

**Fakulta elektrotechniky a informatiky**  
Slovenskej technickej univerzity v Bratislave

Katedra fyziky

# **FYZIKA PO KAPITOLÁCH**

## **KVANTOVÉ JAVY**

**Doc. RNDr. Ivan Červeň, CSc.**

© Ivan Červeň

V roku 2005 vydala Fakulta elektrotechniky a informatiky STU  
v Bratislave

Na prelome XIX. a XX. storočia Max Planck vyslovil hypotézu, podľa ktorej zmeny energie  $\Delta E$  elektromagnetického poľa nemôžu byť ľubovoľne malé. Planck tvrdil, že zmeny sa môžu diať iba po konečných, elementárnych množstvách, vyjadrených súčinom frekvencie elektromagnetickej vlny  $f$  a konštanty ktorú označil písmenom  $h$ :  $\Delta E = hf$ , ktorá bola neskôr po ňom pomenovaná. Predstavy o spojitých (ľubovoľne malých) zmenách nie iba energie elektromagnetického poľa, ale aj iných fyzikálnych veličín začali strácať na opodstatnení a začalo sa obdobie, v ktorom získavala stále silnejšiu pozíciu tzv. "kvantová fyzika".

Nespojitost (diskrétnosť) niektorých fyzikálnych javov však bola známa už aj v klasickej fyzike. Struna či píšťalka vydávajú tóny iba diskrétnych frekvencií. Predstava o nedeliteľnosti látky na menšie časti než atómy pochádza ešte z čias starého Grécka. Moderná fyzika však priniesla výsledky, podľa ktorých sa nespojito mení aj elektrický náboj, magnetický moment, energia i hybnosť častíc. Takéto vlastnosti majú nielen častice, ale aj elektromagnetické pole. O svetle, ako jeho významnej súčasti, sa už viac než storočie viedli spory, či má charakter vlnenia, alebo ide o prúd častíc, ako si to predstavoval Isaac Newton. V prospech vlnového charakteru svetla svedčia jeho interferencia, ohyb a polarizácia. V Planckovom období to boli javy známe už približne jedno storočie, zatiaľ čo javy svedčiace v prospech časticových (korpuskulárnych) vlastností svetla sa začali objavovať až v jeho období. Po Planckovom vysvetlení zákonitosti žiarenia vysielaného rozžeravenými telesami (1900), prišiel na rad fotoelektrický jav (Einstein 1905), a Comptonov jav (1922). Treba však poznamenať, že už dlho predtým sa intenzívne experimentovalo najmä v oblasti žiarenia a fotoelektrického javu, takže Planckova hypotéza a Einsteinovo vysvetlenie boli iba završením dlhotrvajúcej práce, na ktorej sa podieľali mnohí významní vedci, neskôr odmenení Nobelovými cenami. Nasledujúce paragrafy sa zaoberajú opisom javov ktoré poukazujú na korpuskulárnu povahu svetla a elektromagnetického žiarenia všeobecne.

### Potrebné vedomosti

Kapitola nadväzuje na predchádzajúce časti textu, to znamená, že treba poznať základné pojmy z mechaniky, kmitavého pohybu, vlnenia, ale aj elektriny a magnetizmu. Kapitola nie je matematicky veľmi náročná, ale základy matematickej analýzy sú potrebné.

# 11.1 ČASTICOVÉ VLASTNOSTI LEKTROMAGNETICKÉHO ŽIARENIA

## Kľúčové slová

Fotón, kvantum energie, Planckova konštanta, fotoelektrický jav, výstupná práca, prahová frekvencia, žiarenie čierneho telesa, intenzita vyžarovania, spektrálna intenzita vyžarovania, Stefanov-Boltzmannov zákon, Wienov zákon, Planckov zákon žiarenia

### 11.1.1 Fotón

Experimentálne výsledky pozorované pri žiarení zohriatych telies, pri fotoelektrickom jave, i pri iných javoch, možno vysvetliť predstavou o minimálnom energetickom kvante elektromagnetického žiarenia, ktoré neskôr dostalo názov fotón. Fotón má celý rad vlastností typických pre elementárne častice, preto je považovaný za jednu z nich.

Fotónu súvisiacemu s elektromagnetickou vlnou, ktorá má frekvenciu  $f$ , sa pripisuje **energia**

$$E = hf \quad \left( = \frac{h}{2\pi} 2\pi f = \hbar\omega \right), \quad (11.1.1.1)$$

kde  $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$  J·s je Planckova konštanta,  $\hbar$  Planckova konštanta delená číslom  $2\pi$  a  $\omega$  uhlová frekvencia elektromagnetickej vlny. Podľa teórie relativity, sa fotónu súčasne pripisuje energia

$$E = m_f c^2, \quad (11.1.1.2)$$

kde  $c$  je rýchlosť svetla a  $m_f$  predpokladaná hmotnosť fotónu. *Fotón* sa nemôže zastaviť, vždy sa pohybuje rýchlosťou svetla, preto  *nemá*  tzv.  *pokojovú hmotnosť*  ako elektrón alebo iná elementárna častica. Porovnaním rovníc (11.1.1.1) a (11.1.1.2) dostaneme pre predpokladanú hmotnosť fotónu vzťah:

$$m_f = \frac{hf}{c^2}. \quad (11.1.1.3)$$

Experimentálne sa potvrdzuje, že fotón pri pohybe priestorom prenáša nie iba energiu, ale aj **hybnosť** ( $p$ ), ktorej veľkosť vypočítame ako súčin jeho hmotnosti  $m_f$  a rýchlosti svetla:

$$p = m_f c = \frac{m_f c^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (11.1.1.4)$$

kde  $\lambda$  je vlnová dĺžka svetelnej vlny, pre ktorú platí  $c = f\lambda$ . Vzorec obsahuje významný vzťah medzi energiou a hybnosťou fotónu

$$E = pc \quad (11.1.1.5)$$

Pozorovania ukazujú (napr. zákonitosti optických spektier), že fotónu treba pripísať aj **moment hybnosti**, ktorého veľkosť  $L_f$  sa rovná

$$L_f = \frac{h}{2\pi}.$$

(11.1.1.6)

Vo všetkých uvedených veličinách vystupuje Planckova konštanta, ktorá má veľmi malú hodnotu. Preto zmena energie sústavy (a ďalších veličín) pri vyžiarení alebo pohltení jedného fotónu je z makroskopického hľadiska nepatrná. To je dôvod, prečo sa zmeny energie bežne javia ako spojité a nie diskrétné.

**Príklad 11.1.1.1** Aká je energia fotónu zodpovedajúceho červenej farbe a fotónu zodpovedajúceho fialovej farbe viditeľného spektra? Vlnová dĺžka svetla červenej farby je 750 nm, fialovej 400 nm, Planckova konštanta má hodnotu  $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$  Js. Energie vyjadrite v jouloch a v elektrónvoltoch.

**Riešenie** Fotón zodpovedajúci červenej farbe prenáša energiu:

$$E_f = hf = hc/\lambda = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} / (750 \cdot 10^{-9} \text{ m}) = 2,65 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,654 \text{ eV}.$$

Fotón zodpovedajúci fialovej farbe má energiu  $E_f = 3,1 \text{ eV}$ .

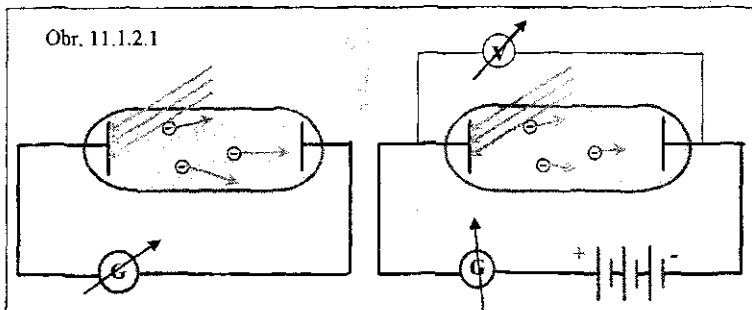
### Kontrolné otázky

1. Akým vzťahom sa vyjadruje energia fotónu?
2. Akým vzťahom sa vyjadruje hybnosť fotónu?
3. Aký vzťah vyjadruje súvis energie a hybnosti fotónu?
4. Akú veľkú energiu, vyjadrenú v elektrónvoltoch majú fotóny viditeľného svetla?
5. Má fotón moment hybnosti?

### 11.1.2 Fotoelektrický jav

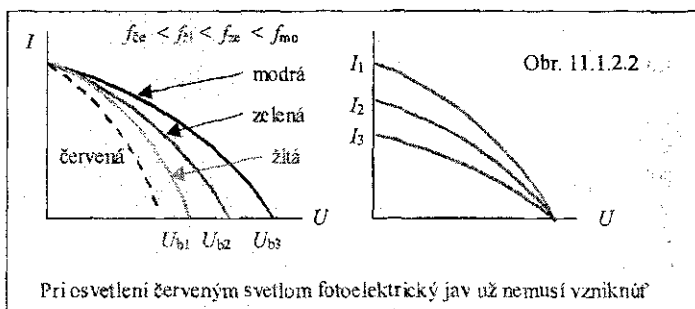
Ide o uvoľňovanie elektrónov z povrchu kovu, keď na kov dopadá svetlo, alebo ultrafialové žiarenie. Týmto javom sa zaoberali viacerí vedci už koncom XIX. storočia, dokonca ešte pred objavením elektrónu (Hertz, Halwachs, Stoletov, i bratislavský rodák Lenard, ktorý za tieto práce dostal Nobelovu cenu). Keďže elektróny pri tomto jave kov opúšťajú, používa sa aj názov **vonkajší fotoelektrický jav**.

Experimentálne usporiadanie je na obrázku. V sklenej banke, z ktorej je vyčerpaný vzduch, sú umiestnené dve kovové elektródy. Keď na jednu z nich, ktorú nazveme katóda začne dopadať svetlo, začínú sa z nej uvoľňovať elektróny (fotoelektróny) a galvanometer zaregistruje, že elektrickým obvodom tečie elektrický prúd (fotoprúd).



Fotoprúd možno zmenšiť, alebo zastaviť vložení elektrického napätia medzi elektródy, pričom na katódu, z ktorej sa elektróny uvoľňujú, treba priložiť kladný pól a na druhú elektródu záporný pól vonkajšieho zdroja elektrického napätia. Meraním veľkosti fotoprúdu v závislosti od veľkosti priloženého napätia dostaneme krivku, ktorá pri istom napätí (**brzdné napätie**) dosahuje nulovú hodnotu (obr. 11.1.2.2). Mnohonásobným meraním, pri osvetľovaní kovu svetlom rôznych vlnových dĺžok a rôznej intenzity, bolo zistených niekoľko skutočností, ktoré sú pre fotoelektrický jav typické:

- fotoprúd vzniká okamžite po osvetlení kovu
- brzdné napätie závisí od frekvencie (vlnovej dĺžky) použitého svetla; čím vyššia je frekvencia, tým je brzdné napätie väčšie (ľavá časť obr. 11.1.2.2)
- aby bol fotoprúd pozorovateľný, frekvencia svetla musí dosiahnuť istú minimálnu hodnotu
- od intenzity osvetlenia kovu závisí veľkosť fotoprúdu, ale nie brzdné napätie (pravá časť obr. 11.1.2.2)
- brzdné napätie pri danej frekvencii svetla závisí od konkrétneho kovu



Získané závislosti nebolo možné vysvetliť na základe klasických predstáv o svetle ako o elektromagnetickom vlnení. Merateľný fotoprúd vzniká už pri príkone pribl.  $10^{-6}$  W/m<sup>2</sup>. Pri typickej vzdialenosti medzi atómami kovu  $3 \cdot 10^{-10}$  m, na štvorcový meter povrchu pripadá rádovo  $10^{19}$  atómov. To znamená príkon svetelnej energie približne  $10^{25}$  W na atóm, alebo vo vhodnejších jednotkách  $10^{-6}$  eV/s na každý atóm. Na uvoľnenie elektrónu z atómu treba dodať energiu približne 1 eV ( $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-16}$  J).

