Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenskej technickej univerzity v Bratislave

Katedra fyziky

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

ELEKTROSTATICKÉ POLE

Doc. RNDr. Ivan Červeň, CSc.

V roku 2005 vydala Fakulta elektrotechniky a informatiky STU
v Bratislave

6
ELEKTROSTATICKÉ POLE

Elektrostatickým poľom, teda poľom v okolí elektricky nabitých telies, ktoré sa vzhľadom na vzťažnú sústavu spojenú s pozorovateľom nepohybujú, sa zaoberá **elektrostatika**. Opisuje tieto javy vo vákuu, ale aj v prostrediach, najmä dielektrikách. Elektrostatika je súčasťou **elektrodynamiky**, vednej disciplíny zaoberajúcej sa všeobecným vzájomným pôsobením elektricky nabitých telies, vrátane vzájomne sa pohybujúcich. Toto vzájomné pôsobenie sprostredkuje ***elektromagnetické pole***, čím sa rozumie oblasť v priestore, v ktorej sa pôsobenie realizuje silami medzi nabitými telesami. Pozorovateľ vo svojej vzťažnej sústave pozoruje sily dvojakého druhu pôsobiace na elektrický náboj - ***sily elektrické*** a ***sily magnetické***. **Magnetická** sila závisí od veľkosti a smeru rýchlosti elektricky nabitej častice, ktorou sa pohybuje vzhľadom na pozorovateľovu súradnicovú sústavu. Za **elektrické** sa považujú sily, ktoré od rýchlosti častice nezávisia (neuvažujeme rýchlosti blízke rýchlosti svetla).

Potrebné vedomosti
Treba poznať základné pojmy zavedené v mechanike, ako sila, práca, energia. Opis elektrostatického poľa je dôsledne vektorový, preto vedomosti aj z tejto oblasti sú potrebné, vrátane použitia nabla operátora, opísaného v kapitole o vektoroch (gradient, divergencia, rotácia). Znalosť diferenciálneho a integrálneho počtu je rovnako nevyhnutná, vrátane jeho aplikácií na vektorové funkcie, ako derivácia skalárnej i vektorovej funkcie viacerých premenných.

6.1 Základné pojmy

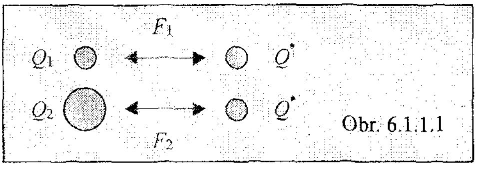
Kľúčové slová
elektrostatika, elektrický náboj, bodový náboj, elementárny náboj, hustota náboja (dĺžková, plošná, objemová), elektrická sila, Coulombov zákon, elektrostatické pole, intenzita elektrického poľa, siločiara, potenciál elektrického poľa, elektrické napätie, ekvipotenciálna plocha, Gaussov zákon

6.1.1 Elektrický náboj

Kľúčovým pojmom náuky o elektrine, ale aj o magnetizme, je **elektrický náboj**. Elektrický náboj v prírode nejestvuje ako samostatná realita, ale je vždy viazaný na elementárne častice, ako elektrón a protón. Ak sa elektrický náboj prenáša z jedného telesa na iné, tak iba prostredníctvom týchto častíc, ale v záujme stručnosti vyjadrovania v ďalšom texte sa často bude písať iba o elektrickom náboji. Od začiatkov pozorovania elektrických javov bolo známe, že v prírode sa vyskytujú dva druhy elektrického náboja, ktorým **Benjamin Franklin** (1709 - 1790) dal meno **kladný** a **záporný** náboj. Pravdepodobne ho k tomu viedla skutočnosť, že pri vložení rovnakých množstiev dvoch druhov nábojov na jedno teleso, toto zostane elektricky neutrálnym, ako keby na telese bol nulový náboj. Podobne ako súčet dvoch čísel s rovnakou absolútnou hodnotou, ale s opačnými znamienkami poskytne nulový výsledok. Treba si však uvedomiť, že pomenovanie *kladný* a *záporný* je iba konvencia, že to nesúvisí s fyzikálnou podstatou javu. Náboje mohli byť pomenované aj inak, napr. *náboj typu* A a *typu* B. Kladný náboj jeprisúdený protónu, záporný elektrónu, ale mohlo to byť aj naopak.

Ak sa elektrický náboj vzhľadom na pozorovateľa nepohybuje, pozorovateľ vníma iba tzv. elektrostatické pole. Sily, ktoré pôsobia medzi nepohybujúcimi sa nábojmi, sú elektrické. Ak sa elektrický náboj vzhľadom na pozorovateľa pohybuje, vzniká v jeho vzťažnej sústave elektrický prúd, a v jeho okolí magnetické pole.

Uvedené javy možno kvantitatívne opísať iba vtedy, ak sa elektrický **náboj** zavedie ako **fyzikálna veličina**. To znamená dohodnúť sa na spôsobe merania veľkosti náboja (zaviesť spôsob merania) a dohodnúť sa na jeho jednotke. Prítomnosť elektrického náboja sa posudzuje podľa silového pôsobenia. Preto je logické, že pomer veľkostí dvoch nábojov Q_1 a Q_2 sa určuje z pomeru veľkostí síl, ktorými tieto náboje pôsobia na iný náboj, napr. Q^* , a to bez ohľadu na to, či ide o sily príťažlivé, alebo odpudivé, t.j či náboje majú rovnaké, alebo opačné znamienka. Aby sa nekomplikoval zápis vzťahov značkami absolútnej hodnoty nábojov, budeme uvažovať iba s kladnými nábojmi.



Obr. 6.1.1.1

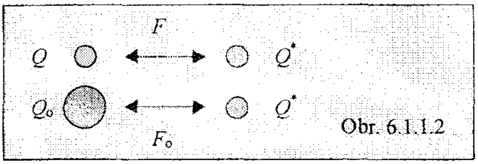
Základný definičný vzťah má potom tvar

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{F_1}{F_2} \qquad (6.1.1.1)$$

kde F_1 je veľkosť sily, ktorá pôsobí medzi nábojmi Q_1 a Q^* a F_2 veľkosť sily pôsobiacej medzi nábojmi Q_2 a Q^*. Pritom je veľmi dôležité, aby v oboch prípadoch vzdialenosť medzi nábojmi bola rovnaká, lebo elektrická sila pôsobiaca medzi nábojmi, ako Ch. A. Coulomb zistil už v roku 1785, sa zmenšuje s druhou mocninou vzdialenosti. Spôsob merania síl tu nebudeme rozvádzať, je to experimentálne náročná úloha, hoci ju Coulomb zvládol už na konci XVIII. storočia. Navyše treba uviesť, že rozmery teliesok na ktorých sa náboje nachádajú, musia byť v porovnaní so vzdialenosťou medzi nimi zanedbateľné. Preto sa v extrapolácii hovorí o ***bodových nábojoch***.

Ak zvolíme určitý náboj Q_o za jednotkový (z praktického hľadiska je dôležité, aby ho bolo možné v metrologických laboratóriách jednoducho a spoľahlivo realizovať), potom veľkosť iného náboja Q možno určiť na základe definičnej úmery

$$\frac{Q}{Q_o} = \frac{F}{F_o} \qquad (6.1.1.2)$$



Obr. 6.1.1.2

kde F a F_o sú veľkosti elektrických síl, ktoré pôsobia medzi nábojom Q^* a nábojmi Q resp. Q_o. Keďže číselná hodnota náboja Q_o sa rovná jednotke, zo vzťahu (6.1.1.2) vyplýva, že číselná hodnota náboja Q sa rovná podielu síl F/F_o.

Jednotkou elektrického náboja v sústave SI je **coulomb** (značka C). Jeden coulomb predstavuje elektrický náboj, ktorý pretečie vláknom 100 W žiarovky pripojenej na sieť s napätím 230 V približne za 0,5 sekundy. Z tohto pohľadu je to jednotka vyhovujúca praktickým potrebám. V nasledujúcom paragrafe sa však presvedčíme, že coulomb je pomerne veľká jednotka z hľadiska silového pôsobenia medzi elektrickými nábojmi.

Na vytvorenie náboja veľkosti 1 C treba zhromaždiť približne $6{,}24 \cdot 10^{18}$ protónov, lebo každý z nich "nesie" tzv. ***elementárny elektrický náboj***, čo je najmenší experimentálne pozorovaný náboj. Jeho veľkosť je pribl. $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C. Rovnako veľký, ale záporný elektrický náboj má elektrón. Z protónov a elektrónov sa skladajú všetky telesá. Preto elektrický náboj v telesách je celočíselným násobkom elementárneho náboja. Rovnako pri prenášaní náboja na iné teleso, môže ho tam pribúdať, alebo ubúdať, iba po takýchto elementárnych kvantách.

Elektrický náboj je veličina ktorá sa zachováva, podobne ako iné veličiny zavedené v mechanike. Súčet elektrických nábojov (kladných spolu so zápornými) v uzavretej sústave, t.j. sústave ktorá si s okolím nevymieňa častice, sa nemení. Táto skutočnosť sa nazýva ***zákon zachovania elektrického náboja***.

Elektrický náboj má významné postavenie aj v teórii relativity. Zatiaľ čo dĺžka tyče, alebo časový interval pozorované z rôznych inerciálnych sústav majú rôzne hodnoty, elektrický náboj sa zo všetkých inerciálnych sústav javí ako rovnako veľký - je to ***relativistický invariant***.

Elektrický náboj, napriek jeho nedeliteľnosti na menšie časti než je elementárny náboj, je často vhodné chápať ako spojite rozložený na vlákne, ploche, alebo v objeme. V prípade vlákna sa zavádza veličina ***dĺžková hustota (elektrického) náboja***. Zvyčajne sa označuje písmenom λ a je definovaná vzťahom $\lambda = (\mathrm{d}Q/\mathrm{d}x)$, kde $\mathrm{d}x$ je elementárna dĺžka vlákna, na ktorú pripadá náboj $\mathrm{d}Q$. Ide teda o veličinu predstavujúcu náboj pripadajúci na jednotku dĺžky, ktorej jednotkou je C/m. Ak je náboj rozložený na ploche, používa sa veličina ***plošná hustota náboja***, definovaná vzťahom $\sigma = (\mathrm{d}Q/\mathrm{d}S)$, kde $\mathrm{d}S$ je obsah elementárnej plôšky, na ktorú pripadá náboj $\mathrm{d}Q$. Ide o náboj pripadajúci na jednotku plošného obsahu, jednotka je C/m^2. Pri rozložení náboja v objeme, sa zavádza veličina ***objemová hustota náboja***, a to vzťahom $\rho = (\mathrm{d}Q/\mathrm{d}\tau)$, kde $\mathrm{d}\tau$ predstavuje element objemu. Jednotkou objemovej hustoty náboja je C/m^3.

