Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenskej technickej univerzity v Bratislave

Katedra fyziky

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

MAGNETICKÉ POLE

Doc. RNDr. Ivan Červeň, CSc.

V roku 2005 vydala Fakulta elektrotechniky a informatiky STU
v Bratislave

8
MAGNETICKÉ POLE

Magnetické pole sa prejavuje silovým pôsobením na elektricky nabité častice, ktoré sa vzhľadom na pozorovateľa pohybujú. Takéto častice v podstate vytvárajú elektrický prúd. Na nepohybujúcu sa nabitú časticu (stručne na elektrický náboj) magnetické pole nepôsobí. Zo skúsenosti však vieme, že dva magnety na seba pôsobia silou aj vtedy, ak sa vzájomne, ani vzhľadom na pozorovateľa nepohybujú. Ale aj tento prípad možno vysvetliť pomocou elementárnych elektrických prúdov na atomárnej úrovni. Pohybujúce sa elektricky nabité častice, teda elektrický prúd, nielen že podliehajú pôsobeniu magnetického poľa, ale sami vo svojom okolí vytvárajú magnetické pole. Na dôkladný kvalitatívny, ale najmä kvantitatívny opis týchto javov, treba zaviesť veličiny, ktorými sa magnetické pole charakterizuje. To je predmetom *prvej podkapitoly* - o *silách v magnetickom poli. Druhá podkapitola* opisuje vznik magnetického *poľa v okolí vodičov elektrického prúdu,* zavádza magnetický tok a končí uvedením príslušnej Maxwellovej rovnice. *Tretia podkapitola* opisuje vlastnosti *magnetického dipólu* a poľa v jeho okolí. Posledná - *štvrtá podkapitola* je venovaná opisu *magnetického poľa v prostredí,* na rozdiel od predchádzajúcich podkapitol, ktoré opisujú pole vo vákuu, ktoré je prakticky zhodné s poľom vo vzduchu.

Potrebné vedomosti

Treba poznať základné pojmy zavedené v mechanike, ako sila, práca, energia. Treba ovládať základné definície a vzťahy týkajúce sa elektrického prúdu, rovnicu kontinuity. Opis magnetického poľa je dôsledne vektorový, preto vedomosti aj z tejto oblasti sú potrebné, vrátane použitia nabla operátora, opísaného v kapitole o vektoroch (gradient, divergencia, rotácia). Znalosť diferenciálneho a integrálneho počtu je rovnako nevyhnutná, vrátane jeho aplikácií na vektorové funkcie, ako derivácia skalárnej i vektorovej funkcie viacerých premenných.

8.1 Sily v magnetickom poli

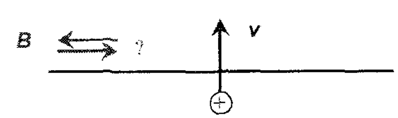
Kľúčové slová
Magnetické pole, magnetická indukcia, Lorentzova sila

8.1.1 Sila pôsobiaca na pohybujúci sa náboj, vektor magnetickej indukcie

Na kvantitatívny opis magnetického poľa sa používa vektorová veličina s názvom **magnetická indukcia** (značka $\boldsymbol{B}$). V magnetickom poli má podobný význam ako vektor intenzity $\boldsymbol{E}$ v elektrickom poli. Na časticu s nábojom Q pôsobí v elektrickom poli sila $\boldsymbol{F}_e = Q\boldsymbol{E}$. V magnetickom poli vo vzorci vyjadrujúcom **magnetickú silu** $\boldsymbol{F}_m$ (nazývanú aj Lorentzova sila) vystupuje rýchlosť častice (náboja) $\boldsymbol{v}$, lebo veľkosť sily závisí od jej rýchlosti:

$$\boldsymbol{F}_m = Q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\,. \tag{8.1.1.1}$$

Tento vzorec sa všeobecne považuje za definičný pre magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$. Na určenie vektora $\boldsymbol{B}$ na základe vzorca (8.1.1.1) treba vykonať experimenty, v ktorých sa zmeria veľkosť a smer sily pôsobiacej na časticu s nábojom Q pohybujúcu sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}$. Napríklad smer zemského magnetického poľa určíme postupnou zmenou smeru vektora rýchlosti častice. Ten smer vektora rýchlosti, pri ktorom sila pôsobiaca na časticu je nulová, je podľa definičného vzorca rovnobežný (súhlasne, či nesúhlasne) so smerom vektora $\boldsymbol{B}$. Ak necháme časticu pohybovať sa kolmo na tento smer, pre veľkosť sily platí $F = QvB$, čo tiež vyplýva z definičného vzorca. Ak poznáme rýchlosť častice, a veľkosť jej náboja, zmeraním veľkosti sily dokážeme určiť veľkosť vektora magnetickej indukcie. Na obrázku je nakreslená horizontálna



Obr. 8.1.1.1

priamka, s ktorou je vektor $\boldsymbol{B}$ rovnobežný, vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$ častice (nesúcej kladný elektrický náboj) smeruje nahor. Vektor sily pôsobiacej na časticu je v tomto prípade kolmý na nákresňu, lebo podľa definičného vzorca je kolmý na rýchlosť častice i na vektor $\boldsymbol{B}$. Ak sila smeruje za nákresňu, vektor magnetickej indukcie musí smerovať vpravo. Ak sila smeruje pred nákresňu, vektor $\boldsymbol{B}$ smeruje vľavo. Zmenou náboja častice na záporný, zmení sa smer sily na opačný, čo však neovplyvní smer vektora magnetickej indukcie.

Jednotka magnetickej indukcie v SI má názov **tesla** (značka T). Je to odvodená jednotka a jej fyzikálny rozmer vyjadrený pomocou základných jednotiek SI získame z definičného vzorca:

$$1\,\mathrm{T} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A \cdot s \cdot m/s}} = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s^2}}\frac{1}{\mathrm{A \cdot s}}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A \cdot s^2}} \tag{8.1.1.2}$$

Spojením vzorcov vyjadrujúcich sily pôsobiace na nabitú časticu v elektrickom a v magnetickom poli, získame všeobecný vzťah vyjadrujúci silu v elektromagnetickom poli:

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E} + Q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\,, \tag{8.1.1.3}$$

pričom niektorí autori aj túto silu uvádzajú pod menom Lorentzova sila.

Sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{m} = Q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ má pozoruhodnú vlastnosť v tom, že nekoná prácu. Nemôže zmeniť kinetickú energiu častice. Častica, ktorá sa pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}$, za elementárny časový interval $\mathrm{d}t$ sa premiestni o $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$. Dosadením do vzorca vyjadrujúceho prácu dostaneme

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}_\mathrm{m} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}t\,. \tag{8.1.1.4}$$

Vo vzťahu vystupuje zmiešaný súčin s dvomi rovnakými vektormi $(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}$, ktorý sa rovná nule. Lorentzova sila pôsobí kolmo na vektor rýchlosti častice, takže nemení veľkosť rýchlosti, ale len jej smer. Preto Lorentzova sila nemení kinetickú energiu častice.

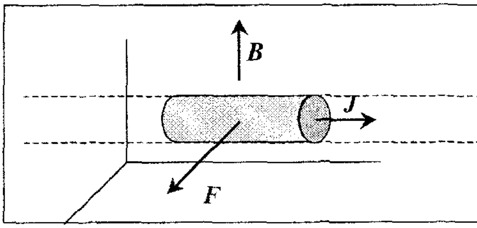
Príklad 8.1.1.1 Akou maximálnou magnetickou silou môže na elektrón v televíznej obrazovke pôsobiť vychyľovacie pole cievky (pribl. 10^{-2} T), keď elektrón bol urýchlený elektrickým napätím 5 kV? Aké zrýchlenie udelí elektrónu magnetická sila?
Riešenie Pri urýchlení elektrónu napätím nie väčším ako U = 5 kV možno na výpočet jeho rýchlosti použiť klasický vzťah $eU = (1/2)mv^2$, odkiaľ $v = (2eU/m)^{1/2}$. Dosadením do vzorca pre magnetickú silu dostaneme $F_\mathrm{m} = eB(2eU/m)^{1/2}$ a číselne $F_\mathrm{m} \cong 6{,}4 \cdot 10^{-14}$ N. Táto sila udelí elektrónu zrýchlenie
$a = F_\mathrm{m}/m \cong (6{,}4 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{N})/(10^{-30}\ \mathrm{kg}) = 6{,}4 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m/s^2}$. Zrýchlenie je teda obrovské, z hľadiska makroskopických dejov pre človeka nepredstaviteľné.

Kontrolné otázky

1. *Pri akom vzájomnom smere vektorov* $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ *je sila pôsobiaca na elektricky nabitú časticu najväčšia?*
2. *Pri akom vzájomnom smere vektorov* $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ *je sila pôsobiaca na časticu nulová?*
3. *Ako sa nazýva veličina a jednotka v SI, ktorou charakterizujeme magnetické pole?*
4. *Závisí smer magnetickej sily pôsobiacej na letiacu časticu od znamienka jej elektrického náboja?*

8.1.2 Sila pôsobiaca na vodič elektrického prúdu

Elektrický prúd tečúci vodičom je vytváraný pohybom obrovského počtu elektrónov. Elektróny, ktoré sú pri izbových teplotách v tepelnej rovnováhe so svojim okolím (atómami vodiča), pohybujú sa náhodnými smermi aj bez pôsobenia elektrického poľa a to rýchlosťami, ktorých stredná hodnota je okolo 10^5 m/s . Narážajú do atómov vodiča, odovzdávajú im svoju hybnosť a tak pôsobia silami na vodič. Vektorový súčet týchto síl, pôsobiacich aj v pomerne malej časti vodiča, vzhľadom na náhodný smer pohybu jednotlivých elektrónov, je nulový. Pokiaľ vodičom netečie elektrický prúd, a nachádza sa v magnetickom poli, nulový je aj vektorový súčet magnetických síl pôsobiacich na chaoticky sa pohybujúce elektróny. Keď však vodičom tečie elektrický prúd, celý súbor elektrónov sa pohybuje vodičom jedným smerom driftovou rýchlosťou. Napriek tomu, že táto rýchlosť je malá (predstavuje iba zlomky milimetra za sekundu), podmieňuje vznik pozorovateľnej magnetickej sily pôsobiacej na vodič v magnetickom poli. Elektróny sú magnetickým poľom vychyľované z pôvodného smeru driftovej rýchlosti, narážajú do atómov, ale už nie úplne chaoticky, ale usmernene jedným smerom. To vyvoláva makroskopicky pozorovateľnú silu pôsobiacu na vodič.



Obr. 8.1.2.1

Pri kvantitatívnom opise pôsobenia magnetického poľa na vodič prúdu budeme predpokladať, že vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ je kolmý na vektor hustoty elektrického prúdu $\boldsymbol{J}$, ktorý s driftovou rýchlosťou $\boldsymbol{v}_d$ súvisí vzťahom $\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v}_d$ (vzťah (7.2.1.3)) . V tomto vzťahu vystupuje objemová hustota ρ elektrického náboja voľných elektrónov, ktorá je záporná, takže elektróny sa pohybujú opačným smerom ako naznačuje vektor hustoty prúdu. V záujme zjednodušenia úvah, aby sme výpočet nekomplikovali znamienkami, budeme dočasne predpokladať, že elektróny, ktoré majú hmotnosť m_e a nesú elementárny elektrický náboj e, sú kladne nabité. Na základe uvedených predpokladov môžeme pre veľkosť magnetickej sily pôsobiacej na takúto časticu napísať vzťah (v súlade so vzorcom (8.1.1.1)) :

$$F = e\, v_d B \ . \tag{8.1.2.1}$$

V objemovej jednotke vodiča je n voľných **elektrónov, takže** na elektróny v objemovej jednotke pôsobí celková sila

$$F_1 = ne\, v_d B \ . \tag{8.1.2.2}$$

Súčin ne však predstavuje objemovú hustotu náboja voľných elektrónov $\rho = ne$, a súčin $nev_d = J$ hustotu elektrického prúdu . Preto sa sila pôsobiaca na elektróny v objemovej jednotke vodiča vyjadruje vzorcom:

$$F_1 = JB \,. \tag{8.1.2.3}$$

Sila pôsobiaca vo vodiči s prierezom veľkosti S a elementárnou dĺžkou $d\ell$ má veľkosť:

$$dF_v = F_1 S\, d\ell = (JS)\, B\, d\ell = I\, B\, d\ell \tag{8.1.2.4}$$

Sila $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{v}_d \times \boldsymbol{B}$ pôsobiaca na elektróny vo vodiči **je kolmá** na vektor driftovej rýchlosti, a teda aj na priamy vodič (obrázok). Počas **krátkeho** časového intervalu Δt vyvolá zmenu hybnosti elektrónu

$$\Delta\boldsymbol{p} = m_e\, \Delta\boldsymbol{v}_d \,,$$

pričom zmena rýchlosti $\Delta\boldsymbol{v}_d$ a teda aj zmena hybnosti $\Delta\boldsymbol{p}$, má smer pôsobiacej sily, je kolmá na driftovú rýchlosť, čiže na pozdĺžnu os vodiča. Pri náraze na najbližší atóm - elektrón túto hybnosť atómu odovzdá. Obrovský počet voľných elektrónov v objemovej jednotke vyvolá makroskopicky pozorovateľnú silu.

Vzorec (8.1.2.4) sa zvyčajne uvádza vo vektorovom tvare, ako sila $d\boldsymbol{F}$ pôsobiaca na vodič elementárnej dĺžky $d\ell$, pričom tejto dĺžke sa pridáva vektorový charakter tak, že sa smer elementu $d\boldsymbol{\ell}$ stotožňuje so smerom vektora hustoty elektrického prúdu $\boldsymbol{J}$. Ak zavedieme jednotkový vektor $\boldsymbol{\eta}$ tak, aby bol s nimi súhlasne rovnobežný, môžeme napísať vzťahy:

$$d\boldsymbol{\ell} = d\ell\, \boldsymbol{\eta} \,, \qquad \boldsymbol{v}_d = v_d\, \boldsymbol{\eta} \,,$$

čo využijeme pri úprave výrazu vyjadrujúceho prúdový element $I\, d\boldsymbol{\ell}$:

$$I\, d\boldsymbol{\ell} = I\, d\ell\, \boldsymbol{\eta} = JS\, d\ell\, \boldsymbol{\eta} = \rho v_d S\, d\ell\, \boldsymbol{\eta} = v_d\, \boldsymbol{\eta}\, (\rho S\, d\ell) = \boldsymbol{v}_d\, dQ \,.$$

Sila pôsobiaca na náboj elementárnej veľkosti dQ , pohybujúci sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}_d$ v magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$ je

$$d\boldsymbol{F} = dQ\, \boldsymbol{v}_d \times \boldsymbol{B} \,, \tag{8.1.2.5}$$

z čoho vyplýva, že na úsek vodiča s elementárnou dĺžkou $d\ell$, ktorým tečie prúd I , pôsobí sila

$$d\boldsymbol{F} = I\, d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B} \,. \tag{8.1.2.6}$$

To je korektná vektorová formulácia tzv. **Ampérovej sily** pôsobiacej na element prúdovodiča.

Keď sa vrátime nazad a elektrónom opäť prisúdime záporné znamienko ich náboja, na výslednom vzorci sa nič nezmení, lebo elektróny sa vo vodiči pohybujú opačným smerom ako ich hypotetická náhrada, takže vo vzorci (8.2.1.5) sa zmení smer driftovej rýchlosti, ale súčasne aj znamienko náboja. Preto sa smer sily d$\boldsymbol{F}$ nezmení.

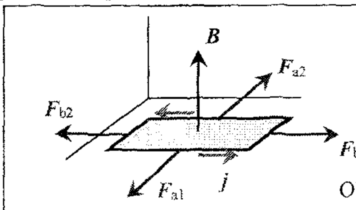
Príklad 8.1.2.1 Priamy vodič, ktorým tečie elektrický prúd I, je horizontálne uložený v homogénnom magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$, ktorá má tiež horizontálny smer, ale súčasne je kolmá na priamy vodič. Vodič má dĺžku ℓ a hmotnosť m. Aký veľký prúd musí tiecť vodičom, aby sa jeho tiaž kompenzovala magnetickou silou? Po vyjadrení všeobecného vzťahu vypočítajte silu pre hodnoty $B = 0{,}01$ T, $m = 0{,}1$ kg, $\ell = 2$ m, $g = 10$ m/s^2.

Riešenie $mg = \int_0^{\ell} I\, \mathrm{d}\ell B = IB\ell$, odkiaľ $I = \dfrac{mg}{B\ell} = \dfrac{0{,}1 \cdot 10}{2 \cdot 0{,}01} = 50\,\mathrm{A}$

Príklad 8.1.2.2 Vodič s dĺžkou $\ell = 1$ m a hmotnosťou $m = 0{,}5$ kg sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0{,}01$ T. Tečie ním prúd $I = 10$ A. Akým zrýchlením sa vodič začne pohybovať, keď priamy vodič je uložený kolmo na vektor $\boldsymbol{B}$?