To znamená, že na nahromadenie postačujúcej energie by bolo potrebných  $10^6$  sekúnd, čo je približne 100 dní. Ale fotoprúd sa pozoruje ihneď po osvetlení. To znamená, že svetelná energia sa nerozdeľuje na atómy rovnomerne, vo veľmi malých množstvách, ale absorbuje sa len niektorými atómami a to v množstvách (kvantách), ktoré postačujú na uvoľnenie elektrónu z atómu. V príklade 11.1.1.1 je vypočítaná energia fotónov viditeľnej časti spektra elektromagnetického žiarenia. Z výsledku vidno, že ak atóm absorbuje čo len jeden fotón, získa tým energiu postačujúcu na uvoľnenie elektrónu. Táto skutočnosť jednoznačne podporuje Planckovu hypotézu o minimálnych kvantách energie, ktoré elektromagnetické pole môže prijímať alebo odovzdávať.

Vysvetlenie fotoelektrického javu pochádza z roku 1905 od Alberta Einsteina (dostal zaň Nobelovu cenu). Z dopadajúcej svetelnej vlny kov absorbuje energiu po kvantách (jednotlivých fotónoch), pričom predpokladal, že fotón pri dopade na atóm zanikne. Energia fotónu  $hf$  sa spotrebuje čiastočne na odtrhnutie elektrónu z atómu, na tzv. výstupnú prácu  $W$ , pričom zvyšok sa premení na kinetickú energiu uvoľneného elektrónu. Túto energetickú bilanciu vyjadruje Einsteinova rovnica:

$$hf = W + \frac{1}{2}mv^2, \quad (11.1.2.1)$$

kde  $m$  je hmotnosť a  $v$  rýchlosť elektrónu. Rovnica vysvetľuje všetky pozorované skutočnosti uvedené vyššie pod bodmi a) až e). Čím vyššia je frekvencia dopadajúceho žiarenia, tým väčšia časť energie fotónu sa premení na kinetickú energiu uvoľneného elektrónu, lebo výstupná práca závisí iba od druhu osvetľovaného kovu. Čím väčšia je kinetická energia uvoľneného elektrónu, tým silnejším elektrickým poľom ho treba brzdiť, aby nedoletel až na druhú elektródu. To znamená, že treba zväčšiť brzdné napätie (bod b). Keď frekvencia žiarenia je natoľko malá, že energia fotónov nepostačuje ani na odtrhnutie elektrónu od atómu, t.j. na prekonanie výstupnej práce, fotoelektrický jav nenastane (bod c). Zvýšenie intenzity osvetlenia predstavuje zväčšenie počtu fotónov dopadajúcich na kov za sekundu, čím sa zvýši počet fotoelektrónov a tým aj fotoprúd. Energia jednotlivých fotónov sa zvýšením osvetlenia nezmení, preto sa nezmení ani brzdné napätie (bod d). Závislosť brzdného napätia od druhu kovu je dôsledkom inej hodnoty výstupnej práce, ktorá závisí od pevnosti väzby elektrónov v konkrétnom kove (bod e).

Einstein pri úspešnom vysvetlení fotoelektrického javu využil Planckovu hypotézu a významne ju tým podporil. Nebola totiž medzi fyzikmi prijímaná jednoznačne, dokonca aj Max Planck ju spočiatku považoval iba za úspešný matematický obrat, ale nie za fyzikálnu realitu.

**Príklad 11.2.1** Akým brzdným napätím dokážeme zastaviť fotoelektróny uvoľnené zo sodíka (výstupná práca  $W = 1,5$  eV), keď tento alkalický kov osvetľujeme modrým svetlom (vlnová dĺžka  $\lambda = 400$  nm).

**Riešenie** Brzdné napätie  $U_b$  vynásobené nábojom elektrónu  $e$  predstavuje potenciálnu energiu, ktorú dokáže prekonať (vyrovnať) elektrón získanou kinetickou energiou pri fotoelektrickom jave. Získaná kinetická energia sa rovná rozdielu energie fotónu  $hf = hc/\lambda$  a výstupnej práce  $W$ :  $U_b = (hf - W)/e = 0,998$  V.

### Kontrolné otázky

- Čo je to fotoelektrický jav?
- Čo rozumieme pod fotoelektrónmi a fotoprúdom?
- Čo rozumieme pod brzdným napätím?
- Ako závisí brzdné napätie od vlnovej dĺžky svetla?
- Čo rozumieme pod výstupnou prácou?
- Zavisi brzdné napätie od intenzity osvetlenia?
- Viete napísať Einsteinovu rovnicu opisujúcu fotoelektrický jav?
- Prečo sa fotoelektrický jav musí vysvetľovať kvantovou hypotézou a nie klasicky?

### 11.1.3 Žiarenie absolútne čierneho telesa

Je to historicky prvý jav vysvetlený na základe Planckovej kvantovej hypotézy. Zohriate telesá vyžarujú elektromagnetické žiarenie, ktoré bolo predmetom záujmu vedcov koncom XIX. storočia. Zistili, že spektrum tohto žiarenia závisí predovšetkým od teploty telesa, ale aj od jeho zloženia, úpravy povrchu a pod. Vyžarované spektrum je ovplyvnené schopnosťou telesa absorbovať konkrétne vlnové dĺžky žiarenia. Túto vlastnosť sformuloval Kirchhoff už v XIX. storočí a zistil, že v tepelnej rovnováhe (keď sa teplota telesa už nemení) čím viac energie pri istej vlnovej dĺžke teleso pohlcuje, tým viac na tejto vlnovej dĺžke aj vyžaruje. Aby sa výsledky experimentov rôznych laboratórií dali objektivizovať a navzájom porovnávať, bolo potrebné zvoliť štandardné teleso, nazvané **absolútne čierne teleso**. Má výnimočnú vlastnosť dokonale absorbovať všetky vlnové dĺžky elektromagnetického žiarenia, čo znamená, že má aj maximálne možnú schopnosť ich vyžarovať. Reálne telesá sú viac – menej sivé, čo znamená, že nedokážu absorbovať všetku dopadajúcu elektromagnetickú energiu. Model absolútne čierneho telesa sa v metrologických laboratóriách konštruje v tvare dutiny s malým otvorom, cez ktorý keď vnikne elektromagnetická vlna, už sa fakticky nedostane von. Preto otvor takéhoto telesa predstavuje absolútne čierne teleso. Zohrievaním telesa s dutinou a meraním parametrov žiarenia vychádzajúceho cez otvor, možno získať informácie o spektre žiarenia (absolútne čierneho telesa) zodpovedajúceho príslušnej teplote.

Na kvantitatívny opis takéhoto žiarenia treba zaviesť niektoré nové veličiny. Treba predovšetkým zaviesť veličinu vyjadrujúcu koľko žiarivej energie  $\Delta E$  vychádza z plošky s jednotkovým obsahom za jednotku času. Je to **intenzita vyžarovania** ( $M$ ), ktorá je definovaná vzťahom

$$M = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t}, \quad (11.1.3.1)$$

a meria sa v jednotkách  $J/(m^2 \cdot s) = (J/s)/m^2 = W/m^2$ . Touto veličinou sa vyjadruje úhrnná vyžarovaná energia na všetkých vlnových dĺžkach (frekvenciách). Na opis vyžarovaného spektra treba zaviesť ďalšiu veličinu, ktorá je definovaná podielom

$$M_f = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta f} = \frac{dM}{df}, \quad (11.1.3.2)$$

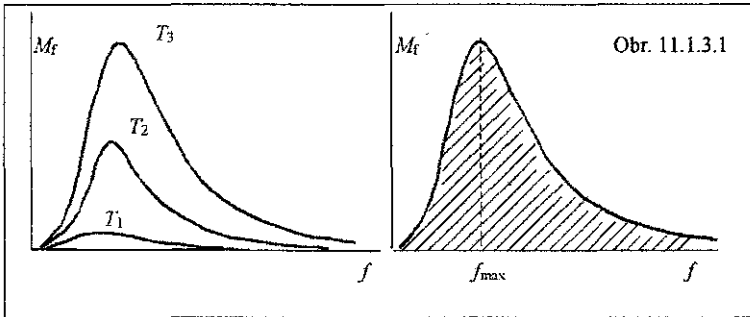


a nazveme ju **spektrálna intenzita vyžarovania**. Jednotkou tejto veličiny je  $W/(m^2 \cdot s)$ . Na základe vzorca (11.1.3.2) môžeme medzi veličinami  $M$  a  $M_f$  napísať aj opačný vzťah

$$M = \int_0^{\infty} M_f \, df .$$

(11.1.3.3)

Mnohé experimenty vykonané ešte v XIX. storočí viedli k získaniu závislosti veličiny  $M_f$  jednak od frekvencie (vlnovej dĺžky), jednak od teploty. Schematicky sú tieto krivky znázornené pre tri teploty  $T_1 < T_2 < T_3$ , na ľavej časti nasledujúceho obrázku.



Okrem nameraných kriviek boli ku koncu XIX. storočia známe aj ich dve významné vlastnosti. W. Wien objavil v roku 1893 vzťah medzi termodynamickou teplotou  $T$  absolútne čierneho telesa a vlnovou dĺžkou zodpovedajúcou maximu kriviek vyžarovania. Často sa namerané závislosti vynášajú ako funkcie vlnovej dĺžky, pričom sa spektrálna intenzita vyžarovania prepočítava na jednotkový interval vlnovej dĺžky a nie frekvencie. Vtedy možno priamo napísať vzťah

$$T \cdot \lambda_{max} = b$$

(11.1.3.4)

čo je **Wienov zákon** a  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$  je **Wienova konštanta**.

Jednoduchým výpočtom z Wienovho zákona získame informáciu o vlnovej dĺžke zodpovedajúcej maximu vyžarovania pri rôznych zaujímavých teplotách. Pri teplote 5000 K (približne teplota povrchu Slnka) absolútne čierne teleso najviac energie vyžaruje v okolí vlnovej dĺžky 577 nm, čo zodpovedá žltozelenej farbe. Na túto farbu je ľudské oko najcitlivejšie. Pri teplote nad 7000 K maximum leží v ultrafialovej oblasti. Pri teplote 3000 K, ktorú dosahuje wolfrámové vlákno žiarovky, maximum leží pri 960 nm, čo je v infračervenej oblasti. Wolfrámová žiarovka viac zohrieva ako svieti, lebo do viditeľnej oblasti vyžaruje menej ako 10 % z dodávanej elektrickej energie. Dnes sú známe údaje o reliktovej žiareni (pozostatku po začiatkovej fáze Vesmíru), ktoré sa podarilo zachytiť v roku 1965 pri vlnovej dĺžke približne 1 mm, čo patrí do oblasti mikrovĺn (Penzias a Wilson, Nobelova cena). Tomu zodpovedá teplota 2,7 K, teda teplota blízko absolútnej nuly.

Viedenský vedec J. Stefan v roku 1879 empiricky zistil ďalšiu zákonitosť, ktorú L. Boltzmann neskôr teoreticky zdôvodnil. Zistili, že veľkosti plochy pod krivkami spektrálnej intenzity vyžarovania sú úmerné štvrtéj mocnине termodynamickéj teploty. Táto závislosť je známa ako **Stefanov – Boltzmannov zákon** a možno ju vyjadriť vzorcom

$$M = \int_0^{\infty} M_f df = \sigma T^4 \quad (11.1.3.5)$$

Vo vzorci vystupujúca **Stefanova – Boltzmannova konštanta**, má experimentálne určenú hodnotu  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}^4)$ . Pomocou tohto zákona možno napríklad vypočítať, že Slnko z jedného štvorcového centimetra vyžaruje 7 kW, wolfrámové vlákno pri 2450 K iba 50 W.

---

**Príklad 11.1.3.1** Pri ktorej vlnovej dĺžke by maximálne vyžarovalo absolútne čierne teleso, keby malo teplotu ľudského tela?