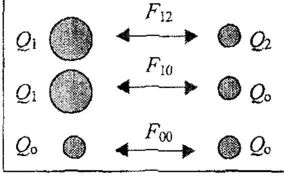
Príklad 6.1.1.1 Vypočítajte, aký veľký kladný a záporný náboj je sústredený v jednom grame látky.
Riešenie Na hmotnosti látky sa podieľajú prakticky iba protóny a rovnako ťažké elektricky neutrálne neutróny. Bežne sú v látke zastúpené v pomere blízkom 1 : 1, takže v 1 g látky je približne 0,5 g protónov. Hmotnosť protónu je $1{,}7.10^{-24}$ g, preto v 1 g látky je $0{,}5/1{,}7.10^{-24} \cong 3.10^{23}$ protónov. Každý nesie $1{,}6.10^{-19}$ C, čo znamená, že 1g látky obsahuje $3.10^{23}.\ 1{,}6.10^{-19}$ C $\cong$ 47 000 C kladného i záporného náboja.

Kontrolné otázky

1. *Akým spôsobom sa zavádza elektrický náboj ako veličina?*
2. *Prečo rozlišujeme dva druhy elektrického náboja?*
3. *Ako sa nazýva jednotka elektrického náboja v sústave SI ?*
4. *Čo si predstavujeme pod pojmom bodový náboj?*
5. *Aká častica má elementárny elektrický náboj?*
6. *Aký veľký je (rádovo) elementárny elektrický náboj?*
7. *Ako by ste sformulovali zákon zachovania elektrického náboja?*
8. *Ako je definovaná plošná hustota elektrického náboja?*
9. *Aká je jednotka objemovej hustoty elektrického náboja?*

6.1.2 Coulombov zákon

Dôsledkom definičného vzorca (6.1.1.1) je vzťah, podľa ktorého elektrická sila pôsobiaca medzi dvomi nábojmi je úmerná súčinu ich veľkostí. O pravdivosti tohto tvrdenia sa možno presvedčiť pomocou schémy vzájomného pôsobenia (obr. 6.1.1.1), prispôsobenej pre tento prípad.



Obr. 6.1.2.1

Na základe tejto schémy možno napísať úmery:

$$\frac{F_{12}}{F_{10}} = \frac{Q_2}{Q_o} \quad \Rightarrow \quad F_{12} = \frac{F_{10}}{Q_o} Q_2 \ , \qquad \frac{F_{10}}{F_{00}} = \frac{Q_1}{Q_o} \quad \Rightarrow \quad F_{10} = \frac{F_{00}}{Q_o} Q_1$$

a ich spojením dostaneme pre silu F_{12} výsledok

$$F_{12} = \frac{F_{00}}{Q_o^2} Q_1 Q_2 = K\, Q_1 Q_2$$

(6.1.2.1)

Výsledok (6.1.2.1) nezohľadňuje závislosť sily od **druhej mocniny vzdialenosti** r medzi nábojmi, ktorú zistil Coulomb. Po jej doplnení **možno** už **napísať Coulombov zákon** vyjadrujúci silové pôsobenie medzi nábojmi:

$$F_{12} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

(6.1.2.2)

Veľkosť konštanty $K = F_{00} / Q_o^2$ závisí od voľby jednotky elektrického náboja a určuje sa experimentálne. Ak by sa dva bodové náboje, každý s veľkosťou 1 coulomb (jednotka náboja v sústave SI) nachádzali vo vzájomnej vzdialenosti 1 m, pôsobili by na seba obrovskou silou

$$F_{12} = 8{,}98 \cdot 10^9\,\mathrm{N},$$

ktorej hodnota sa číselne rovná hodnote konštanty K. Ak toto číslo zaokrúhlime, hodnota konštanty K predstavuje $9 \cdot 10^9$ SI jednotiek (pri hrubšom zaokrúhlení 10^{10}).

Konštanta K sa však v SI sústave zapisuje v tvare $K = 1/(4\pi\varepsilon_o)$, kde ε_o je tzv. ***elektrická konštanta***, u nás známa skôr pod názvom ***permitivita vákua***. Táto konštanta má hodnotu

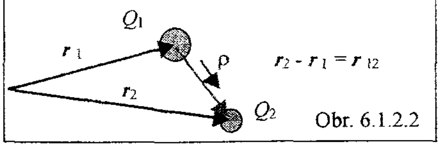
$$\varepsilon_o = 8{,}86 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{A^2 s^4 kg^{-1} m^{-3}}.$$

Poznámka Keď v prvej polovici XIX. storočia C.F.Gauss budoval sústavu jednotiek vhodných aj na opis elektrických a magnetických javov, konštantu K položil rovnú bezrozmernej jednotke. Zo vzťahu (6.1.2.2) potom vyplýva, že jednotku elektrického náboja nemožno voliť nezávisle, lebo jednotky dĺžky a sily boli už predtým určené v rámci sústavy CGS, v ktorej sa ako základné používali jednotky gram, centimeter a sekunda. Pre rozmer elektrického náboja zo vzťahu (6.1.2.2) potom vyplýva $[Q] = \mathrm{g^{1/2} cm^{3/2} s^{-1}}$, pričom veľkosť jednotky náboja je $3 \cdot 10^9$-krát menšia v porovnaní s jednotkou coulomb.

Sila je vektorová veličina, preto je možné Coulombov zákon napísať vo vektorovom tvare. Vzťah (6.1.2.2) na oboch stranách rozšírime o jednotkový vektor ρ smerujúci od náboja Q_1 k náboju Q_2:

$$F_{12}\,\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \boldsymbol{\rho}$$

(6.1.2.3)



Obr. 6.1.2.2

Čitateľa i menovateľa vo **vzťahu** (6.1.2.3) rozšírime o **vzdialenosť** r **medzi** nábojmi a využijeme zápis $F\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{F}$, $r\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \boldsymbol{r}_{12}$$

(6.1.2.4)

Takto zapísaný Coulombov zákon zohľadňuje skutočnosť, že sila medzi nábojmi s rovnakými znamienkami je odpudivá, a medzi nábojmi s opačnými znamienkami je príťažlivá. Ak majú náboje rovnaké znamienka, čitateľ vzorca (6.1.2.4) je kladný a teda sila ktorou pôsobí náboj Q_1 na náboj Q_2 má smer vektora $\boldsymbol{r}_{12}$. Ak majú opačné znamienka, sila má opačný smer ako vektor $\boldsymbol{r}_{12}$. Aj v tomto prípade, rovnako ako pri inom type vzájomného pôsobenia, platí zákon akcie a reakcie, t.j. na náboj Q_1 pôsobí sila $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$. Označenie dvoch druhov elektrického náboja ako kladný a záporný má nespornú výhodu aj v tomto prípade, ale treba si opäť uvedomiť, že je to iba konvencia.

Keď si uvedomíme, že platí vzťah $\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, Coulombov zákon možno prepísať do tvaru zohľadňujúceho prípad, keď začiatok súradnicovej sústavy leží mimo nábojov (obr.6.1.2.2) :

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q_1 Q_2}{|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)|^3} (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \; .$$

(6.1.2.5)

Takto upravený vzťah je vhodný pri výpočtoch, keď treba **uvažovať** s viacerými bodovými nábojmi.

Ak sa v blízkosti náboja q nachádza viacero elektrických nábojov Q_i, **výsledná sila** $\boldsymbol{F}$ naň pôsobiaca sa vypočíta ako vektorový súčet síl $\boldsymbol{F}_i$ **vyvolaných pôsobením** jednotlivých nábojov, čomu sa hovorí *princíp superpozície síl* :

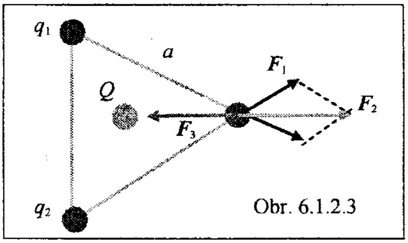
$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{qQ_i}{|(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)|^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$$

(6.1.2.6)

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor náboja q a $\boldsymbol{r}_i$ polohové vektory nábojov Q_i.

Príklad 6.1.2.1 Vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka so stranou $a = 5$ cm sa nachádzajú rovnaké kladné náboje $q_i = 3$ nC (nanocoulomby). Aký náboj Q treba umiestniť do ťažiska trojuholníka, aby sústava bola v rovnováhe ?

Riešenie: Na náboj v ťažisku pôsobia tri rovnako veľké sily, ktorých vektorový súčet sa rovná nule. Preto náboj v strede trojuholníka je v pokoji. Na každý náboj umiestnený vo vrchole trojuholníka pôsobia dve odpudivé sily, ktoré majú pôvod v nábojoch v dvoch ďalších vrcholoch. Tieto sily treba kompenzovať príťažlivou silou podmienenou prítomnosťou záporného náboja v ťažisku. Treba vypočítať veľkosť tohto záporného náboja, pričom je výhodné použiť obrázok. Vychádzajúc z neho možno napísať vzťah pre veľkosť síl F_1 a F_2 :



Obr. 6.1.2.3

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad F_2 = 2F_1\cos(30°) = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{a^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{a^2}\sqrt{3}$$

Sila F_3 musí mať rovnakú veľkosť, ale je vyvolaná vzájomným pôsobením medzi nábojmi Q a q. Preto platí rovnosť:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{a^2}\sqrt{3} = \left|\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qQ}{(\frac{2}{3}a\cos30°)^2}\right| \quad \Rightarrow \quad |Q| = \frac{q}{\sqrt{3}},\ Q = -\frac{q}{\sqrt{3}}$$

Číselne: $Q = -\frac{3}{\sqrt{3}}\,\mathrm{nC} = -\sqrt{3}\,\mathrm{nC}$ pričom výsledok nezávisí od veľkosti strany trojuholníka.

Príklad 6.1.2.2 (Podľa Feynmannovej učebnice) Akou elektrostatickou silou by na seba pôsobili dvaja ľudia, navzájom vzdialení 1 m, keby sa v ich telách porušila nábojová rovnováha o 1% ?

Riešenie: Človek má priemerne 70 kg, z toho je pribl. 35 kg protónov. Hmotnosť jedného protónu je $1{,}67\cdot10^{-27}$ kg a nesie náboj $1{,}6\cdot10^{-19}$ C, z čoho vyplýva, že v človeku je celkový kladný náboj veľkosti

$$\frac{35\,\mathrm{kg}}{1{,}67\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}}\,1{,}6\cdot10^{-19}\,\mathrm{C} \cong 3{,}5\cdot10^{9}\,\mathrm{C}$$

Jedno percento z tejto hodnoty predstavuje $3{,}5\cdot10^{7}$ C. Zo vzdialenosti 1 m by dva takéto náboje pôsobili na seba silou $F \cong 10^{10}\,(3{,}5\cdot10^{7})^2 \cong 10^{25}$ N . Táto sila by našej Zemi ($6\cdot10^{24}$kg) udelila zrýchlenie pribl. 1,7 m/s^2.
Príklad ukazuje, aká obrovská je elektrostatická sila.

Príklad 6.1.2.3 Porovnajte veľkosť vzájomného gravitačného a elektrostatického pôsobenia dvoch protónov. Protón má hmotnosť $m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg, náboj protónu $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C, číselné hodnoty konštánt v SI jednotkách: gravitačná $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$, $1/(4\pi\varepsilon_o) = 8{,}98\cdot10^{9}$.

Riešenie: Vypočítame pomer elektrostatickej a gravitačnej sily - elektrostatickú vyjadríme z Coulombovho zákona, gravitačnú pomocou Newtonovho gravitačného zákona :

$$\frac{F_e}{F_g}=\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e^2}{r^2}}{G\frac{m^2}{r^2}}=\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon}e^2}{Gm^2}=\frac{8{,}98\cdot 10^9\cdot(1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(1{,}67\cdot 10^{-27})^2}=1{,}236\cdot 10^{36}$$

Poznámka Elektrostatická interakcia medzi protónmi je neporovnateľne silnejšia ako gravitačná.