Riešenie $\mathrm{d}F = I\mathrm{d}\ell B$, resp. $F = I\ell B$, zrýchlenie $a = F / m = (10 \cdot 1 \cdot 0{,}01)/0{,}5 = 0{,}2$ m/s^2.

Príklad 8.1.2.3 Vypočítajte výslednú silu pôsobiacu na uzavretú prúdovú slučku, ktorá má tvar obdĺžnika so stranami ktoré majú dĺžky a resp. b. Slučkou tečie prúd I (hustota prúdu $\boldsymbol{J}$) a rovina slučky je kolmá na vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ homogénneho magnetického poľa.



Obr. 8.1.2.2

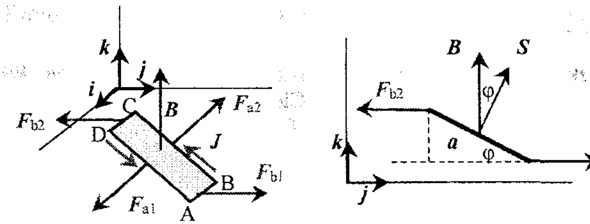
Riešenie Využijeme vzorec (8.1.2.6), na základe ktorého zistíme, že sily pôsobiace na jednotlivé strany obdĺžnikovej slučky, čo do smeru, sú na obrázku správne nakreslené. Sily pôsobiace na protiľahlé strany sú rovnako veľké, ale majú opačný smer, takže ich vektorový súčet sa rovná nule. Preto sa výsledná sila pôsobiaca na slučku rovná nule.

Kontrolné otázky

1. *Aký je mikroskopický mechanizmus pôsobenia sily na vodiče prúdu v magnetickom poli?*
2. *Akým vzťahom sa vyjadruje sila pôsobiaca na elementárnu dĺžku vodiča v magnetickom poli?* $\times B = \int^{\ell} I . dl . B$
3. *Pri akom vzájomnom smere vodiča a magnetickej indukcie je sila maximálna?*
4. *Aká sila pôsobí na uzavretú prúdovú slučku v homogénnom magnetickom poli?* O

8.1.3 Moment sily pôsobiaci na prúdovú slučku

Ako vyplynulo z výsledku príkladu 8.1.2.3, v homogénnom magnetickom poli výsledná sila pôsobiaca na prúdovú slučku (uzavretý elektrický obvod) sa rovná nule. V spomenutom príklade všetky sily ležali v jednej rovine, lebo vektor magnetickej indukcie bol na rovinu slučky kolmý, t.j. vektor $\boldsymbol{B}$ a normála na rovinu slučky boli rovnobežné (bol medzi nimi nulový uhol).



Obr. 8.1.3.1

Ak tento uhol nie je nulový, na slučku pôsobí dvojica síl. Tá má tendenciu slučku pootočiť do polohy, v ktorej moment dvojice prestane pôsobiť, t.j do polohy, keď je uhol nulový - teda keď plocha slučky je kolmá na vektor $\boldsymbol{B}$. Na obrázku je nakreslená obdĺžniková slučka, ako v príklade 8.1.2.3, t.j. slučka so stranami veľkosti a , b, pričom predpokladáme, že ňou tečie prúd veľkosti I a to od vrcholu A k vrcholu B atď. Sily $\boldsymbol{F}_{a1}$ a $\boldsymbol{F}_{a2}$ sa navzájom rušia, ale sily $\boldsymbol{F}_{b1}$ a $\boldsymbol{F}_{b2}$ tvoria dvojicu, ktorej moment M_F sa rovná súčinu veľkosti jednej z nich a vzdialenosti ich vektorových priamok:

$$M_F = F_{b1}\, a \sin\varphi = IB\, ba \sin\varphi = ISB \sin\varphi \; . \tag{8.1.3.1}$$

Pritom boli použité vzťahy - pre silu $F_{b1} = IBb$, a pre plošný obsah slučky $S = ab$. Moment dvojice síl podľa obrázku má smer jednotkového vektora $\boldsymbol{i}$, takže rovnicu (8.1.3.1) vo vektorovom tvare môžeme zapísať takto:

$$\boldsymbol{M}_F = ISB \sin\varphi \; \boldsymbol{i} \, .$$

Slučke možno priradiť vektor $\boldsymbol{S}$, ktorého veľkosť sa rovná plošnému obsahu slučky ab, pričom jeho smer sa určí na základe pravidla pravej ruky, teda súvisí so "smerom prúdu" v slučke (pozri poznámku v paragrafe 7.1.1). Vektor $\boldsymbol{S}$ zviera s vektorom $\boldsymbol{B}$ uhol φ , ktorý vystupuje vo vzorci (8.1.3.1). To umožňuje vyjadriť moment dvojice síl $\boldsymbol{M}_F$ ako vektorový súčin:

$$\boldsymbol{M}_F = I\,\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} \, , \tag{8.1.3.2}$$

lebo výsledkom vektorového súčinu $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B}$ je vektor, ktorý má smer jednotkového vektora $\boldsymbol{i}$.

Tento výsledok platí pre uzavretý obvod ľubovoľného tvaru, pokiaľ sa celý nachádza v homogénnom poli. Toto tvrdenie uvádzame bez dôkazu, dôkaz je matematicky náročný.

Príklad 8.1.3.1 Cievkou s $n = 50$ závitmi a polomerom $R = 3$ cm, tečie prúd veľkosti $I = 4$ A. Aký maximálny moment síl (krútiaci moment) môže pôsobiť na cievku v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0{,}02$ T ?
Riešenie Veľkosť krútiaceho momentu sa vypočíta pomocou vzťahu (8.1.3.2), ktorý prispôsobíme pre $n = 50$ závitov - $M_F = nISB \sin\varphi$. Maximálna veľkosť momentu M sa dosiahne pri $\sin\varphi = 1$, t.j. keď vektory $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{B}$ sú na seba kolmé. Vtedy $M_F = 10^{-2}$ N·m .

Príklad 8.1.3.2 Elektromotor má pri 3000 r/min zabezpečiť prenos výkonu $P = 25$ kW. Aký krútiaci moment T je na to potrebný? Cievka elektromotora sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0{,}1$ T a tečie ňou prúd $I = 20$ A a každý jej závit má efektívnu plochu s obsahom 400 cm^2. Koľko závitov musí cievka mať?
Riešenie a) Medzi výkonom P, krútiacim momentom T a uhlovou frekvenciou ω platí vzťah $P = T\omega$, odkiaľ vyplýva, že krútiaci moment musí mať hodnotu $T = (25\cdot10^3 \text{ W})/(2\pi\cdot50 \text{ s}^{-1}) \cong 80$ N·m.
b) Pre maximálny krútiaci moment cievky platí $T = nISB$, odkiaľ vypočítame $n = 1000$ závitov.

Kontrolné otázky

1. *Akým vzťahom sa vyjadruje moment sily pôsobiaci na prúdovú slučku v homogénnom magnetickom poli?*
2. *Závisí veľkosť momentu sily pôsobiaceho na prúdovú slučku od jej tvaru?*
3. *V akej polohe slučky je momet sily na ňu pôsobiaci maximálny?*

8.2 Magnetické pole v okolí vodičov prúdu

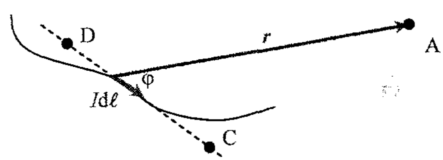
Kľúčové slová
Biotov-Savartov-Laplaceov vzorec, cirkulácia vektora magnetickej indukcie, magnetická konštanta, permeabilita vákua, magnetický tok, druhá Maxwellova rovnica.

8.2.1 Biotov-Savartov-Laplaceov vzorec, magnetická konštanta

Keď cez vodič necháme tiecť elektrický prúd, v jeho okolí vznikne magnetické pole. Prejaví sa pôsobením na magnetku (kompas), alebo na pohybujúcu sa elektricky nabitú časticu. Veľkosť i vlastnosti magnetického poľa vytvoreného elektrickým prúdom preskúmali v roku 1820 francúzski vedci J. Biot a F. Savart. Ich experimentálne výsledky zovšeobecnil a matematicky sformuloval P. S. Laplace, a možno ich sformulovať takto: dĺžkový element $\mathrm{d}\ell$, ktorým tečie elektrický prúd I, prispieva k indukcii magnetického poľa elementárnym príspevkom

$$\mathrm{d}B = k\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin\varphi \tag{8.2.1.1}$$

kde r je vzdialenosť prúdového elementu $I\mathrm{d}\ell$ od bodu v ktorom sa určuje veľkosť magnetickej indukcie a φ je uhol medzi dĺžkovým elementom $\mathrm{d}\ell$ a spojnicou elementu s týmto bodom; k je konštanta úmernosti.



Obr. 8.2.1.1

Príspevok prúdového elementu k magnetickej indukcii sa zmenšuje s druhou mocninou vzdialenosti a je úmerný veľkosti elektrického prúdu. Podľa vzorca (8.2.1.1) prúdový element $I\mathrm{d}\ell$ neprispieva k magnetickému poľu v bodoch ležiacich na priamke, ktorá je jeho predĺžením (napr. body C a D na obrázku). Biot a Savart určili aj smer elementárneho príspevku $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ a zistili, že je kolmý na rovinu určenú vektormi $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ a $\boldsymbol{r}$ (vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ má smer vektora hustoty prúdu vo vodiči). V prípade podľa obrázku, vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ predstavujúci príspevok prúdového elementu $I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, smeruje pred obrázok k čitateľovi. Má smer zhodný so smerom vektora, ktorý je výsledkom vektorového súčinu $I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{r}$. Príspevok $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ ako vektorovú veličinu možno preto vyjadriť vzťahom

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = k\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{8.2.1.2}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor začínajúci v prúdovom elemente $I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ a končiaci v bode, v ktorom určujeme magnetickú indukciu. Pre veľkosť príspevku $\mathrm{d}B$ z tohto vzorca vyplýva vzorec (8.2.1.1), čo vyplýva z definície vektorového súčinu.

Ustálený prúd môže tiecť iba uzavretým elektrickým obvodom, pričom každý prúdový element obvodu prispieva k výslednému magnetickému poľu vo všetkých bodoch okolo vodiča. Vektor magnetickej indukcie v ľubovoľnom bode v okolí vodiča preto získame integráciou cez celý uzavretý obvod:

$$\boldsymbol{B} = k\oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times \boldsymbol{r}}{r^3} \; . \tag{8.2.1.3}$$

Číselná hodnota konštanty k závisí od voľby jednotiek veličín vystupujúcich vo vzorci. Určuje sa experimentálne. Zvolí sa vhodný tvar vodiča, podľa vzorca (8.2.1.3) sa vypočíta veľkosť vektora $\boldsymbol{B}$ vo vhodnom bode a potom sa v tomto bode jeho veľkosť zmeria. Pri meraní veľkosti sa využije definičný vzorec magnetickej indukcie (8.1.1.1). Konfrontáciou vypočítanej a nameranej hodnoty sa získa veľkosť konštanty k. Pri používaní jednotiek sústavy SI pre konštantu vychádza

$$k = 10^{-7}\ \text{SI jednotiek} \; . \tag{8.2.1.4}$$

Konštanta sa však vyjadruje v tvare

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi},$$

kde μ_0 je **magnetická konštanta**, nazývaná aj **permeabilita vákua**. Podľa vzorca (8.2.1.4) má hodnotu

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ (\text{kg m})/(\text{A}^2\text{s}^2) \; . \tag{8.2.1.5}$$

Biotov-Savartov-Laplaceov (BSL) vzorec na výpočet magnetickej indukcie v okolí prúdovodičov tak nadobudne tvar

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times \boldsymbol{r}}{r^3} \; . \tag{8.2.1.6}$$

Kontrolné otázky

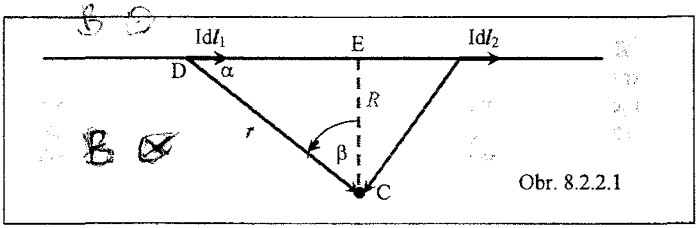
1. *S ktorou mocninou vzdialenosti od vodiča sa zmenšuje magnetická indukcia?*
2. *Aký smer má vektor magnetickej indukcie v okolí prúdovodiča?*
3. *Akú veľkosť v SI má konštanta úmernosti v BSL vzorci?*
4. *Čo je to magnetická konštanta a akú má veľkosť v SI ?*
5. *Vyjadrite BSL vzorec vo vektorovom tvare.*
6. *Kde má začiatok a kde koniec polohový vektor vystupujúci v BSL vzorci?*

8.2.2 Magnetické pole v okolí veľmi dlhého priameho vodiča

Pomocou Biotovho-Savartovho-Laplaceovho (BSL) vzorca (8.2.1.6) možno pomerne ľahko vypočítať magnetickú indukciu v okolí vodičov jednoduchých tvarov. Veľmi dlhý vodič, ktorý možno považovať prakticky za nekonečne dlhý, je jedným z takýchto prípadov. BSL vzorec predpokladá súčet (integrál) veľmi malých elementov

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3},$$

ktoré treba sčitovať vektorovo, takže si treba všímať nie iba ich veľkosť, ale aj vzájomný smer. Sčítanie sa zjednoduší, ak elementy majú rovnaký smer. Tak je tomu aj v prípade veľmi dlhého priameho vodiča. Keď počítame magnetickú indukciu v bode C, príspevky $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2$ od prúdových elementov $I\mathrm{d}l_1$ a $I\mathrm{d}l_2$ nakreslených na obrázku, sú rovnobežné, kolmé na rovinu nákresne a smerujú za ňu.



Obr. 8.2.2.1

Preto stačí sčítať veľkosti všetkých príspevkov (skalárnych)

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell \sin\alpha}{r^2}. \tag{8.2.2.1}$$

V tomto vzťahu vystupujú premenné r, α, a navyše ako diferenciál vystupuje $\mathrm{d}\ell$. Preto pred integráciou tohto vzťahu treba premenné zjednotiť. Ako najvhodnejšia premenná sa javí uhol β (obrázok). Pomocou tohto uhla a pomocou vzdialenosti R bodu C od vodiča vyjadríme ostatné premenné:

$$\sin\alpha = \cos\beta \qquad r = \frac{R}{\cos\beta}.$$

Aj diferenciál $\mathrm{d}\ell$ treba upraviť. Ak vzdialenosť medzi bodmi D a E označíme písmenom ℓ, potom platí vzťah

$$\ell = R\ \mathrm{tg}\beta,$$

odkiaľ získame

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\beta} = \frac{R}{\cos^2\beta} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\ell = \frac{R}{\cos^2\beta}\mathrm{d}\beta.$$

Dosadením substitúcií do vzorca (8.2.2.1) dostaneme vzťah:

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \cos\beta}{\left(\frac{R}{\cos\beta}\right)^2} \frac{R}{\cos^2\beta} d\beta = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R} \cos\beta \, d\beta$$

(8.2.2.2)

Výsledok závisí od integračných hraníc, t.j. môžeme vypočítať magnetickú indukciu vyvolanú ľubovoľne dlhým úsekom vodiča. Významný výsledok dostaneme, ak budeme integrovať pozdĺž nekonečne dlhého vodiča, takže integračnými hranicami budú hodnoty $-\pi/2$, a $+\pi/2$:

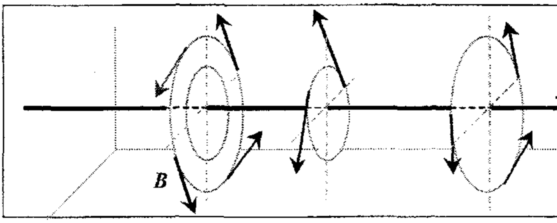
$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\beta \, d\beta = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R} 2 ,$$

a po konečnej úprave

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi R} .$$

(8.2.2.3)

Vektor $\boldsymbol{B}$ má takúto veľkosť vo všetkých bodoch vzdialených o R od vodiča, teda na celej kružnici (dokonca celom valci) s týmto polomerom. Osobitný komentár si však zaslúži jeho smer. V bode C na obrázku 8.2.2.1 smeruje kolmo za nákresňu, ale na opačnej strane vodiča, v symetricky položenom bode, smeruje pred nákresňu, čo vyplýva z BSL vzorca. Všeobecne vektor $\boldsymbol{B}$ má vždy smer dotyčnice kružnice, ktorej stred leží vo vodiči. Veľkosť vektora $\boldsymbol{B}$ sa s rastúcou vzdialenosťou od vodiča zmenšuje.



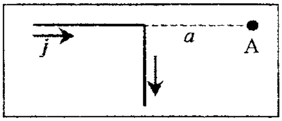
Obr. 8.2.2.2

Na obrázku je nakreslených niekoľko vektorov magnetickej indukcie, v rôznych polohách vzhľadom na vodič, pri rôznych kružniciach. Kružnice predstavujú **indukčné čiary**, ktoré sú vo všeobecnosti definované ako krivky, ktorých dotyčnica v danom bode je rovnobežná s vektorom magnetickej indukcie. Nakreslenie indukčných čiar v okolí objektu vytvárajúceho magnetické pole slúži na zobrazenie tohto poľa.

