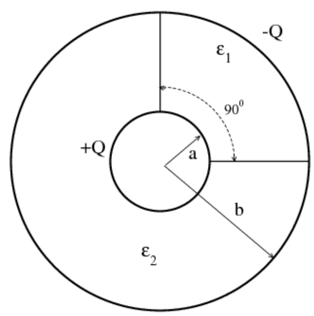
Fyzika II Skúška 9. januára 2009 - príklady

1. Majme valcový kondenzátor. Vnútornú elektródu tvorí kovový valec polomeru a, vonkajšiu kovový valec polomeru b. Dĺžka kondenzátora je L. Prierez kondenzátora je na obr. 1. Kondenzátor nie je pripojený k žiadnemu zdroju. Valcové plochy sú nabité nábojom $+Q$ a $-Q$. Vnútro kondenzátora je vyplnené dielektrikami podľa obrázka. Nájdite:
   - Intenzitu elektrického poľa $\vec{E}$ v priestore medzi nabitými plochami (2b)
   - Indukciu elektrického poľa $\vec{D}$ (2b)
   - Napätie medzi valcovými plochami a kapacitu kondenzátora (2b)
   - Prácu, potrebnú na vytiahnutie dielektrika **1** z kondenzátora von (4b)

   Okrajové efekty na koncoch kondenzátora zanedbajte. (10 bodov)



Riešenie. pretože pole vo vnútri menšieho valca je nulové. V priestore medzi plochami je E spojité, preto $E_1 = E_2$. Z Gaussovej vety dostaneme pre elektrickú indukciu D:

$$\frac{1}{2}\pi r L(D_1 + 3D_2) = Q, \tag{1}$$

Z rovnice $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$ máme vzťah $D_2/\epsilon_2 = D_1/\epsilon_1$. Dosadením do (1) dostaneme

$$D_1 = \frac{2Q}{\pi r L}\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + 3\epsilon_2}, \qquad D_2 = \frac{2Q}{\pi L r}\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + 3\epsilon_2}, \qquad E_1 = E_2 = \frac{2Q}{\pi \epsilon_0 r L}\frac{1}{\epsilon_1 + 3\epsilon_2}. \tag{2}$$

Napätie je

$$U = \int_a^b E_1(r)dr = \frac{2Q}{\pi\epsilon_0 L}\frac{1}{\epsilon_1 + 3\epsilon_2}\ln\frac{b}{a}. \tag{3}$$

a kapacita $C = Q/U$.

Energia poľa v kondenzátore $W = Q^2/(2C)$ závisí od permitivít ϵ_1 a ϵ_2:

$$W = \frac{1}{4}\frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 L(\epsilon_1 + 3\epsilon_2)}\ln\frac{b}{a}. \tag{4}$$

Vytiahnutím dielektrika 1 energia vzrastie o hodnotu $\Delta W = W(\epsilon_1 = 1) - W(\epsilon_1)$ pretože $\epsilon_1 > 1$. Táto energia sa získala prácou, ktorú vykonal ten, kto dielektrikum vytiahol.

2. Nekonečne dlhým homogénnym valcovým vodičom polomeru a preteká prúd I. Nájdite indukciu magnetického poľa $\vec{B}$ ako funkciu vzdialenosti r od osi vodiča. Uvažujte prípady $r < a$ aj $r > a$.
(6 bodov)

Riešenie: Najprv vyjadríme prúdovú hustoru, $j = I/(\pi a^2)$. Uvažujme teraz kruhovú dráhu s polomerom r a stredom na osi valca. B nájdeme z rovnice

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int d\vec{S}\vec{j}. \tag{5}$$

Na pravej strane integrujeme cez kruhovú plochu polomeru r. Pretože $\vec{B} \parallel \vec{\ell}$ a $\vec{S} \parallel \vec{j}$ a B je konštantné po obvode kruhu s polomerm r, dostaneme