Kontrolné otázky

1. *Napíšte Coulombov zákon v skalárnom tvare!*
2. *Akú približnú hodnotu má konštanta úmernosti v Coulombovom zákone?*
3. *Akú hodnotu priradil konštante úmernosti Gauss?*
4. *Ako sa uplatňujú dva druhy elektrického náboja vo vektorovej formulácii Coulombovho zákona?*
5. *Ako sa vypočíta výsledná sila pôsobiaca na náboj, keď je vyvolaná pôsobením viacerých bodových nábojov?*
6. *Čo je to princíp superpozície?*

6.1.3 Intenzita elektrického poľa

Podľa Coulombovho zákona (6.1.2.2) elektrická sila pôsobiaca medzi dvoma nábojmi je úmerná súčinu veľkostí nábojov $F = KQq/r^2$. Keby sme do rovnakej vzdialenosti od náboja Q postupne umiestňovali náboje q_i s rôznymi veľkosťami, veľkosti síl F_i medzi nábojom Q a nábojmi q_i by boli rôzne, ale podiely označené $E_i = F_i / q_i$ sú rovnaké. Preto podiel F/q ako keby vyjadroval silové pôsobenie náboja Q samotného. V tomto prípade charakterizuje *elektrostatické* pole v jeho okolí ale nazýva sa ***intenzita elektrického poľa,*** a to s ohľadom na elektrické sily pôsobiace na náboj aj v poliach, ktoré nie sú elektrostatické. V ďalšom texte sa často bude označovať iba ako *intenzita.*

Na základe toho sa intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ (vektorová veličina) definuje ako podiel elektrickej sily $\boldsymbol{F}$ a náboja q, na ktorý v danom bode táto sila pôsobí:

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q}\ . \tag{6.1.3.1}$$

Veľkosť intenzity sa číselne (ale len číselne) rovná veľkosti sily pôsobiacej na náboj s jednotkovou veľkosťou.

Poznámka Vzťahom (6.1.3.1) sa definuje intenzita aj v poliach, ktoré nie sú elektrostatické. Sila $\boldsymbol{F}$ v tomto vzťahu však musí byť elektrickej, nie magnetickej povahy.

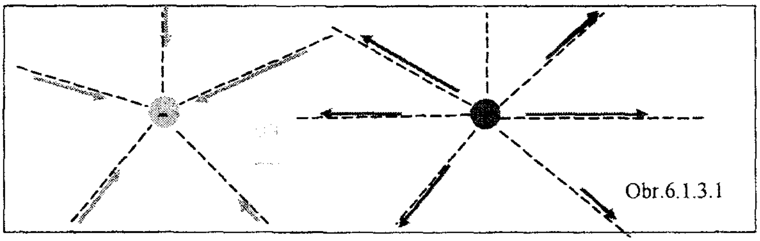
Je dôležité si uvedomiť, že veľkosť, ani smer vektora $\boldsymbol{E}$, nezávisia od skúšobného náboja q, jeho veľkosti či znamienka. V definícii (6.1.3.1) vystupuje skalárny násobok sily $\boldsymbol{F}$ skalárom $(1/q)$. Ak je náboj q kladný, vektor $\boldsymbol{E}$ má rovnaký smer ako sila $\boldsymbol{F}$. Ak do daného miesta v elektrostatickom poli vložíme záporný náboj, smer sily bude opačný, ale podľa definície (6.1.3.1) túto silu vynásobíme záporným skalárom, čo znamená, že vektor $\boldsymbol{E}$ bude mať opačný smer ako sila $\boldsymbol{F}$. Preto v oboch prípadoch, či pole skúmame kladným, alebo záporným nábojom, určíme rovnaký smer vektora $\boldsymbol{E}$.

Ako vyplýva z definície (6.1.3.1), jednotkou intenzity elektrického poľa je newton/coulomb (N/C), rovnakou jednotkou, ako sa neskôr presvedčíme, je aj volt/meter (V/m).

Ak silu pôsobiacu medzi dvomi nábojmi Q a q vyjadríme pomocou Coulombovho zákona vo vektorovom tvare, pre intenzitu elektrického poľa v okolí bodového náboja Q dostaneme vzťah :

$$\boldsymbol{E}_Q = \frac{\boldsymbol{F}_{Qq}}{q} = \frac{1}{q}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^3}\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{6.1.3.2}$$

Intenzita $\boldsymbol{E}$ ako vektorová veličina má smer zhodný so smerom polohového vektora $\boldsymbol{r}$ len vtedy, ak náboj Q je kladný. To znamená, že vektor $\boldsymbol{E}$ smeruje od náboja Q. Ak je náboj záporný, je situácia opačná. Veľkosť intenzity sa zmenšuje s druhou mocninou vzdialenosti, pričom treba zvlášť zdôrazniť, že táto zákonitosť platí iba v prípade bodového náboja. Napríklad v okolí veľmi dlhého spojite nabitého vlákna sa intenzita zmenšuje s prvou mocninou vzdialenosti od vlákna.

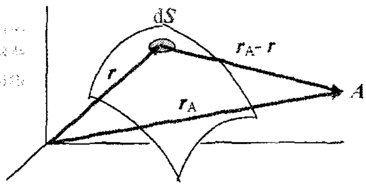


Obr.6.1.3.1

V okolí viacerých bodových nábojov sa výsledná intenzita $\boldsymbol{E}$ v súlade s princípom superpozície síl (6.1.2.6) vypočíta ako vektorový súčet intenzít $\boldsymbol{E}_i$ vyvolaných v danom bode jednotlivými nábojmi:

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i \tag{6.1.3.3}$$

Elektrický náboj môže byť spojito rozložený na vlákne, ploche, alebo v objeme. V okolí takto spojito rozloženého náboja sa intenzita počíta integráciou, nie sumáciou. Objekt treba rozdeliť na malé elementy (dĺžkové, plošné, alebo objemové, podľa povahy prípadu), pričom na každom z nich sídli elementárny náboj dQ, ktorý možno považovať za bodový.



Obr. 6.1.3.2

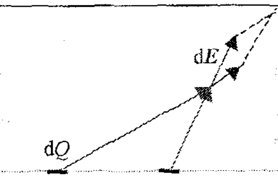
Príspevok elementárneho náboja $\mathrm{d}Q$ k intenzite označíme ako $\mathrm{d}E$:

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}Q}{|\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}|^3} (\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r})$$

kde $\boldsymbol{r}_A$ je polohový vektor bodu A v ktorom počítame intenzitu, a $\boldsymbol{r}$ polohový vektor elementárneho náboja $\mathrm{d}Q$ (na obr. 6.1.3.2 sídliaceho na plôške dS). Výsledná intenzita je **vektorový** súčet elementárnych intenzít :

$$E = \int \mathrm{d}E = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}Q}{|\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}|^3} (\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}) \tag{6.1.3.4}$$

Na obrázku 6.1.3.3 je znázornený príklad výpočtu intenzity v okolí nabitého priameho vlákna, a to príspevky od dvoch elementárnych nábojov k výslednej intenzite, ktoré sa musia sčítavať vektorovo.



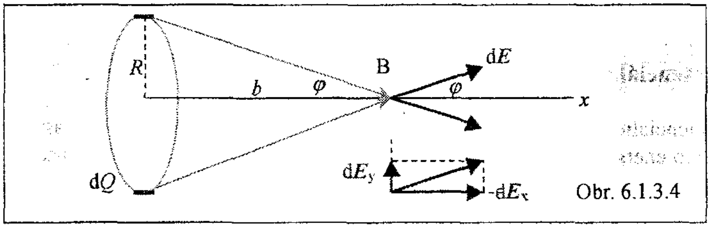
Obr. 6.1.3.3

Na základe definície (6.1.3.1) sa určí intenzita E v bode, v ktorom sa nachádza skúšobný náboj q . Postupnou zmenou polohy skúšobného náboja možno určiť veľkosť, ale aj smer vektora intenzity v rôznych bodoch v priestore a vytvoriť si obraz o elektrostatickom poli. Toto sa znázorňuje pomocou kriviek nazývaných ***siločiary***, ktoré majú tú vlastnosť, že vektor E v každom bode predstavuje dotyčnicu príslušnej siločiary. Siločiary v okolí bodového náboja sú priamky vychádzajúce z náboja radiálne na všetky strany. Na obr. 6.1.3.1 je niekoľko siločiar nakreslených čiarkovane.

Príklad 6.1.3.1 Vypočítajte intenzitu elektrického poľa v okolí protónu v atóme vodíka na prvej kvantovej dráhe. Náboj protónu $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, polomer prvej kvantovej dráhy, po ktorej obieha elektrón je $0{,}5 \cdot 10^{-10}$m .
Riešenie: $E = K\,Q\,/\,r^2 \cong 10^{10} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} /(0{,}5 \cdot 10^{-10})^2 \cong 6{,}4 \cdot 10^{11}$ N/C , resp. $6{,}4 \cdot 10^{11}$ V/m .

Poznámka Výsledné pole je mimoriadne silné, napr. intenzita v rádiovom signáli, postačujúca na príjem, predstvuje iba niekoľko mikrovoltov na meter.

Príklad 6.1.3.2 Na vlákne s tvarom kružnice, ktorej polomer je R, je rovnomerne rozložený elektrický náboj veľkosti Q. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa v bode B, ktorý leží na osi kružnice vo vzdialenosti b od roviny vlákna.
Riešenie :



Obr. 6.1.3.4

Príspevok elementárneho náboja $\mathrm{d}Q$ k intenzite v bode B, pokiaľ ide o jej veľkosť, je

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{R^2+b^2}$$

Ako vektor má tento príspevok dve zložky - rovnobežnú s osou kružnice ($\mathrm{d}E_x$) a kolmú na os ($\mathrm{d}E_y$), ktorá sa však kompenzuje príspevkom od elementárneho náboja ležiaceho na protiľahlom úseku kružnice. Veľkosť rovnobežnej zložky sa rovná veľkosti priemetu vektora $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ do osi x: $\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E \cos\varphi$. Výsledok, teda veľkosť výslednej intenzity v bode B, získame integráciou cez obvod kružnice:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\mathrm{d}Q}{R^2+b^2}\cos\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\mathrm{d}Q}{R^2+b^2}\frac{b}{(R^2+b^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b}{(R^2+b^2)^{3/2}}\oint\mathrm{d}Q$$

pričom integrál (súčet) elementárnych nábojov po celom obvode kružnice sa rovná celkovému náboju Q.

Príklad 6.1.3.3 Akým zrýchlením sa vo vákuu začne pohybovať elektrón v elektrostatickom poli s intenzitou $E = 10$ V/m ?
Riešenie Z Newtonovho zákona sily platí $a = F/m$, odkiaľ
$a = eE/m \cong 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10/10^{-30} = 1{,}6\cdot10^{12}$ m/s^2.