Príklad 8.2.2.1 Aký veľký elektrický prúd musí tiecť veľmi dlhým vodičom, aby vo vzdialenosti 10 cm od vodiča vzniklo magnetické pole s indukciou $B = 2{\cdot}10^{-5}$ T ? (Takáto veľkosť indukcie približne zodpovedá zemskému magnetickému poľu.)
Riešenie Prúd vypočítame zo vzorca (8.2.2.3):
$I = (B{\cdot}\, 2\pi R)/\mu_o = (2{\cdot}10^{-5}{\cdot}2\pi{\cdot}10^{-1})/(4\pi{\cdot}10^{-7}) = 10$ A .

Príklad 8.2.2.2 Priamy vodič, ktorým tečie prúd $I = 10$ A, je zalomený do pravého uhla. Aká je veľkosť a smer vektora magnetickej indukcie v predĺžení jednej časti vodiča (v bode A), vo vzdialenosti $a = 10$ cm od zalomenia?

Riešenie



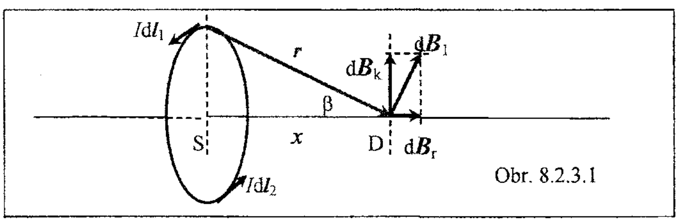
Časť vodiča ktorá smeruje k bodu A, neprispieva k magnetickému poľu v tomto bode, lebo vektory $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ v tejto časti sú rovnobežné s polohovými vektormi $\boldsymbol{r}$ vedenými od nich do bodu A. Zvyšnú časť vodiča možno považovať za polovicu nekonečne dlhého vodiča, takže vodič v bode A vytvára magnetické pole s indukciou $B = 0{,}5\,(\mu_o I)/(2\pi a) = (4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10)/(4\pi\cdot 10^{-1}) = 10^{-5}$ T.

Kontrolné otázky

1. *Aký smer má vektor magnetickej indukcie v okolí veľmi dlhého priameho vodiča?*
2. *S ktorou mocninou vzdialenosti od vodiča sa zmenšuje magnetická indukcia?*
3. *Čo sú to indukčné čiary a na čo slúžia?*

8.2.3 Magnetické pole na osi kruhového závitu

V okolí kruhového závitu možno jednoduchými matematickými prostriedkami vypočítať magnetickú indukciu iba na osi závitu. Na výpočet indukcie mimo osi sú potrebné špeciálne matematické funkcie. Výpočet na osi závitu poslúži pri ďalších výpočtoch, napríklad na výpočet magnetickej indukcie v solenoide. Aj v tomto prípade sa vychádza z Biotovho-Savartovho-Laplaceovho (BSL) vzorca (8.2.1.6), pričom treba vhodne vyjadriť premenné veličiny v ňom vystupujúce. Magnetickú indukciu budeme počítať vo vzdialenosti x od roviny závitu, ktorý má polomer R a tečie ním prúd I.



Obr. 8.2.3.1

Prúdový element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ vytvára v bode D magnetickú indukciu $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1$, pričom tento elementárny vektor je kolmý na rovinu určenú vektormi $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ a $\boldsymbol{r}$, ktoré sú na seba kolmé. Pre jeho veľkosť podľa BSL vzorca platí:

$$\mathrm{d}B_1 = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{(x^2+R^2)} \qquad (8.2.3.1)$$

Aj prúdový element $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$, ktorý leží na protiľahlej strane kružnice, prispieva k magnetickému poľu, pričom príspevky oboch prúdových elementov majú zložky $\mathrm{d}\boldsymbol{B}_r$

rovnobežné s osou, ktoré sa sčítajú, ale aj zložky $d\boldsymbol{B}_k$ na os kolmé, ktoré sa navzájom kompenzujú. Preto v bode D treba uvažovať iba so zložkami rovnobežnými s osou závitu, ktoré majú veľkosť

$$dB_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\ell}{(x^2+R^2)}\sin\beta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\ell}{(x^2+R^2)}\frac{R}{(x^2+R^2)^{1/2}}\,. \tag{8.2.3.2}$$

Integráciou cez celý kruhový vodič získame veľkosť magnetickej indukcie v bode D :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,R}{(x^2+R^2)^{3/2}}\oint d\ell = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,R}{(x^2+R^2)^{3/2}}2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{R^3}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,. \tag{8.2.3.3}$$

S rastúcou vzdialenosťou od závitu klesá veľkosť magnetickej indukcie s treťou mocninou vzdialenosti. Keď si uvedomíme, že platí $\sin\beta = \dfrac{R}{(x^2+R^2)^{1/2}}$, môžeme veľkosť magnetickej indukcie vyjadriť vzťahom

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\beta\,. \tag{8.2.3.4}$$

Vektor $\boldsymbol{B}$ v bode D je rovnobežný s osou, pričom jeho smer je určený vektorovým súčinom v BSL vzorci. Jeho smer závisí od toho, ako tečie prúd vo vodiči. Podľa situácie na obrázku, vektor $\boldsymbol{B}$ smeruje vpravo. Keby však prúd vo vodiči tiekol opačným smerom, aj vektor $\boldsymbol{B}$ by mal opačný smer. Dôležité je uvedomiť si, že vektor $\boldsymbol{B}$ má rovnaký smer pozdĺž celej osi, tak povediac - pred, i za závitom.

Uprostred kruhového závitu je veľkosť magnetickej indukcie najväčšia:

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2R}\,, \tag{8.2.3.5}$$

lebo pre stred kružnice platí $\sin\beta = 1$.

Príklad 8.2.3.1 Dva kruhové závity s polomermi $R_1 = R$, $R_2 = 2R$ sú uložené na spoločnej osi v jednej rovine. Prvým závitom tečie prúd I_1 . Aký prúd I_2 musí tiecť druhým závitom, aby magnetická indukcia vo vzdialenisti x od ich roviny bola nulová? Aký je pomer týchto prúdov pre $x = 0$ a pre $x \to \infty$?

Riešenie Ak má byť indukcia nulová, vektory indukcie $\boldsymbol{B}_1$ a $\boldsymbol{B}_2$ vyvolané svojimi závitmi musia mať opačný smer, preto v závitoch musia prúdy tiecť opačnými smermi. Z rovnosti veľkostí magnetických indukcií - na základe vzorca (8.2.3.3) - vyplýva

$$I_1\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} = I_2\frac{4R^2}{(x^2+4R^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4}\frac{(x^2+4R^2)^{3/2}}{(x^2+R^2)^{3/2}}I_1$$

Ak $x = 0$, $I_2 = 2I_1$. Pre $x \to \infty$ vychádza $I_2 \to (1/4)I_1$.

Príklad 8.2.3.2 V akej vzdialenosti od roviny kruhového závitu s polomerom R je veľkosť magnetickej indukcie osemkrát menšia v porovnaní s indukciou uprostred závitu?

Riešenie Výsledok získame porovnaním vzorcov pre indukciu uprostred závitu a vo vzdialenosti x:

$$\frac{1}{8}\frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{R^3}{(x^2+R^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{x = \sqrt{3}R}$$

Kontrolné otázky

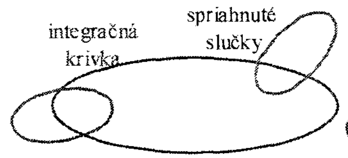
1. *Aký smer má vektor magnetickej indukcie na osi kruhového závitu?*
2. *Má vektor indukcie na druhej strane závitu opačný smer?*
3. *V ktorom bode na osi závitu je magnetická indukcia najväčšia?*
4. *S ktorou mocninou vzdialenosti od roviny závitu sa zmenšuje veľkosť magnetickej indukcie?*

8.2.4 Cirkulácia vektora magnetickej indukcie

Pod cirkuláciou vektorovej veličiny $A(x,y,z) \equiv \boldsymbol{A(r)}$, ktorá závisí od priestorových súradníc, sa rozumie jej krivkový integrál po uzavretej krivke

$$\oint A(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (8.2.4.1)$$

kde d$\boldsymbol{r}$ predstavuje elementárne posunutie po integračnej krivke. Medzi vektorovou funkciou a elementárnym posunutím je skalárny súčin, čo znamená, že výsledkom cirkulácie vektorovej funkcie je skalárna veličina. Cieľom tohto paragrafu je ukázať (nie dôsledne dokázať), že cirkulácia vektora magnetickej indukcie - stručne cirkulácia vektora $\boldsymbol{B}$ - súvisí s elektrickými prúdmi (prúdovými slučkami), ktoré sú s integračnou krivkou spriahnuté ako susedné ohnivká reťaze.



Obr. 8.2.4.1

Všeobecný dôkaz je matematicky náročný, preto sa obmedzíme na dva špeciálne prípady, na ktorých si overíme platnosť všeobecného vzorca

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \pm\mu_0 I, \qquad (8.2.4.2)$$

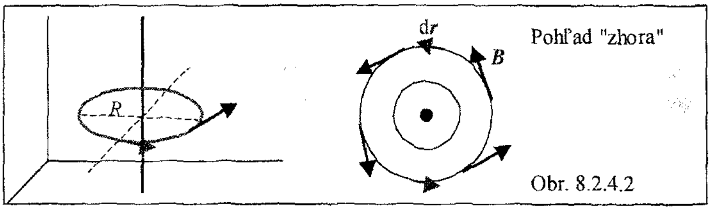
v ktorom I je súčet všetkých elektrických prúdov spriahnutých s integračnou krivkou a μ_0 magnetická konštanta. Znamienko závisí od smeru integrácie - pri integrácii v opačnom smere, zmení sa aj znamienko výsledku na opačné. Ak je integračná krivka spriahnutá s viacerými prúdmi, na pravej strane vzorca (8.2.4.2) vystupuje ich súčet.

Cirkuláciu vektora $\boldsymbol{B}$ budeme počítať v prvom prípade po kružnici okolo veľmi dlhého priameho vodiča, v druhom prípade po osi kruhového závitu, teda v prípadoch, ktoré boli opísané v predchádzajúcich paragrafoch.

Podľa výsledku (8.2.2.3), vo vzdialenosti R od dlhého priameho vodiča ktorým tečie prúd I, vektor magnetickej indukcie má veľkosť

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \,, \tag{8.2.4.3}$$

pričom vektor $\boldsymbol{B}$ má smer dotyčnice kružnice, ako je nakreslené na obrázku.



Obr. 8.2.4.2

Ak za integračnú krivku zvolíme práve takúto kružnicu s polomerom R, potom cirkuláciu vektora $\boldsymbol{B}$ možno vypočítať pomerne jednoducho:

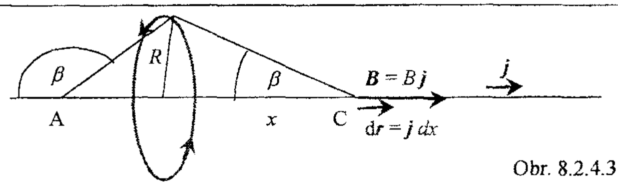
$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\boldsymbol{\tau}\right) \cdot (\mathrm{d}l\, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \oint \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I \tag{8.2.4.4}$$

Kladné znamienko je výsledkom voľby smeru integrácie, lebo vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ mal v každom bode súhlasný smer s vektorom $\boldsymbol{B}$. Oba vektory bolo možné vyjadriť pomocou spoločného jednotkového vektora $\boldsymbol{\tau}$ ($\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\tau}\, \mathrm{d}l$). Pri integrácii v opačnom smere má vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ opačný smer ako vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$, ich skalárny súčin, a tým aj výsledok integrácie, je záporný.

V druhom špeciálnom prípade budeme integrovať pozdĺž osi kruhového závitu, kde podľa vzorca (8.2.3.4) magnetická indukcia má hodnotu

$$B_{\equiv} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\beta \,,$$

pričom β predstavuje zorný uhol pod ktorým vidíme závit z bodu v ktorom určujeme indukciu B (t.j. uhol medzi osou závitu a spojnicou bodu na osi s bodom na obvode kruhového závitu).



Obr. 8.2.4.3

Dosadením do integrálu, ktorý vyjadruje cirkuláciu vektora $\boldsymbol{B}$, dostaneme

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint\left(\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\beta\,\boldsymbol{j}\right)\cdot(\boldsymbol{j}\,dx)\,.$$

Premennú x je vhodné vyjadriť pomocou uhla β, čo dosiahneme na základe vzťahu

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{R}{x} \quad\Rightarrow\quad x = R\frac{\cos\beta}{\sin\beta} \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{d\beta} = -\frac{R}{\sin^2\beta} \quad\Rightarrow\quad dx = -\frac{R}{\sin^2\beta}\,d\beta\,.$$

Dosadením substitúcie dostaneme výraz

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{\mu_0 I}{2R}\oint \sin^3\beta\,\frac{R}{\sin^2\beta}\,d\beta = -\frac{\mu_0 I}{2}\oint \sin\beta\,d\beta \tag{8.2.4.5}$$

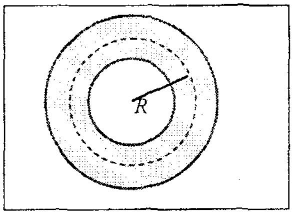
Na obrázku 8.2.4.3 smeruje vektor $\boldsymbol{B}$ na pravú stranu, rovnako ako jednotkový vektor $\boldsymbol{j}$. Ak chceme aby výsledok bol kladný, aj vektor $d\boldsymbol{r}$ musí mať rovnaký smer, teda integrovať musíme z ľavej strany doprava. Integrál po uzavretej krivke bude v tomto prípade z hľadiska premennej x znamenať integráciu od $-\infty$ po $+\infty$, a z hľadiska premennej β od π po 0, lebo bodu A zodpovedá tupý uhol β, bodu C ostrý uhol. Pri takýchto integračných hraniciach dostaneme

$$\int_{\pi}^{0} \sin\beta\,d\beta = -2\ ,$$

takže pre cirkuláciu vektora $\boldsymbol{B}$ opäť dostávame výsledok zhodný so vzťahom (8.2.4.2). Zmenou smeru integrácie dostaneme výsledok s opačným znamienkom.

Na záver treba zdôrazniť, že tento vzorec platí všeobecne, pri integrácii po uzavretej krivke ľubovoľného tvaru. Vzorec možno výhodne využiť na výpočet magnetickej indukcie v rôznych prípadoch, najmä keď sa veľkosť magnetickej indukcie pozdĺž integračnej krivky nemení.

✓*Príklad* 8.2.4.1 Vypočítajte magnetickú indukciu v toroidálnej cievke, ktorá má N závitov a tečie ňou prúd I. Toroid má polomer R.



Riešenie Cirkuláciu vektora $\boldsymbol{B}$ budeme počítať po kružnici vyznačenej na obrázku čiarkovane. Z dôvodov symetrie magnetická indukcia má v každom bode rovnakú veľkosť B, a integrujeme po kružnici s obvodom $2\pi R$, takže výsledok integrálu je $B\,2\pi R$. Tento súčin sa rovná N násobku prúdu pretekajúceho cievkou, takže pre magnetickú indukciu získame výsledok
$B = (N\mu_0 I)/(2\pi R)$.

Kontrolné otázky

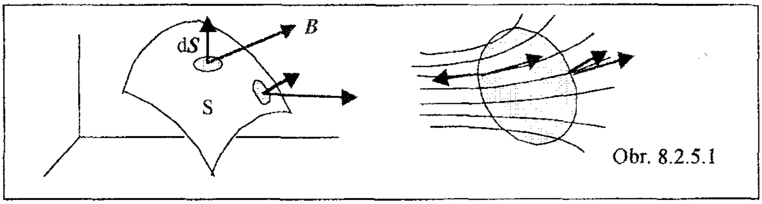
1. Kedy je integračná krivka spriahnutá s prúdovou slučkou?
2. Čo sa rozumie pod cirkuláciou vektorovej funkcie?
3. Čomu sa rovná cirkulácia vektora magnetickej indukcie?
4. Čomu sa rovná cirkulácia vektora intenzity elektrického poľa v elektrostatickom poli?
5. Od čoho závisí znamienko výsledku cirkulácie vektorovej veličiny?

8.2.5 Magnetický tok, 2. Maxwellova rovnica

Cirkulácia vektora magnetickej indukcie, ktorej bol venovaný predchádzajúci paragraf, vystihuje jednu dôležitú stránku tejto veličiny, resp. magnetického poľa. Ďalšia významná vlastnosť súvisí s veličinou *magnetický tok*. Magnetický tok (značka Φ) je definovaný ako plošný integrál vektora magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$:

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} . \qquad (8.2.5.1)$$

V integráli sa uplatňuje skalárny súčin vektora $\boldsymbol{B}$ s vektorom predstavujúcim elementárnu plôšku $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. To znamená, že ak sú tieto vektory na seba kolmé, magnetický tok cez plôšku $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ sa rovná nule. Indukčné čiary vtedy plôšku nepretínajú.