**Riešenie** Teplotu ľudského tela 37 °C treba najprv vyjadriť v termodynamickéj teplotnej stupnici, t.j.  $T = 310 \text{ K}$ . Dosadením do Wienovho zákona pre vlnovú dĺžku maxima dostaneme  $\lambda_{\text{max}} = b/T = 2,898 \cdot 10^{-3} / 310 \approx 9,35 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . To je hlboko v infračervenej oblasti.

---

**Príklad 11.1.3.2** Koľko energie by vyžiarilo ľudské telo za hodinu, keby sme ho mohli považovať za absolútne čierne teleso? Povrch tela má asi 2 m<sup>2</sup>.

**Riešenie** Podľa Stefanovho - Boltzmannovho zákona energia vyžiarená za jednu sekundu z jedného štvorcového metra, t.j. vyžarovaný výkon je  $M = \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (310)^4 = 524 \text{ W}$ . Za jednu hodinu z plochy 2 m<sup>2</sup> sa vyžiarí energia  $E = 524 \cdot 2 \cdot 3600 = 3,8 \text{ MJ} = 1,05 \text{ kWh}$ .

---

### Kontrolné otázky

1. Čo rozumieme pod absolútne čiernym telesom?
2. Ako sa laboratórne realizuje absolútne čierne teleso?
3. Ako je definovaná intenzita vyžarovania?
4. Ako je definovaná spektrálna intenzita vyžarovania?
5. Aký je tvar Wienovho zákona?
6. Čo hovorí Stefanov - Boltzmannov zákon?
7. V ktorej oblasti vlnových dĺžok vyžaruje Slnko najviac?
8. V ktorej oblasti je ťažisko vyžarovania wolfrámového vlákna žiarovky?

### 11.1.4 Planckov zákon žiarenia

Laboratórny model čierneho telesa – dutina s malým otvorom – bol použitý aj pri teoretických pokusoch vysvetliť závislosť kriviek spektrálnej intenzity vyžarovania od teploty. Z dutiny môže vychádzať iba to čo v nej je, preto jestvuje úzka súvislosť medzi energiou pripadajúcou na jednotku objemu  $w$  v dutine a intenzitou vyžarovania  $M$  cez otvor. Dá sa dokázať (pozri dodatok D1), že medzi nimi platí vzťah ( $c$  je rýchlosť svetla):

$$M = \frac{c}{4} w . \quad (11.1.4.1)$$

Výpočty sa potom týkali energie nahromadenej v dutine pri teplote  $T$ . Výpočty – klasické i Planckov - sa opierali o myšlienku, že v dutine absolútne čierneho telesa sa nachádzajú stojaté elektromagnetické vlny, ktoré na jej elektricky vodivých stenách musia mať uzly. Preto v dutine môžu existovať iba niektoré frekvencie, a ich celočíselné násobky. Stojatá vlna neprenáša energiu, môže sa chápať ako harmonický oscilátor (podobne ako kmitajúca struna), ktorý má svoju energiu a frekvenciu. Išlo v podstate o určenie počtu takýchto hypotetických oscilátorov v dutine, ale hlavne o ich strednú energiu. Pre počet oscilátorov kmitajúcich s frekvenciami z intervalu  $f$  až  $f + df$  a ktoré sa nachádzajú v dutine s objemom  $V$ , bol ešte v rámci klasickej fyziky odvodený vzťah (pozri dodatok D2)

$$dN = \frac{8\pi f^2}{c^3} V df , \quad (11.1.4.2)$$

v ktorom  $c$  je rýchlosť svetla. Na jednotku objemu v dutine tak pripadá počet oscilátorov

$$dn = \frac{dN}{V} = \frac{8\pi f^2}{c^3} df . \quad (11.1.4.3)$$

Tento vzťah neskôr použil aj Planck. Rozdiel medzi Planckovým a klasickým prístupom vznikol pri výpočte strednej energie  $\langle E \rangle$  oscilátorov, ktoré sa pri termodynamicknej teplote  $T$  nachádzajú v tepelnej rovnováhe s okolím. Podľa klasickej teórie

$$\langle E \rangle = kT , \quad (11.1.4.4)$$

kde  $k$  je Boltzmannova konštanta. Vzťahy (11.1.4.3) a (11.1.4.4) použijeme na výpočet energie v jednotke objemu dutiny, pripadajúcej na interval frekvencií  $f$  až  $f + df$ :

$$w_f df = \langle E \rangle dn = kT \frac{8\pi f^2}{c^3} df , \quad (11.1.4.5)$$

kde  $w_f$  je energia pripadajúca na jednotkový interval frekvencie, t.j. spektrálna objemová hustota energie. Pre spektrálnu intenzitu vyžarovania pomocou vzťahu (11.1.4.1) získame vzorec

$$M_f = kT \frac{2\pi f^2}{c^2} . \quad (11.1.4.6)$$

Integráciou tohto vzorca cez všetky frekvencie by sme mali dostať celkovú intenzitu vyžarovania. Integrál však diverguje, čo by znamenalo, že čierne teleso by malo vyžarovať nekonečne veľa energie. Tento neúspešný postup pochádza od **Rayleigha a Jeansa**. Závislosť ktorú získali, sa zhoduje s experimentálnymi krivkami spektrálnej intenzity vyžarovania iba pri nízkych frekvenciách, zodpovedajúcich infračervenému žiareniu. Funkcia  $M_f$  rastie s druhou mocninou frekvencie, a pri frekvenciách ultrafialového žiarenia sa prejavil už značný nesúlad s experimentálnymi krivkami. Z tohto dôvodu sa v súvislosti s Rayleighovým a Jeansovým pokusom vysvetlí experimentálne krivky hovorí o **ultrafialovej katastrofe**.

Max Planck predpokladal, že oscilátory s frekvenciou  $f$  môžu mať iba diskrétnu energiu  $E_1 = hf$ ,  $E_2 = 2hf$ ,  $E_3 = 3hf$ , ... kde  $h$  je Planckova konštanta. Z množstva oscilátorov v dutine, kmitajúcich touto frekvenciou, sa najviac nachádza v stave s najnižšou energiou  $E_1 = hf$ , pričom oscilátorov s násobkami tejto energie s rastúcou energiou ubúda. Relatívne zastúpenie oscilátorov s rôznymi energiami vyjadril pomocou vzorca, pochádzajúceho od L. Boltzmann, podľa ktorého pokles počtu oscilátorov má exponenciálny charakter:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\exp(-E_1/kT)}{\exp(-E_2/kT)} \quad (11.1.4.7)$$

Pre strednú energiu oscilátorov kmitajúcich s frekvenciou  $f$  takouto cestou získal vzorec (pozri dodatok D3)

$$\langle E \rangle = \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1} \quad (11.1.4.8)$$

Keď týmto výsledkom nahradíme vo vzorci (11.1.4.6) klasickú strednú hodnotu energie oscilátora  $kT$ , pre spektrálnu intenzitu vyžarovania dostaneme výsledok:

$$M_f = \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1} \frac{2\pi f^2}{c^2} = \frac{2\pi}{c^2} \frac{hf^3}{\exp(hf/kT) - 1} \quad (11.1.4.9)$$

čo je **Planckov zákon žiarenia**.

Závislosť spektrálnej intenzity vyžarovania od frekvencie a teploty vyjadrená vzorcom (11.1.4.9) je v dokonalej zhode s experimentálne získanými krivkami. To bola prvá významná skutočnosť podporujúca oprávnenosť Planckovej hypotézy. Extrém tejto funkcie zodpovedá maximum vyžarovania, čo znamená že ho možno nájsť pomocou prvej derivácie podľa frekvencie. Tak možno získať Wienov zákon o posune maxima vyžarovania. Integráciou vzorca (11.1.4.9) cez všetky možné frekvencie, t.j. od nuly až po nekonečno, dostaneme celkovú intenzitu vyžarovania, pre ktorú z výpočtu vyplýva, že je úmerná štvrtej mocnine termodynamickkej teploty  $T^4$ . Preto aj Stefanov – Boltzmannov zákon možno odvodiť z Planckovho zákona žiarenia. To znamená, že Planckova hypotéza o existencii minimálnych energetických kvánt pri vyžarovaní a absorpcii elektromagnetickej energie bola plne oprávnená.

Na záver je dôležité uviesť, že limita strednej energie (11.1.4.8) pre  $h \rightarrow 0$  sa rovná klasickej hodnote strednej energie oscilátora  $kT$ , t.j.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1} = kT, \quad (11.1.4.10)$$

o čom sa možno presvedčiť použitím L'Hospitalovho pravidla. To znamená, že klasickej vzorec vyjadrujúci strednú energiu oscilátora je limitným prípadom kvantového vzorca. Poukazuje to aj na vzťah medzi kvantovou a klasickou fyzikou.

### Kontrolné otázky

1. Z akých predpokladov vychádza výpočet objemovej hustoty elektromagnetickej energie v dutine?
2. K akému výsledku viedol Rayleighov a Jeansov výpočet intenzity vyžarovania?
3. Akú hypotézu využil Planck pri výpočte spektrálnej intenzity vyžarovania?
4. Aký je vzťah medzi strednou energiou oscilátora vypočítanou klasicky a podľa Planckovej hypotézy?

### 11.1.5 Svetelný tlak

Je všeobecne známe, že chvosty komét neležia v trajektórii ktorú kométa prešla, ale že sú čiastočne odchylené v smere, ktorým sa slnečné lúče vzdávajú od kométy. Vysvetľuje sa to tlakom slnečného svetla, pôsobiacim na malé prachové častice, ktoré sa z kométy pri jej prechode v relatívnej blízkosti Slnka uvoľňujú. Tlak je zjavne veľmi malý, lebo v rádovo rovnakej vzdialenosti od Slnka sa nachádza aj naša planéta Zem, ale na svojom tele tlak slnečných lúčov nepociťujeme. Navyše človek má v porovnaní s malými prachovými časticami celkom iný pomer plošného obsahu povrchu a objemu (teda v podstate hmotnosti). Tento pomer sa zväčšuje so zmenšovaním rozmeru objektu. Ak by išlo o teleso s tvarom gule, potom pomer plošného obsahu povrchu a objemu sa vypočíta jednoducho:

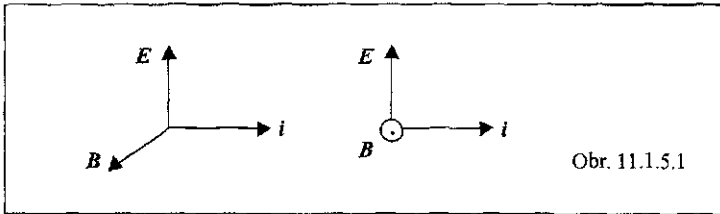
$$\frac{S}{V} = \frac{4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{R}$$

Z výsledku jednoznačne vyplýva, že pri zmenšovaní polomeru gule, sa povrch zmenšuje pomalšie než objem. Pri pôsobení svetla na malé častice sa preto jeho tlakový účinok prejaví výraznejším spôsobom, menšie častice v porovnaní s väčšími nadobúdajú väčšie zrýchlenie.

Pôsobenie svetla na častice sa dá vysvetliť jednak pomocou predstáv o svetle ako o elektromagneticom vlnení, jednak pomocou predstavy o prúde fotónov prenášajúcich nie iba energiu, ale aj hybnosť.