Poznámka Gravitačné zrýchlenie, ktorému podliehame na povrchu Zeme je približne 10^1m/s^2. Už malá intenzita elektrického poľa dokáže udeliť elektrónu obrovské zrýchlenie. To znamená, že z makroskopického hľadiska sa dokáže prakticky okamžite premiestniť. Preto sú procesy v elektronike také rýchle. Skúste vypočítať, koľko takto urýchlenému elektrónu trvá, než prejde 1 centimeter.

Kontrolné otázky
1. *Ako sa definuje intenzita elektrického poľa?*
2. *Aká je jednotka intenzity elektrického poľa?*
3. *Aký je vzorec na výpočet intenzity v okolí bodového náboja?*
4. *Ako sa počíta intenzita v okolí viacerých bodových nábojov?*
5. *Ako sa počíta intenzita, ak sú náboje spojito rozložené na ploche?*
6. *Aký smer má vektor intenzity v okolí záporného bodového náboja?*
7. *Ako sa znázorňuje elektrostatické pole pomocou siločiar?*

6.1.4 Potenciálna energia v elektrostatickom poli

Potenciálna energia sa zavádza v prípadoch, keď na seba pôsobia aspoň dve telesá. Táto energia sa mení s ich vzájomnou vzdialenosťou, preto sa jej často hovorí aj *polohová energia*. V gravitačnom poli platí, že čím väčšia je vzdialenosť medzi telesami, tým väčšia je ich vzájomná potenciálna energia. Keď telesá oddialime, príťažlivá sila pôsobiaca medzi nimi ich vracia do východiskovej polohy, pričom koná prácu. Tento mechanizmus sa využíval napr. v hodinách, ktoré sa naťahovali zodvihnutím závažia.

Podobná situácia je v elektrostatickom poli. Častica nesúca kladný náboj sa môže nachádzať v blízkosti záporne nabitej častice. Častice sa vzájomne priťahujú, postupne sa zväčšuje ich kinetická energia, ale túto získavajú na úkor **vzájomnej potenciálnej energie**, ktorá sa pritom zmenšuje. Čím sú častice od seba ďalej, tým väčšia je ich vzájomná potenciálna energia. Ale ak by aj druhá častica bola nabitá kladným nábojom, častice by sa odpudzovali, takže potenciálna energia by sa zmenšovala pri ich vzájomnom vzďaľovaní.

Často sa stretávame s prípadmi, keď interagujúce telesá majú podstatne rozdielnu veľkosť (Zem - kameň, elektrón - nabitá platňa kondenzátora). Sily ktoré medzi nimi pôsobia, pokiaľ sú telesá voľné, zväčšujú kinetickú energiu oboch telies, ale kinetická energia veľkého telesa je zanedbateľne malá v porovnaní s kinetickou energiou malého telieska (pozri príklad 2.2.6.3 v mechanike, v paragrafe o zákone zachovania energie). Situáciu možno potom reálne posudzovať tak, ako keby sa iba malé teliesko pohybovalo a menilo svoju polohu. Preto sa nie vždy používa názov vzájomná potenciálna energia, ale iba **potenciálna energia** malého telieska. Toto sa prejavuje aj v elektrostatike, keď v prípade pohybu nabitej častice v elektrostatickom poli generovanom veľkým telesom, alebo nešpecifikovanou sústavou elektrických nábojov, hovorí sa o potenciálnej energii náboja (nabitej častice), nie o vzájomnej potenciálnej energii.

Z tohto pohľadu, mierou zmeny potenciálnej energie elektricky nabitej častice je práca, ktorú vykonali elektrické sily pri zmene jej polohy. Ak sa nabitá častica s nábojom Q premiestni z bodu A do bodu B v elektrostatickom poli s intenzitou $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, potom pre zmenu jej potenciálnej energie platí definičná rovnica

$$A = \int_{A}^{B} \boldsymbol{F}_{\mathrm{elst}}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{A}^{B} Q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -[W_{\mathrm{p}}(\mathrm{B}) - W_{\mathrm{p}}(\mathrm{A})] \tag{6.1.4.1}$$

kde $\boldsymbol{F}_{\mathrm{elst}}$ je elektrická sila pôsobiaca na časticu, $W_{\mathrm{p}}(\mathrm{A})$, $W_{\mathrm{p}}(\mathrm{B})$ sú potenciálne energie častice v bodoch A, resp. B. Znamienko mínus na pravej strane rovnice pred zátvorkou vyjadruje skutočnosť, že práca elektrických síl v elektrostatickom poli bola vykonaná na úkor potenciálnej energie.

Integráciu naznačenú v rovnici (6.1.4.1) možno vykonať vtedy, keď je známa závislosť intenzity $E(\boldsymbol{r})$ od polohového vektora. Túto závislosť poznáme zatiaľ iba v prípade bodového náboja. Aby sme opis zjednodušili, teleso s bodovým nábojom Q, vytvárajúce vo svojom okolí pole s intenzitou $E(\boldsymbol{r})$, budeme považovať za upevnené v začiatku súradnicovej sústavy, v ktorom začínajú aj polohové vektory $\boldsymbol{r}$. Zmenu potenciálnej energie malej častice s nábojom q potom vypočítame týmto postupom:

$$A = \int_A^B q\,E(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B\frac{dr}{r^2} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right), \tag{6.1.4.2}$$

kde r_A a r_B sú vzialenosti častice merané od náboja Q.

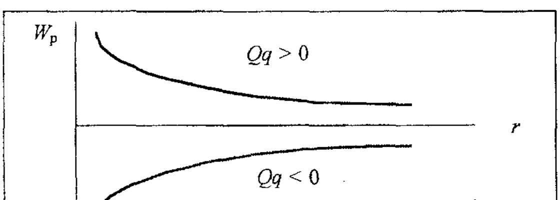
Porovnaním pravých strán rovníc (6.1.4.1) a (6.1.4.2) získame vzorec vyjadrujúci potenciálnu energiu nabitej častice s nábojom q v okolí telesa s nábojom Q:

$$W_p = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C \tag{6.1.4.3}$$

Konštanta C umožňuje zvoliť vzdialenosť nábojov r_0, pri ktorej sa potenciálna energia rovná nule. Pri odčítaní potenciálnych energií $W_p(B)$ a $W_p(A)$ vypadne, takže ovplyvňuje iba veľkosť energie, ale nie rozdiely energií. Ak položíme $C = 0$, potenciálna energia dosiahne nulovú hodnotu pri $r_0 \to \infty$ a vzorec sa zjednoduší :

$$W_p = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \tag{6.1.4.4}$$

Ak náboje Q a q majú rovnaké znamienka, čitateľ vo vzorci (6.1.4.4) je kladný a teda aj potenciálna energia je vždy kladná, pričom s rastúcou vzdialenosťou medzi nábojmi jej veľkosť klesá (obr. 6.1.4.1). Ak náboje majú rôzne znamienka, ich vzájomná potenciálna energia je vždy záporná, s rastúcou vzdialenosťou narastá, hoci jej absolútna hodnota sa zmenšuje.



Obr. 6.1.4.1

Vzorcu (6.1.4.1) môžeme dať zaujímavú interpretáciu. Dohodneme sa, že bod A posunieme do nekonečna a zvolíme $W_p(A) = 0$. Dolná medza v integráli sa zmení z A na ∞:

$$\int_{\infty}^{B} \boldsymbol{F}_{\text{elst}}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\infty}^{B} q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -W_p(\mathrm{B}) \tag{6.1.4.5}$$

Elektrická sila $\boldsymbol{F}_{\text{elst}}$ nech napríklad posúva náboj q stále do väčšej vzdialenosti. Ak by sme náboj chceli vrátiť nazad, museli by sme naň pôsobiť rovnako veľkou silou opačného smeru (označme ju ako vonkajšia sila) : $\boldsymbol{F}_{\text{vonk}} = -\boldsymbol{F}_{\text{elst}}$. Keď ju dosadíme do integrálu, zmenia sa znamienka, takže bude platiť

$$\int_{\infty}^{B} \boldsymbol{F}_{\text{vonk}}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\infty}^{B} q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = +W_p(\mathrm{B}) \tag{6.1.4.6}$$

To znamená, že potenciálnu energiu náboja q v bode B určíme, ak zmeriame prácu potrebnú na jeho prenesenie vonkajšími silami z nekonečna do bodu B.

V prípade viacerých bodových nábojov, tieto pôsobia navzájom každý s každým, a ich vzájomná potenciálna energia je súčtom energií medzi dvojicami. Preto vzorec na výpočet tejto energie má tvar

$$W_p = \tfrac{1}{2} \sum_{i \neq j}\sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \,. \tag{6.1.4.7}$$

Zlomok (1/2) pred vzorcom zabezpečuje správnu hodnotu energie. Pri dvojitej sumácii sa vyskytuje napr. dvojica 3 - 7 , ale aj dvojica 7 - 3 , takže sa energia každej dvojice započítava dvakrát.

Poznámka Veľká kladne nabitá platňa vo svojom okolí vytvára elektrostatické pole, ktoré malú kladne nabitú časticu odpudzuje od platne, urýchľuje ju. Sily elektrostatického poľa pritom konajú kladnú prácu, lebo zväčšujú kinetickú energiu častice. Kinetická energia sa zväčšuje na úkor potenciálnej energie častice, pričom súčet týchto energií sa zachováva. Súčet energií sa zachováva aj vtedy, keď kladne nabitá častica prilieta k platni. Pole ju brzdí, jej kinetická energia sa zmenšuje, ale súčasne sa zväčšuje potenciálna energia častice, v tomto prípade na úkor kinetickej energie..

Príklad 6.1.4.1 Aká je vzájomná potenciálna energia dvoch kladných bodových nábojov veľkosti 1 C, ak ich vzájomná vzdialenosť je 1 m ? Energiu vyjadrite v jouloch a v kilowatthodinách.

Riešenie Energiu vypočítame podľa vzorca (6.1.4.4), v ktorom položíme $(1/4\pi\varepsilon_0) \cong 10^{10}$ SI jednotiek : $W_p \cong 10^{10} \cdot 1\ \mathrm{C}^2/1\mathrm{m} = 10^{10}\ \mathrm{J} \cong 2800\ \mathrm{kWh} = 2{,}8\ \mathrm{MWh}$.

Príklad 6.1.4.2 Aká je vzájomná potenciálna energia protónu a elektrónu v atóme vodíka, kde vzdialenosť medzi nimi je pribl. 10^{-10} m ? Je kladná, či záporná ?
Riešenie Analogicky ako v príklade 6.1.4.1: $|W_p| = 10^{10} \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2/10^{-10} =$
$= 2{,}56 \cdot 10^{-18}$ J = 16 eV (1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J).

Kontrolné otázky

1. *Čo je mierou zmeny potenciálnej energie náboja?*
2. *Ako sa mení vzájomná potenciálna energia dvoch kladných nábojov, keď sa k sebe približujú?*
3. *Aká je jednotka potenciálnej energie v elektrostatickom poli?*
4. *Ako vyzerá vzorec vyjadrujúci vzájomnú potenciálnu energiu dvoch nábojov?*
5. *Môže byť vzájomná potenciálna energia dvoch nábojov záporná?*
6. *Aký je vzorec vzájomnej potenciálnej energie viacerých nábojov?*

6.1.5 Potenciál v elektrostatickom poli

Elektrostatické pole v okolí nábojov možno popri vektorovej veličine - intenzite E - opísať aj skalárnou veličinou, nazývanou ***elektrický potenciál*** (značka φ, alebo V; názov veličiny je všeobecný, používa sa aj na opis elektrických polí, ktoré nie sú elektrostatické). Potenciál v bode A v elektrostatickom poli sa definuje ako podiel potenciálnej energie náboja q v tomto bode a tohto náboja:

$$\varphi(\mathrm{A}) = \frac{W_p(\mathrm{A})}{q}$$

(6.1.5.1)

Potenciál sa číselne (ale len číselne) rovná potenciálnej energii náboja s jednotkovou veľkosťou.