Obr. 8.2.5.1

Jednotkou magnetického toku je **weber** (značka Wb).

Experimentálne bolo overené, že magnetický tok cez uzavretú plochu sa vždy rovná nule. Na pravej strane obrázku je znázornený vzájomný smer vektorov $d\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{B}$ na protiľahlých stranách uzvretej plochy. Na jednej strane zvierajú ostrý uhol, ich skalárny súčin je kladný, na opačnej tupý uhol, a skalárny súčin je záporný. Súčet parciálnych magnetických tokov cez všetky elementárne plôšky uzavretej plochy sa rovná nule. Inými slovami - indukčné čiary nemajú začiatok ani koniec, koľko indukčných čiar do uzavretej plochy vojde, toľko musí z nej aj výjsť. O poli takéhoto charakteru sa hovorí, že je **bezžriedlové**. Uvedenú skutočnosť vyjadruje vzťah

$$\oint\!\!\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \quad . \tag{8.2.5.2}$$

Je to ďalšia zo štyroch **Maxwellových rovníc**, ale vyjadrená v **integrálnom tvare**. Jej diferenciálny tvar sa získa pomocou Gaussovej integrálnej vety, t.j. premenou plošného integrálu na objemový:

$$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{B}\, d\tau = 0 \tag{8.2.5.3}$$

Keďže táto rovnica platí pri ľubovoľnom tvare a veľkosti uzavretej plochy, teda pri ľubovoľných integračných hraniciach, nule sa musí rovnať skalárna funkcia div$\boldsymbol{B}$:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{8.2.5.4}$$

čo je **diferenciálny tvar (druhej) Maxwellovej rovnice.**

V súvislosti s touto rovnicou sa v teórii elektromagnetického poľa zavádza **vektorový potenciál** $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, ako vektorová funkcia priestorových premenných, ktorý s magnetickou indukciou súvisí vzťahom

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = (\nabla\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B} \tag{8.2.5.5}$$

Ďalšia aplikácia nabla operátora - a to formou divergencie na túto rovnicu - sa rovná nule, t.j. div rot $\boldsymbol{A}$ = $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$ (pozri vzorec (1.3.6.3) vo Vektorovom počte). To znamená, že takto zavedený vektorový potenciál automaticky spĺňa podmienku kladenú na vektor $\boldsymbol{B}$ Maxwellovou rovnicou (8.2.5.4).

Vektorový potenciál je paralelou skalárneho potenciálu φ elektrického poľa, ktorého intenzita sa vyjadruje pomocou gradientu (skalárneho) potenciálu

$$\boldsymbol{E} = -\ \mathrm{grad}\ \varphi = -\ \nabla\varphi$$

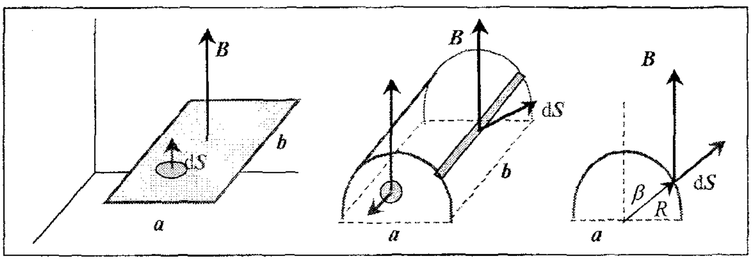
$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}\ .$$

Konkrétne **v okolí vodičov** elektrického prúdu sa **vektorový potenciál** vyjadruje vzťahom

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r}\ . \qquad (8.2.5.6)$$

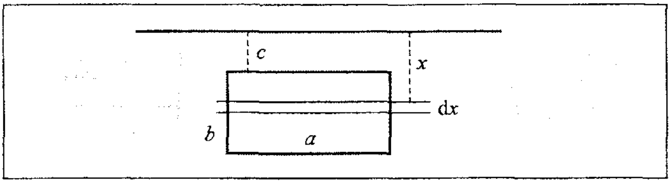
Aplikovaním nabla operátora formou rotácie na tento výraz dostaneme Biotov-Savartovov-Laplaceov vzorec.

Príklad 8.2.5.1 Vypočítajte magnetický tok cez plochu ohraničenú obdĺžnikovým závitom so stranami a, b , ktorý sa nachádza v homogénnom magnetickom poli, ktorého vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ je na rovinu závitu kolmý. Tok počítajte najprv cez rovinnú plochu preloženú závitom, potom cez valcovú plochu podľa obrázku. Výsledky porovnajte.



Riešenie Magnetický tok v prvom prípade sa rovná súčinu veľkosti vektora magnetickej indukcie s plošným obsahom obdĺžnika: $\phi_1 = BS_1 = Bab$. V druhom prípade tok cez základne (pol)valca sa rovná nule, lebo vektory d$\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{B}$ sú tam na seba kolmé. Pri výpočte toku cez plášť vypočítame najprv elementárny tok cez pásik s plošným obsahom $\mathrm{d}S = b\,R\,\mathrm{d}\beta$, pričom si uvedomíme, že vektor $\boldsymbol{B}$ zviera s vektorom d$\boldsymbol{S}$ uhol β.
Preto $\mathrm{d}\phi = \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = B\,bR\cos\beta\,\mathrm{d}\beta$. Integrovať treba v hraniciach od $-(\pi/2)$ po $+(\pi/2)$, pričom integrál z funkcie $\cos\beta$ v tomto intervale sa rovná číslu 2. Pre magnetický tok tak dostaneme výsledok $\phi_2 = 2BbR = Bab$, lebo $R = a/2$.
Výsledky sú rovnaké, z čoho vyplýva významná poučka, že **v homogénnom poli pri výpočte magnetického toku cez plochu ohraničenú uzavretou krivkou výsledok nezávisí od tvaru tejto plochy**, ale od ohraničujúcej krivky.

Príklad 8.2.5.2 Vypočítajte magnetický tok cez plochu ohraničenú obdĺžnikovým závitom ležiacim v jednej rovine s veľmi dlhým priamym vodičom, ktorým tečie prúd $I = 5$ A . Obdĺžnikový závit má strany s dĺžkami $a = 20$ cm, $b = 5$ cm, pričom dlhšia strana je rovnobežná s vodičom a vzdialená od neho $c = 5$ cm .



Riešenie Vo vzdialenosti x od veľmi dlhého priameho vodiča má magnetická indukcia veľkosť $B = (\mu_0 I)/(2\pi x)$. Elementárny magnetický tok $d\Phi = B\,dS$ cez elementárnu plôšku s veľkosťou $dS = a\,dx$ sa rovná $d\Phi = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x} a\,dx$. Integráciou v hraniciach premennej x od c po $c+b$ dostaneme výsledok $\Phi = \dfrac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \dfrac{c+b}{c}$

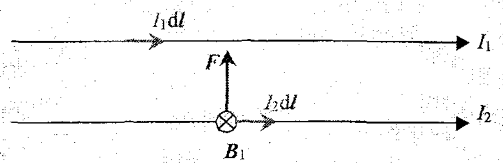
Výsledok príkladu ukazuje, že magnetický tok cez plochu ohraničenú závitom je priamoúmerný veľkosti elektrického prúdu tečúceho dlhým vodičom: $\Phi = kI$, kde konštanta úmernosti $k = \dfrac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\dfrac{c+b}{c}\right)$ predstavuje dôležitú elektrotechnickú veličinu, ktorá má názov - ***vzájomná indukčnosť*** (v tomto prípade závitu a dlhého vodiča). Táto veličina, ako aj veličina ***vlastná indukčnosť***, bude dôsledne zavedená v kapitole *Elektromagnetické pole*.

Kontrolné otázky

1. *Ako je definovaný magnetický tok?*
2. *Aký je názov a rozmer jednotky magnetického toku?*
3. *Čomu sa rovná magnetický tok cez uzavretú plochu?*
4. *Aký je integrálny a diferenciálny tvar druhej Maxwellovej rovnice?*
5. *Ako je zavedený vektorový potenciál?*

8.2.6 Definícia ampéra

Ampér je jednou zo siedmich základných jednotiek sústavy SI. Zavádza sa na základe vzájomného silového pôsobenia dvoch veľmi dlhých priamych a vzájomne rovnobežných vodičov. Na obrázku sú znázornené takéto vodiče, pričom jedným z nich tečie prúd I_1, druhým prúd I_2 . Prvý z vodičov vytvára magnetické pole v mieste druhého vodiča, na ktorý pôsobí sila, lebo ním tečie prúd.



Obr. 8.2.6.1

Magnetické pole v okolí prvého, veľmi dlhého vodiča vypočítame pomocou Biotovho - Savartovho - Laplaceovho vzorca. Využijeme výsledok paragrafu 8.2.2 , podľa ktorého v okolí veľmi dlhého priameho vodiča, ktorým tečie prúd I_1 , má magnetická indukcia hodnotu

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} , \tag{8.2.6.1}$$

kde R je vzdialenosť od vodiča. Vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}_1$ je kolmý na rovinu v ktorej sa vodiče nachádzajú a v tomto prípade smeruje za obrázok. Silu pôsobiacu na vodič ktorým tečie prúd I_2 , vypočítame pomocou vzorca (8.1.2.6):

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I_2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}_1 .$$

Ako vidno z obrázku, vektory $I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ a $\boldsymbol{B}_1$ sú na seba kolmé, a v prípade, že prúdy tečú vodičmi jedným smerom, medzi vodičmi pôsobí príťažlivá sila. Pre veľkosť sily $\mathrm{d}F$ v takomto prípade dostaneme:

$$\mathrm{d}F = I_2\,\mathrm{d}\ell\, B_1 = I_2\,\mathrm{d}\ell \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}\mathrm{d}\ell .$$

Z tohto vzťahu vypočítame silu pripadajúcu na jednotku dĺžky:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} , \tag{8.2.6.2}$$

Výsledný vzorec sa používa na definíciu ampéra. Ak by každým z vodičov tiekol prúd 1 A, a vodiče by boli od seba vzdialené 1 m, potom na meter dĺžky vodiča by pôsobila sila, ktorej číselná hodnota sa rovná podielu ($\mu_0 / 2\pi$), t.j. $2\cdot10^{-7}$ N/m.

Kontrolné otázky

1. *Ako musí tiecť prúd dvomi rovnobežnými vodičmi, aby medzi nimi pôsobila príťažlivá sila?*
2. *Vyslovte definíciu jednotky SI ampér!*

8.3 Magnetický dipól

V začiatočnom období náuky o magnetizme sa predpokladala existencia "severného" a "južného" magnetického množstva. Tyčový magnet bol analógiou elektrického dipólu, predstavoval **magnetický dipól**. Pripisoval sa mu magnetický moment, podobne ako elektrickému dipólu elektrický moment. Napriek tomu, že samostatné, od seba oddeliteľné magnetické množstvá nejestvujú, tyčový magnet, ale aj prúdová slučka (cievka) sa považujú za istých okolností za magnetický dipól. *Za magnetický dipól sa všeobecne považuje objekt vytvárajúci vo svojom okolí magnetické pole, pričom jeho rozmery sú zanedbateľné v porovnaní so vzdialenosťami, v ktorých toto pole pozorujeme.* Aj v tomto je magnetický dipól analógiou elektrického dipólu. V tejto súvislosti treba poznamenať, že podkovovitý magnet nie je typickým príkladom magnetického dipólu, lebo vytvára magnetické pole v podstate iba medzi svojimi pólovými nástavcami, takže v tomto ohľade sa podobá skôr kondenzátoru než elektrickému dipólu.

Kľúčové slová
Magnetický dipól, magnetický moment.

8.3.1 Magnetický moment

V paragrafe 8.1.3 bol uvedený vzorec (8.1.3.2), vyjadrujúci moment síl pôsobiaci na prúdovú slučku v homogénnom magnetickom poli:

$$\boldsymbol{M}_F = I\,\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} \tag{8.3.1.1}$$

Skalárny násobok $I\,\boldsymbol{S}$ - teda násobok vektora $\boldsymbol{S}$ (reprezentujúceho veľkosť a orientáciu plochy ohraničenej prúdovou slučkou) prúdom I ktorý ňou tečie, je považovaný za **magnetický moment** ($\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}$) prúdovej slučky:

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}} = I\,\boldsymbol{S} \tag{8.3.1.2}$$

Smer vektora $\boldsymbol{S}$ a tým aj smer magnetického momentu $\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}$, súvisí so "smerom" prúdu v slučke, presnejšie povedané smerom, ktorým by sa pri danom prúde vodičom pohybovali kladne nabité častice. Z konca vektora $\boldsymbol{S}$, ktorý je na rovinu slučky kolmý, sa pohyb kladne nabitých častíc javí proti chodu hodinových ručičiek (pohyb elektrónov, ktoré v skutočnosti prúd zabezpečujú, prebieha v opačnom smere). V tejto súvislosti sa preto uplatňuje "pravidlo pravej ruky".
Po zavedení magnetického momentu prúdovej slučky možno vzorec (8.3.1.1) upraviť:

$$\boldsymbol{M}_F = \boldsymbol{m}_{\mathrm{m}} \times \boldsymbol{B} \tag{8.3.1.3}$$

Pri tyčovom magnete, alebo feritovom magnete, ktorý má tvar kotúčika, ale aj pri podlhovastej cievke (solenoide) sa tento vzorec používa ako definičný na určenie ich magnetického momentu. Magnetický moment takýchto útvarov sa určí tak, že sa vložia do homogénneho magnetického poľa so známou veľkosťou magnetickej indukcie B a zmeria sa maximálna hodnota momentu pôsobiacich síl. Vtedy platí zjednodušený vzťah $M_F = m_m B$, odkiaľ sa vypočíta magnetický moment.

Z definičného vzorca (8.3.1.2) vyplýva, že **jednotkou magnetického momentu** v SI sústave je Am^2.

Magnetický moment majú aj elementárne častice - protón, elektrón, i neutrón. Magnetický moment patrí k základným charakteristikám týchto častíc rovnako, ako ich hmotnosť a elektrický náboj. Aj na tieto častice pôsobí magnetické pole momentom síl. Pôsobenie magnetického poľa na protóny v ľudskom tele sa využíva v medicíne na diagnostiku poškodenia, resp. zmien v tkanivách a orgánoch (pozri § 8.3.4). Magnetické momenty elementárnych častíc sú v porovnaní s momentami makroskopických objektov malé. Magnetický moment elektrónu (tzv. Bohrov magnetón) $\mu_B = 9{,}274 \cdot 10^{-24} Am^2$, magnetický moment protónu (tzv. jadrový magnetón) $\mu_N = 5{,}05 \cdot 10^{-27} Am^2$

Poznámka Vzorcami (8.3.1.2), resp. (8.3.1.3) zavedený magnetický moment sa v niektorých prípadoch nazýva *Ampérov magnetický moment*. Popri tomto momente sa v niektorých prípadoch používa μ_o- násobok tohto momentu $\boldsymbol{m}_c = \mu_o \boldsymbol{m}_m$, s názvom *Coulombov magnetický moment*.

Príklad 8.3.1.1 Vypočítajte magnetický moment prúdovej slučky s polomerom $R = 1$ cm , ktorou tečie prúd $I = 10$ A, a porovnajte s magnetickým momentom atómu vodíka, ktorý vzniká obiehaním elektrónu okolo jadra po kružnici s polomerom cca $0{,}5 \cdot 10^{-10}$m , čomu zodpovedá prúd pribl. 10^{-3}A.
Riešenie Magnetický moment prúdovej slučky $m_S = I\,S = 10 \cdot \pi \cdot 10^{-4}\ Am^2 \cong 3 \cdot 10^{-3}$ Am^2.
Magnetický moment atómu vodíka $m_H = I\,S = 10^{-3} \cdot \pi \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-10})^2 \cong 8 \cdot 10^{-24} Am^2$. Pri presnom výpočte by mala pre vodík výjsť hodnota rovnajúca sa Bohrovmu magnetónu.