Častice sa skladajú z atómov a teda z elektrónov nesúcich záporný elektrický náboj a kladne nabitých atómových jadier. Elektrická zložka elektromagnetickej vlny, teda intenzita elektrického poľa  $E$ , pôsobí na nabitú časticu silou, udeľuje im

zrýchlenie, pričom ľahké elektróny nadobúdajú podstatne väčšie zrýchlenie, než ťažké atómové jadrá, ktoré si v ďalších úvahách nebudeme všímať. Svetelná elektromagnetická vlna má vysokú frekvenciu, pričom počas jednej periódy sa vystriedajú zrýchlenia opačnými smermi. Výsledkom sú oscilácie elektrónov. Urýchlený elektrón má aj hybnosť a pri náraze na susedný atóm ju odovzdá (alebo jej časť), čím sa urýchľujú aj atómy a s nimi aj celá prachová častica. Rýchle striedanie smeru zrýchlenia elektrónov, a teda aj zrýchlenia prachovej častice vplyvom elektrickej zložky vlny, má za následok, že časová stredná hodnota zrýchlenia prachovej častice je nulová. Ale elektromagnetická vlna má aj magnetickú zložku,



Obr. 11.1.5.1

reprezentovanú vektorom magnetickej indukcie  $B$ . Vzájomný smer vektorov  $E$ ,  $B$  a jednotkového vektora  $i$ , ktorý má smer šírenia (rovinne) elektromagnetickej vlny, je znázomený na obrázku. Intenzita elektrického poľa tejto vlny urýchľuje elektróny v smere  $-E$ , čím získavajú rýchlosť v tom istom smere. Vtedy v dôsledku prítomnosti magnetickej zložky vlny začne pôsobiť na pohybujúci sa elektrón magnetická sila

$$F_m = e v \times B,$$

ktorá má smer vektora  $i$ , lebo náboj elektrónu je záporný. Preto elektrón získava zložku hybnosti v smere šírenia elektromagnetickej vlny, ktorú pri náraze na atóm odovzdá prachovej častici. Rozdiel pôsobenia magnetickej sily v porovnaní s elektrickou silou je v tom, že v nasledujúcej polperióde, keď sa zmení smer vektora  $E$ , smer magnetickej sily sa nezmení, lebo smer zmenia obidva vektory – vektor  $E$ , aj  $B$ . Taktó vzniká stála sila pôsobiaca na prachovú časticu, ktorá sa preto začne pohybovať v smere šírenia svetelnej vlny. Hybnosť odovzdanú častici za jednotku času by bolo možné touto cestou vyjadriť aj kvantitatívne, na to by však bolo potrebné poznať – okrem intenzity elektromagnetickej vlny - aj hodnoty parametrov charakterizujúcich samotnú časticu, napríklad jej konduktivitu.

Svetelný tlak sa dá vysvetliť aj pomocou predstavy o svetle ako o prúde fotónov, ktoré prenášajú energiu a hybnosť. V paragrafe 11.1.1 sú uvedené základné fyzikálne charakteristiky fotónu elektromagnetickej vlny s frekvenciou  $f$ , a to energia

$$W_1 = hf \quad \text{a hybnosť } p_1 = h/\lambda = W_1/c.$$

Veľkosť sily, ktorou svetlo pôsobí na terčik (na ktorý dopadá), závisí aj od toho, či sa svetlo v terčiku absorbuje, alebo sa od neho odráža. Ak sa fotón v terčiku pohltí, odovzdá terčiku celú svoju energiu  $W_1$ , ale aj celú hybnosť  $p_1$ . To znamená, že  $n$  - fotónov odovzdá energiu  $W = nW_1$  a hybnosť  $p = np_1 = (1/c)nW_1 = W/c$ . Ak fotón dopadne kolmo na povrch terčika a odrazí sa od neho smerom nazad (bez straty

energie), odovzdá terčiku hybnosť  $2p_1$ . Pri  $n$  fotónoch to predstavuje odovzdanú hybnosť  $p^* = 2W/c$ , kde  $W$  je energia ktorú fotóny priniesli k terčiku.

V oboch prípadoch sa sila pôsobiaca na terčik rovná derivácii hybnosti podľa času, inými slovami, podielu odovzdanej hybnosti a príslušného časového intervalu. Pri pohltení fotónov:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dW}{dt}, \quad (11.1.5.1)$$

pri dokonalom odraze fotónov

$$F = 2 \frac{1}{c} \frac{dW}{dt}, \quad (11.1.5.2)$$

kde  $dW/dt$  vyjadruje energiu prinášanú elektromagnetickou vlnou na terčik za jednotku času.

Tlak svetla v laboratórnych podmienkach overil v roku 1899 P.N. Lebedev.

Na záver možno konštatovať, že hoci sa tlak svetla dá vysvetliť pomocou elektromagnetickej teórie, vysvetlenie pomocou nárazov fotónov je jednoduchšie a priamočiarejšie.

**Příklad 11.1.5.1** Na absorbujúci terčik dopadá kolmo svetelná vlna vyžarovaná laserom, pričom intenzita elektrického poľa v tejto vlne má amplitúdu  $E_0 = 200 \text{ V/m}$ . Vypočítajte intenzitu tejto svetelnej vlny  $I$  a tlak  $p_S$ , ktorým pôsobí na terčik.

**Riešenie** Intenzita svetelnej vlny, t.j. energia ktorú za sekundu prenáša plocha s jednotkovým plošným obsahom, sa počíta podľa vzorca (9.3.5.4):  $(1/2)(\epsilon_0 c)E_0^2$ , z ktorého po dosadení zadaných hodnôt dostaneme  $I = 13,3 \text{ W/m}^2$ . Sila pôsobiaca na terčik sa vypočíta vzorcom (11.1.5.1), pričom si uvedomíme, že ak namiesto dopadajúcej energie za jednotku času dosadíme intenzitu vlny, dostaneme priamo tlak svetelnej vlny:  $p_S = (1/c) (dW/dt) / S = (1/c)I = 4,4 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}$ .

### Kontrolné otázky

1. Ako sa dá vysvetliť tlak svetla pomocou vlastností elektromagnetickej vlny?
2. Ako možno vysvetliť tlak svetla na základe predstavy, že svetlo je prúd fotónov?

## 11.2 VLNOVÉ VLASTNOSTI ČASTÍC

### Kľúčové slová

de Broglieho hypotéza, vlnová funkcia, vlnový balík, Heisenbergov princíp neurčitosti

### 11.2.1 Hypotéza de Broglieho

Skutočnosti uvedené v podkapitole 11.1 svedčia o tom, že elektromagnetické žiarenie sa v istých situáciách prejavuje tak, ako by išlo o zväzok (prúd) častíc. Ide najmä o vyžarovanie a absorpciu žiarenia (fotoelektrický jav, žiarenie čierneho telesa). V iných situáciách sa elektromagnetické žiarenie prejavuje vlnovými vlastnosťami (interferencia, ohyb, polarizácia). To znamená, že elektromagnetické žiarenie sa prejavuje jednak vlnovými, jednak vlastnosťami charakterickými pre častice.

Na druhej strane typické častice - elektrón, či protón - ako keby takúto symetriu vlastností neprejavovali. Vnímame ich ako častice, ale s ich prejavmi, ktorým treba pripísať vlnový charakter, sa (bežne) nestretávame. Túto nesymetriu prírody sa pokúsil odstrániť v roku 1923 francúzsky fyzik Louis de Broglie. Vyslovil hypotézu, podľa ktorej pohybujúcej sa častici s istou hmotnosťou a rýchlosťou, môžeme priradiť vlnovú dĺžku a frekvenciu. V podstate otočil Planckovu hypotézu. Max Planck priradil fotónu elektromagnetickej vlny s frekvenciou  $f$  a vlnovou dĺžkou  $\lambda$

$$\text{energiu } E = hf \quad \text{a hybnosť } p = h/\lambda.$$

L. de Broglie priradil pohybujúcej sa častici s energiou  $E$  a hybnosťou  $p = mv$  frekvenciu

$$f = \frac{E}{h} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{h} \quad (11.2.1.1)$$

a vlnovú dĺžku

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (11.2.1.2)$$

Z posledného vzorca vyplýva, že s rastúcou rýchlosťou častice sa znižuje vlnová dĺžka priradená častici.

Súčin vlnovej dĺžky s frekvenciou v prípade harmonických vln poskytuje ich fázovú rýchlosť. V tomto prípade však použitím vzorcov (11.2.1.1) a (11.2.1.2) dostaneme výsledok

$$\lambda \cdot f = \frac{h}{p} \cdot \frac{E}{h} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mv} = \frac{v}{2}, \quad (11.2.1.3)$$

ktorý nás nemôže uspokojiť, lebo poskytuje polovičnú hodnotu rýchlosti, ktorou sa častica skutočne pohybuje.



Zhoda s reálnou hodnotou rýchlosti sa však dosiahne, ak počítame nie fázovú, ale grupovú rýchlosť. Podľa vzťahu (4.2.5.6) z kapitoly o vlnení, na výpočet grupovej rýchlosti slúži vzorec

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (11.2.1.4)$$

v ktorom  $\omega = 2\pi f$  je uhlová frekvencia a  $k = 2\pi/\lambda$  je uhlové vlnové číslo, pričom uhlová frekvencia  $\omega$  musí byť vyjadrená ako funkcia uhlového vlnového čísla. To využijeme v ďalších úvahách, keď tieto veličiny vyjadríme prostredníctvom de Broglieho vzťahov.

Prv než vypočítame grupovú rýchlosť (11.2.1.4), upravíme niektoré vzťahy, aby výpočet bol zrozumiteľnejší:

$$E = hf = \frac{h}{2\pi} 2\pi f = \hbar\omega, \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k. \quad (11.2.1.5)$$

Ďalej si uvedomíme, že spojením klasických vzorcov vyjadrujúcich kinetickú energiu častice  $E = (1/2)mv^2$  a jej hybnosť  $p = mv$  dostaneme vzťah  $E = p^2/(2m)$ . Potom už možno vypočítat grupovú rýchlosť priradenú častici:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} \left( \frac{p^2}{2m} \right) = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v.$$

To znamená, že grupová rýchlosť, počítaná na základe de Broglieho vzorcov, sa zhoduje s rýchlosťou častice.

V čase uverejnenia de Broglieho hypotézy išlo iba o špekulatívne úvahy. Približne o tri roky neskôr (1925) Davisson a Germer urobili významný experiment (difrakciu zväzku elektrónov na kryštáli niklu), jednoznačne potvrdzujúci nielen vlnové prejavy letiacich elektrónov. Experiment potvrdil aj zhadu nameranej vlnovej dĺžky so vzorcom (11.2.1.2), ktorý navrhol L. de Broglie. V súčasnosti sa vlnové prejavy elektrónov, ale aj iných častíc (protónov, neutrónov ...) nielen pozorujú, ale aj laboratórne využívajú na skúmanie štruktúry rôznych materiálov. Vlnové prejavy zväzku elektrónov sa používajú v elektrónových mikroskopoch, difrakcia neutrónov na určovanie usporiadania atómov v masívnych materiáloch. To znamená, že nie iba elektromagnetické žiarenie preukazuje dvojaké vlastnosti - vlnové a korpuskulárne, ale že takýto dualizmus je vlastný aj časticiam.

**Príklad 11.2.1.1** Vypočítajte vlnovú dĺžku priradenú elektrónu, ktorý bol urýchlenný napätím  $U = 3 \text{ V}$ . (náboj  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ , hmotnosť  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ )

**Riešenie** Najprv treba vypočítat rýchlosť elektrónu po jeho urýchlenní pomocou vzorca  $eU = (1/2)mv^2$ , potom rýchlosť dosadiť do de Broglieho vzorca na výpočet vlnovej dĺžky. Tak dostaneme výsledok  $\lambda = h/\sqrt{2m_e eU} \cong 7,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

**Príklad 11.2.1.2** Vypočítajte vlnovú dĺžku priradenú lopte s hmotnosťou  $m = 0,1$  kg, letiacej rýchlosťou  $v = 20$  m/s .

**Riešenie** V tomto prípade môžeme zadané hodnoty dosadiť priamo do vzorca:  $\lambda = h / (mv) \cong 3,3 \cdot 10^{-34}$  m .