Jednotkou elektrického potenciálu v SI je J/C, ktorá má samostaný názov ***volt*** (značka V) .

Rozdiel elektrických potenciálov medzi dvomi bodmi v priestore sa nazýva ***elektrické napätie***, ktoré sa rovnako meria vo voltoch.

Vzorec (6.1.5.1) nadobudne konkrétnu podobu, keď dokážeme vyjadriť potenciálnu energiu W_p ako funkciu polohy častice s nábojom q . To zatiaľ vieme iba v prípade, ak sa častica s nábojom q nachádza v poli bodového náboja Q . Na základe vzorca (6.1.4.3) pre potenciál φ dostaneme:

$$\varphi = \frac{1}{q}\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{C}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C^*$$

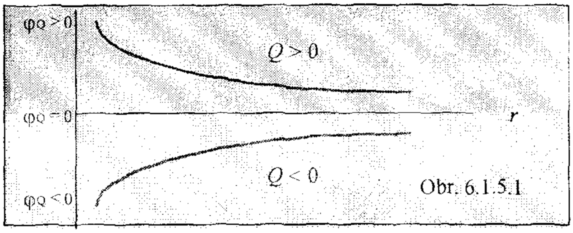
(6.1.5.2)

Ak **nulovú hodnotu** potenciálu zvolíme pri $r \to \infty$, vtedy $C^* = 0$ a pre potenciál v okolí **bodového** náboja Q dostaneme zjednodušený vzorec

$$\varphi_Q = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r}$$

(6.1.5.3)

Potenciál vyjadrený vzorcom (6.1.5.3), teda s nulovou hodnotou v nekonečne, je ***absolútny potenciál*** v okolí bodového náboja. Jeho absolútna hodnota s rastúcou vzdialenosťou od náboja klesá. Ak $Q > 0$, potenciál je všade kladný, s rastúcou vzdialenosťou sa jeho hodnota zmenšuje až na nulu pri $r \to \infty$. Ak $Q < 0$, potenciál φ_Q je všade záporný, s rastúcou vzdialenosťou r však rastie, hoci jeho absolútna hodnota klesá (obr. 6.1.5.1).



Obr. 6.1.5.1

Potenciál v okolí bodového náboja je nepriamo úmerný vzdialenosti od náboja. V okolí viacerých bodových nábojov sa potenciál (absolútny potenciál) rovná algebrickému súčtu potenciálov (absolútnych potenciálov) vytvorených jednotlivými nábojmi v danom bode:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{r_i}$$

(6.1.5.4)

Ak je náboj rozložený spojite na vlákne, ploche, alebo v objeme, potenciál sa v okolí takéhoto objektu počíta integráciou. Podobne ako intenzita (vzorec 6.1.3.4), ale s tým rozdielom, že elementárne príspevky sa nesčitujú vektorovo ako pri intenzite, ale ako skalárne veličiny:

$$\varphi = \int d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dQ}{r}$$

(6.1.5.5)

Element náboja dQ sa vyjadruje podľa toho, či je náboj rozložený na vlákne, ploche, alebo v objeme:

$$dQ = \lambda\, dx, \qquad dQ = \sigma\, dS, \qquad dQ = \rho\, d\tau$$

(6.1.5.6)

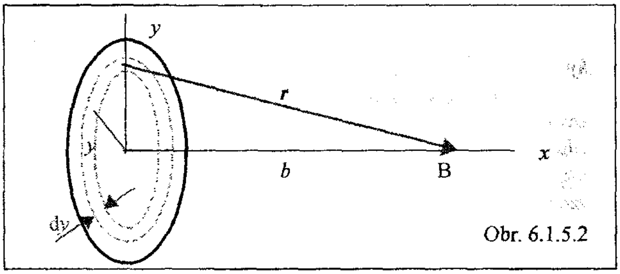
kde λ, σ, ρ sú *dĺžková, plošná* a *objemová* hustota elektrického náboja (pozri posledný odsek v paragrafe 6.1.1)

V priestore okolo nábojov sú plochy, vyznačujúce sa rovnakou hodnotou potenciálu. Sú to ***ekvipotenciálne plochy***. V okolí bodového náboja majú tvar sústredných gúľ, pri zobrazení v rovine pochopiteľne tvar sústredných kružníc. Nakreslené ekvipotenciálne plochy (čiary) umožňujú urobiť si dobrú priestorovú predstavu o príslušnom elektrostatickom poli.

Príklad 6.1.5.1 Vypočítajte absolútny potenciál vo vzdialenosti 1 m od bodového náboja, ktorého veľkosť je 1 C .
Riešenie Na základe vzorca (6.1.5.3), pri zaokrúhlení konštanty $1/(4\pi\varepsilon_o) \cong 10^{10}$ SI jednotiek pre potenciál dostaneme $\varphi = Q/(4\pi\varepsilon_o\, r) = 1\cdot 10^{10}/1 = 10^{10}$ V .

Príklad 6.1.5.2 Vypočítajte absolútny potenciál vo vzdialenosti $r = 10^{-10}$m od protónu, t.j. približne vo vzdialenosti, v ktorej sa v atóme vodíka okolo neho pohybuje elektrón. Náboj protónu $Q = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C.
Riešenie Na základe vzorca (6.1.5.3), pri zaokrúhlení konštanty $1/(4\pi\varepsilon_o) \cong 10^{10}$ SI jednotiek pre potenciál dostaneme $\varphi = Q/(4\pi\varepsilon_o\, r) = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{10}\cdot 10^{10} = 16$ V.

Príklad 6.1.5.3 Vypočítajte absolútny potenciál v bode B na osi kruhového kotúča (polomer R, náboj na kotúči Q), vo vzdialenosti b od roviny kotúča.
Riešenie Treba použiť vzorec (6.1.5.5).



Obr. 6.1.5.2

Kotúč rozdelíme na malé medzikružia s polomermi y a šírkou dy, takže ich elementárna plôška má obsah d$S = 2\pi y$ dy. Náboj dQ pripadajúci na medzikružie vypočítame ako súčin plošnej hustoty náboja $\sigma = Q / \pi R^2$ a plošného obsahu medzikružia:

$$\mathrm{d}Q = \sigma\, 2\pi y\,\mathrm{d}y = \frac{Q}{\pi R^2}\, 2\pi y\,\mathrm{d}y = \frac{2Q}{R^2}\, y\,\mathrm{d}y$$

čo dosadíme do integrálu:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{\mathrm{d}Q}{r} = \frac{2Q}{R^2}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^R\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+b^2}}\,.$$

Integrál sa rieši substitúciou $y^2 + b^2 = z^2$, z ktorej vyplýva rovnosť y dy $= z$ dz . Po dosadení do integrálu získame:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{2Q}{R^2}\int_b^{\sqrt{b^2+R^2}}\frac{z\,\mathrm{d}z}{z} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o R^2}(\sqrt{b^2+R^2} - b) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(\sqrt{b^2+R^2} - b)$$

Príklad 6.1.5.4 Vypočítajte, aký je rozdiel potenciálov medzi bodmi A, B vzdialenými od bodového náboja Q = 1 nC o 1 m, resp. 2 m !

Riešenie $\varphi_B - \varphi_A = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_B} - \dfrac{1}{r_A}\right) \cong 10^{10}10^{-9}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1}\right) = -5\ \text{V}$. Bod B je vzdialenejší, je v ňom menší potenciál ako v bode A, preto je rozdiel potenciálov záporný.

Príklad 6.1.5.5 Vypočítajte akú rýchlosť nadobudne elektrón, ktorý bol pôvodne v pokoji, keď prekoná rozdiel potenciálov U = 100 V !
Riešenie Prekonaním rozdielu potenciálov U jeho potenciálna energia sa zmení o eU. Úbytok potenciálnej energie sa prejaví prírastkom kinetickej energie W_k. Ak na začiatku mal elektrón kinetickú energiu nulovú, po prechode rozdielom potenciálov nadobudne kinetickú energiu $W_k = (1/2)mv^2$, ktorej veľkosť sa rovná $(1/2)mv^2 = |eU|$. Odtiaľ $v = (2|eU| / m)^{1/2}$.

Kontrolné otázky

1. *Ako je definovaný potenciál v elektrostatickom poli?*
2. *Čo je to absolútny potenciál?*
3. *Aká je jednotka elektrického potenciálu?*
4. *Ako vyzerá vzorec absolútneho potenciálu v okolí bodového náboja?*
5. *Ako sa počíta potenciál v poli vytvorenom viacerými bodovými nábojmi?*
6. *Ako sa počíta potenciál v okolí nábojov spojite rozložených na vlákne?*
7. *Čo je to ekvipotenciálna plocha?*

6.1.6 Vzťah medzi intenzitou a potenciálom

Intenzita a potenciál sú najdôležitejšie veličiny, ktorými sa charakterizuje elektrostatické pole. Tým, že opisujú to isté pole dá sa predpokladať, že jestvuje medzi nimi matematický vzťah. Východiskom pri hľadaní tejto súvislosti sú definičné vzťahy intenzity a potenciálu

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}, \quad \varphi = \frac{W_p}{q}, \tag{6.1.6.1}$$

ale najmä vzorec vyjadrujúci súvislosť práce elektrickej sily $\boldsymbol{F}$ v elektrostatickom poli a zmeny potenciálnej energie náboja q pri jeho premiestnení:

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -[W_p(\mathrm{B}) - W_p(\mathrm{A})] \tag{6.1.6.2}$$

Keď túto rovnicu vydelíme nábojom q, a využijeme definičné vzťahy (6.1.6.1), dostaneme upravenú rovnicu

$$\int_A^B \frac{\boldsymbol{F}}{q}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\left[\frac{W_p(\mathrm{B})}{q} - \frac{W_p(\mathrm{A})}{q}\right] \Rightarrow \int_{\mathrm{A}}^{B} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -[\varphi(\mathrm{B}) - \varphi(\mathrm{A})],$$

alebo:

$$\varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{6.1.6.3}$$

Tento vzťah sa využíva na výpočet rozdielu potenciálov (elektrického napätia) medzi dvomi bodmi, ak poznáme ako vektor $\boldsymbol{E}$ závisí od polohy v priestore, t.j. ak poznáme závislosť $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$.

