec{B}\right) \cdot \int Id\vec{S}$

Moment síl pôsobiaci na rovinnú slučku:



$\vec{D} = \oint_{\ell} \vec{r} \times d\vec{F} = \oint_{\ell} \left(\vec{c} + \vec{r}\,'\right) \times d\vec{F} = \vec{c}\underbrace{\oint_{\ell} d\vec{F}}_{0} + \oint_{\ell} \vec{r}\,' \times d\vec{F} = \vec{D}'$

Vypočítajte indukciu magnetického poľa $\vec{B}$ vo vzdialenom okolí magnetického dipolu



$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \left(\frac{1}{\vec{r}}\right) - \left(\vec{r}'\cdot\nabla\frac{1}{\vec{r}}\right) \qquad |\vec{r}| >> |\vec{r}'|$$

Vektorový potenciál: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\nu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$

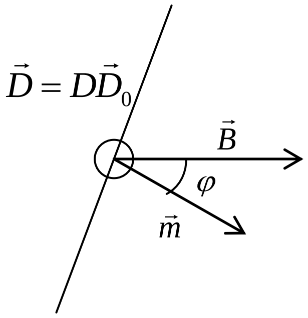
$$\vec{B} = rot\vec{A} = \nabla\times\frac{\nu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{\vec{r}^3}\right]$$

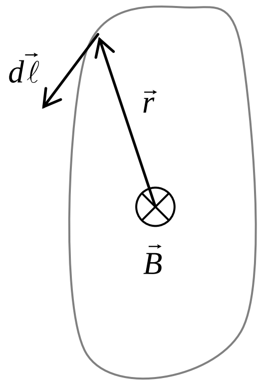
Zavedte magnetický moment, a odvodte vzorec pre jeho polohovú energiu v homogénnom magnetickom poli.

Amperovský magnetický moment:

$$\vec{m} = \int_S I d\vec{S} = I \int_S d\vec{S} = I \int_S \vec{n} dS = I\vec{n} \int_S dS = I\vec{S}$$

Potenciálna energia magnetického momentu vo vonkajšom magnetickom poli v harmonickom rozsahu slučky:





$$\vec{D} = \vec{m} \times \vec{B}$$

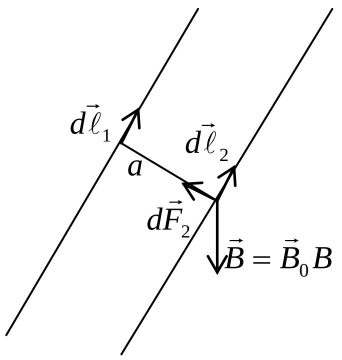
$$dE_P = dA = \oint_\ell d\vec{r} \cdot d\vec{F} = \oint_\ell \left(d\vec{\varphi} \times \vec{r}\right) \cdot d\vec{F} = \oint_\ell d\vec{\varphi} \cdot \left(\vec{r} \times d\vec{F}\right) = d\vec{\varphi} \oint_\ell \vec{r} \times d\vec{F} = d\vec{\varphi}\vec{D} = d\varphi\left(-\vec{D}_0\right) \cdot \vec{D}_0 D = -$$

$$dE_P = D d\varphi = mB \sin\varphi d\varphi$$

$$E_P = mB \int \sin\varphi d\varphi = -mB\cos\varphi + const$$

$$const = 0 \qquad E_P = -mB\cos\varphi = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Vypočítajte veľkosť a určte smer sily pôsobiacej medzi dvoma nekonečne dlhými priamimi vodičmi. Definujte jednotku ampér.