Z uvedených príkladov vyplýva, že vlnová dĺžka priradená urýchlenu elektrónu (tá v príklade má veľkosť približne  $10^6$  m/s) je na úrovni medziatómových vzdialeností v tuhých látkach a preto ju experimentálne možno overiť napríklad difrakciou zväzku elektrónov na kryštáloch, ako to urobili Davisson a Germer. Takáto vlnová dĺžka súvisí predovšetkým s malou hmotnosťou elektrónu, ktorá vystupuje v menovateli de Broglieho vzorca. Vlnová dĺžka priradená letiacej lopte, alebo inému telesu makroskopickej veľkosti je však taká malá, že ju nedokážeme vnímať, a to nielen priamo zmyslami. Preto vlnové vlastnosti telies (ale aj častíc) dlho unikali našej pozornosti. Umožňujú to až moderné experimentálne zariadenia, aj to iba v prípade mikročastíc, nie pri makrotelesách. (Na porovnanie - viditeľnému svetlu zodpovedajú vlnové dĺžky okolo  $0,5 \cdot 10^{-6}$  m)

### Kontrolné otázky

1. Akým vzorcom priradil de Broglie vlnovú dĺžku pohybujúcej sa častici?
2. Čomu sa rovná fázová rýchlosť častice vypočítaná na základe de Broglieho vzorcov?
3. Čomu sa rovná grupová rýchlosť častice vypočítaná na základe de Broglieho vzorcov?
4. Prečo sa vlnové vlastnosti častíc nepozorovali skôr?
5. Aké sú veľkosti vlnových dĺžok priradovaných elementárnym časticiam a aké makroskopickým telesám?

### 11.2.2 Vlna de Broglieho

V predošlom paragrafe boli uvedené vzťahy, ktorými sa častice s hmotnosťou  $m$  a pohybujúcou sa rýchlosťou  $v$  priraduje vlnová dĺžka a frekvencia. Otvorenou pritom zostáva otázka, ako vyzerá funkcia opisujúca časticu s takýmito vlastnosťami ako vlnu, teda tzv. **de Broglieho vlna** (vlnová funkcia). Nie je zatiaľ jasné ani to, aký význam, či fyzikálny rozmer by mala amplitúda takejto vlny. Pri konštruovaní takejto funkcie si pomôžeme vlnovou funkciou harmonickej vlny, postupujúcej pozdĺž osi  $x$  (kap. o vlnení vzťah 4.2.1.7)

$$u(x,t) = A \sin(\omega t - kx) .$$

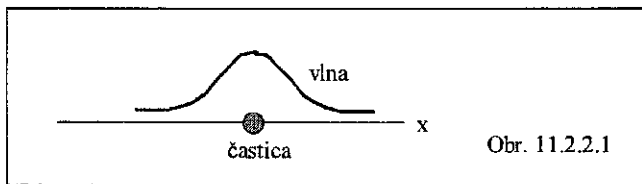
Túto rovnicu zapíšeme v často používanom exponenciálnom tvare (pozri dodatok D4):

$$u(x,t) = A e^{-i(\omega t - kx)} . \tag{11.2.2.1}$$

Túto funkciu pomocou de Broglieho vzorcov upravíme tak, aby v nej vystupovali parametre typické pre pohybujúcu sa časticu, teda kinetická energia  $E$  a hybnosť  $p$ . Využijeme pritom vzťahy (11.2.1.5), pričom namiesto  $u(x, t)$  použijeme symbol  $\Phi$  a namiesto amplitúdy  $A$  symbol  $\Phi_0$ , so zatiaľ neznámym fyzikálnym významom:

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 e^{-i(\omega t - kx)} = \Phi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\hbar\omega t - \hbar kx)} = \Phi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)} \quad (11.2.2.2)$$

Posledný výraz v riadku je de Broglieho vlna. Takáto funkcia má však nenulové hodnoty v ľubovoľnom mieste na osi  $x$ , navyše v ľubovoľnom časovom okamihu. Od vlny priradenej častici, teda od vlnovej funkcie očakávame, že bude mať nenulové hodnoty iba v mieste v ktorom sa častica nachádza, nanajvýš v jeho blízkom okolí. Naša intuitívna predstava sa dá zobrazit' na obrázku:



Monofrekvenčná vlna v tvare (11.2.2.2) takúto vlastnosť nemá. Východiskom z tejto situácie je opis častice nie monofrekvenčnou vlnou, ale tzv. vlnovým balíkom, čo je súčet, presnejšie integrál celej skupiny vln, ktorých frekvencie, resp. vlnové dĺžky pokrývajú istý konečný interval:

$$\Phi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{-i[\omega(k)t - kx]} dk \quad (11.2.2.3)$$

Pri tomto zápise sa predpokladá, že poznáme závislosť  $\omega(k)$ , t.j. závislosť uhlovej frekvencie priradenej častici de Broglieho vzťahom, od uhlového vlnového čísla, teda v podstate od vlnovej dĺžky (v prípade voľnej častice platia vzťahy (11.2.1.5)). Integruje sa okolo hodnoty  $k_0$  uhlového vlnového čísla, ktoré zodpovedá de Broglieho vzťahom pre časticu s kinetickou energiou  $E$  a hybnosťou  $p$ . V porovnaní s veľkosťou  $k_0$  je interval  $\Delta k$  malý, t.j.  $\Delta k \ll k_0$ . Integráciu si zjednodušíme predpokladmi  $t = 0$  a  $A(k) = A_0$ , teda že amplitúda jednotlivých skladaných vln je rovnaká. Potom:

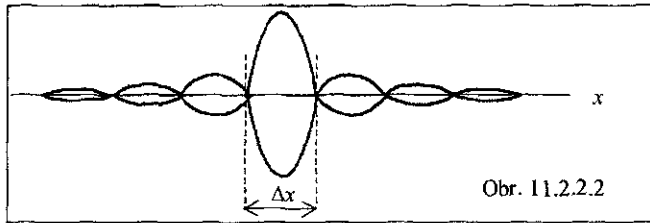
$$\Phi(x, 0) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A_0 e^{ikx} dk = \frac{A_0}{ix} [e^{i(k_0 + \Delta k)x} - e^{i(k_0 - \Delta k)x}] = 2A_0 \Delta k e^{ik_0 x} \frac{e^{ix\Delta k} - e^{-ix\Delta k}}{2ix\Delta k}$$

a po ďalšej úprave,

$$\Phi(x, 0) = 2A_0 e^{ik_0 x} \Delta k \frac{\sin x \Delta k}{x \Delta k}$$

Komplexný tvar vlnovej funkcie sa používa iba na zjednodušenie výpočtov, konečný výsledok predstavuje iba reálnu zložku výsledného vzorca:

$$\Phi(x,0) = 2A_0 \Delta k \cos(k_0 x) \frac{\sin x \Delta k}{x \Delta k} \quad (11.2.2.4)$$



Obr. 11.2.2.2

Takáto vlnová funkcia, reprezentujúca **vlnový balík**, už lepšie vystihuje umiestnenie častice v priestore, čo dokumentuje jej obrázok 11.2.2.2, na ktorom je však zachytená len funkcia  $\pm(\sin x \Delta k)/(x \Delta k)$  tvoriaca obálku funkcie  $\cos(k_0 x)$ . Funkcia  $\cos(k_0 x)$  má podstatne vyššiu frekvenciu, je na osi  $x$  podstatne hustejšia, lebo  $\Delta k \ll k_0$ , a preto nie je na obrázku zachytená. Útvár zobrazený na obrázku sa posúva pozdĺž osi  $x$  grupovou rýchlosťou, teda rovnakou ako častica, ale žiaľ postupne sa rozplýva. Rozplývanie vlnového balíka je podmienené tým, že skladajúcim sa vlnám z intervalu uhlových vlnových čísel  $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$  zodpovedajú podľa vzťahu (11.2.1.2) rôzne hybnosti a tým aj rôzne rýchlosti. Čím väčší interval  $\Delta k$  pri integrácii zvolíme, tým rýchlejšie sa vlnový balík rozplynie, ale na druhej strane spočiatku lepšie lokalizuje časticu na osi  $x$ . Podstatné na vlnovom balíku však je, že jeho grupová rýchlosť sa rovná rýchlosti častice, ako to vyplýva zo vzorca (11.2.1.4).

Opis pohybujúcej sa častice vlnovým balíkom treba chápať ako pokus o vyjadrenie jej vlnových prejavov. Tento opis má svoje nedostatky, ale napriek tomu vyplývajú z neho významné závery, ktoré sú podrobnejšie rozvedené v nasledujúcom paragrafe.

### Kontrolné otázky

1. Aký tvar má de Broglieho vlna opisujúca voľne sa pohybujúcu časticu?
2. Prečo monofrekvenčná vlna nie je vhodná na opis pohybujúcej sa častice?
3. Čo rozumieme pod vlnovým balíkom?
4. Čomu sa rovná grupová rýchlosť vlnového balíka?

### 11.2.3 Heisenbergov princíp neurčitosti

Zo vzorca (11.2.2.4) a jeho znázornenia na obrázku vyplývajú významné dôsledky. Šírka hlavného maxima vlnového balíka na osi  $x$  (na obrázku 11.2.2.2 označená ako  $\Delta x$ ) závisí od intervalu  $\Delta k$  zvoleného pri integrácii v rovnici (11.2.2.3). Vo výsledku integrácie (11.2.2.4) vystupuje funkcia  $g(x) = (\sin x \Delta k)/(x \Delta k)$ , ktorej limita pre  $x \rightarrow 0$  sa rovná číslu 1. Hlavné maximum na osi  $x$  je ohraničené bodmi  $x_1$  a  $x_2$ , pre ktoré platí  $x_1 \cdot \Delta k = -\pi$ ,  $x_2 \cdot \Delta k = +\pi$ . Šírka maxima sa rovná rozdielu týchto súradníc, čiže

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{\Delta k} \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta k = 2\pi \quad (11.2.3.1)$$

Z výsledku vyplýva, že čím širší interval  $\Delta k$  pri integrácii vlnového balíka zvolíme, tým menší je interval  $\Delta x$ , ktorým je častica v priestore (na osi  $x$ ) lokalizovaná. Funkcia  $g(x)$  sa rozprestiera aj poza prvé nulové body za hlavným maximom, vytvára ďalšie maximá, i keď podstatne slabšie. Preto ak hovoríme o lokalizácii častice, a pod  $\Delta x$  chápeme nie vzdialenosť nulových bodov hlavného maxima, ale interval v ktorom sa môže nachádzať častica, treba vo vzťahu (11.2.3.1) nahradiť znamienko rovnosti znamienkom nerovnosti a písať:

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq 2\pi$$

Ak tento vzťah vynásobíme konštantou  $\hbar = h/2\pi$ , dostaneme  $\Delta x \cdot \hbar \Delta k \geq \hbar$ , a keďže súčin  $\hbar k$  sa rovná hybnosti častice  $p$ , nakoniec dostaneme

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad (11.2.3.2)$$

čo je Heisenbergov *vzťah neurčitosti*. Slovné vyjadrenie tohto vzťahu je známe ako **Heisenbergov princíp neurčitosti** a vyjadruje skutočnosť, že súčasné určenie polohy častice a jej hybnosti nemožno vykonať s neobmedzenou presnosťou. Nemecký fyzik Werner Heisenberg ho sformuloval v roku 1927.

Tento princíp má pomerne jednoduché vysvetlenie. Ak chceme presne určiť polohu častice, musíme na to použiť aspoň jeden fotón, ktorý sa od častice odrazí. Náraz fotónu do častice nepredvídateľne zmení jej polohu. Čím presnejšie chceme lokalizovať časticu, tým kratšiu vlnovú dĺžku musíme použiť. Kratšia vlnová dĺžka zodpovedajúca fotónu však znamená jeho väčšiu hybnosť, a teda aj väčší vplyv na polohu častice pri zrážke s ňou. Naopak, väčšia vlnová dĺžka znamená menší vplyv na časticu pri zrážke, ale súčasne väčšiu neurčitosť v stanovení jej polohy.

---

**Příklad 11.2.3.1** Vypočítajte, s akou neurčitosťou treba počítať pri stanovení rýchlosti elektrónu v atóme vodíka? (Planckova konštanta  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Js, hmotnosť elektrónu  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg)

**Riešenie** Atóm vodíka má veľkosť rádovo  $10^{-10}$  m, čo použijeme ako vstupný údaj do vzťahu neurčitosti. Ten upravíme:  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta mv \geq \hbar \Rightarrow \Delta v \geq \hbar/(m \Delta x)$ , a po dosadení číselných hodnôt  $\Delta v \geq 6,6 \cdot 10^6$  m/s, čo sa rádovo zhoduje s veľkosťou obežnej rýchlosti elektrónu v atóme vodíka.