Kontrolné otázky

1. *Ako je definovaný magnetický moment prúdovej slučky?*
2. *Aká je SI jednotka magnetického momentu?*
3. *Akým vzťahom sa definuje magnetický moment magnetického dipólu?*
4. *Aké experimentálne zariadenie by ste navrhli na meranie magnetického momentu?*
5. *Ktoré elementárne častice majú magnetický moment?*

8.3.2 Potenciálna energia magnetického dipólu v homogénnom poli

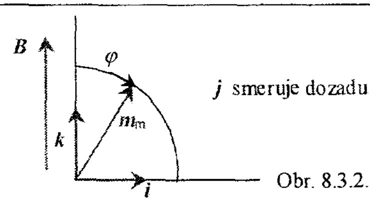
Na magnetický dipól s momentom $\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}$ v magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$ pôsobí moment síl $\boldsymbol{M}_F$ vyjadrený vzorcom (8.3.1.3)

$$\boldsymbol{M}_F = \boldsymbol{m}_{\mathrm{m}} \times \boldsymbol{B} \,. \tag{8.3.2.1}$$

Keď sú vektory $\boldsymbol{m}_m$ a $\boldsymbol{B}$ vzájomne rovnobežné, tento moment sa rovná nule, ak sú na seba kolmé, dosahuje najväčšiu hodnotu. Preto magnetický dipól má tendenciu zaujať v magnetickom poli rovnovážnu polohu, v ktorej sú vektory rovnobežné. Na jeho vychýlenie z rovnovážnej polohy je potrebný moment vonkajších síl, ktoré nemajú pôvod v magnetickom poli. Pri zmene uhla φ medzi vektormi $\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}$ a $\boldsymbol{B}$ moment vonkajších síl $\boldsymbol{M}_V = -\boldsymbol{M}_F$ vykoná prácu (pozri vzťah 2.2.4.5 v mechanike):

$$W = \int_1^2 \boldsymbol{M}_V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \,. \tag{8.3.2.2}$$

Medze integrálu - čísla 1 a 2 - predstavujú začiatočný a konečný uhol φ_1 resp. φ_2. Pred výpočtom práce zvolíme vhodnú súradnicovú sústavu s jednotkovými vektormi, pomocou ktorých vyjadríme všetky vektory, ktoré pri výpočte použijeme. Podľa



Obr. 8.3.2.1

obrázku magnetický moment zviera s vektorom magnetickej indukcie uhol φ, ktorý sa meria od smeru určeného vektorom $\boldsymbol{B}$, resp. vektorom $\boldsymbol{k}$. Vtedy na magnetický dipól pôsobí magnetické pole momentom síl $\boldsymbol{M}_F$, ktorý ako vektor smeruje pred nákresňu, má opačný smer ako jednotkový vektor $\boldsymbol{j}$. Moment vonkajších síl preto vyjadríme vzťahom

$$\boldsymbol{M}_V = M_V \boldsymbol{j} \,,$$

kde M_V, teda jeho veľkosť (absolútna hodnota), sa rovná $M_V = m_{\mathrm{m}} B \sin\varphi$. Uhol φ ako vektor má tiež smer vektora $\boldsymbol{j}$, t.j. $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\varphi$, čo využijeme v skalárnom súčine, ktorý vystupuje v integráli (8.3.2.2):

$$\boldsymbol{M}_V \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = (M_V \boldsymbol{j}) \cdot (\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\varphi) = M_V \mathrm{d}\varphi = m_{\mathrm{m}} B \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,.$$

Po dosadení do integrálu dostaneme výsledok (čísla ako medze integrálu **znamenajú** uhly φ_1 resp. φ_2):

$$W = \int_1^2 m_m B \sin\varphi \, d\varphi = -m_m B [\cos\varphi]_1^2 = -m_m B[\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1] . \qquad (8.3.2.3)$$

Práca vonkajšieho momentu síl sa rovná prírastku potenciálnej energie magnetického dipólu, čo vyjadríme rovnicou

$$W = -m_m B [\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1] = +(E_{p2} - E_{p1}) .$$

Na základe tohto vzorca za potenciálnu energiu magnetického dipólu v magnetickom poli považujeme výraz

$$E_p = -m_m B \cos\varphi = -\boldsymbol{m}_m \cdot \boldsymbol{B} \qquad (8.3.2.4)$$

V súlade s týmto vzorcom má potenciálna energia minimálnu hodnotu vtedy, keď vektory $\boldsymbol{m}_m$ a $\boldsymbol{B}$ sú súhlasne rovnobežné (zvierajú nulový uhol), maximálnu ak sú nesúhlasne rovnobežné, teda zvierajú uhol $180°$.

Príklad 8.3.2.1 Cievkou, ktorá má tvar kružnice (polomer $R = 5$ cm) a $N = 100$ závitov, tečie prúd $I = 10$ A . Cievka sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0{,}01$ T . Akú prácu musí vykonať moment vonkajších síl, aby cievku vychýlil z rovnovážnej polohy do polohy s maximálnou potenciálnou energiou?
Riešenie Magnetický moment cievky je $m_m = nIS \cong 1{,}57$ Am^2. Práca sa rovná rozdielu maximálnej a minimálnej potenciálnej energie: $W = E_{pmax} - E_{pmin} = 2\, m_m B \cong 3{,}14 \cdot 10^{-2}$ J .

Kontrolné otázky

1. *Prečo môžeme magnetickému dipólu v homogénnom magnetickom poli prisúdiť potenciálnu energiu?*
2. *Kedy je potenciálna energia magnetického dipólu maximálna, kedy minimálna ?*
3. *Akým vzorcom sa vyjadruje potenciálna energia magnetického dipólu ?*
4. *Aký máte názor na možnosť využitia potenciálnej energie cievky v magnetickom poli na výpočet práce vykonanej elektromotorom?*

8.3.3 Magnetické pole v okolí magnetického dipólu

Indukčné čiary majú v okolí magnetického dipólu podobný tvar ako siločiary okolo elektrického dipólu. Preto aj vzorce vyjadrujúce magnetickú indukciu okolo magnetického dipólu, resp. intenzitu elektrického poľa v okolí elektrického dipólu, sú prakticky rovnaké. Vzorec vyjadrujúci intenzitu elektrického poľa bol odvodený v elektrostatike - pozri vzorec (6.2.3.6):

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right].$$

(8.3.3.1)

kde $\boldsymbol{p}$ je moment elektrického dipólu a $\boldsymbol{r}$ polohový vektor vynášaný zo začiatku súradnicovej sústavy, v ktorom je dipól umiestnený.
Pre magnetickú indukciu v okolí magnetického dipólu platí podobný vzťah:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{m}_\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}_\mathrm{m}}{r^3}\right],$$

(8.3.3.2)

kde $\boldsymbol{m}_\mathrm{m}$ je magnetický moment magnetického dipólu. Oba uvedené vzorce správne vyjadrujú vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ iba v dostatočnej vzdialenosti od dipólov, keď rozmery dipólov sú vzhľadom na veľkosť polohového vektora zanedbateľné. Zatiaľ čo vzorec (8.3.3.1) bolo možné odvodiť pomerne jednoduchým spôsobom, odvodenie vzorca (8.3.3.2) je podstatne náročnejšie. Preto v tomto paragrafe nebude odvodený, ale bude preukázaná jeho správnosť v dvoch špeciálnych prípadoch, v tzv. Gaussových polohách. Najprv bude vypočítaná magnetická indukcia v týchto polohách na základe vzorca (8.3.3.2) a potom získame rovnaké výsledky použitím Biotovho-Savartovho-Laplaceovho vzorca.

Prvá Gaussova poloha zodpovedá prípadu, keď polohový vektor $\boldsymbol{r}$ je súhlasne rovnobežný s magnetickým momentom $\boldsymbol{m}_\mathrm{m}$. Je to výpočet magnetickej indukcie v bodoch ležiacich v predĺžení vektora magnetického momentu. Vzorec (8.3.3.2) sa v tomto prípade zjednoduší, pričom pri jeho úprave je vhodné zvoliť jednotkový vektor $\boldsymbol{j}$ rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{m}_\mathrm{m}$. Pomocou neho vyjadríme vektor magnetickOho momentu $\boldsymbol{m}_\mathrm{m} = m_\mathrm{m}\boldsymbol{j}$, a polohový vektor $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{j}$. Po dosadení do vzorca (8.3.3.2) môžeme vypočítať magnetickú indukciu v prvej Gaussovej polohe:

$$\boldsymbol{B}_{G1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(m_\mathrm{m}\boldsymbol{j}\cdot r\boldsymbol{j})r\boldsymbol{j}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}_\mathrm{m}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3m_\mathrm{m}\boldsymbol{j}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{m}_\mathrm{m}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{m}_\mathrm{m}}{r^3}$$

(8.3.3.3)

Druhá Gaussova poloha zodpovedá prípadu, keď vektory $\boldsymbol{m}_\mathrm{m}$ a $\boldsymbol{r}$ sú na seba kolmé, čo znamená počítať magnetickú indukciu v rovine kolmej na magnetický moment. Skalárny súčin $\boldsymbol{m}_\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{r} = 0$, a teda aj prvý člen v zátvorke sa rovná nule:

$$\boldsymbol{B}_{G2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{m}_\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}_\mathrm{m}}{r^3}\right] = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}_\mathrm{m}}{r^3}.$$

(8.3.3.4)

Nasleduje výpočet magnetickej indukcie v Gaussových polohách pomocou Biotovho-Savartovho-Laplaceovho vzorca. Vzorec (8.3.3.3) získame úpravou vzorca (8.2.3.3) vyjadrujúceho magnetickú indukciu na osi kruhového závitu:

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{R^3}{(x^2+R^2)^{3/2}} . \tag{8.3.3.5}$$

Kruhový závit s polomerom R, ktorým tečie prúd I má magnetický moment

$$m_m = IS = I\pi R^2 ,$$

čo využijeme pri úprave vzorca (8.3.3.5):

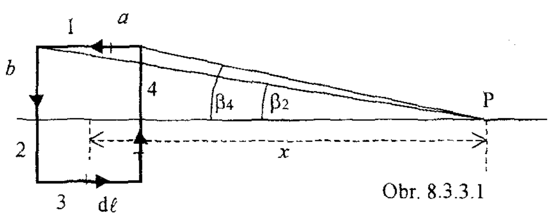
$$B_{G1} = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{R^3}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\pi R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m_m}{(x^2+R^2)^{3/2}} .$$

Vo veľkej vzdialenosti, keď $x >> R$, v menovateli môžeme R zanedbať, čím dostaneme pre veľkosť magnetickej indukcie v prvej Gaussovej polohe výsledok

$$B_{G1} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m_m}{x^3} \tag{8.3.3.6}$$

zhodujúci sa so vzorcom (8.3.3.3). V prvej Gaussovej polohe je vektor magnetickej indukcie rovnobežný s magnetickým momentom, takže súhlas platí aj vo vektorovej forme zápisu.

Druhej Gaussovej polohe zodpovedá výpočet indukcie nie na osi závitu, ale v jeho rovine. V tomto prípade použijeme obdĺžnikovú slučku. Odvodenie vzorca (8.3.3.4) pomocou kruhového závitu by bolo matematicky veľmi náročné. Znamenalo by zložitú integráciu, takže v tomto prípade je jednoduchšie použiť závit s tvarom obdĺžnika, so stranami veľkosti a, b, ktorému sa pripisuje magnetický moment s veľkosťou $m_m = IS = I\,ab$. Smer príslušného vektora $\boldsymbol{m}_m$ závisí od smeru pohybu nábojov v závite, rovnako ako v prípade kruhového závitu.



Obr. 8.3.3.1

Opäť predpokladáme, že rozmery závitu a, b v porovnaní so vzdialenosťou x bodu P od závitu sú zanedbateľné. Preto strany obdĺžnika označené číslicami 1 a 3 vzhľadom na faktickú rovnobežnosť ich dĺžkových elementov $d\boldsymbol{\ell}$ s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$, smerujúcim do bodu P, neprispievajú v tomto bode k magnetickému poľu. Vektorový súčin takýchto elementov $Id\boldsymbol{\ell}$ s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$, ktorý vystupuje v Biotovom-Savartovom-Laplaceovom vzorci, sa rovná nule. Treba vypočítať a vektorovo sčítať príspevky od strán označených číslicami 2 a 4. Výpočet je veľmi podobný ako v prípade veľmi dlhého priameho vodiča, (výpočet vedúci k výsledku 8.2.2.3), odlišnosť je iba v integračných hraniciach Výpočet príspevkov od strán 2 a 4 vedie k výsledkom:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\sin\beta_2}{\left(x + \frac{a}{2}\right)}, \qquad B_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\sin\beta_4}{\left(x - \frac{a}{2}\right)} \tag{8.3.3.7}$$

Vektory $\boldsymbol{B}_2$ a $\boldsymbol{B}_4$ majú v bode P opačný smer, preto tieto výsledky treba navzájom odčítať. Väčší je príspevok od strany 4, lebo je k bodu P bližšie, takže určuje aj smer výsledného vektora $\boldsymbol{B}$ v tomto bode. Ďalšou úpravou pre veľkosť výsledného vektora $\boldsymbol{B}$ dostaneme:

$$B_{G2} = B_4 - B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{\sin\beta_4}{\left(x - \frac{a}{2}\right)} - \frac{\sin\beta_2}{\left(x + \frac{a}{2}\right)}\right] \cong \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{\operatorname{tg}\beta_4}{\left(x - \frac{a}{2}\right)} - \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\left(x + \frac{a}{2}\right)}\right] \cong$$

$$\cong \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{\frac{b}{2x}}{\left(x - \frac{a}{2}\right)} - \frac{\frac{b}{2x}}{\left(x + \frac{a}{2}\right)}\right]$$

a konečne

$$B_{G2} \cong \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{\frac{b}{2x}}{\left(x - \frac{a}{2}\right)} - \frac{\frac{b}{2x}}{\left(x + \frac{a}{2}\right)}\right] = \frac{\mu_0 I\, b}{4\pi x} \frac{x + \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2}}{x^2 - \frac{a^2}{4}} \cong \frac{\mu_0 I\, b}{4\pi x} \frac{a}{x^2} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, ab}{x^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_a}{x^3} \tag{8.3.3.8}$$

Vektor $\boldsymbol{m}_a$ podľa usporiadania na obr. 8.3.3.1 smeruje k čitateľovi, ale vektor $\boldsymbol{B}$ v bode P smeruje na opačnú stranu, lebo bližšia časť závitu svojimi účinkami v bode P prevláda. Preto vo vektorovom tvare vzťahu (8.3.3.8) musí vystupovať znamienko mínus:

$$\boldsymbol{B}_{G2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m}_a}{x^3}, \tag{8.3.3.9}$$

čím sa dosiahla úplná zhoda so vzorcom (8.3.3.4).

Zhoda výsledkov získaných pomocou Biotovho-Savartovho-Laplaceovho vzorca s výsledkami ktoré sú špeciálnym prípadom vzorca (8.3.3.2) napovedá, že tento vzorec môže mať všeobecnú platnosť. Nie je to exaktný, ani úplný dôkaz jeho všeobecnej platnosti, ale môže poslúžiť na jeho akceptovanie. Odvodené vzťahy sa používajú v laboratórnych cvičeniach na meranie magnetických momentov cievok, alebo tyčových magnetov.

Príklad 8.3.3.1 Určte vektor magnetickej indukcie v okolí magnetického dipólu v bode, ktorého polohový vektor zviera 60° s vektorom magnetického momentu. Posúďte, či vektor $\boldsymbol{B}$ je rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{r}$.

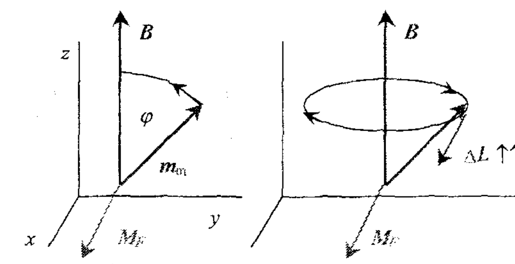
Riešenie $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(m_{\mathrm{m}} r \cos\beta)\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}}{r^3}\right]$, z čoho vyplýva, že vektor $\boldsymbol{B}$ má zložku rovnobežnú s $\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}$ aj s $\boldsymbol{r}$, takže nemôže byť rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{r}$.