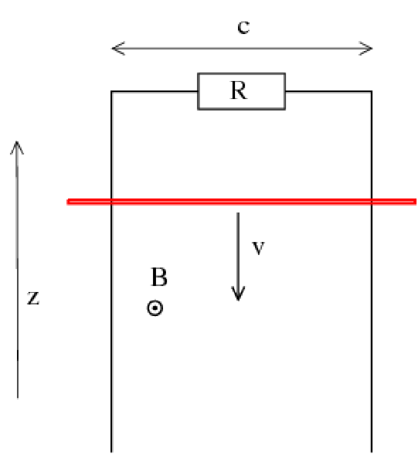
$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \qquad r < a \tag{6}$$

a

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad r > a. \tag{7}$$

3. Kovová tyč s hmotnosťou m padá v gravitačnom poli Zeme, pričom sa bez trenia kĺže po dvoch rovnobežných zvislých vodičoch Cez celú konštrukkciu prechádza homogénne magnetické pole (obr. 3). Vplyvom magnetického poľa sa vo vodičoch indukujú prúdy, ktoré brzdia pád rámika, takže sa po istom čase pohybuje rovnomernou rýchlosťou v.
- Nájdite túto limitnú rýchlosť (5 bodov)
- Nájdite energiu, ktorá sa vylúči na odpore R za čas Δt (3 body)

(8 bodov)



Riešenie. Ak sa tyč pohybuje rovnomernou rýchlosťou, potom na ňu nepôsobí žiadna sila. Gravitačná sila $F_g = mg$ musí byť preto kompenzovaná silou pochádzajúcou od magnetického poľa.

Pretože elektróny v tyči sa pohybujú rýchlosťou v kolmo na smer magnetického poľa, pôsobí na ne Lorenzova sila evB, a na koncoch tyče vzniká napätie

$$U = Ec = vcB. \tag{8}$$

Prúd cez odpor je preto $I = U/R$. Sila, ktorou magnetické pole pôsobí na tyč s prúdom je $F_m = BIc$. Dosadením a porovnaním $F_g = F_m$ dostaneme

$$v = \frac{mgR}{B^2c^2}. \tag{9}$$

Za čas Δt tyč stratí výšku $\Delta z = v\Delta t$ a teda aj potenciálnu energiu $W_p = mg\Delta z = mgv\Delta t$. Táto sa premení na teplo na odpore. Dostaneme

$$W_p = mg\Delta z = \frac{U^2}{R}\Delta t = \frac{m^2g^2R}{B^2c^2}\Delta t. \tag{10}$$

4. Daný je kladný náboj Q umiestnený v počiatku súradnicovej sústavy. Okolo neho obieha záporný náboj q. Celá sústava je vložená do homogénneho magnetického poľa B kolmého na rovinu, v ktorej sa pohybuje náboj q. Nájdite
- Rýchlosť náboja q, ak viete, že polomer dráhy elektrónu je R (4b)
- Akú rýchlosť by mal náboj q, keby magnetické pole bolo opačne orientované ale polomer dráhy zostal ten istý? (2b)

(6 bodov)

Riešenie

Na náboj pôsobia tri sily: príťažlivá elektrostatická sila $\vec{F}_e$, Lorentzova sila $\vec{F}_m$ a odstredivá sila $\vec{F}_o$. Všetky majú radiálny smer. Ich porovnaním dostaneme $\vec{F}_e + \vec{F}_m + \vec{F}_o = 0$. Dostaneme tak

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{R^2} \pm qvB = \frac{mv^2}{R}. \tag{11}$$

Znamienko pri sile $\pm qvB$ závisí od orientácie magnetického poľa. Rovnica (11) dáva rýchlosť v. Pre prípad, že Lorenzova sila smeruje do stredu dráhy, dostaneme

$$v = \frac{R}{2m}\left[qB \pm \sqrt{(qB)^2 + F_e^2}\right]. \tag{12}$$

Dve znamienka zodpovedajú dvom orientáciám rýchlosti po obežnej dráhe. Ak zmeníme znamienko magnetického poľa, rýchlosť sa zmení na $\delta v = v(B) - v(-B) = Rqv/m$.