---

**Příklad 11.2.3.2** Vypočítajte neurčitosť pri stanovení polohy telesa s hmotnosťou  $m = 1 \text{ kg}$ , keď sa pohybuje rýchlosťou  $v = 10 \text{ m/s}$ .

**Riešenie**  $\Delta x \geq h / (mv)$ , číselne  $\Delta x \geq 6,6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$ .

---

Uvedené príklady naznačujú, že pri makroskopických telesách sú neurčitosti pri súčasnom stanovení polohy a hybnosti extrémne malé. Princíp neurčitosti má však významnú úlohu v oblasti mikročastíc, kde podstatným spôsobom ovplyvňuje merania.

### **Kontrolné otázky**

1. Ktoré veličiny vystupujú vo vzťahoch neurčitosti?
2. Čo vyjadruje Heisenbergov princíp neurčitosti?
3. Ako ovplyvní polohu častice dopad jedného fotónu?
4. Akým príkladom dokážete objasniť vzťah neurčitosti?
5. Viete zdôvodniť, prečo sa vzťah neurčitosti neuplatňuje pri makroskopických telesách?

# DODATKY

D1

## Dôkaz vzťahu medzi objemovou hustotou energie $w$ v dutine a intenzitou vyžarovania stien $M$

Ak by zo steny dutiny žiarenie prúdilo len v smere na stenu kolmom, vzťah medzi  $M$  a  $w$  by bol jednoduchý:  $M = cw$ , kde  $c$  je rýchlosť ktorou sa žiarivá energia šíri, t.j. rýchlosť svetla. Vzťah sa dá odvodiť nasledujúcou úvahou. Intenzita vyžarovania je definovaná podielom

$$M = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t}, \quad (a)$$

teda ako energia vyžiarená z plochy s jednotkovým obsahom za jednotku času. Ak sa v priestore nachádza energia s objemovou hustotou  $w$  a táto sa šíri rýchlosťou  $c$  jediným smerom (napríklad potrubím), cez plochu s obsahom  $\Delta S$  prejde za časový interval  $\Delta t$  energia

$$\Delta E = w c \Delta t \Delta S. \quad (b)$$

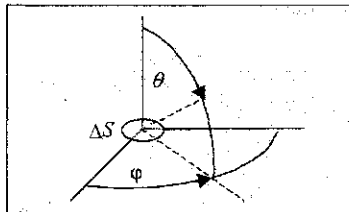
Porovnaním vzťahov (a) a (b) získame výsledok

$$M = cw.$$

V dutine však prúdi žiarenie všetkými smermi rovnako, izotrópne, takže môžeme predpokladať, že na jednotkový priestorový uhol pripadá hustota toku energie

$$L_e = \frac{wc}{4\pi},$$

kde číslo  $4\pi$  predstavuje plný priestorový uhol, t.j.  $4\pi$  sr. Na elementárny priestorový uhol  $d\Omega$  tak pripadá  $L_e d\Omega$ . (Elementárny priestorový uhol sa vo sférickej súradnicovej sústave štandardne vyjadruje v tere  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \rightarrow$  obrázok.)



Na malú plôšku  $\Delta S$  steny dutiny dopadá žiarivá energia zo všetkých strán, takže celkový príkon energie na túto plôšku vypočítame integráciou cez celý polpriestor nad plôškou, čiže integráciou cez priestorový uhol  $2\pi$  sr. Plôška  $\Delta S$  sa však javí v plnej veľkosti iba pri pohľade v smere jej normály, pri pohľade zo smeru odchýleného od

normály o uhol  $\theta$  vidno iba jej priemet  $\Delta S' = \Delta S \cos\theta$ . To treba pri počítaní energie dopadajúcej na plošku zohľadniť. Preto budeme počítat' výraz  $d\Phi = \Delta S \cos\theta L_e d\Omega$ , resp. jeho integrál (príkion energie na plošku  $\Delta S$ )

$$\Phi = \Delta S \int_{2\pi} \cos\theta L_e d\Omega = \Delta S \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \frac{cW}{4\pi} \sin\theta d\theta d\varphi = \Delta S \frac{cW}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi .$$

Ako sa možno ľahko presvedčiť, integrál má hodnotu  $\pi$ , takže dostaneme výsledok

$$\Phi = \Delta S \frac{cW}{4} . \quad (c)$$

V ustálenom stave musí za jednotku času rovnaké množstvo energie plošku opúšťať, čo sa rovná výrazu

$$\Phi = M \Delta S . \quad (d)$$

Porovnaním výrazov (c) a (d) dostávame vzťah medzi intenzitou vyžarovania stien dutiny a objemovou hustotou žiarivej energie v dutine

$$M = \frac{cW}{4} .$$

## D2

### Počet oscilátorov v dutine

Počet oscilátorov v dutine, ktoré spadajú do intervalu frekvencií ( $f, f+df$ ), bol pôvodne vypočítaný na základe predstáv klasickej fyziky (pomocou stojatých vln), ale matematický postup pri odvodzovaní tohto počtu sa zjednoduší, ak sa použijú aj predstavy o fotónoch.

Kovová dutina nech má tvar kocky s hranou  $L$ , čiže má objem  $V = L^3$ . Z uzavretej dutiny elektromagnetická energia neuniká, ani do nej neprichádza, preto elektromagnetické žiarenie v dutine musí byť vo forme stojateho vlnenia. Na kovových stenách dutiny majú stojaté elektromagnetické vlny uzly, podobne ako struny hudobných nástrojov na svojich koncoch, kde sú uchytené. Ak sa v dutine s tvarom kocky medzi jej protiľahlými stenami nachádza stojatá vlna, potom musí platiť rovnosť

$$n \frac{\lambda}{2} = L \quad (a)$$

kde  $n$  je celé číslo a  $\lambda$  vlnová dĺžka. Ak má stojatá vlna v dutine všeobecnú polohu, jej priemety do smerov zodpovedajúcich hranám kocky, musia spĺňať rovnakú podmienku, t.j. musí platiť



$$n \frac{\lambda}{2} \cos \alpha = L, \quad n \frac{\lambda}{2} \cos \beta = L, \quad n \frac{\lambda}{2} \cos \gamma = L, \quad (\text{b})$$

kde  $\alpha, \beta, \gamma$  sú uhly, ktoré s hranami kocky zvierajú vektory rýchlosti protismerne sa šíriacich vln, vytvárajúcich stojatú vlnu. Ak použijeme označenie

$$n \cos \alpha = n_x, \quad n \cos \beta = n_y, \quad n \cos \gamma = n_z,$$

d ďalšou úpravou prvého zo vzťahov (b) dostaneme

$$n_x = \frac{2L}{\lambda} \quad (\text{c})$$

pričom číslo  $n_x$ , rovnako ako aj  $n_y$  a  $n_z$ , musí byť celé a nezáporné, aby uzly boli na stenách dutiny. To pravda kladie isté požiadavky na súvislosti medzi uhlami  $\alpha, \beta, \gamma$  a vlnovou dĺžkou  $\lambda$ , o ktorých však nebudeme ďalej uvažovať. V ďalšej časti už využijeme vlastnosti fotónov, nachádzajúcich sa v dutine. Rovnicu (c) vynásobíme Planckovou konštantou  $h$ :

$$hn_x = 2L \frac{h}{\lambda} = 2Lp_x \quad (\text{d})$$

kde  $p_x = h/\lambda$  je podľa vzťahu (11.1.1.4) hybnosť fotónu, v tomto prípade veľkosť jeho zložky v smere osi  $x$ . Keď z rovnice (d) osamostatníme práve túto veličinu, a analogickú úpravu urobíme pre ďalšie dva smery v dutine, dostaneme rovnice

$$p_x = \frac{h}{2L} n_x, \quad p_y = \frac{h}{2L} n_y, \quad p_z = \frac{h}{2L} n_z. \quad (\text{e})$$

Sčítaním ich druhých mocnín dostaneme druhú mocninu veľkosti hybnosti fotónu:

$$p^2 = \left( \frac{h}{2L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (\text{f})$$

Trojica celých čísel  $n_x, n_y, n_z$  reprezentuje konkrétnu stojatú vlnu v dutine. Zmena čo len jedného z nich znamená prechod k inej vlne, ktorej prislúchajú fotóny s inou hybnosťou a teda inou vlnovou dĺžkou.

Z rovníc (e) vyplýva, že odlišnosť veľkosti hybnosti fotónov súvisiacich s dvomi rôznymi stojatými vlnami nemôže byť ľubovoľne malá, ale že minimálna zmena veľkosti pre jednu zložku je

$$(\Delta p_x)_{\min} = \frac{h}{2L} \quad (\text{g})$$

V abstraktnom trojrozmernom priestore hybností, ktorého súradnicové osi predstavujú vektorové súradnice hybností (t.j.  $p_x, p_y, p_z$ ), potom jestvuje (minimálny) objem s veľkosťou

$$\left( \frac{h}{2L} \right)^3$$

(h) pripadajúci na jednu stojatú vlnu. V trojrozmernom priestore hybností pripadá na interval veľkosti hybností ( $p, p+dp$ ) elementárny objem s tvarom guľovej škrupiny, ktorého veľkosť je

$$d\tau = \left(\frac{1}{8}\right) 4\pi p^2 dp$$

(i) pričom zlomok  $(1/8)$  vyjadruje skutočnosť, že z celého priestoru hybností uvažujeme iba prvý oktant, čím zohľadňujeme okolnosť, že čísla  $n_x, n_y, n_z$  vystupujúce v rovniciach (e) sú iba kladné. Keďže na jednu stojatú vlnu pripadá objem vyjadrený vzťahom (h), počet stojatých vln pripadajúci na objem  $d\tau$  sa rovná podielu výrazov (i) a (h):

$$dN' = \left[ \left(\frac{1}{8}\right) 4\pi p^2 dp \right] / \left(\frac{h}{2L}\right)^3$$

(j) Takto určený počet sa navyše násobí číslom 2, čím sa zohľadní dvojaká možná lineárna polarizácia každej stojatej elektromagnetickej vlny v dutine. Ak ešte vyjadríme hybnosť fotónu vzťahom (11.1.1.4), t.j.  $p = hf/c$ , tak dostaneme

$$dN = 2dN' = \left[ \left(\frac{2}{8}\right) 4\pi p^2 dp \right] / \left(\frac{h}{2L}\right)^3 = \frac{8\pi L^3}{h^3} p^2 dp = \frac{8\pi L^3}{c^3} f^2 df$$

Po vydelení objemom dutiny  $L^3$  dostaneme počet oscilátorov (stojatých vln) v jednotkovom objeme, pripadajúcich na frekvenčný interval  $f$  až  $f+df$ :

$$dn = \frac{dN}{V} = \frac{8\pi f^2}{c^3} df$$

### D3

#### Stredná hodnota energie oscilátorov

Stredná hodnota energie (alebo inej fyzikálnej veličiny) predstavuje aritmetický priemer hodnôt energie, ktorými sa vyznačujú častice (objekty) tvoriace zvyčajne súbor obsahujúci veľký počet častíc. V klasickej fyzike sa považovalo za samozrejmé, že objekty môžu nadobúdať ľubovoľné hodnoty energie, že spektrum dovolených hodnôt energie je spojité. Ak sa však objekty súboru vyznačujú iba diskretnými hodnotami energie (t.j. môžu nadobúdať iba isté, nie ľubovoľné energie), stredná hodnota energie  $\langle E \rangle$  sa vypočíta ako aritmetický priemer ich energií:

$$\langle E \rangle = (E_1 + E_2 + E_3 + \dots) / N$$

kde  $N$  je celkový počet objektov (častíc).