Intenzita $\boldsymbol{E}$ je vektorová veličina, jej výpočet pri známom rozložení nábojov je vo všeobecnosti komplikovanejší ako výpočet potenciálu. Preto je užitočný aj opačný vzťah medzi intenzitou a potenciálom, umožňujúci vypočítať intenzitu, ak poznáme potenciál ako funkciu polohy. V tomto prípade použijeme ako východisko vzorec (6.1.6.3), ale prepísaný pre diferenciál potenciálu (pritom využijeme zápis $\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$):

$$\mathrm{d}\varphi = -\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -(E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y + E_z\mathrm{d}z) \tag{6.1.6.4}$$

Ak zhodou okolností intenzita E má zložku iba v smere osi x, pravá strana vzťahu sa zjednoduší, z čoho získame vzťah pre súradnicu E_x a príslušnú zložku:

$$\mathrm{d}\varphi = -E_x\,\mathrm{d}x \Rightarrow E_x = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \Rightarrow E_x\boldsymbol{i} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{i}. \tag{6.1.6.5}$$

Z uvedeného možno usúdiť, že ak vektor E má zložku iba v smere osi x, potom potenciál φ závisí iba od tejto súradnice. Vo všeobecnosti však potenciál závisí od všetkých troch priestorových súradníc, t.j. $\varphi = \varphi(x,y,z)$. Intenzita vtedy má aj ďalšie zložky, pričom pre jej súradnice platia vzťahy:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{6.1.6.6}$$

v ktorých vystupujú parciálne derivácie, lebo potenciál je funkciou troch premenných. K rovniciam (6.1.6.6) na pravé i ľavé strany pripíšeme príslušné jednotkové vektory a sčítame ich

$$E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \tag{6.1.6.7}$$

Ľavá strana rovnice predstavuje vektor intenzity $\boldsymbol{E}$, pravú upravíme tak, že potenciál formálne vyberieme za zátvorku:

$$\left(i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j\frac{\partial\varphi}{\partial y} + k\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z) \quad , \tag{6.1.6.8}$$

kde symbol

$$\nabla \equiv \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{6.1.6.9}$$

má úlohu operátora pôsobiaceho na potenciál. Má názov ***nabla operátor***. V tomto prípade sa aplikuje na skalárnu funkciu troch priestorových súradníc a výsledkom aplikácie je vektorová funkcia E (až na znamienko !). Tento spôsob aplikácie má názov ***gradient***, skratka ***grad*** (viď paragraf 1.3.4 v kapitole o vektoroch). Podľa toho sa vzťah medzi intenzitou a potenciálom zapisuje v stručnom tvare

$$E = -\,\mathrm{grad}\,\varphi = -\nabla\varphi \tag{6.1.6.10}$$

Vzťahy (6.1.6.3) a (6.1.6.10) vyjadrujú súvislosť medzi intenzitou a potenciálom v elektrickom poli a často sa využívajú pri výpočtoch.

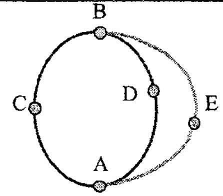
Poznámka Operátor nabla sa používa aj pri operáciách s vektorovými funkciami, kde sú zavedené operácie s názvami divergencia a rotácia. Podrobnosti o nich možno nájsť v kapitole 1.3.5 o vektorovom počte.

Zo vzorca (6.1.6.4) vyplýva, že ak sa posunieme kolmo na vektor intenzity elektrického poľa, t.j vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ je kolmý na vektor intenzity $\boldsymbol{E}$, zmena potenciálu $\mathrm{d}\varphi$ je nulová, lebo skalárny súčin $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sa rovná nule.To znamená, že ak sa posunieme kolmo na vektor intenzity, posunieme sa po ekvipotenciálnej ploche. Preto vektor intenzity je v každom bode elektrostatického poľa kolmý na ekvipotenciálnu plochu.

Významnou vlastnosťou elektrostatického poľa je, že integrál zo vzorca (6.1.6.3) nezávisí od tvaru krivky medzi bodmi A a B, po ktorej sa integruje, ale iba od polohy začiatočného a koncového bodu. Ak integrujeme po uzavretej krivke, t.j. vrátime sa do východiskového bodu, východiskový a koncový bod sú totožné, potom rozdiel potenciálov φ_B - φ_A počítaný pomocou vzorca (6.1.6.3) musí byť nulový:

$$\varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \Rightarrow \quad \varphi_A - \varphi_A = -\int_A^A \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \tag{6.1.6.11}$$

(Krúžok na integráli znamená, že sa integruje po uzavretej krivke.) Na obrázku sú znázornené dve z množstva možností integrovať po uzavretej krivke.



Obr.6.1.6.1

Integrál po uzavretej krivke, keď začiatočným aj koncovým bodom je bod A, možno uskutočniť postupne prechádzajúc bodmi ADBCA, alebo AEBCA. V oboch prípadoch výsledok integrácie je nulový. Integrály po dvoch rôznych uzavretých krivkách rozdelíme na dve časti, ktorých súčet je tiež nulový:

$$\oint_{ADBCA} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{AD}^{B} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{BC}^{A} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \quad\Rightarrow\quad \int_{AD}^{B} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{BC}^{A} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\oint_{AEBCA} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{AE}^{B} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{BC}^{A} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \quad\Rightarrow\quad \int_{AE}^{B} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{BC}^{A} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Z porovnania rovníc vyplýva rovnosť integrálov

$$\int_{AE}^{B} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{AD}^{B} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

ktorá dokumentuje nezávislosť integrácie od tvaru krivky (integračnej cesty). O fyzikálnom poli, ktoré má takúto vlastnosť sa hovorí, že je to *konzervatívne pole*. To napríklad znamená, že opakovaným pohybom nabitej častice po uzavretej krivke v elektrostatickom poli - iba pod účinkom síl tohto poľa - častica nezískava, ani nestráca energiu, ale zachová si (konzervuje) jej pôvodnú hodnotu.

Príklad 6.1.6.1 Overte si platnosť vzťahu $\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$ (vzorec (6.1.6.10)) na prípade intenzity a potenciálu v okolí bodového elektrického náboja.
Riešenie Potenciál v okolí bodového náboja prepíšeme do tvaru, v ktorom explicitne vyjadríme závislosť potenciálu od priestorových súradníc ($1/4\pi\varepsilon_o = K$) :

$\varphi = K\dfrac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = KQ(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$. Gradient budeme počítať postupne, najprv vypočítame parciálnu deriváciu potenciálu podľa premennej y :

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = KQ(-1/2)2y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = -KQ\dfrac{y}{r^3}$. Podobne vypočítame ďalšie dve parciálne derivácie, pridáme k nim príslušné jednotkové vektory a sčítame.Tak dostaneme:

$-\,\mathrm{grad}\,\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q}{r^3}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q}{r^3}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{E}$, čo je vzorec pre intenzitu v okolí bodového náboja.

Príklad 6.1.6.2 V príklade 6.1.5.3 je vypočítaný potenciál na osi kruhového kotúča, ktorý má polomer R a je na ňom rovnomerne rozložený náboj Q. Na základe známeho výsledku vypočítajte intenzitu $\boldsymbol{E}$ na osi kotúča, ako gradient potenciálu.

Riešenie Pre potenciál na osi kotúča platí vzťah $\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{b^2+R^2} - b)$, kde σ je plošná hustota náboja na kotúči a b vzdialenosť od roviny kotúča. Vzdialenosť b treba v tomto prípade chápať ako premennú, zmeniť jej označenie napr. na x a potom počítať gradient potenciálu. Na osi kotúča má vektor $\boldsymbol{E}$ zložku rovnobežnú iba s touto osou , (podľa označenia s osou x) . Preto výpočet gradientu sa obmedzí na deriváciu iba podľa tejto jednej premennej:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[2x\frac{1}{2}(x^2+R^2)^{-1/2} - 1\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - 1\right] \Rightarrow \boldsymbol{E} = -\frac{\sigma \boldsymbol{i}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - 1\right]$$

Výraz v hranatej zátvorke je menší ako nula, preto vektor $\boldsymbol{E}$ je súhlasne rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{i}$, ak plošná hustota náboja $\sigma > 0$.

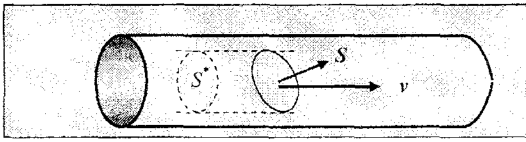
Poznámka Ak polomer kotúča R sa zväčší natoľko, že vzdialenosť x bude v porovnaní s ním zanedbateľná, pre veľkosť intenzity v okolí takejto prakticky nekonečne veľkej platne platí vzorec $E = \sigma/2\varepsilon_0$. To znamená, že veľkosť intenzity nezávisí od vzdialenosti od platne.

Kontrolné otázky

1. *Ako vyzerá vzťah, pomocou koréha možno vypočítať intenzitu zo známej závislosti potencálu od priestorových súradníc?*
2. *Ako vyzerá vzťah, ktorým vypočítame rozdiel potenciálov, ak poznáme závislosť intenzity od priestorových súradníc?*
3. *Čo je nabla operátor a aký má tvar?*
4. *Pri ktorých operáciách s vektorovými funkciami sa používa nabla operátor?*
5. *V akom geometrickom vzťahu je vektor intenzity s ekvipotenciálnymi plochami?*
6. *Čím sa vyznačuje konzervatívne fyzikálne pole?*

6.1.7 Gaussov zákon (Gaussova veta)

Obsah Gaussovho zákona (v nemeckej i našej literatúre sa používal názov **Gaussova veta**) sa týka veličiny, ktorá sa nazýva ***tok intenzity elektrického poľa.*** Tento názov je odvodený od názvu prietok, používaného v hydromechanike. Objem kvapaliny pohybujúcej sa rýchlosťou v , ktorý pretečie za jednotku času plôškou s obsahom S postavenou kolmo na smer prúdenia, sa rovná súčinu vS . Možno sa o tom presvedčiť napríklad z rozmeru tohto súčinu, ktorý je $(\mathrm{m/s})\cdot\mathrm{m}^2 = \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. Ak plôška nie je na smer prúdenia, t.j. na vektor rýchlosti postavená kolmo, treba vziať do úvahy jej priemet S^* do roviny kolmej na vektor rýchlosti. Priemet sa počíta prostredníctvom funkcie kosínus, čo nakoniec vedie na skalárny súčin vektora rýchlosti $\boldsymbol{v}$ s vektorom $\boldsymbol{S}$, ktorý je na plôšku kolmý:



Obr. 6.1.7.1

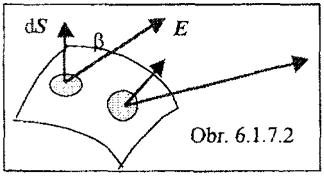
$$S^* = S\cos\beta\,, \quad \text{takže} \quad vS^* = vS\cos\beta = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}$$

(6.1.7.1)

V Gaussovom zákone ide o tok vektora intenzity $\boldsymbol{E}$, ktorý treba vo všeobecnosti vyjadriť integrálom, lebo v rôznych miestach elektrostatického poľa môže mať vektor $\boldsymbol{E}$ rôzny smer i veľkosť (obr. 6.1.7.2):

$$T = \iint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint E\,\mathrm{d}S\cos\beta\ ,$$

kde β je uhol, ktorý zvierajú vektory $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je na elementárnu plôšku kolmý a veľkosťou predstavuje jej plošný obsah. V Gaussovom zákone ide o tok intenzity cez uzavretú plochu, pričom je všeobecne zaužívané, že vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ smeruje z vnútornej strany plochy von.