$d\vec{F}_2 = I_2 d\ell_2 \times \vec{B}$ (v mieste $d\vec{\ell}_2$)

$$d\vec{F}_2 = I_2 d\ell_2 \times \vec{B}_0 \frac{\nu_0 I_1}{2\pi a}$$

$$\frac{d\vec{F}_2}{d\ell_2} = \left(\ell_0 \times \vec{B}_0\right)\frac{\nu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

Definovanie 1 A:
1 amper je el prud ktory tečie 2 perarelnými vodičmi nekonečne dlhými vzdialených od seba 1m ak na na jednotku dĺžky niektorého z vodičov pôsobísi sila o velkosti 2.10 -7 N na jeden meter dlzky:

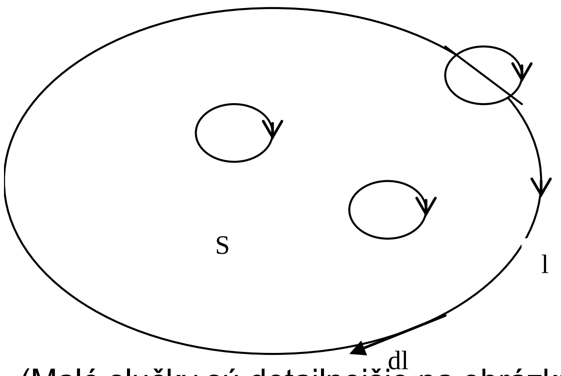
$$\left|\frac{d\vec{F}_2}{d\ell_2}\right| = \frac{\nu_0 I^2}{2\pi a} = \frac{4.10^{-7}.Kg.m.A^{-2}.s^{-2}}{2\pi.m} = 2.10^{-7}\,N.m^{-1}$$

21. Zavedenie magnetizácie, magnetickej polarizácie a vektora intenzity magnetického poľa v hmotnom prostredí.

Magnetizácia: súčet magnetických momentov látky pripadajúci na objemovú jednotku.

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{a \in \Delta V} \vec{m}_a$$ kde

$\vec{m}_{element} = \vec{S}\, I_{element}.$ (***m*** je elementárny magnetický moment, I je prúd, ***S*** je elementárna plôška.)



Malé kruhy (elementárne prúdy), ktoré pretínajú plochu S dva krát (v strede plochy) majú nulový prínos magnetického momentu, pretože ju pretínajú raz v jednom smere a druhý krát v opačnom tj. navzájom sa rušia. Iba tie elementárne prúdy, ktoré jednou stranou „prečnievajú“ sú prínosom pre vektor magnetizácie. Tento jav sa nazýva **magnetická polarizácia**.

(Malé slučky sú detailnejšie na obrázku nižšie.)

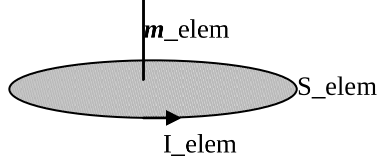
$\vec{B}_{CELKOVE} = \vec{B}_{VONKAJSIE} + \bar{\vec{B}}_{VNUTORNE}$, $\bar{\vec{B}}_{VNUTORNE}$ je priemerná hodnota **B**

urobíme rotáciu z rovnice:

$rot\,\vec{B} = rot\,\vec{B}_{VONKAJSIE} + rot\,\bar{\vec{B}}_{VNUTORNE}$ => podľa Maxwellovej rovnice (rot **B** = μ.**j**) môžeme dosadiť $rot\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\,\vec{j}_{MOLEKULOVE}$ (molekulové=vnútorné)

n = koncentrácia.

ako vidno na obrázku ***m***_elem = ***S***_elem * I_elem
m_elem =elementárny magnetický moment
S_elem = elementárna plocha (orientovaná)
I_elem = elementárny prúd



22. Definícia magnetického toku, Lenzovo pravidlo a Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie pre špeciálny prípad.

Lenzovo pravidlo: Indukovaný elektrický prúd má vždy taký smer, aby oslabil príčinu v dôsledku ktorej vznikol.

Magnetický indukčný tok: Plošný integrál $\theta = \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S}$ vektora magnetickej indukcie sa nazýva **magnetickým indukčným tokom** prechádzajúcim cez príslušnú plochu.