Niektoré z diskretných hodnôt energie sa môžu vyskytovať pri viacerých objektoch, vtedy sa stredná hodnota energie vypočíta pomocou vzťahu

$$\langle E \rangle = \frac{\sum n_i E_i}{\sum n_i} = \frac{\sum n_i E_i}{N} \quad (a)$$

Planckov výpočet vychádzal z predpokladu existencie diskretných hodnôt energie oscilátorov (stojatých vln) v dutine, ktoré mali tvoriť celočíselné násobky hodnoty  $hf$ , kde  $h$  je Planckova konštanta a  $f$  frekvencia príslušnej stojatej vlny. Ak sa teda v dutine nachádza množina stojatých vln s frekvenciou  $f$ , môžu nadobúdať energie iba z možných hodnôt

$$E_1 = hf, \quad E_2 = 2hf, \quad E_3 = 3hf, \text{ atď.}$$

Z množiny oscilátorov s touto frekvenciou väčšina má energiu  $E_1 = hf$  (ich počet nech je  $N_1$ ), počet oscilátorov s vyššou energiou klesá s jej narastajúcou veľkosťou. Túto závislosť Planck vyjadril pomocou Boltzmannovho vzorca

$$N_n = N_0 \exp(-nhf/kT) \quad (b)$$

kde  $N_n$  je počet oscilátorov s energiou  $nhf$ ,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K je Boltzmannova konštanta a  $T$  termodynamická teplota.

Strednú energiu týchto oscilátorov vypočítame ako podiel súčtu ich energií a celkového počtu oscilátorov. Celkový počet oscilátorov s frekvenciou  $f$  je

$$N = N_0 + N_0 \exp(-hf/kT) + N_0 \exp(-2hf/kT) + N_0 \exp(-3hf/kT) + \dots$$

čo je geometrický rad s kvocientom

$$x = \exp(-hf/kT) \quad (c)$$

Jeho súčet je

$$N = \frac{N_0}{1-x} = \frac{N_0}{1-\exp(-hf/kT)} \quad (d)$$

Súčet energií oscilátorov s touto frekvenciou je

$$\sum E_i = N_0 \cdot 0 + hf \cdot N_0 \exp(-hf/kT) + 2hf \cdot N_0 \exp(-2hf/kT) + 3hf \cdot N_0 \exp(-3hf/kT) + \dots$$

Sčítanie tohto radu možno sprehľadniť, keď sa napíše v tvare

$$\sum E_i = N_0 hf (x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)$$

a výraz v zátvorke sa rozpíše do viacerých riadkov:

$$\begin{aligned} x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots &= x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + & [ = x/(1-x) ] \\ &+ x^2 + x^3 + x^4 + \dots + & [ = x^2/(1-x) ] \\ &+ x^3 + x^4 + \dots + & [ = x^3/(1-x) ] \\ &+ x^4 + \dots \end{aligned}$$

$$= x/(1-x) [ 1 + x + x^2 + x^3 + \dots ] = x/(1-x)^2.$$

Súčet energií oscilátorov sa rovná

$$\sum E_i = N_o hf \frac{x}{(1-x)^2}$$

(e)

Stredná energia oscilátorov sa rovná podielu výrazov (e) a (d):

$$\langle E \rangle = \frac{\sum E_i}{N} = \frac{N_o hf}{N_o} \frac{x}{(1-x)^2} (1-x) = hf \frac{x}{(1-x)}$$

Po dosadení za kvocient  $x$  podľa vzťahu (c) dostaneme konečný výsledok

$$\langle E \rangle = hf \frac{\exp(-hf/kT)}{1 - \exp(-hf/kT)} = \frac{hf}{\exp(+hf/kT) - 1}$$

#### D4

#### Komplexný tvar rovnice vyjadrujúcej kmitavý pohyb

Závislosť výchylky harmonického oscilátora od času sa často vyjadruje v komplexnom exponenciálnom tvare:

$$u(t) = Ae^{i\omega t}, \text{ resp. } A \exp(i\omega t),$$

ktorý sa dá rozpisovať na reálnu a imaginárnu časť

$$u(t) = Ae^{i\omega t} = A(\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

Takýto zápis uľahčuje niektoré operácie pri výpočtoch, napríklad pri skladaní kmitavých pohybov, ale aj pri zápise rovníc opisujúcich vlny. Zápis je iba formálny, po dosiahnutí konečného výsledku, použije sa z neho iba reálna zložka:

$$Ae^{i\omega t} \rightarrow A \cos \omega t, \quad Ae^{i(\omega t - kx)} \rightarrow A \cos(\omega t - kx),$$

$$Ae^{i(\omega t - kx + \phi)} \rightarrow A \cos(\omega t - kx + \phi).$$

Exponenciálny zápis umožňuje prevod sčítania uhlov na násobenie funkcií, napríklad

$$e^{i(\omega t + \phi)} = e^{i\omega t} \cdot e^{i\phi},$$

čo v pôvodnom zápise nie je možné. Napríklad pri skladaní dvoch kmitavých pohybov, keď treba sčítať dve funkcie, sa súčet:  $A \cos \omega t + A \cos (\omega t + \varphi)$  ľahšie vypočíta, ak použijeme exponenciálny tvar:

$$\begin{aligned} A e^{i \omega t} + A e^{i(\omega t + \varphi)} &= A e^{i \omega t} + A e^{i \omega t} e^{i \varphi} = A e^{i \omega t} (1 + e^{i \varphi}) = \\ &= 2 A e^{i \omega t} e^{i \varphi / 2} \frac{e^{-i \varphi / 2} + e^{i \varphi / 2}}{2} = 2 A e^{i(\omega t + \varphi / 2)} \cos(\varphi / 2) \end{aligned}$$

Reálna zložka tohto výrazu:  $2 A \cos(\omega t + \varphi / 2) \cos(\varphi / 2)$ .

Podobne výraz  $A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$ :

$$\begin{aligned} A_1 \exp(i \omega_1 t) + A_2 \exp(i \omega_2 t) &= \\ = \exp\left(i \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \left[ A_1 \exp\left(i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) + A_2 \exp\left(-i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \right] \end{aligned}$$

Exponenciálny zápis sa veľmi často využíva pri zápise rovníc opisujúcich rovinné vlny, ich interferenciu, alebo difrakciu. Umožňuje formálne separovať časovú zložku rovnice vlny od priestorovej zložky:

$$A \exp(i \omega t - kx) = A \exp(i \omega t) \exp(-i kx)$$

## Súhrn vzorcov

Energia fotónu	$E = hf$
Hybnosť fotónu	$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$
Einsteinova rovnica fotoelektrického javu	$hf = W + \frac{1}{2}mv^2$
Intenzita vyžarovania	$M = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t}$
Wienov zákon	$T \cdot \lambda_{\max} = b$
Stefanov - Boltzmannov zákon	$M = \int_0^{\infty} M_f df = \sigma T^4$
Stredná hodnota energie oscilátorov	$\langle E \rangle = \frac{hf}{\exp(hf/kT) - 1}$
Planckov zákon žiarenia	$M_f = \frac{2\pi}{c^2} \frac{hf^3}{\exp(hf/kT) - 1}$
Síla vyvolaná dopadajúcou elektromagnetickou vlnou	$F = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dW}{dt}$
Vlnová dĺžka priradená častici	$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$
Vlnová funkcia priradená častici	$\Phi(x, t) = \Phi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$
Vlnový balík	$\Phi(x, 0) = 2 A_0 \Delta k \cos(k_0 x) \frac{\sin x \Delta k}{x \Delta k}$
Heisenbergov vzťah neurčitosti	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$

## Slovník

**absolútne čierne teleso** – ideálne teleso, ktoré pohlcuje všetko dopadajúce elektromagnetické žiarenie

**de Broglieho hypotéza** – hypotéza, podľa ktorej aj hmotné častice majú vlnové vlastnosti, prejavujúce sa napríklad interferenciou, alebo ohybom

**fotoelektrický jav** – jav, pri ktorom sa z látok uvoľňujú elektróny pôsobením dopadajúceho svetla, resp. elektromagnetického žiarenia

**fotoelektróny** – elektróny uvoľnené z povrchu látok pri fotoelektrickom jave

**fotón** – elementárne kvantum elektromagnetického poľa, pohybujúce sa rýchlosťou svetla, prenášajúce energiu  $E = hf$  a hybnosť  $p = h/\lambda$ .

**Heisenbergov princíp neurčitosti** – princíp, podľa ktorého určité dvojice fyzikálnych veličín (napr. súradnica a príslušná zložka hybnosti) nemožno v jednom stave častice určiť s ľubovoľnou presnosťou - spresňovanie jednej z nich má za následok zväčšovanie neurčitosti nameranej hodnoty druhej veličiny

**intenzita vyžarovania ( $M$ )** – veličina charakterizujúca zohriate teleso emitujúce elektromagnetické žiarenie, zavedená ako energia vyžiarená za jednotku času z plochy s jednotkovým obsahom; jednotka -  $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$

**Planckov zákon žiarenia** – vyjadrenie spektrálnej intenzity vyžarovania absolútne čierneho telesa ako funkcie jeho termodynamickej teploty a frekvencie emitovaného žiarenia

**Planckova konštanta ( $h$ )** – univerzálna (fundamentálna) fyzikálna konštanta uplatňujúca sa v zákonoch kvantovej teórie;  $h = 6,626\cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

**prahová frekvencia** – minimálna frekvencia elektromagnetického žiarenia, pri ktorej ešte nastáva fotoelektrický jav; závisí od druhu ožarovaného materiálu

**spektrálna intenzita vyžarovania ( $M_f, M_{\lambda}$ )** – intenzita vyžarovania pripadajúca na jednotkový interval frekvencie, resp. vlnovej dĺžky

**Stefanova – Boltzmannova konštanta ( $\sigma$ )** – konštanta vystupujúca v Stefanovom - Boltzmannovom zákone;  $\sigma = 5,67\cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$

**Stefanov-Boltzmannov zákon** – zákon, podľa ktorého intenzita vyžarovania absolútne čierneho telesa rastie so štvrtou mocninou termodynamickej teploty

**vlnový balík** – superpozícia skupiny de Broglieho vln blízkyh vlnových dĺžok, a to taká, že výsledná amplitúda je významná iba v ohraničenej oblasti priestoru, inde je zanedbateľná

**výstupná práca ( $W$ )** – minimálna energia potrebná na uvolnenie elektrónu z látky

**vzťah neurčitosti** – vzorec konkretizujúci Heisenbergov princíp neurčitosti, podľa ktorého súčin neurčitostí merania určitých dvoch veličín (napr. súradnice a hybnosti) nemôže byť menší než Planckova konštanta

**Wienov zákon** – zákon, podľa ktorého sa maximum krivky spektrálnej intenzity vyžarovania s rastúcou teplotou posúva k menším vlnovým dĺžkam

**Wienova konštanta ( $b$ )** – konštanta vystupujúca vo Wienovom zákone;  
 $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K}\cdot\text{m}$

**žiarenie absolútne čierneho telesa** – elektromagnetické žiarenie emitované absolútne čiernym telesom; jeho spektrálne zloženie (spektrálna intenzita vyžarovania) je opísané Planckovým zákonom žiarenia, spĺňa Stefanov - Boltzmannov zákon a Wienov zákon



# Úlohy

## Hodnoty konštánt

Planckova konštanta	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Boltzmannova konštanta	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
náboj elektrónu	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
hmotnosť elektrónu	$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Stefanova-Boltzmannova konštanta	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Wienova konštanta	$b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$
elektrónvolt	$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

## Fotóny, fotoelektrický jav, svetelný tlak

1. Vypočítajte energie fotónov  $E_1$  a  $E_2$  svetla červenej farby ( $\lambda_1 = 750 \text{ nm}$ ) a svetla fialovej farby ( $\lambda_2 = 400 \text{ nm}$ ). Pri akých teplotách  $t_1$  resp.  $t_2$  sa stredná kinetická energia molekúl jednoatómového plynu rovná energiám týchto fotónov?