Obr. 6.1.7.2

Podľa Gaussovho zákona sa tok intenzity cez uzavretú plochu rovná súčtu všetkých elektrických nábojov nachádzajúcich sa v objeme ohraničenom uzavretou plochou, vydelenému elektrickou konštantou ε_0. Jeho matematická formulácia:

$$T = \oint\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i\ .$$

(6.1.7.2)

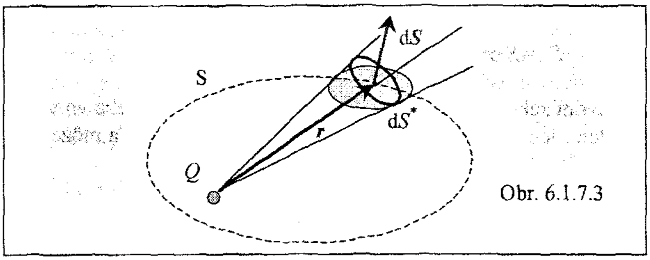
Pritom treba zdôrazniť, že do súčtu treba zahrnúť nie iba veľkosti nábojov, ale aj ich znamienka. Pritom nie je dôležitý ani pôvod nábojov, či boli prinesené zvonku, alebo či sú súčasťou prostredia, napríklad náboje dielektrika. Z toho vyplýva, že keby v objeme ohraničenom plochou sa nachádzali dva rovnako veľké náboje, ale s opačnými znamienkami, tok intenzity T cez uzavretú plochu by sa rovnal nule.

Gaussov zákon odvodíme najprv pre prípad, keď plochou S je uzavretý jediný bodový náboj Q. V okolí tohto náboja je pole s intenzitou $\boldsymbol{E}_Q = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^3}\boldsymbol{r}$, ktorú treba dosadiť do integrálu:

$$T = \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E}_Q \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint\!\!\!\oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint_S \frac{r\,\mathrm{d}S\cos\beta}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint \frac{\mathrm{d}S^*}{r^2}$$

(6.1.7.3)

Elementárna plôška $\mathrm{d}S^*$ je priemetom plôšky $\mathrm{d}S$, do roviny kolmej na polohový vektor $\boldsymbol{r}$, začínajúci v bodovom náboji Q.



Obr. 6.1.7.3

Kuželová plocha s vrcholom v náboji Q a obopínajúca plôšku $\mathrm{d}S^*$ vytvára elementárny priestorový uhol $\mathrm{d}\Omega$ (pozri dodatok D1), pre ktorý platí $\mathrm{d}S^* = r^2\,\mathrm{d}\Omega$, čo dosadíme do posledného integrálu vo vzťahu (6.1.7.3) :

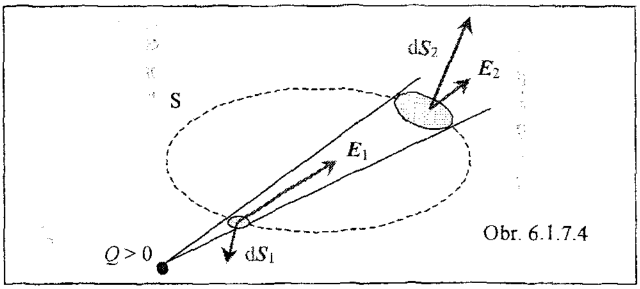
$$T = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint \frac{\mathrm{d}S^*}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint \frac{r^2\,\mathrm{d}\Omega}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint \mathrm{d}\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

(6.1.7.4)

čím je Gaussov zákon dokázaný.

Ak sa v priestore ohraničenom uzavretou plochou nachádza viac bodových nábojov, výsledná intenzita v ľubovoľnom bode plochy sa v súlade so vzorcom (6.1.3.3) vypočíta ako vektorový súčet intenzít vyvolaných jednotlivými nábojmi, a každá z nich prispieva do úhrnného toku svojim príspevkom Q_i/ε_0. Preto sa úhrnný tok intenzity cez uzavretú plochu rovná pravej strane rovnice (6.1.7.2).

Elektrický náboj ležiaci mimo uzavretej plochy, k toku T neprispieva. Keď z takého náboja vedieme myslený kužel, ktorý pretína obe strany uzavretej plochy, na jednej strane je príspevok k toku kladný, na druhej záporný. Ako vidno z obrázku, vektory $\boldsymbol{E}_1$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$ zvierajú tupý uhol,

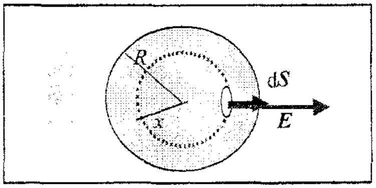


Obr. 6.1.7.4

takže ich skalárny súčin je záporný, ale na druhej strane plochy S vektory $\mathbf{E}_2$ a $d\mathbf{S}_2$ zvierajú ostrý uhol a ich skalárny súčin je kladný. Pritom veľkosť vektora intenzity klesá s druhou mocninou vzdialenosti od náboja, ale veľkosť priemetov $dS^* = r^2\, d\Omega$ sa s druhou mocninou vzdialenosti zväčšuje. Preto $\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = 0$.

Gaussov zákon sa s výhodou využíva na výpočet veľkosti intenzity elektrického poľa v okolí telies s jednoduchou symetriou.

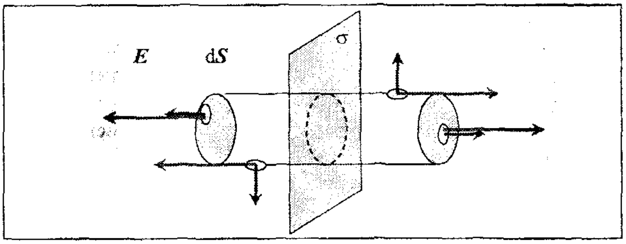
Príklad 6.1.7.1 Pomocou Gaussovho zákona vypočítajte intenzitu vo vnútri a mimo homogénne nabitej gule, ktorej polomer je R a celkový náboj $Q > 0$.
Riešenie Je vhodné najprv vypočítať objemovú hustotu náboja $\rho = Q/((4/3)\pi R^3)$. Potom budeme počítať intenzitu vo vnútri gule, vo vzdialenosti $x < R$ od stredu gule.



Ide o prípad s guľovou symetriou, preto môžeme predpokladať, že vektor $\mathbf{E}$ má v ktoromkoľvek bode vnútri v guli (ale aj mimo nej) smer od stredu gule, rovnobežný s vektorom $d\mathbf{S}$. Preto skalárny súčin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS$ a integrál cez celú guľu s polomerom x sa rovná $E\, 4\pi x^2$. Na pravej strane Gaussovho zákona (6.1.7.2) môže byť iba náboj nachádzajúci sa v guli s polomerom x, náboje mimo tejto gule k toku T neprispievajú. Preto pravá strana rovnice je $(1/\varepsilon_0)\, \rho (4/3)\, \pi x^3$. Porovnaním ľavej a pravej strany Gaussovho zákona dostaneme pre veľkosť intenzity výsledok $E = (1/4\pi\varepsilon_0)(Q/R^3)x$. Intenzita vnútri v guli rastie s prvou mocninou vzdialenosti (lineárne). Mimo gule, keď $x > R$, výpočet ľavej strany Gaussovho zákona zostane nezmenený, t.j. $E\, 4\pi x^2$, ale v guli s takýmto polomerom bude už celý náboj gule, t.j pravá strana sa rovná $(1/\varepsilon_0)Q$. Porovnaním dostaneme $E = (1/4\pi\varepsilon_0)\,(Q/x^2)$, čo je výsledok rovnaký, ako keby všetok náboj Q bol sústredený v strede gule.

Poznámka Ak je elektrický náboj rozložený guľovo symetricky - pritom objemová hustota náboja nemusí byť konštantná, ale môže sa meniť so vzdialenosťou od stredu gule, tak aj potom mimo priestoru v ktorom sa náboj nachádza, je intenzita elektrostatického poľa rovnaká, ako keby všetok náboj bol sústredený v strede gule.

Príklad 6.1.7.2 Pomocou Gaussovho zákona vypočítajte intenzitu v okolí veľmi veľkej platne (nekonečne veľkej) nabitej plošnou hustotou kladného náboja σ .
Riešenie Výpočet intenzity pomocou Gausovho zákona vyžaduje vhodnú voľbu uzavretej plochy, zodpovedajúcu symetrii problému. V tomto prípade je vhodné na časti plochy umiestniť valcovú plochu s dvomi základňami - podľa obrázku, takže uzavretú plochu tvoria dve základne plus plášť valca. Zo symetrie vyplýva, že intenzita $\mathbf{E}$ je všade kolmá na rovinu veľkej plochy.



Preto v každom bode plášťa valca je kolmá na vektory $d\mathbf{S}$, a ich skalárny súčin sa rovná nule. Intenzita má smer rovnobežný s povrchovými priamkami valcovej plochy, neprechádza cez plášť, preto príspevok plášťa k toku cez uzavretú plochu je nulový. Na základniach sú vektory $\mathbf{E}$ a $d\mathbf{S}$ rovnobežné, intenzita má v každom bode základne rovnakú veľkosť (čo zase vyplýva zo symetrie), preto plošný integrál z ľavej strany Gaussovho zákona sa jednoducho vypočíta:

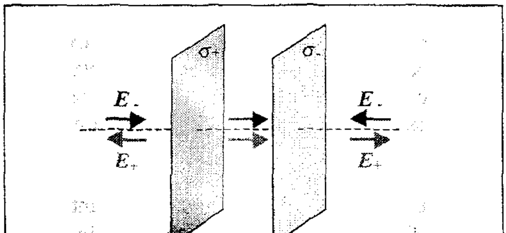
$$\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{Plast} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{Z1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{Z2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 0 + ES + ES = 2ES,$$

kde S je plošný obsah jednej základne, rovnako ako aj plochy vo valci, na ktorom je náboj s plošnou hustotou σ. Preto náboj uzavretý vo valcovej ploche má veľkosť σS, čo treba dosadiť do Gaussovho zákona: $2ES = (1/\varepsilon_o)\sigma S$. Odtiaľ získame veľkosť intenzity v mieste základní - $E = \sigma/(2\varepsilon_o)$

Poznámka Z príkladu vyplýva veľmi významný výsledok, že veľkosť intenzity v okolí veľmi veľkej platne nezávisí od vzdialenosti od platne. Porovnajte tento výsledok s výsledkom príkladu 6.1.6.2 .

Príklad 6.1.7.3 Vypočítajte intenzitu elektrického poľa medzi dvomi veľkými rovnobežnými platňami nabitými plošnými hustotami náboja σ_+ a σ_-, pričom hustoty v absolútnej hodnote sú rovnaké. Medzi platňami je vákuum.

Riešenie Podľa výsledku príkladu 6.1.7.2 , intenzita v okolí jednej platne je $\sigma/(2\varepsilon_o)$. Ako vidno z nasledujúceho obrázku, intenzity medzi platňami sa sčítajú, ale mimo platní sa navzájom rušia. Preto intenzita medzi platňami je $E = \sigma/\varepsilon_o$.