Kontrolné otázky

1. *Na základe vzorca* (8.3.3.2) *nakreslite indukčné čiary okolo magnetického dipólu.*
2. *V ktorej Gaussovej polohe je magnetická indukcia väčšia (pri rovnakej vzdialenosti od dipólu) ?*

8.3.4 Magnetomechanické javy, precesia magnetického dipólu

Keď sa magnetický dipól nachádza v homogénnom magnetickom poli, výsledná sila naň pôsobiaca je nulová, podobne ako v prípade elektrického dipólu v elektrickom poli. Na magnetický dipól však pôsobí moment síl (8.4.1.3), ktorý má tendenciu orientovať ho tak, aby magnetický moment $\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}$ bol súhlasne rovnobežný s vektorom magnetickej indukcie. Ak vektor $\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}}$ zviera s vektorom $\boldsymbol{B}$ uhol φ, mal by začať meniť svoj smer tak, aby sa s vektorom $\boldsymbol{B}$ stotožnil po najkratšom oblúku. Podľa nákresu na ľavej časti obrázku by sa mal otáčať v rovine y, z. Inak sa však správa magnetický moment protónu či elektrónu, ktoré majú popri magnetickom momente



Obr. 8.3.4.1

aj vlastný moment hybnosti. Správajú sa ako zotrvačníky s jedným pevným bodom v gravitačnom poli - konajú precesný pohyb (pravá časť obrázku). Podmienkou takéhoto správania je zviazanosť vlastného momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ častice s jej magnetickým momentom $\boldsymbol{\mu}$, takže magnetický moment možno vyjadriť ako jeho skalárny násobok:

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \boldsymbol{L}, \tag{8.3.4.1}$$

kde γ je **gyromagnetický pomer** príslušnej častice. (Tento vzťah možno bližšie objasniť pomocou modelu atómu vodíka; pozri v dodatku.) Pohyb telesa s momentom hybnosti $\boldsymbol{L}$, na ktoré pôsobí moment síl, vyjadruje druhá pohybová rovnica

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_F, \tag{8.3.4.2}$$

kde $\boldsymbol{M}_F$ je na teleso pôsobiaci moment síl. V prípade, že moment hybnosti je zviazaný s magnetickým momentom, a nachádza sa v magnetickom poli, tento momet síl sa rovná vektorovému súčinu magnetického momentu s magnetickou indukciou

$$\boldsymbol{M}_F = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}. \tag{8.3.4.3}$$

Spojením posledných troch rovníc dostaneme pohybovú rovnicu pre magnetický moment

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\mu}\right) = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}t} = \gamma(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}) \quad . \tag{8.3.4.4}$$

Vyplýva z nej, že elementárna zmena momentu $\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}$ je kolmá na vektor $\boldsymbol{\mu}$, takže sa nemení veľkosť magnetického momentu, ale iba jeho smer. Práve z tejto skutočnosti vyplýva precesný pohyb magnetického momentu. Ak sa mení iba jeho smer a nemení sa jeho veľkosť, otáča sa istou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$, pričom pre jeho deriváciu platí vzťah

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu} \quad . \tag{8.3.4.6}$$

Z porovnania vzorcov (8.3.4.5) a (8.3.4.6) vyplýva

$$\boldsymbol{\omega} = -g\,\boldsymbol{B} \tag{8.3.4.7}$$

Veľkosť uhlovej rýchlosti sa môže vyjadriť pomocou frekvencie f: $\omega = 2\pi f$, ktorá má názov **frekvencia Larmorovej precesie**, alebo jednoducho **Larmorova frekvencia**.

Protóny, alebo elektróny nachádzajúce sa v látke, po vložení do homogénneho magnetického poľa začnú konať precesný pohyb. Tento pohyb však v dôsledku interakcie protónov či elektrónov s okolím pomerne rýchlo ustane, pokiaľ nie je podporovaný zvonku dodávaním energie. Ak sa k homogénnemu magnetickému poľu pridá vhodne orientované vysokofrekvenčné elektromagnetické pole s frekvenciou rovnajúcou sa Larmorovej frekvencii, toto podporuje precesiu, pričom dochádza k rezonančnej absorpcii jeho energie súborom protónov resp. elektrónov v látke. Tieto javy dostali názov elektrónová paramagnetická rezonancia (EPR), resp. jadrová magnetická rezonancia (NMR). Tá druhá sa využíva v medicíne ako diagnostická metóda s názvom NMR tomografia. Využíva sa v nej odlišnosť rezonančnej frekvencie protónov v rôznych tkanivách tela, resp. v zdravom a postihnutom tkanive.

Príklad 8.3.4.1 Vypočítajte Larmorovu frekvenciu protónov v magnetickom poli s indukciou $B = 0{,}01$ T, keď gyromagnetický pomer protónov
$\gamma = 2{,}675 \cdot 10^8$ (A· m^2)/(J ·s). Podľa vypočítanej frekvencie určte, do ktorej oblasti elektromagnetických vĺn patrí.
Riešenie Frekvencia sa vypočíta podľa vzorca (8.3.4.7): $f = (1/2\pi)\gamma B \cong 4{,}26 \cdot 10^5$ Hz, čo je frekvencia zodpovedajúca stredným rozhlasovým vlnám.

Kontrolné otázky

1. *Prečo protóny konajú v homogénnom magnetickom poli precesný pohyb?*
2. *Čo je gyromagnetický pomer?*
3. *Čo je Larmorova frekvencia?*
4. *Ako súvisí Larmorova frekvencia s magnetickou indukciou vonkajšieho poľa?*

8.4 Magnetické pole v prostredí

V predchádzajúcich podkapitolách boli opísané vlastnosti magnetického poľa bez prihliadnutia na atómy prostredia, teda jeho vlastnosti vo vákuu, resp. aj vo vzduchu. V technickej praxi sa často používajú látky, ktoré významne ovplyvňujú magnetické pole, preto treba venovať pozornosť aj takýmto javom. Na ich opis treba zaviesť ďalšie potrebné veličiny a rozlíšiť magnetické pole generované makroskopickými elektrickými prúdmi a magnetickými dipólmi, ktoré sú súčasťou prostredia. Obsah podkapitoly končí stručným opisom paramagnetických a feromagnetických látok.

Kľúčové slová
Magnetizácia, magnetická polarizácia, intenzita magnetického poľa, magnetická susceptibilita, permeabilita, relatívna permeabilita, paramagnetické, feromagnetické a diamagnetické látky.

8.4.1 Vektory magnetizácie a magnetickej polarizácie

Ide o vektorové veličiny, ktoré sú analógiou veličiny *elektrická polarizácia* z elektrostatického poľa. Elektrická polarizácia bola zavedená ako vektorový súčet elektrických momentov dipólov pripadajúci na jednotkový objem (t.j. ako podiel súčtu týchto momentov a objemu v ktorom sa nachádzajú). Elektrické dipóly vo svojom okolí vytvárajú elektrické pole, ktorého intenzita $\boldsymbol{E}$ sa sčítava s intenzitou elektrického poľa vytvoreného vonkajšími zdrojmi, pričom do vzťahu vyjadrujúceho výslednú intenzitu vstupuje vektor elektrickej polarizácie.

V magnetickom poli je situácia podobná. Atómy, alebo molekuly sa často vyznačujú spontánnym magnetickým momentom, ktorý pri jednotlivých molekulách označíme ako $\boldsymbol{m}_{\mathrm{m}i}$. Vektorový súčet týchto momentov v určitom objeme $\Delta\tau$, vydelený týmto objemom, nazýva sa **magnetizácia** (značka $\boldsymbol{M}$) a predstavuje magnetický moment pripadajúci na jednotkový objem

$$\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{m}i}}{\Delta\tau} \tag{8.4.1.1}$$

Jednotkou magnetizácie v SI je $\mathrm{A{\cdot}m^2/m^3 = A/m}$.

Popri magnetizácii sa často používa veličina, ktorá má názov **magnetická polarizácia**, (značka J_{m}) čo je iba skalárny násobok magnetizácie magnetickou konštantou (permeabilitou vákua):

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = \mu_0 \boldsymbol{M} \tag{8.4.1.2}$$

Keďže rozmer magnetickej konštanty je $(\mathrm{kg{\cdot}m})/(\mathrm{A{\cdot}s^2})$, jednotka magnetickej polarizácie vyjadrená pomocou základných jednotiek SI je

$$\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{A^2 \cdot s^2}} \cdot \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A \cdot s^2}} \,,$$

čo je rozmer zhodný s rozmerom magnetickej indukcie. Preto aj magnetická polarizácia sa meria v jednotkách tesla, čo prináša isté výhody pri opise magnetizačných procesov.

Pri opise procesov v látkach je výhodné magnetické momenty atómov (elementárnych magnetických dipólov) považovať za ekvivalenty elementárnych prúdových slučiek. Magnetický moment elementárnej slučky vyjadríme ako skalárny násobok $\boldsymbol{m}_m = I_e \boldsymbol{S}_e$, kde I_e predstavuje elementárny prúd tečúci slučkou a $\boldsymbol{S}_e$ vektor, ktorého veľkosť sa rovná plošnému obsahu slučky a je kolmý na rovinu slučky. Vektor $\boldsymbol{S}_e$ smeruje na tú stranu slučky, z ktorej "smer prúdu" je zhodný s pohybom hodinových ručičiek. Ak by všetky magnetické dipóly v objeme boli rovnaké, t.j. pre všetky by platilo $\boldsymbol{m}_{mi} = I_e \boldsymbol{S}$, a boli by usporiadané tak, že ich magnetické momenty by boli súhlasne rovnobežné, potom vektor magnetizácie sa dá vyjadriť vzťahom:

$$\boldsymbol{M} = \frac{N\, I_e\, \boldsymbol{S}_e}{\Delta\tau} = n\, I_e\, \boldsymbol{S}_e \qquad (8.4.1.3)$$

kde N je celkový počet magnetických dipólov v objeme $\Delta\tau$ a n ich počet pripadajúci na objemovú jednotku. Pre magnetickú polarizáciu v takomto prípade dostaneme vzťah:

$$\boldsymbol{J}_m = \mu_0 \boldsymbol{M} = \mu_0\, n\, I_e\, \boldsymbol{S}_e \qquad \textbf{(8.4.1.4)}$$

Kontrolné otázky

1. *Ako je definovaná veličina magnetizácia?*
2. *Čo je jednotkou magnetizácie?*
3. *Ako je definovaná magnetická polarizácia?*
4. *Čo je jednotkou magnetickej polarizácie?*
5. *Ktorá z veličín má rovnakú jednotku ako magnetická indukcia?*
6. *Ako sa vyjadruje vektor magnetickej polarizácie pomocou elementárnych prúdov?*

8.4.2 Intenzita magnetického poľa

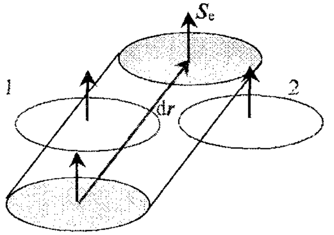
Intenzita magnetického poľa je vektorová veličina charakterizujúca tú časť poľa, ktorá súvisí s makroskopickými prúdmi I_M, ktoré sú dôsledkom pohybu voľných elektrických nábojov. Analogická veličina - elektrická indukcia - bola zavedená v elektrostatickom poli, ktorá súvisela iba s voľnými elektrickými nábojmi.

Pri definícii intenzity magnetického poľa je vhodné vychádzať z cirkulácie vektora magnetickej indukcie, pričom spriahnuté prúdy rozdelíme na makroskopické prúdy I_M, podmienené pohybom voľných elektrických nábojov a na mikroskopické prúdy I_μ, viazané na atómy, ktoré nemožno od príslušných atómov oddeliť. Integračná krivka cirkulácie vektora $\boldsymbol{B}$ bude prechádzať prostredím obsahujúcim magnetické dipóly, ktoré si predstavíme ako elementárne prúdové slučky. Istá časť elementárnych (mikroskopických) prúdových slučiek bude spriahnutá s integračnou krivkou, podobne ako makroskopické prúdové slučky. Preto cirkuláciu vektora $\boldsymbol{B}$ vyjadríme vzťahom

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_0 \left(\sum I_M + \sum I_\mu \right) , \tag{8.4.2.1}$$

kde sumácie na pravej strane rovnice vyjadrujú súčty všetkých spriahnutých makroskopických, resp. mikroskopických prúdov.

Detailne zvážime, koľko mikroskopických (elementárnych) prúdov je v prostredí s magnetickými dipólmi spriahnutých s integračnou čiarou na úseku $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.



Obr. 8.4.2.1

Predpokladáme, že v objemovej jednotke sa nachádza n magnetických dipólov, všetky s navzájom rovnobežnými magnetickými momentmi a teda rovnobežnými rovinami elementárnych prúdových slučiek, ktorým je priradený vektor $\boldsymbol{S}_e$. Na obrázku je znázornený šikmý valec, ktorého os tvorí elementárny vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, a základne majú veľkosť i orientáciu plochy elementárnej prúdovej slučky. Každá elementárna prúdová slučka, ktorej stred sa nachádza v šikmom valci, je spriahnutá s vektorom $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Na obrázku je to slučka s číslom 1, slučka s číslom 2 má stred mimo šikmého valca, preto jej prúd nie je spriahnutý s vektorom $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Objem $\mathrm{d}\tau$ šikmého valca sa rovná skalárnemu súčinu

$$\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{S}_e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} ,$$

a teda počet spriahnutých slučiek je

$$n\,\mathrm{d}\tau = n\,\boldsymbol{S}_e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} .$$

Ak toto číslo vynásobíme elementárnym prúdom I_e tečúcim každou slučkou, dostaneme súčet elementárnych (mikroskopických) prúdov s priahnutých s vektorom $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$:

$$\mathrm{d}\,I_\mu = n\,I_e\,\boldsymbol{S}_e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} .$$

Príspevok k cirkulácii vektora magnetickej indukcie je μ_0 - násobkom tohto výrazu :

$$(\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r})_\mu = \mu_0\,n\,I_e\,\boldsymbol{S}_e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{J}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} , \tag{8.4.2.2}$$

kde J_m je vektor magnetickej polarizácie, ako vyplýva zo vzorca (8.4.1.4) predošlého paragrafu. Cirkuláciu vektora B, keď integračná krivka prechádza prostredím s magnetickými dipólmi, vyjadríme vzťahom:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_o I_M + \oint \boldsymbol{J}_m \cdot d\boldsymbol{r} ,$$

pričom I_M v tomto vzorci znamená súčet všetkých spriahnutých makroskopických prúdov. Rovnicu upravíme tak, aby na pravej strane zostali iba makroskopické prúdy:

$$\oint \left(\frac{\boldsymbol{B} - \boldsymbol{J}_m}{\mu_o} \right) \cdot d\boldsymbol{r} = I_M \tag{8.4.2.3}$$

Cirkulácia vektorovej funkcie, ktorá je v integráli v zátvorke, závisí iba od makroskopických prúdov spriahnutých s integračnou krivkou. Považuje sa za novú veličinu, nazýva sa **intenzita magnetického poľa** a označuje písmenom $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B} - \boldsymbol{J}_m}{\mu_o} , \tag{8.4.2.4}$$

odkiaľ po úprave dostaneme rovnicu

$$\boldsymbol{B} = \mu_o \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}_m . \tag{8.4.2.5}$$

Rovnica predstavuje **materiálový vzťah** pre magnetické prostredie (magnetiká), tvoriaci analógiu materiálového vzťahu $\boldsymbol{D} = \varepsilon_o \boldsymbol{E}_c + \boldsymbol{P}$ v dielektrikách.

Kontrolné otázky

1. *Akým vzťahom sa zavádza intenzita magnetického poľa?*
2. *Prispievajú k intenzite magnetického poľa magnetické dipóly v látke?*
3. *Ktoré veličiny vystupujú v materiálovom vzťahu platnom v magnetikách?*

8.4.3 Zákon celkového prúdu, cirkulácia vektora *H*

Rovnica (8.4.2.3), po nahradení výrazu v zátvorke, dostane tvar:

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} = I_M \tag{8.4.3.1}$$

a je známa pod názvom **zákon celkového prúdu**, v elektrotechnike aj ako **zákon prietoku**. Je to vlastne **cirkulácia vektora intenzity magnetického poľa**.

Rovnicu (8.4.3.1) prevedieme do diferenciálneho tvaru, pričom obe strany najprv vyjadríme ako plošné integrály:

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \ , \qquad I_M = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \ ,$$

v ktorých sa integruje po ploche S ohraničenej integračnou krivkou zvolenou vo vzorci (8.4.3.1). Vektor $\boldsymbol{J}$ predstavuje hustotu elektrického prúdu. Dosadením do tohto vzorca dostaneme rovnosť:

$$\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \ .$$

Na oboch stranách rovnosti sa integruje cez rovnaké plochy, ale inak ľubovolné, takže musí platiť:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \ . \tag{8.4.3.2}$$

Je to neúplná **Maxwellova rovnica,** pričom tento jej neúplný tvar platí iba v stacionárnych magnetických poliach. V nestacionárnom poli na pravej strane vystupuje ďalší člen, ktorý bude zavedený v nasledujúcej kapitole o elektromagnetickom poli.

Príklad 8.4.3.1 Pomocou zákona celkového prúdu vypočítajte závislosť intenzity magnetického poľa od vzdialenosti x , meranej od osi vodiča. Vodič má kruhový prierez (polomer R), a tečie ním prúd I .

Obr. 8.4.3.1

Riešenie Pre kružnicu s polomerom x vo vodiči (stred kružnice je v osi vodiča) integrál intenzity magnetického poľa po jej obvode sa rovná $H\,2\pi x$. Na pravej strane zákona celkového prúdu vystupuje iba prúd, tečúci cez plochu ohraničenú touto kružnicou, ktorý je zlomkom celého prúdu I , a má hodnotu $I{\cdot}(\pi x^2)/(\pi R^2)$. Z rovnosti pravej a ľavej strany dostaneme výsledok $H = (I \,/\, 2\pi\, R^2)\, x$. Vnútri vodiča sa intenzita magnetického poľa so vzdialenosťou od osi lineárne zväčšuje.