Výsledok:  $T_1 = \frac{2hc}{3k_B \lambda_1}$ ,  $t_1 = (T_1 - 273,15) \text{ }^\circ\text{C}$

2. Vypočítajte maximálnu vlnovú dĺžku svetelnej vlny, ktorá ešte môže vyvolať fotoelektrický jav v platine, keď výstupná práca  $W = 6,3 \text{ eV}$ .

Výsledok:  $\lambda = \frac{hc}{W}$

3. Monochromatický svetelný zväzok s vlnovou dĺžkou  $\lambda = 600 \text{ nm}$  prenáša výkon  $P = 60 \text{ mW}$ , dopadá kolmo na stenu a absorbuje sa v nej. Koľko fotónov ( $N$ ) dopadá na stenu za sekundu? Akým tlakom  $p_t$  pôsobí toto svetlo nastenu, ak rovnomerne osvetľuje plošku s obsahom  $S = 2 \text{ cm}^2$ ?

Výsledok:  $N = \frac{P\lambda}{hc}$ ,  $p_t = \frac{P}{cS}$

4. Keď bol povrch kovu ožiarený svetlom s frekvenciou  $f_1 = 2,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ , tak na zamedzenie fotoprúdu bolo potrebné brzdné napätie  $U_1 = 6,6 \text{ V}$ . Pri použití svetla s frekvenciou  $f_2 = 4,6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ , bolo brzdné napätie  $U_2 = 16,5 \text{ V}$ . Na základe uvedených údajov vypočítajte Planckovu konštantu  $h$  a výstupnú prácu  $W$ . Náboj elektrónu  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

Výsledok:  $h = e \frac{U_2 - U_1}{f_2 - f_1}$ ,  $W = e \left( f_1 \frac{U_2 - U_1}{f_2 - f_1} - U_1 \right)$

5. Zdroj monochromatického svetla vyžaruje na vlnovej dĺžke  $\lambda = 550 \text{ nm}$  výkon  $P = 1 \text{ W}$ , pričom svieti do celého polpriestoru (nad zdrojom) izotropne. Vypočítajte počet fotónov ( $N$ ), ktoré dopadnú za  $1 \text{ s}$  na plošku s veľkosťou  $S = 3 \text{ cm}^2$  umiestnenú vo vzdialenosti  $R = 100 \text{ m}$  od zdroja a kolmú na smer šírenia lúčov v danom mieste.

Výsledok: 
$$N = \frac{S}{2\pi R^2} \frac{P\lambda}{hc}$$

6. Vlnová dĺžka pri ktorej sa začína pozorovať emisia fotoelektrónov z wolfrámu, je  $\lambda_1 = 230 \text{ nm}$ . Aká musí byť vlnová dĺžka  $\lambda_2$  použitého svetla, aby fotoelektróny nadobúdali kinetickú energiu  $E_2 = 1,5 \text{ eV}$ ?

Výsledok: 
$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 hc}{hc + \lambda_1 E_2}$$

7. Zo Slnka k nám prichádza energia, pričom na  $1 \text{ cm}^2$  horných vrstiev atmosféry za  $1$  minútu dopadá  $8,127 \text{ J}$ . Vypočítajte príkon  $P_s$  slnečnej energie v jednotkách  $\text{kW/m}^2$  a tlak  $p_s$ , ktorým by slnečné lúče pôsobili na dokonale absorbujúcu plochu postavenú kolmo na smer dopadajúcich lúčov.

Výsledok:  $P_s = 1,354 \text{ kW/m}^2$ ,  $p_s = \frac{1}{c} P_s$ .

### Žiarenie čierneho telesa

8. Zo Slnka na vrchné vrstvy atmosféry Zeme dopadá približne  $P_s = 1,35 \text{ kW/m}^2$  energie. Akú teplotu  $T_1$  má povrch Slnka, ak ho považujeme za absolútne čierne teleso? Koľko energie  $M$  vyžaruje Slnko za sekundu z jedného štvorcového metra? Priemer Slnka  $d_s = 1,4 \cdot 10^6 \text{ km}$ , vzdialenosť od Zeme  $l = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$ .

Výsledok: 
$$M = \left(\frac{2l}{d}\right)^2 P_s, T_1 = \sqrt[4]{\frac{M}{\sigma}}$$

9. Vypočítajte strednú teplotu  $T$  povrchu Zeme, keď predpokladáme, že žiari ako absolútne čierne teleso, a ak vyžarovanú energiu čerpá len z energie dodávanej slnkom ( $P_s = 1,4 \text{ kW/m}^2$ , polomer Zeme  $R = 6400 \text{ km}$ ).

Výsledok: 
$$T = \sqrt[4]{\frac{P_s}{4\sigma}}$$

10. Na dokonale čiernu platničku dopadá kolmo slnečné žiarenie, ktoré prenáša energiu  $P_s = 1,4 \text{ kW/m}^2$ . Na akú teplotu sa vo vákuu platnička zohreje? Predpokladáme, že energia z nej odchádza iba žiarením.

Výsledok: 
$$T = \sqrt[4]{\frac{P_s}{\sigma}}$$

11. Absolútne čierne teleso s tepelnou kapacitou  $C = 300 \text{ J/K}$  a plošným obsahom povrchu  $S = 500 \text{ cm}^2$  má začiatočnú teplotu  $T_1 = 700 \text{ K}$ . Vo vákuu ho necháme chladnúť, a predpokladáme, že žiadna energia sa telesu nedodáva, ani žiarením od okolia. Za akú dobu  $\Delta t$  poklesne jeho teplota na  $T_2 = 350 \text{ K}$ ?

Výsledok: 
$$\Delta t = \frac{C}{3S\sigma} \left( \frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3} \right)$$

12. Absolútne čierne teleso maximálne vyžaruje na vlnovej dĺžke  $\lambda_{\max} = 800 \text{ nm}$ . Plošný obsah jeho povrchu  $S = 100 \text{ cm}^2$ . Aký príkon  $P_1$  by sa telesu musel privádzať, keby sa telesu z okolia energia žiarením nevracala? Aký príkon  $P_2$  postačuje, ak sa z okolia s teplotou  $T_2 = 300 \text{ K}$  vracia telesu energia žiarením?

Výsledok: 
$$P_1 = S\sigma \left( \frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^4, \quad P_2 = P_1 - \sigma S T_2^4$$

13. Aká je teplota  $T_1$  povrchu elektrického ohrievacieho telesa s vyžarovacou plochou  $S = 350 \text{ cm}^2$ , ak sa do neho privádza elektrický príkon  $P = 1,5 \text{ kW}$ ? Vyžarovaciu plochu považujeme za absolútne čierne teleso. Uvažujte aj s návratom žiarivej energie z okolia, ktoré má teplotu  $t_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Výsledok: 
$$T_1 = \sqrt[4]{(t_2 + 273)^4 + P/(S\sigma)}$$

14. Na akej hodnote  $t_1$  sa ustáli teplota kovového drôtika s polomerom  $r = 0,05 \text{ mm}$ , ktorého konduktivita  $\gamma = 10^8 \text{ } \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ , keď cez drôtik tečie prúd  $I = 2 \text{ A}$ ? Straty a návrat žiarivej energie z okolia neuvažujte.

Výsledok: 
$$t_1 = T_1 - 273,15, \quad T_1 = \sqrt[4]{\frac{I^2}{2\pi^2 r^3 \gamma \sigma}}$$

15. Aký je pomer spektrálnych intenzít vyžarovania pri dvoch rôznych vlnových dĺžkach ( $\lambda_1 = 900 \text{ nm}$ ,  $\lambda_2 = 150 \text{ nm}$ ) wolfrámovým vláknom zohriatym na  $3000 \text{ K}$ ?

Výsledok: 
$$\frac{M_{\lambda 1}}{M_{\lambda 2}} = \left( \frac{f_1}{f_2} \right)^3 \cdot \frac{\exp\left(\frac{hf_2}{k_B T}\right) - 1}{\exp\left(\frac{hf_1}{k_B T}\right) - 1}$$

## Vlnové vlastnosti častíc

16. Elektrón urýchlime napätím  $U = 500 \text{ V}$ . Aká vlnová dĺžka bude prisúchať urýchlenému elektrónu?

$$\text{Výsledok: } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}.$$

17. Vypočítajte vlnovú dĺžku  $\lambda_\alpha$  priradenú častici alfa, ktorá sa pohybuje rýchlosťou  $v = 5 \cdot 10^3 \text{ km/s}$ , a porovnajte ju s vlnovou dĺžkou  $\lambda_N$  priradenou molekule dusíka na základe rýchlosti, ktorou sa pohybuje pri teplote  $20^\circ \text{C}$ . Hmotnosť častice alfa  $m_\alpha = 6,4 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , molekuly dusíka  $m_N = 45 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

$$\text{Výsledok: } \lambda_N = \frac{h}{\sqrt{3m_N k_B T}}.$$

18. Elektrón vletel rýchlosťou  $v_0 = 6000 \text{ km/s}$  do elektrostatického poľa s intenzitou  $E = 5000 \text{ V/m}$  tak, že ho pole ešte urýchlilo v smere jeho pôvodnej rýchlosti. Akú vzdialenosť  $l$  elektrón preletel týmto poľom, keď sa jeho vlnová dĺžka zmenila na  $\lambda_2 = 10^{-10} \text{ m}$ ?

$$\text{Výsledok: } W_0 = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad p_0 = \sqrt{2mW_0}, \quad l = \frac{h^2 - \lambda^2 p_0^2}{\lambda^2 - 2meE}.$$

19. Akým elektrickým napätím  $U$  treba urýchlíť elektrón, aby mu zodpovedala vlnová dĺžka  $\lambda = 600 \text{ nm}$ ?

$$\text{Výsledok: } U = \frac{h^2}{2\lambda^2 me}.$$

20. Elektrónový mikroskop pracuje s elektrónmi, ktoré sú urýchľované elektrickým napätím  $U = 40 \text{ kV}$ . Vypočítajte rozlišovaciu schopnosť mikroskopu, ktorej veľkosť považujeme za zhodujúcu sa s vlnovou dĺžkou priradenou elektrónu. Kinetickú energiu elektrónu počítajte klasickým vzorcom.

$$\text{Výsledok: } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}.$$

21. Akú kinetickú energiu  $W_k$  má protón, keď experimentálne zistená vlnová dĺžka, v súlade s de Broglieho vzorcom, je  $\lambda = 9 \cdot 10^{-13} \text{ m}$ ? Hmotnosť  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

$$\text{Výsledok: } W_k = \frac{h^2}{2m\lambda^2}.$$

22. Pohyb elektrónu, ktorý má kinetickú energiu  $W_k = 10 \text{ eV}$ , je obmedzený na priestor guľového tvaru s polomerom  $r = 0,1 \text{ mm}$ . Vychádzajúc z Heisenbergovho princípu neurčitosti zistíte relatívnu neurčitosť rýchlosti elektrónu.

$$\text{Výsledok: } \frac{\Delta v}{v} \geq \frac{h}{r\sqrt{2mW_k}}.$$



# Obsah

## TEXTY

	strana
<b>11.1 Časticové vlastnosti elektromagnetického žiarenia</b>	
11.1.1 Fotón	2
11.1.2 Fotoelektrický jav	3
11.1.3 Žiarenie absolútne čierneho telesa	6
11.1.4 Planckov zákon žiarenia	9
11.1.5 Svetelný tlak	11
<b>11.2 Vlnové vlastnosti častíc</b>	
11.2.1 Hypotéza de Broglieho	14
11.2.2 Vlna de Broglieho	16
11.2.3 Heisenbergov princíp neurčitosti	19
<b>DODATKY</b>	21
<b>SÚHRN VZORCOV</b>	28
<b>SLOVNÍK</b>	29
<b>ÚLOHY</b>	31

## Súbor zošitkov základného kurzu fyziky

Vektory

Kinematika

Dynamika hmotného bodu

Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa

Kmitanie a vlnenie

Teplo a termodynamika

Elektrostatické pole

Elektrický prúd

Magnetické pole

Elektromagnetické pole

Fyzikálna optika

Kvantové javy