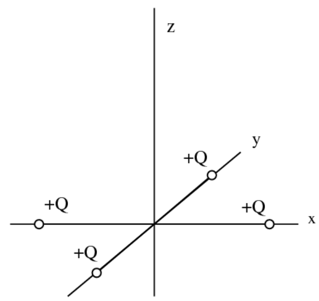
# Písomka 20. 10. 2008

1. Štyri rovnaké kladné bodové náboje $Q$ sú umiestnené vo vrcholoch štvorca v rovine $(x, y)$. Ich plohy sú $(x, y, z) = (\ell, 0, 0), (0.\ell, 0), (-\ell, 0, 0)$ a $(0, -\ell, 0)$.
   Nájdite intenzitu elektrického poľa
   (a) na kladnej osi $z$ (pre $z > 0$),
   (b) na kladnej osi $x$ (pre $x > 0$).
   (3 body)




Riešenie: Využijeme princíp superpozície, a **vektorovo** spočítame príspevky intenzity od jednotlivých nábojov.

(a) Pole $\vec{E}$ má nenulovú len zložku v smere osi $z$, ktorá je

$$E_z = 4 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \times \cos\theta, \tag{1}$$

kde $R = \sqrt{z^2 + \ell^2}$ a $\cos\theta = z/R$. Po dosadení dostaneme

$$E_z = \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + \ell^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

Pole je orientované v smere kladnej osi $x$ (smerom od kladných nábojov).

(b) Teraz má pole len zložku v smere osi $x$. Opäť využijeme princíp superpozície. Pre $x > \ell$ dostaneme

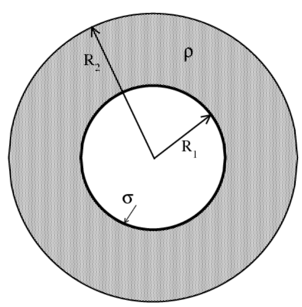
$$E(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left] \frac{1}{(x-\ell)^2} + \frac{1}{(x+\ell)^2} + \frac{2x}{(x^2 + \ell^2)^{3/2}} \right]. \tag{3}$$

Pre $0 < x < \ell$ je orientácia poľa od nábojov v $x = -\ell$ a $x = +\ell$ opačná,

$$E(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[- \frac{1}{(x-\ell)^2} + \frac{1}{(x+\ell)^2} + \frac{2x}{(x^2+\ell^2)^{3/2}}\right]. \tag{4}$$

Pozn: Pre $x = 0$ dostaneme $E(x = 0) = 0$, ako aj má byť.

2. Guľa s polomerom $R_1$ je položená do počiatku súradnicovej s0ustavy. Na jej povrchu je rozmiestnený kladný elektrický náboj s homogénnou hustotou $\sigma$. Vnútro gule je nenabité. Guľa je obalená guľovou vrstvou s vonkajším polomerom $R_2$, rovnomerne nabitou kladným nábojom s hustotou $\rho$.
   Využite Gaussovu veru a nájdite intenzitu elektrického poľa $\vec{E}(r)$ ako funkciu vzdialenosti $r$ od stredu.
   (3 body)




Riešenie. Použijeme Gaussovu vetu:
(i) pre $r < R_1$ je zrejme $E = 0$, lebo v guli polomeru $r$ nie je žiadny náboj.

(ii) pre $R_1 < r < R_2$ dostaneme

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\left[Q_1 + \int_{R_1}^{r} \rho 4\pi r^2 dr\right], \tag{5}$$

kde $Q_1 = 4\pi R_1^2\sigma$ je náboj na guli s polomerom $R_1$. Pretože problém má guľovú symetriu, pole $E$ má len radiálnu zložku $E(r)$. Po integrovaní máme

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0}\left[Q_1 + \frac{4}{3}\pi\rho\left(r^3 - R_1^3\right)\rho\right]. \tag{6}$$

$E(r)$ je absolútna hodnota $\vec{E}$. Po úprave dostaneme

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left[Q_1 - \frac{4}{3}\pi R_1^3\rho\right] + \frac{1}{3\epsilon_0}\rho r, \tag{7}$$

kde sme oddelili člen $\sim 1/r^2$ a člen lineárny v $r$.

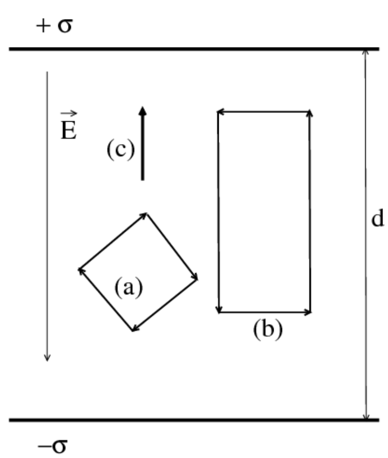
(iii) Pre $r > R_2$ plocha obopína celkový náboj,

$$Q = Q_1 + \int_{R_1}^{R_2} \rho 4\pi r^2 dr = Q_1 + \frac{4}{3}\pi\rho\left[R_2^3 - R_1^3\right] \tag{8}$$

a celkové pole je

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{9}$$

3. Rovinný kondenzátor je nabitý nábojom s plošnou hustotou $\sigma$. Medzi jeho dosky je vložený skúšobný kladný náboj $q$. Vypočítajte prácu, potrebnú na prenos tohto náboja po dráhach (a), (b) a (c). Dráha (a) je štvorec s dĺžkou strany $d/2$. Dráha (b) ide po obdĺžniku so stranami dĺžky $d/4$ a $d/2$. Dráha (c) má dĺžku $\ell = d/5$.
(2 body)




Riešenie: Práca je daná integrálom

$$A = -q\int \vec{E}\cdot d\vec{\ell}. \tag{10}$$

Pretože tento integrál po uzavretej dráhe je vždy nulový, vieme aj bez výpočtu, že v prípadoch (a) a (b) dostaneme nulu. V prípade (c) využijeme, že pole je homogénne,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{11}$$

Integrál preto dá

$$A = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\ell = \frac{\sigma d}{5\epsilon_0}. \tag{12}$$

Práca má kladné znamienko, lebo bola vykonaná proti pôsobeniu elektrickej sily.

4. Vypočítajte obežnú rýchlosť elektrónu v atóme vodíka, ak viete, že: hmotnosť elektrónu je $m = 9 \times 10^{-31}$ kg, náboj elektrónu je $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C, náboj jadra (protónu) je $q_p = -q_e$, polomer atómu je $R = 0.5 \times 10^{-10}$ m, a konštanta $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ Nm$^2$/C$^2$.

   (2 body)

   Riešenie: Odstredivá sila $F_{\mathrm{od}} = mv^2/R$ sa musí vyrovnať s príťažlivou elektrostatickou silou,

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = m\frac{v^2}{R} \tag{13}$$

   z čoho dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 R m}}. \tag{14}$$

   Po dosadení $v = 2.2 \times 10^6$ m/s.

   Pre zaujímavosť: doba obehu (perióda) je $T = 2\pi R/v \approx 1.4 \times 10^{-16}$ s. Frekvencia obehu, $\nu = 1/T \approx 10^{+16}$ Hz, čo je cca 100-krát viac ako frekvencia viditeľného svetla.