Kontrolné otázky

1. *Čomu sa rovná cirkulácia intenzity magnetického poľa?*
2. *Ako by ste slovne formulovali zákon celkového prúdu?*
3. *K čomu vedie diferenciálny tvar zákona celkového prúdu?*

8.4.4 Magnetická susceptibilita, magnetické látky

Materiálový vzťah $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}_m$ (resp. $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ vyjadruje súvislosť medzi veličinami opisujúcimi magnetické pole v prostredí. Vektor intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ zastupuje tú časť magnetického poľa, ktorá je vytvorená makroskopickými elektrickými prúdmi, vektor magnetickej polarizácie $\boldsymbol{J}_m$ zložku poľa súvisiacu s magnetickými dipólmi na úrovni atómov, alebo molekúl. Magnetické momenty atómov bývajú vo väčšine prípadov náhodne orientované, takže ich vektorový súčet v dostatočne veľkom objeme sa rovná nule. Vtedy aj vektor magnetickej polarizácie je nulový. Isté usporiadanie magnetických momentov nastáva vo vonkajšom magnetickom poli, vytvorenom napríklad makroskopickými prúdmi. Čím silnejšie je toto pole, tým usporiadanejšie sú momenty a tým väčšia je aj hodnota magnetickej polarizácie (resp. magnetizácie $\boldsymbol{M}$). Táto závislosť sa vyjadruje vzťahom

$$\boldsymbol{J}_m = æ \mu_0 \boldsymbol{H}, (\boldsymbol{M} = æ\boldsymbol{H}) \tag{8.4.4.1}$$

kde $æ$ je bezrozmerná veličina - **magnetická susceptibilita** (látky). Po dosadení tohto vzorca do materiálového vzťahu, tento upravíme

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}_m = \mu_0 \boldsymbol{H} + æ \mu_0 \boldsymbol{H} = \mu_0(1 + æ)\boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \tag{8.4.4.2}$$

pričom veličiny v ňom vystupujúce sú

$\mu_r = (1 + æ)$ - **relatívna permeabilita** (prostredia, resp.látky),
$\mu = \mu_0 \mu_r$ - **permeabilita** (prostredia, resp.látky)

Magnetická susceptibilita i relatívna permeabilita sú bezrozmerné veličiny, ale permeabilita sa vyjadruje rovnakou jednotkou ako magnetická konštanta μ_0. Vzťah $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ je analógiou vzťahu $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ z elektrostatiky. Jestvuje však rozdiel medzi hodnotami, ktoré dosahujú elektrická a magnetická susceptibilita. Elektrická susceptibilita χ v dielektriku nadobúda iba kladné hodnoty, takže vektor elektrickej polarizácie $\boldsymbol{P}$ je vždy súhlasne rovnobežný s vektorom celkovej intenzity elektrického poľa, lebo platí $\boldsymbol{P} = \chi \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_c$. To znamená, že súhlasne rovnobežne so smerom intenzity sa orientujú aj elektrické dipóly. Keby elektrická susceptibilita bola záporná, orientovali by sa proti vonkajšiemu poľu. Také niečo sa v dielektrikách nepozoruje.

V magnetickom poli je však situácia odlišná. Ak atómy látky majú vlastné magnetické momenty, po vložení do magnetického poľa majú tendenciu orientovať sa v smere vonkajšieho magnetického poľa, čím sa magnetické pole v látke trocha zosilní. Ale v dôsledku elektromagnetickej indukcie sa v každom atóme po vložení do magnetického poľa indukuje slabý magnetický moment, orientovaný proti vonkajšiemu poľu (pozri Lenzov zákon v kapitole o elektromagnetickom poli). Tým sa magnetické pole trocha zoslabuje, pričom toto zoslabenie je vo všeobecnosti menšie ako zosilnenie v dôsledku orientácie vlastných magnetických momentov atómov. V látkach, ktorých atómy nemajú vlastné magnetické momenty, sa prejavuje iba zoslabenie poľa. Zo vzťahu $\boldsymbol{B} = \mu_0(1 + æ)\boldsymbol{H}$ potom priamo vyplýva, že magnetická susceptibilita musí byť záporná. Takéto látky sa nazývajú **diamagnetické** a patria medzi ne napríklad inertné plyny, zlato, zinok, kremík a mnohé organické látky. Diamagnetické látky sú od magnetu slabo odpudzované. Ako ideálne diamagnetiká sa správajú supravodiče, ktorých magnetická susceptibilita dosahuje hodnotu $æ = -1$, čo znamená, že magnetická indukcia v nich je nulová. Relatívna permeabilita diamagnetických látok má hodnotu vždy menšiu ako 1, t.j. $\mu_r < 1$.

Atómy väčšiny prvkov majú vlastný magnetický moment, takže ich vložením do magnetického poľa sa pole mierne zosilní. Takéto látky sú **paramagnetické**. Magnetické pole má tendenciu magnetické momenty atómov usporiadať, orientovať ich do smeru vektora $\boldsymbol{H}$, ale tepelný pohyb pôsobí proti tomuto usporiadaniu. Jeden vplyv magnetickú polarizáciu látky zväčšuje, druhý zmenšuje. O magnetickej polarizácii preto môžeme (približne) povedať, že je priamoúmerná intenzite pôsobiaceho magnetického poľa, a nepriamo úmerná termodynamickej teplote, čo sa prejaví na vzťahu (8.4.4.1) tým, že magnetická susceptibilita je nepriamo úmerná termodynamickej teplote T:

$$æ = C/T \ , \tag{8.4.4.3}$$

kde C je **Curieho** konštanta. Pre paramagnetické látky tak vzťah (8.4.4.1) nadobudne tvar

$$J_m = C\frac{\mu_0 H}{T} \ . \tag{8.4.4.4}$$

Medzi paramagnetické látky patria napríklad platina, alkalické kovy, niektoré plyny (kyslík). Relatívna permeabilita paramagnetík je iba o málo väčšia než 1.

Osobitnú skupinu látok, ktorých atómy majú vlastné magnetické momenty, tvoria **feromagnetiká**. Aj mimo magnetického poľa v nich existujú malé oblasti (feromagnetické domény), v ktorých sú magnetické momenty atómov usporiadané navzájom rovnobežne. Dokonalá rovnobežnosť všetkých magnetických momentov v doméne jestvuje iba v blízkosti absolútnej nuly, s rastúcou teplotou sa narúša a pri tzv. Curieho teplote feromagnetizmus látky zaniká, látka prechádza do paramagnetického stavu. Feromagnetiká sa ľahko magnetujú, takže ich relatívna permeabilita nadobúda podstatne väčšie hodnoty ako 1. Patria mezi ne najmä železo, kobalt a nikel, ako aj ich početné zliatiny.

Podrobnejší opis vlastností magnetických látok nie je predmetom tohto textu.

Kontrolné otázky

1. *Ako je definovaná magnetická susceptibilita?*
2. *Ako súvisí magnetická susceptibilita s relatívnou permeabilitou?*
3. *Ako súvisí permeabilita s relatívnou permeabilitou?*
4. *Ako sa delia magnetické látky podľa veľkosti relatívnej permeability?*

Dodatok

D1

Objasnenie vzťahu (8.3.4.1)

Vzťah (8.3.4.1) možno priblížiť pomocou zjednodušeného modelu atómu vodíka. Predpokladajme, že okolo protónu obieha elektrón rýchlosťou v po kružnici s polomerom R. Veľkosť hybnosti elektrónu je vyjadrená súčinom jeho hmotnosti m_e s rýchlosťou : $p = m_e v$ a veľkosť momentu hybnosti vzhľadom na stred kružnice

$$L = R\, m_e v \ .$$

Elektrón nesúci elementárny elektrický náboj e predstavuje v atóme prúd veľkosti $I = e/T$, kde T je doba obehu elektrónu, pričom $vT = 2\pi R$. Magnetický moment atómu s obiehajúcim elektrónom vyjadríme vzťahom

$$\mu = IS = \frac{e}{T}\pi R^2 = \frac{m_e v}{m_e v}\frac{e\pi R^2}{T} = \frac{e}{m_e}\frac{Rm_e v}{vT}\pi R = \frac{e}{m_e}\frac{Rm_e v}{2\pi R}\pi R = \frac{e}{2m_e}L = \gamma L \ ,$$

pričom pre gyromagnetický pomer sme dostali hodnotu $\gamma = e/2m_e$. Výsledok bol odvodený pre zjednodušený model atómu vodíka, ale podobný výsledok platí aj pre vlastné magnetické momenty elektrónu, či protónu. Veľkosť gyromagnetického pomeru protónu $\gamma = 2{,}675 \cdot 10^8$ (A$\cdot$ m^2)/(J$\cdot$s).

Súhrn vzorcov

Definícia magnetickej indukcie	$\boldsymbol{F}_m = Q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$
Lorentzova sila, sila pôsobiaca na náboj v elektromagnetickom poli	$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E} + Q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$
Ampérova sila	$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B}$
Moment sily pôsobiaci na prúdovú slučku	$\boldsymbol{M}_F = I\,\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B}$
Biotov-Savartov-Laplaceov vzorec	$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$
Veľkosť magnetickej indukcie v okolí veľmi dlhého priameho vodiča	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$
Veľkosť magnetickej indukcie na osi kruhového závitu	$B_r = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\beta$
Cirkulácia vektora magnetickej indukcie	$\oint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \pm\mu_0 I$
Definícia magnetického toku	$\Phi = \iint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$
Druhá Maxwellova rovnica v integrálnom a v diferenciálnom tvare	$\oiint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\,,\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$
Definícia vektorového potenciálu	$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = (\nabla\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$
Vektorový potenciál budený vodičom elektrického prúdu	$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r}$
Definičný vzorec ampéra	$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}$
Definičný vzorec magnetického momentu	$\boldsymbol{M}_F = \boldsymbol{m}_m\times\boldsymbol{B}$
Potenciálna energia magnetického dipólu	$E_p = -m_m B\cos\varphi = -\boldsymbol{m}_m\cdot\boldsymbol{B}$
Magnetická indukcia v okolí magnetického dipólu	$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{m}_m\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}_m}{r^3}\right]$

Definícia vektora magnetizácie $\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{M} = \lim\limits_{\Delta\tau \to 0} \dfrac{\sum \boldsymbol{m}_{\mathrm{m}i}}{\Delta\tau}$
Definícia magnetickej polarizácie $\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$	$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = \mu_{\mathrm{o}} \boldsymbol{M}$
Definícia intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B} - \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}}{\mu_{\mathrm{o}}}$
Materiálový vzťah v magnetizme	$\boldsymbol{B} = \mu_{\mathrm{o}}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$
Zákon celkového prúdu	$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = I_{\mathrm{M}}$
Zavedenie magnetickej susceptibility æ	$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = æ\, \mu_{\mathrm{o}} \boldsymbol{H}$, resp. $\boldsymbol{M} = æ\boldsymbol{H}$
Relatívna permeabilita μ_{r}	$\mu_{\mathrm{r}} = (1 + æ)$
Permeabilita	$\mu = \mu_{\mathrm{o}}\, \mu_{\mathrm{r}}$

Slovník

Ampérov magnetický moment → magnetický moment

Ampérova sila – sila pôsobiaca na vodič elektrického prúdu v magnetickom poli

Biotov-Savartov-Laplaceov vzorec – vzorec na výpočet magnetickej indukcie v okolí vodičov elektrického prúdu

cirkulácia intenzity magnetického poľa – integrál intenzity magnetického poľa po uzavretej krivke v magnetickom poli; rovná sa súčtu všetkých makroskopických prúdov spriahnutých s integračnou krivkou; pozri aj zákon celkového prúdu

cirkulácia magnetickej indukcie – integrál magnetickej indukcie po uzavretej krivke v magnetickom poli;

Coulombov magnetický moment – skalárny násobok (Ampérovho) magnetického momentu magnetickou konštantou

definícia ampéra – jeden ampér je taký konštantný elektrický prúd pretekajúci dvomi priamymi rovnobežnými nekonečne dlhými vodičmi zanedbateľného kruhového prierezu, vzájomne vzdialenými 1 meter vo vákuu, ktorý vytvára medzi týmito vodičmi silu veľkosti $2\cdot10^{-7}$ newtona na meter dĺžky vodiča

diamagnetické látky – látky zoslabujúce vonkajšie magnetické pole; magnetické momenty ich molekúl sú mimo magnetického poľa nulové, ich relatívna permeabilita je menšia ako 1 a magnetická susceptibilita záporná

feromagnetické látky – látky výrazne zosilňujúce vonkajšie magnetické pole; ich molekuly majú vlastné magnetické momenty, ktoré pod Curieho teplotou majú tendenciu orientovať sa navzájom rovnobežne aj v neprítomnosti vonkajšieho magnetického poľa; majú vysokú relatívnu permeabilitu

Gaussove polohy – špeciálne body v priestore v okolí magnetického dipólu - v predĺžení vektorovej priamky jeho magnetického momentu (prvá Gaussova poloha), resp. v rovine kolmej na túto priamku (druhá Gaussova poloha)

gyromagnetický pomer – pomer magnetického momentu (elementárnej) častice a jej momentu hybnosti

indukčné čiary – myslené uzavreté čiary (krivky) v magnetickom poli, ktoré majú tú vlastnosť, že v každom ich bode sú dotyčnice rovnobežné s vektorom magnetickej indukcie

intenzita magnetického poľa (H) – vektorová veličina charakterizujúca magnetické pole v prostredí, definovaná tak, aby závisela iba od makroskopických elektrických prúdov ale nie od mikroskopických (t.j. od magnetických dipólov prítomných v látke); podiel magnetickej indukcie a permeability prostredia; jednotka A/m

Larmorova frekvencia – frekvencia precesného pohybu častice, ktorá má magnetický moment a moment hybnosti, vo vonkajšom magnetickom poli

Lorentzova sila – súčet magnetickej sily a elektrickej sily, ktoré pôsobia na elektricky nabitú časticu pohybujúcu sa v elektromagnetickom poli; v zúženom chápaní sila pôsobiaca na elektricky nabitú časticu pohybujúcu sa v magnetickom poli

magnetická indukcia (B)– vektorová veličina charakterizujúca magnetické pole, definovaná na základe silových účinkov magnetického poľa na pohybujúce sa elektricky nabité častice; jednotka tesla (T)

magnetická konštanta, permeabilita vákua (μ_o) – skalárna konštanta vystupujúca v Biotovom-Savartovom-Laplaceovom zákone vo vákuu; jej hodnota bola pôvodne určená experimentálne, dnes jej hodnota je definovaná $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (kg m)/(A^2s^2)

magnetická polarizácia (J_m) – vektorová veličina charakterizujúca látku v namagnetovanom stave, skalárny násobok magnetizácie magnetickou konštantou; jednotka tesla (T)

magnetická sila – sila pôsobiaca v magnetickom poli na vodiče elektrického prúdu, alebo na pohybujúce sa elektricky nabité častice

magnetická susceptibilita ($æ$) – bezrozmerná veličina sprostredkujúca vzťah medzi intenzitou magnetického poľa a magnetizáciou; pri diamagnetických látkach je záporná, pri feromagnetických značne väčšia než 1

magnetické pole – pole v okolí vodičov elektrického prúdu, alebo magnetických dipólov, v ktorom na iné vodiče prúdu, alebo na pohybujúce sa elektricky nabité častice, pôsobí (magnetická) sila; na magnetický dipól pôsobí v magnetickom poli aj moment síl

magnetický dipól – *objekt s magnetickým momentom, napr. tyčový magnet, prúdová* slučka

magnetický moment, Ampérov magnetický moment ($\boldsymbol{m}_m$) – vektorová veličina kvantitatívne charakterizujúca magnetický dipól, definovaná pomocou momentu síl, ktorý na dipól pôsobí v homogénom magnetickom poli; jednotka $A \cdot m^2$

magnetický tok (Φ) – skalárna veličina - plošný integrál vektora magnetickej indukcie; jednotka weber ($1\ Wb = 1\ T \cdot m^2$)

magnetizácia (M) – veličina charakterizujúca namagnetovaný stav látky - vektorový súčet magnetických momentov pripadajúci na jednotku objemu; jednotka A/m

materiálový vzťah – v magnetickom poli vzťah medzi vektormi magnetickej indukcie, intenzity magnetického poľa a magnetizáciou (resp. magnetickou polarizáciou

Maxwellova rovnica 2. – rovnica vyjadujúca skutočnosť, že magnetické pole je nežriedlové, t.j. že indukčné čiary sú uzavreté

paramagnetické látky – látky slabo zosilňujúce vonkajšie magnetické pole; magnetické momenty ich molekúl sú nenulové, ale mimo magnetického poľa neusporiadané; ich relatívna permeabilita je > 1

permeabilita (μ) – konštanta charakterizujúca magnetické vlastnosti materiálu - súčin magnetickej konštanty a relatívnej permeability; jednotka (kg m)/(A^2s^2)

permeabilita vákua → magnetická konštanta

relatívna permeabilita (μ_r) – bezrozmerná veličina charakterizujúca prostredie; udáva, koľkokrát je magnetická indukcia vytvorená makroskopickými prúdmi v prostredí väčšia, než vo vákuu

spriahnuté prúdy – elektrické prúdy prechádzajúce plochou, ktorá je preložená zvolenou uzavretou integračnou čiarou

tesla (T) – jednotka magnetickej indukcie v SI

vektorový potenciál (A) – vektorová veličina charakterizujúca magnetické pole - analógia skalárneho potenciálu elektrostatického poľa; vektorovou operáciou rotácia sa z vektorového potenciálu získa magnetická indukcia

weber (Wb) – jednotka magnetického toku

zákon celkového prúdu, zákon prietoku – zákon, podľa ktorého sa cirkulácia intenzity magnetického poľa rovná súčtu všetkých spriahnutých makroskopických elektrických prúdov

zákon prietoku → zákon celkového prúdu

Úlohy

Sily v magnetickom poli

1. Elektrón (hmotnosť m_e, náboj e) vletel do homogénneho magnetického poľa kolmo na indukčné čiary. V magnetickom poli sa začal pohybovať po kružnici s periodou T. Vypočítajte veľkosť B vektora magnetickej indukcie tohto poľa. Aká by bola doba obehu T_1 v magnetickom poli s indukciou $B_1 = 10^{-2}$ T ?