Faradayov zákon: definicia: elektromotoricke napatie je rovne zaporne vzatej casovej zmene magnetickeho idukcneho toku cez uzavretu plochu

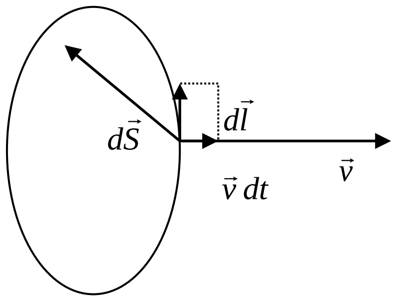
majme na mysli v sebe uzavretý vodič el. prúdu, ktorý sa nejakým spôsobom pohybuje v čase sa nemeniacom magnetickom poli.

Vieme že: $\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$, kde $\vec{E}_i$ je intenzita indukovaného el. poľa.

Nazveme $\varepsilon_i = \oint \vec{E}_i \bullet d\vec{l}$ ako indukované napätie na našom uzavretom vodiči.

Potom môžeme písať:

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E}_i \bullet d\vec{l} = \oint \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \bullet d\vec{l} = \oint \left(d\vec{l} \times \vec{v}\right) \bullet \vec{B} = -\oint \left(\vec{v} \times d\vec{l}\right) \bullet \vec{B}$$



ako vidno z obrázka súčin $\quad \vec{v} \times d\vec{l} = \dfrac{\vec{v}\,dt \times d\vec{l}}{dt} = \dfrac{d\vec{S}}{dt}$

(d**S** je orientovaná plocha (ten čiarkovaný obdĺžnik))

Potom $\varepsilon_i = -\oint \left(\vec{v} \times d\vec{l}\right) \bullet \vec{B} = -\dfrac{1}{dt} \int d\vec{S} \bullet \vec{B} = -\dfrac{d\theta}{dt}$

$d\theta$ je zmena magnetického indukčného toku za čas *dt* cez celú plochu vodičom ohraničenú, spôsobená jeho pohybom v magnetickom poli.

23. Odvodenie Maxwellovej rovnice, ktorá súvisí s Faradayovým zákonom elektromagnetickej indukcie.

Faradyov zákon elektromagnetickej indukcie:

$$\varepsilon_{indukované} = \oint_l \vec{E} \bullet \overrightarrow{dl} = -\frac{d\theta}{dt} \quad (1)$$

pričom $\varepsilon_{indukované}$ je indukované napätie

a $\theta = \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S}$ je magnetický indukčný tok.

Upravíme (1) rovnicu: ľavú časť podľa Stokesovej vety, do pravej časti dosadíme:

$$\oint_l \vec{E} \bullet \overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S}$$

$$\int_S rot\,\vec{E} \bullet d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

Keď túto rovnicu odintegrujeme dostaneme Maxwellovu rovnicu:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Slovne: Keď sa bude meniť **B** s časom, tak v tom bode vzniká el.pole **E**.

24. Odvodenie vzorca vyjadrujúceho energiu magnetického poľa (U_m) vodičom s konšt. prúdom:

a) $\vec{j} \neq 0$ (prúdová hustota)

b) kvázistacionárne zmeny polí $\Rightarrow \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx 0$

$$U_m = \int_V \frac{1}{2} \vec{H} \bullet \vec{B} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \bullet \left(\nabla \times \vec{A} \right) dV = \frac{1}{2} \left[\int_V \vec{j} \bullet \vec{A} \, dV - \int_V \nabla \bullet \left(\vec{H} \times \vec{A} \right) dV \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \vec{j} \bullet \vec{A} \, dV - \underbrace{\frac{1}{2} \oint_S \left(\vec{H} \times \vec{A} \right) \bullet d\vec{S}}_{\Downarrow} = \frac{1}{2} \int_V \vec{j} \bullet \vec{A} \; dV$$

$$zavisi \; od \; \frac{1}{r^2} \Rightarrow S \to \infty \Rightarrow \oint vyraz = 0$$

