

Písomka 10. 11. 2008

1. Pri teplote $T = 300$ K je typická rýchlosť elektrónov v kove $v = 100$ km/s. Aký prúd I tiekol drôtom prierezu $S = 1$ mm², KEBY sa všetky elektróny pohybovali jedným smerom ?

Hustota elektrónov $n = 10^{22}$ cm⁻³, náboj elektrónu $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C.

(2 body)

Riešenie:

Prúd pretekajúci cez drôt je daný

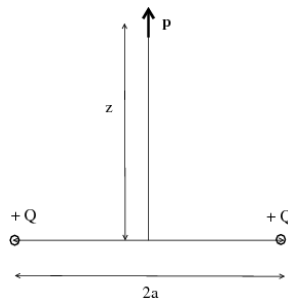
$$J = nevS$$

Po dosadení (pozor na jednotky !) dostaneme prúd $J = 1.6 \times 10^8$ A. Taký prúd samozrejme cez drôt netečie, pretože smer pohybu elektrónov je náhodný a priemerná rýchlosť elektrónov je nulová.

2. Dané sú dva náboje $+Q$ ležiace na osi x , vzdialené od seba $2a$, a dipól $\vec{p} = q\vec{d}$ ležiaci na osi medzi oboma nábojmi vo vzdialenosti z (obr. 1).

Akou silou pôsobia náboje na dipól ?

(2 body)



Riešenie: Dva náboje $+Q$ vytvárajú v bode z , kde sa nachádza dipól, elektrické pole s intenzitou $\vec{E} = (0, 0, E_z)$, kde

$$E_z = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Pole je orientované v smere osi z , teda je rovnobežné s dipólom \vec{p} .

Sila na dipól je

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}$$

má preto tiež smer v osi z . Po dosadení

$$F_z = p \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{Qp}{2\pi\epsilon_0} \frac{a^2 - 2z^2}{(a^2 + z^2)^{5/2}}$$

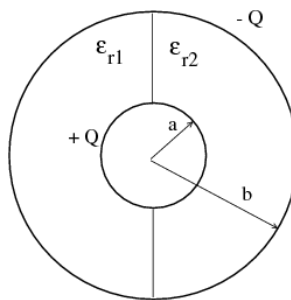
Sila pôsobí smerom nadol (preto znamienko minus) - dipól je pritáňovaný k dvojici nábojov.

Ak si nepamätáme vzorec pre silu pôsobiacu na dipól, môžeme silu nájsť tak, že budeme uvažovať dipól zložený z dvoch nábojov $-q$ a q , umiestnených v bodoch $z - d/2$ a $z + d/2$, a vypočítame silu pôsobiacu na jednotlivé náboje:

$$F = \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0} \times \left[-\frac{z}{[a^2 + (z - d/2)^2]^{3/2}} + \frac{z}{[a^2 + (z + d/2)^2]^{3/2}} \right],$$

a urobíme rozvoj v mocninách d .

3. Gul'ový kondenzátor je vytvorený dvoma kovovými gul'ami polomerov a a b a je vyplnený dvoma typmi dielektrika s relatívnou permitivitou ϵ_{r1} a ϵ_{r2} (obr. 2). Na guliach je náboj $+Q$ a $-Q$. Nájdite:
- (i) elektrickú indukciu \vec{D} v celom priestore medzi nabitými gul'ami
 - (ii) elektrickú intenzitu \vec{E}
 - (iii) potenciál medzi nabitými gul'ami a kapacitu kondenzátora
- (4 body)



Riešenie: Z podmienky spojitosti \vec{E} na rozhraní oboch dielektrík dostaneme

$$E_1 = E_2 = E,$$

a preto $D_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E$, $D_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E$. Posledné vzťahy nám dajú

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}.$$

Gaussova veta pre elektrickú indukciu $D(r)$ nám dá pre $a < r < b$

$$2\pi r^2(D_1 + D_2) = Q.$$

Z posledných dvoch rovníc nájdeme

$$D_1(r) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{1}{r^2}, \quad D_2(r) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{1}{r^2}$$

a intenzity

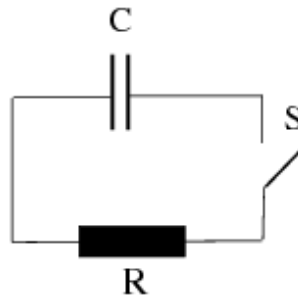
$$E_1(r) = E_2(r) = E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{1}{r^2}.$$

Potenciál

$$U = - \int_a^b dr E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \frac{b-a}{ab}.$$

Kapacita kondenzátora je samozrejme $C = Q/U$.

4. Daný je obvod s kondenzátorom C a odporom R (obr. 3). Po zopnutí spínača S sa kondenzátor vybil a bolo zistené, že na odpore sa vylúčilo teplo W . Aký náboj bol na kondenzátore pred zopnutím spínača? Aké teplo by sa vylúčilo na dvojnásobnom odpore $2 \times R$? (2 body)



Riešenie: Energia W je rovná energii nabitého kondenzátora, preto $W = Q^2/2C$. Odtiaľ

$$Q = \sqrt{2WC}.$$

Energia kondenzátora samozrejme nemôže závisieť od veľkosti odporu R , preto by sa na odpore $2 \times R$ vylúčilo to isté teplo, ako na odpore R .