Výsledok: $B = \dfrac{2\pi m_e}{eT}$, $T_1 \cong 3{,}6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}$.

2. Elektrón (m_e, e) urýchlený elektrickým napätím $U = 1$ kV, vletí do homogénneho magnetického poľa s indukciou veľkosti $B = 2 \cdot 10^{-3}$ T , pričom vektor jeho rýchlosti $\boldsymbol{v}$ zviera s vektorom $\boldsymbol{B}$ uhol $\beta = 30°$. Vypočítajte veľkosť rýchlosti v elektrónu, polomer R a stúpanie s skrutkovice, po ktorej sa bude elektrón pohybovať.

Výsledok: $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_e}}$, $R = \dfrac{1}{B}\sqrt{\dfrac{m_e U}{2e}}$, $s = \dfrac{2\pi}{B}\sqrt{\dfrac{m_e U}{e}}$.

3. V kruhovom urýchľovači, ktorého homogénne magnetické pole má magnetickú indukciu veľkosti B , sa pohybuje protón (m_p , e) po kružnici s polomerom R . Akým elektrickým napätím U bol protón urýchlený pred vstupom do magnetického poľa urýchľovača?

Výsledok: $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{eB^2R^2}{m_p}$.

4. V homogénnom magnetickom poli, ktorého vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ má horizontálny smer, sa nachádza veľmi dlhý vodič, ktorého hmotnosť pripadajúca na jednotku dĺžky je $\lambda = \mathrm{d}m/\mathrm{d}l$. Vodič je uložený horizontálne, kolmo na vektor magnetickej indukcie. Aký veľký prúd I_1 musí tiecť vodičom, aby magnetická sila kompenzovala jeho tiaž?

Výsledok: $I = \lambda g/B$.

5. Veľmi dlhý priamy vodič je uložený horizontálne a tečie ním prúd I_1 . Pod ním, vo vzdialenosti x , v spoločnej vertikálnej rovine, je uložený druhý veľmi dlhý priamy vodič, ktorého hmotnosť pripadajúca na jednotku dĺžky je $\lambda = \mathrm{d}m/\mathrm{d}l$. Vodičom tečie prúd I_2 . Pri akej vzdialenosti x_1 sa tiaž vodiča kompenzuje magnetickou silou? Aký smer musí mať prúd I_2 vzhľadom na prúd I_1 ?

Výsledok: $x = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi g \lambda}$.

6. Vektor $\boldsymbol{B}$ magnetickej indukcie homogénneho poľa je rovnobežný s osou z karteziánskej súradnicovej sústavy a má smer jednotkového vektora $\boldsymbol{k}$. V tomto poli sa nachádza dlhý priamy vodič, ktorý leží v rovine x, y, s osou x zviera uhol β a tečie ním prúd veľkosti I_1. Akou veľkou silou F_1 pripadajúcou na jednotku dĺžky musíme pôsobiť na vodič, aby zostal v pokoji? Aký smer má táto sila? Ak touto silou premiestnime vodič o vzdialenosť L v smere sily, akú prácu W vykonáme?

Výsledok: $\dfrac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}\ell} = I_1 B$, $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\ell} = I_1 BL$.

7. V jednej rovine s veľmi dlhým priamym vodičom sa nachádza obdĺžnikový závit so stranami veľkosti a, b. Strana a je rovnobežná s vodičom, a vzdialená od neho o vzdialenosť c. Vypočítajte veľkosť výslednej sily F pôsobiacej na závit, ak vodičom tečie prúd I_1, závitom prúd I_2. Aký je smer tejto sily? Aký moment síl M_F pôsobí na závit?

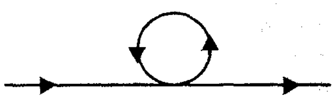
Výsledok: $F = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi c(c+b)}$, $M_F = 0$.

Magnetické pole v okolí vodičov prúdu

8. Po obvode tenkého kruhového kotúča s polomerom R, zhotoveného z elektricky nevodivého materiálu, je rovnomerne rozložený elektrický náboj Q. Kotúč sa spolu s nábojom otáča frekvenciou f okolo osi ktorá je kolmá na jeho rovinu a prechádza jeho stredom. Vypočítajte veľkosť magnetickej indukcie B a intenzity magnetického poľa H v strede kotúča.

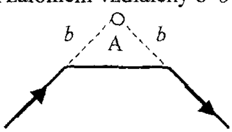
Výsledok: $B = \dfrac{\mu_0 Q f}{2R}$, $H = \dfrac{Qf}{2R}$.

9. Veľmi dlhý priamy vodič, ktorým tečie prúd I_1, má na jednom mieste kruhovú slučku s polomerom R. Vypočítajte veľkosť vektora magnetickej indukcie uprostred slučky.



Výsledok: $B = \dfrac{\mu_0 I_1}{2R}\left(1 + \dfrac{1}{\pi}\right)$.

10. Veľmi dlhý priamy vodič, ktorým tečie **prúd I_1 je dvakrát zalomený po 45°. Určte** veľkosť a smer vektora magnetickej induk**cie v bode** A **podľa obrázku. Bod A je** od obidvoch zalomení vzdialený o b.



Výsledok: $B = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi b}$

11. K začiatku karteziánskej súradnicovej sústavy priteká pozdĺž osi x elektrický prúd veľkosti I (vektor prúdovej hustoty má opačný smer ako jednotkový vektor $\vec{i}$). Tam sa rozvetvuje, polovica tečie pozdĺž osi y, polovica pozdĺž osi z. Vypočítajte veľkosť a súradnice B_x, B_y, B_z, vektora magnetickej indukcie v bode A(0, a, a).

Výsledok: $B = \dfrac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi a}$, $B_x = 0$, $B_y = -B\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $B_z = -B\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Kruhový závit s polomerom R a veľmi dlhý priamy vodič ležia v jednej rovine. Dlhý vodič prechádza bodom, ktorý leží vo vzdialenosti $a = 3R$ od stredu závitu. Akým smerom musia tiecť prúdy závitom resp. vodičom, a aký musí byť pomer ich veľkostí, aby v strede závitu bola magnetická indukcia nulová?

Výsledok: $\dfrac{I_{kr}}{I_v} = \dfrac{1}{3\pi}$.

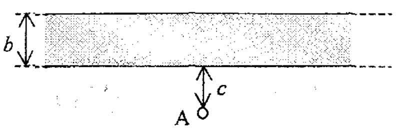
13. Kruhový závit s polomerom R leží v rovine (y, z), závit s polomerom $2R$ v rovine (x, z). Obidva závity majú stredy v začiatku karteziánskej súradnicovej sústavy a každým z nich tečie prúd veľkosti I. Vypočítajte veľkosť vektora magnetickej indukcie a jeho súradnicu B_z v začiatku súradnicovej sústavy. Čo treba ešte zadať, aby bolo možné vypočítať súradnice B_x a B_y?

Výsledok: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}$, $B_z = 0$.

14. Dlhým priamym vodičom uloženým v osi x karteziánskej súradnicovej sústavy tečie prúd I_1 (v kladnom smere osi x), vodičom uloženým v osi y prúd I_2 (v zápornom smere osi y). Vypočítajte, aká je veľkosť vektora magnetickej indukcie v bode A(a, b, 0) a jeho súradnice B_x, B_y, B_z.

Výsledok: $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\left(\dfrac{I_2}{a} - \dfrac{I_1}{b}\right)$, $B = |B_z|$.

15. Cez veľmi dlhý priamy vodič s tvarom pásu šírky b tečie prúd I, ktorý je rovnomerne rozložený po celej šírka vodiča. Aká veľká je magnetická indukcia B vo vzdialenosti c od okraja vodiča?



Výsledok: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln\dfrac{c+b}{c}$

16. Vypočítajte veľkosť vektora magnetickej indukcie uprostred závitu, ktorý má tvar rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky $a = 10$ cm, keď ním tečie elektrický prúd $I = 2$ A.

Výsledok: $B = \dfrac{9\mu_0 I}{2\pi a}$.

17. Vypočítajte magnetickú indukciu v strede plochej cievky s tvarom štvorca (strana má dĺžku $a = 10$ cm), ktorá má $N = 30$ závitov a tečie ňou prúd veľkosti $I = 3$ A .

Výsledok: $B = N \dfrac{\mu_o I}{\pi a} \sqrt{2}$.

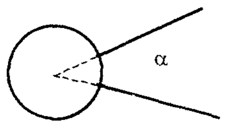
18. Tenký drôt je sformovaný do tvaru štvorca so stranou $a = 10$ cm. Závit leží vo vertikálnej rovine, zhodnej s rovinou magnetického poludníka a v jeho strede je uložená magnetka ukazujúca na sever. Potom cez štvorcový závit necháme tiecť prúd I. Aký veľký musí byť tento prúd, aby sa magnetka od pôvodného smeru vychýlila o uhol $\alpha = 45°$? Horizontálna zložka zemského magnetického poľa má veľkosť $B_Z = 2 \cdot 10^{-5}$ T .

Výsledok: $I = B_Z \dfrac{\pi a}{\mu_o \sqrt{2}}$.

19. Kruhový závit má polomer R a tečie ním elektrický prúd. Intenzita magnetického poľa v strede závitu má veľkosť H_S. Akú intenzitu H_A má pole na osi závitu vo vzdialenosti a od stredu závitu?

Výsledok: $H_a = H_s \dfrac{R^3}{(a^2 + R^2)^{3/2}}$.

20. K tenkému kruhovému prstencu s elektrickým odporom R a polomerom r sú radiálne pripojené dva veľmi dlhé priame vodiče tak, že ležia v rovine prstenca a navzájom zvierajú uhol α . Jedným vodičom prúd priteká, v mieste styku s prstencom sa rozdvojuje a druhým vodičom odteká. Aká veľká je magnetická indukcia v strede prstenca?



Výsledok: $B = 0$.

21. Veľmi dlhým priamym dutým vodičom, ktorého prierez má tvar medzikružia s vnútorným polomerom r_1 a vonkajším polomerom r_2 tečie prúd I , pričom hustota prúdu je v celom priereze vodiča rovnaká. Vypočítajte veľkosť intenzity magnetického poľa v dutine H_d , vo vodiči H_v a mimo vodiča H_m .

Výsledok: $H_d = 0$, $H_v = \dfrac{I}{2\pi x} \dfrac{x^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$, $H_m = \dfrac{I}{2\pi x}$.

22. Veľmi dlhý priamy vodič, ktorým tečie prúd I , je zalomený do pravého uhla. Aká je veľkosť a smer vektorov $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{H}$ v bode P , ktorý je od zlomu - v predĺžení jednej časti vodiča - vzdialený o a ? Aká je veľkosť týchto vektorov vo vákuu a v prostredí s relatívnou permeabilitou μ_r ?

Výsledok: $B_1 = \dfrac{1}{2} \dfrac{\mu_o I}{2\pi a}$, $B_2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{\mu_o \mu_r I}{2\pi a}$, $H_1 = H_2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{I}{2\pi a}$

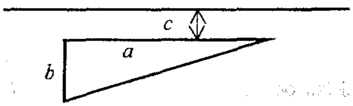
23. Vypočítajte magnetický tok Φ cez plochu ohraničenú obdĺžnikovým závitom so stranami a, b, ak sa tento nachádza v homogénnom magnetickom poli. Strana b je na vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ kolmá, strana a s ním zviera uhol $\beta = 60°$.

Výsledok: $\Phi = Bab\cos\beta$.

24. V jednej rovine s veľmi dlhým priamym vodičom, ktorým tečie prúd I, sa nachádza obdĺžnikový závit so stranami a, b. Strana a je rovnobežná s vodičom, pričom vzdialenosť medzi závitom (jeho bližšou stranou) a vodičom je c. Vypočítajte magnetický tok Φ cez plochu ohraničenú závitom.

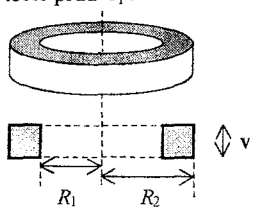
Výsledok: $\Phi = \dfrac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\dfrac{c+b}{c}$.

25. V jednej rovine s veľmi dlhým priamym vodičom, ktorým tečie prúd I, je umiestnený závit v tvare pravouhlého treojuholníka (odvesny s dĺžkami a, b), pričom odvesna a je rovnobežná s vodičom a vzdialená od neho o c. Vypočítajte magnetický tok Φ cez plochu ohraničenú závitom.



$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}a\left[\left(1+\frac{c}{b}\right)\ln\frac{c+b}{c} - 1\right]$$

26. Cievka je navinutá na prstencovom jadre z materiálu, ktorého relatívna permeabilita $\mu_r = 5$. Jadro má pravouhlý prierez (obrázok). Cievka má $N = 150$ rovnomerne navinutých závitov. Vypočítajte intenzitu magnetického poľa $H(x)$ v jadre, ako funkcie vzdialenosti od stredu jadra a magnetický tok Φ jadrom. Cievkou tečie prúd I_1.



Výsledok: $H = \dfrac{NI_1}{2\pi x}$, $\Phi = \mu_0\mu_r\dfrac{N^2 I_1 v}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$.

27. Na obvode tenkého nemagnetického kotúča s polomerom R je rovnomerne rozložený elektrický náboj Q. Kotúč sa spolu s nábojom otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo osi kolmej na rovinu kotúča a prechádzajúcej jeho stredom. Aký veľký prúd I_1 predstavuje rotujúci náboj? Aký je magnetický moment m_m rotujúceho kotúča?

Výsledok: $I_1 = \dfrac{Q\omega}{2\pi}$, $m_m = \dfrac{Q\omega R^2}{2}$.

28. Plochá cievka s $N = 20$ závitmi, priemerom kruhových závitov $d = 4$ cm, je zavesená na vákne a tečie ňou prúd $I = 4$ A. Os cievky je vodorovná a s rovinou magnetického poludníka zviera uhol $\alpha = 30°$. Akým momentom síl M_F pôsobí zemské magnetické pole na cievku, keď horizontálna zložka magnetickej indukcie zemského poľa má veľkosť $B_Z = 2\cdot10^{-5}$ T?

Výsledok: $M_F = \dfrac{\pi}{4} N I d^2 B \sin\alpha$.

29. Magnetka kompasu kmitá v zemskom magnetickom poli s periódou $T_1 = 0{,}7$ s. Aká veľká je magnetická indukcia B_2 poľa, v ktorom magnetka kmitá s periódou $T_2 = 0{,}1$ s? Magnetická indukcia zemského poľa $B_Z = 2\cdot10^{-5}$ T.

Výsledok: $B_2 = B_Z \dfrac{T_1^2}{T_2^2}$.

30. Plochá cievka má $N = 50$ kruhových závitov s priemerom $d = 4$ cm, a tečie ňou prúd $I_1 = 2$ A. Vypočítajte veľkosť magnetickej indukcie vo vzdialenosti $l = 100$ cm od stredu cievky v prvej a v druhej Gaussovej polohe.

Výsledok: $B_1 = \dfrac{\mu_0 I d^2}{14 l^3}$, $B_2 = 2B_1$.

31. V homogénnom magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$ sa nachádza závit s tvarom rovnostranného trojuholníka (strana má dĺžku a), pričom normála na rovinu závitu zviera s vektorom $\boldsymbol{B}$ uhol $\alpha = 45°$. Aký moment síl M_F pôsobí na závit, a akú má potenciálnu energiu W_p v tomto poli, ak ním tečie prúd I?

Výsledok: $M_F = \dfrac{\sqrt{6}}{8} I a^2 B$, $W_p = -\dfrac{\sqrt{6}}{8} I a^2 B$.

32. Plochá rovinná cievka má $N = 1000$ závitov, pričom každý z nich ohraničuje plochu s efektívnym obsahom $S_1 = 500\ \text{cm}^2$. Cievka sa nachádza v magnetickom poli s indukciou $B_1 = 2\cdot10^{-2}$ T. Aký veľký prúd I_1 musí tiecť cievkou, aby na ňu pôsobil krútiaci moment $M_k = 50$ N·m?

Výsledok: $I_1 = \dfrac{M_k}{N S_1 B}$.

Obsah

Súbor zošitkov základného kurzu fyziky

Vektory
Kinematika
Dynamika hmotného bodu
Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa
Kmitanie a vlnenie
Teplo a termodynamika
Elektrostatické pole
Elektrický prúd
Magnetické pole
Elektromagnetické pole
Fyzikálna optika
Kvantové javy