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{j} \bullet \vec{A} \; dV$$

26. Maxwellova rovnica v ktorej vystupuje Maxwellov posuvný prúd

Známe rovnice: (1) $rot\,\vec{H} = \vec{j}$

(2) rovnica kontinuity: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$

(3) $div\,\vec{D} = \rho$

ρ – objemová hustota voľného el. náboja
D – vektor indukcie el. poľa
H – vektor intenzity mag. poľa
j – vektor prúdovej hustoty

z rovnice (1) urobíme divergenciu: $div\,rot\,\vec{H} = div\,\vec{j}$,kde $div\,rot\,\vec{H} = 0$

To odporuje (2) rovnici, ak si vyjadríme $div\,\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$. Preto sa do (1) rovnice dačo pridá ($\frac{\partial\rho}{\partial t}$) :

zo vzťahu (3) $div\,\vec{D} = \rho$ urobíme deriváciu podľa času a vynásobíme -1:

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\,div\,\vec{D} = -div\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Potom môžeme napísať (1) rovnicu v tvare: $rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ **(Maxwellova rovnica s posuvným prúdom)**

Člen $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ nazveme Maxwellov posuvný prúd.

27. Platnosť parciálnej diferenciálnej rovnice vlnenia pre vektor $\vec{E}$ a $\vec{B}$ vychádzajúc z Maxwellovych rovníc pre vákum.

Podmienky: ε, μ, σ sú konštanty. Objemová hustota náboja ρ=0.
Prostredie je homogénne, izotropné, lineárne.

Materiálové vzťahy:
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$

Maxwellove rovnice:
(1) $div\,\vec{D} = \rho$
(2) $div\,\vec{B} = 0$
(3) $rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
(4) $rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Budeme používať tieto rovnice:
Po dosadení do (1) $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ dostaneme (ρ=0):
(5) $div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$
(6) $div\,\vec{B} = 0$
(7) $rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Po dosadení do (3) $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ a $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ dosaneme
(8) $rot\,\vec{B} = \sigma \mu \vec{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Zo (7) urobíme rotáciu:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{dt} \qquad formula\ bac - cab...$$

$$\nabla(\nabla \bullet \vec{E}) - (\nabla \bullet \nabla)\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

1.časť ľavej strany sa podľa (5) = 0. 2. časť ľavej strany: nabla*nabla=laplas. Pravú stranu upravíme podľa (8)

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\sigma \mu \vec{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] = -\sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{E} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Otázka č.28

Odvoďte vzťah medzi vektormi **E** a **B** v rovinnej monochromatickej vlne.

Pre základné vzťahy platí:

$$\vec{E}(\varphi)=\vec{E}(\vec{k}^0\vec{r}-vt)$$

$$\vec{B}(\varphi)=\vec{B}(\underbrace{\vec{k}^0\vec{r}-vt}_{\varphi})$$

$$\nabla=\vec{k}^0.\frac{d}{d\varphi}$$

Maxwellova rovnica $\nabla x\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$\nabla x\vec{E}(\varphi)=\vec{k}^0\frac{d}{d\varphi}x\vec{E}(\varphi)=\vec{k}^0x\frac{d\vec{E}}{d\varphi}=\vec{k}^0x\left(-\frac{1}{v}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{d\vec{E}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=-v\frac{d\vec{E}}{d\varphi}\Rightarrow\frac{d\vec{E}}{d\varphi}=-\frac{1}{v}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{1}{v}\vec{k}^o x\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{v}\vec{k}^o x\vec{E}$$

Keď to zintegrujeme podľa času dostaneme

$$\vec{B}=\frac{1}{v}\vec{k}^0x\vec{E}$$

Z toho vyplýva **B** je kolmé na $\mathbf{k}^0$ a na **E.**

Pomocou maxwellovej rovnice dostávame

$$\nabla x\vec{B}=\vec{k}^0x\frac{d\vec{B}}{d\varphi}\qquad\nabla x\vec{B}=(\sigma=0)=\varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla x\vec{B}=\vec{k}^0x\frac{d\vec{B}}{d\varphi}=\varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\qquad\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{d\vec{B}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=-v\frac{d\vec{B}}{d\varphi}\Rightarrow\frac{d\vec{B}}{d\varphi}=-\frac{1}{v}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{k}^0x-\frac{1}{v}\frac{d\vec{B}}{d\varphi}=\varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{v^2}$$

Potom z toho vyplýva

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-v\vec{k}^0x\vec{B}\right)$$

$$\vec{B}=\frac{1}{v}\vec{k}^0x\vec{E}$$

$$\vec{E}=-v\vec{k}^0x\vec{B}$$

30. Zaveďte Poyntingov vektor, uveďte jeho význam a rozmer v SI

Rovnica o zákone zachovania energie:

$$\int_V \delta t \vec{j}.\vec{E}^* dV = \int_V \delta t \frac{1}{\sigma} j^2 dV + \int_V \left(\vec{E}.\delta\vec{D} + \vec{H}.\delta\vec{B}\right) dV + \delta t \oint_S \left(\vec{E} \times \vec{H}\right).dS$$

$$\int_V \delta t \vec{j}.\vec{E}^* dV \ldots praca \quad kt.vykonaju \quad vonk.zdroje \quad v \quad objeme \quad V \quad za \quad cas \quad \delta t$$

$$\int_V \delta t \frac{1}{\sigma} j^2 dV \ldots mnozstvo \quad tepla \quad za \quad cas \quad \delta t \quad v \quad objeme \quad V$$

$$\int_V \left(\vec{E}.\delta\vec{D}\right) dV \ldots zvysenie \quad energie \quad elektrickeho \quad pola$$

$$\int_V \left(\vec{H}.\delta\vec{B}\right) dV \ldots praca \quad kt.vykoname \quad na \quad zmenu \quad energie \quad mag.pola$$

V rovnici o zákone zachovania energie tento vzorec (dole) vyjadruje energiu, ktorá vytečie cez plochu S von za čas δt :

$$\delta \quad t \quad \oint_S \left(\vec{E} \times \vec{H}\right).dS$$

práve z tohto vzorca sa definoval Poyntingov vektor ako: $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$

N sa občas označuje aj ako ***S*** (nie je to plocha)
N…hustota toku energie

E…intenzita elektrického poľa
H…intenzita magnetického poľa

Rozmer ***N***:

[N]=[E][H]= $\frac{V}{m}\frac{A}{m} = \frac{VA}{m^2}$

31. Vyjadrite Poyntingov vektor pre rovinnú elektromagnetickú vlnu

w…hustota energie rovinnej elektromagnetickej vlny

$w=w_{el}+w_{mag}=$

$$\frac{1}{2}\vec{E}.\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}.\vec{B}-\frac{1}{2}\vec{E}.\varepsilon\quad\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}.\frac{\vec{B}}{\mu}=\frac{1}{2}\varepsilon\quad E^{2}+\frac{1}{2\mu}\left(\frac{1}{v}\vec{k}^{0}\times\vec{E}\right)\left(\frac{1}{v}\vec{k}^{0}\times\vec{E}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon E^{2}+\frac{1}{2\mu v^{2}}E^{2}=\frac{\varepsilon\mu v^{2}+1}{2\mu v^{2}}E^{2}=\frac{1}{\mu v^{2}}E^{2}$$

E…intenzita elektrického poľa
D…vektor elektrickej indukcie
H…intenzita magnetického poľa
B…magnetická indukcia

Poyntingov vektor ***N***(=***S***):

$$\vec{N}=\vec{E}\times\vec{H}=\vec{E}\times\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{v}\vec{k}^{0}\times\vec{E}\right)=\frac{1}{\mu v}\vec{k}^{0}E^{2}=v\frac{1}{\mu v^{2}}E^{2}\vec{k}^{0}$$

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{v}\vec{k}^{0}\times\vec{E}\right)$$

$$w=\frac{1}{\mu v^{2}}E^{2}$$

Konečné vyjadrenie ***N***:

$$\vec{N}=wv\vec{k}^{0}$$