Kontrolné otázky

1. *Čo rozumieme pod tokom intenzity elektrického poľa?*
2. *Čo hovorí Gaussov zákon a ako vyzerá jeho matematická formulácia?*
3. *Prispievajú náboje ležiace mimo uzavretej plochy k toku T ?*
4. *Aká je závislosť intenzity elektrického poľa od vzdialenosti od veľmi veľkej nabitej platne?*
5. *Ak by sme počítali tok intenzity iba cez polovicu uzavretej plochy - dostali by sme aj na pravej strane rovnice iba polovičnú hodnotu súčtu nábojov?*

6.1.8 Gaussov zákon v diferenciálnom tvare

Gaussov zákon uvedený v predchádzajúcom paragrafe je formulovaný ako integrál cez uzavretú plochu. Týka sa teda konečnej oblasti priestoru a vyjadruje tok intenzity elektrického poľa cez uzavretú plochu pomocou nábojov, ktoré sa nachádzajú v objeme ohraničenom touto plochou. Preto očakávame, že jestvuje súvis medzi týmito veličinami aj v každom bode uvažovaného objemu. Na zistenie tejto súvislosti treba integrálnu formuláciu Gaussovej vety premeniť na formuláciu týkajúcu sa jednotlivých bodov objemu.

Podľa Gaussovho zákona v integrálnom tvare platí

$$T = \oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i \ . \qquad (6.1.8.1)$$

Postupne upravíme ľavú aj pravú stranu rovnice. Ľavú stranu upravíme podľa Gaussovej integrálnej vety (pozri kapitolu 1.4.3 o vektoroch) o zámene plošného integrálu cez uzavretú plochu na objemový integrál cez objem ohraničený touto plochou:

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\tau \ . \qquad (6.1.8.2)$$

Pravú stranu Gaussovho zákona upravíme do integrálnej formy, t.j. predpokladáme, že náboj je v priestore spojite rozložený:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(x,y,z) \, \mathrm{d}\tau \qquad (6.1.8.3)$$

kde $\rho(x,y,z)$ je objemová hustota náboja (voľného i viazaného) a $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ element objemu. Po dosadení upravených výrazov do Gaussovho zákona dostaneme rovnicu

$$\iiint_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, \mathrm{d}\tau \ . \qquad (6.1.8.4)$$

Na ľavej i na pravej strane rovnice sa integruje cez rovnaký objem, ohraničený pôvodnou uzavretou plochou. Gaussov zákon (6.1.8.1) platí pre akúkoľvek zvolenú ohraničenú plochu, čo znamená, že rovnica (6.1.8.4) platí pri ľubovoľných hraniciach premenných x, y, z v objemových integráloch. Za takýchto okolností možno rovnicu (6.1.8.4) splniť iba tak, keď funkcie pod integrálmi na ľavej a pravej strane rovnice sa sebe rovnajú. To znamená, že závislosť funkcií div $\boldsymbol{E}$ (x,y,z) a $\rho(x,y,z)$ od priestorových súradníc je rovnaká, takže sa sebe rovnajú v každom bode elektrostatického poľa :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x,y,z)$$

(6.1.8.5)

Tým sme získali vzťah, ktorý budeme nazývať *Gaussov zákon v diferenciálnom tvare*. Svojím tvarom i obsahom sa už približuje prvej Maxwellovej rovnici.

Intenzitu elektrického poľa v Gaussovom zákone v diferenciálnom tvare možno vyjadriť pomocou potenciálu, ako $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, čím dostaneme rovnicu

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -(1/\varepsilon_o)\rho \,.$$

(6.1.8.6)

Po explicitnom vyjadrení výrazu div grad φ

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = (\nabla \cdot \nabla)\varphi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi =$$
$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi$$

dáme rovnici (6.1.8.6) konečný tvar

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x,y,z) = -\frac{1}{\varepsilon_o} \rho(x,y,z)$$

(6.1.8.7)

čo je *Poissonova diferenciálna rovnica* pre potenciál elektrického poľa. V priestore mimo elektrického náboja, teda tam kde $\rho(x,y,z) = 0$, potenciál φ musí vyhovovať *Laplaceovej diferenciálnej rovnici* :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x,y,z) = 0$$

(6.1.8.8)

Laplaceova rovnica sa využíva pri hľadaní tvaru ekvipotenciálnych plôch, a tým aj siločiar v elektrostatických poliach vytváraných zdrojmi rôznych tvarov.

Kontrolné otázky

1. *Aký je rozdiel medzi integrálnym a diferenciálnym tvarom Gaussovej vety?*
2. *Aký je vzťah medzi plošným integrálom cez uzavretú plochu a objemovým integrálom cez objem ohraničený touto plochou?*
3. *Ako je sformulovaná Gaussova veta v diferenciálnom tvare?*
4. *Aký tvar má Poissonova diferenciálna rovnica?*
5. *Ako sa s Poissonovej rovnice získa Laplaceova diferenciálna rovnica a načo slúži?*

6.2 Elektrický dipól

Kľúčové slová

Elektrický dipól, moment elektrického dipólu, elektrický moment sústavy elektrických nábojov, dipól vo vonkajšom elektrickom poli, moment sily pôsobiaci na dipól, potenciálna energia elektrického dipólu, vektor elektrickej polarizácie

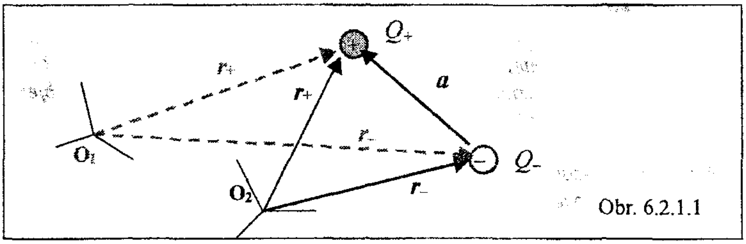
6.2.1 Elektrický moment dipólu a sústavy elektrických nábojov

Elektrický dipól (ďalej len dipól) je dvojica vzájomne viazaných elektrických nábojov, čo do veľkosti rovnakých, ale s opačnými znamienkami. Je to v prírode veľmi rozšírený objekt, vyskytuje sa prakticky v každej látke. Aj molekula vody predstavuje elektrický dipól. V ďalších úvahách budeme náboje vytvárajúce dipól považovať za bodové, čo zjednoduší opis elektrických vlastností dipólu, ako aj opis vplyvu vonkajšieho elektrostatického poľa na dipól.

Kvantitatívny opis vlastností dipólu, napríklad elektrického poľa ktoré vytvára, si vyžaduje zaviesť veličinu, ktorá by dipól vhodne charakterizovala. Na tento cieľ sa zavádza ***elektrický moment dipólu*** (tiež ***moment elektrického dipólu***), vektorová veličina, definovaná vzťahom

$$\boldsymbol{p} = Q_+\boldsymbol{r}_+ + Q_-\boldsymbol{r}_- \tag{6.2.1.1}$$

pričom značky Q_+ a Q_- predstavujú kladný a záporný náboj tvoriace elektrický dipól ($Q_- = - Q_+$), $\boldsymbol{r}_+$ a $\boldsymbol{r}_-$ polohové vektory týchto nábojov. Ako vidno z obrázku, vzorec (6.2.1.1) možno upraviť:



Obr. 6.2.1.1

$$p = Q_+ \, r_+ + Q_- \, r_- = Q_+ (r_+ - r_-) = Q_+ \, a \,,$$

takže elektrický moment dipólu sa vyjadruje vzťahom

$$p = Q_+ \, a \; . \tag{6.2.1.2}$$

Pri úprave sme využili vzťah $Q_- = - Q_+$, ako aj vzťah $a = r_+ - r_-$. Ako vidno z obrázku, i zo vzťahu (6.2.1.2), elektrický moment dipólu je vo všetkých vzťažných sústavách rovnaký, lebo vektor a nezávisí od voľby polohy začiatku súradnicovej sústavy. Treba si zvlášť všimnúť, že vektor a má začiatok v zápornom náboji.

Elektrický moment dipólu je špeciálnym prípadom ***elektrického momentu M_e sústavy nábojov***, ktorý definujeme vzťahom

$$M_e = \sum_i Q_i \, r_i \;, \tag{6.2.1.3}$$

pričom označenie je v súlade s označením vo vzorci (6.2.1.2), t.j. r_i je polohový vektor bodového náboja Q_i. Ak dosadíme do vzorca (6.2.1.3) náboje $Q_1 = Q_+$ a $Q_2 = Q_-$, dostaneme elektrický moment dipólu p.

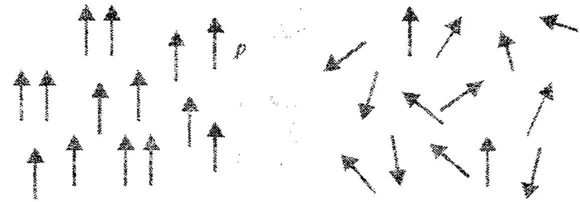
Jednotkou elektrického momentu v sústave SI je C·m .

Významnou veličinou pri opise elektrického poľa v prostredí skladajúceho sa z väčšieho počtu dipólov, je ***elektrický moment sústavy dipólov***. Možno ho vypočítať vychádzajúc zo vzorca (6.2.1.3) :

$$M_e = \sum_i Q_i \, r_i = (Q_{1+} \, r_{1+} + Q_{1-} \, r_{1-}) \; + \; (Q_{2+} \, r_{2+} + Q_{2-} \, r_{2-}) + \ldots = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = \sum_i p_i \tag{6.2.1.4}$$

Výsledný elektrický moment sústavy dipólov sa teda rovná vektorovému súčtu elektrických momentov dipólov.

Veľkosť výsledného elektrického momentu závisí nie iba od celkového počtu dipólov, ale aj od ich vzájomnej orientácie, či sú usporiadané pravidelne, alebo náhodne (na obrázku 6.2.1.2 sú dipóly vyznačené šípkami). Preto z hľadiska možnosti



Obr. 6.2.1.2

opísať usporiadanosť množiny dipólov sa zavádza ďalšia vektorová veličina - *elektrická polarizácia*, s medzinárodne používanou značkou $\boldsymbol{P}$. Názov veličiny súvisí s tým, že sa používa predovšetkým v súvislosti s elektrickou polarizáciou látok, najmä dielektrík. Je to elektrický moment sústavy dipólov pripadajúci na jednotku objemu a zavádza sa vzťahom

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\boldsymbol{M}_e}{\Delta\tau},$$

(6.2.1.5)

kde $\Delta\tau$ predstavuje malý objem, v ktorom sa vektorovo sčitujú elektrické momenty dipólov. Limitu treba v tomto prípade chápať odlišne ako v matematike. Objem $\Delta\tau$ nemožno zmenšovať pod rozmery dipólov, dokonca musí obsahovať ešte pomerne veľký počet dipólov. Preto limitu v definícii treba rozumieť nie doslovne vo zvyčajnom matematickom význame, ale skôr symbolicky. Ak sú dipóly v priestore náhodne orientované (obr. 6.2.1.2 vpravo), vektorový súčet ich momentov sa rovná nule, a teda aj $\boldsymbol{P} = 0$.

Jednotkou elektrickej polarizácie je $[P] = (\mathrm{C{\cdot}m})/\mathrm{m}^3 = \mathrm{C{\cdot}m^{-2}}$. Má teda rovnaký rozmer, ako plošná hustota elektrického náboja.

Ak v danom prostredí poznáme elektrickú polarizáciu $\boldsymbol{P}$, potom elektrický moment prislúchajúci objemu $\Delta\tau$ vypočítame pomocou vzorca (6.2.1.5):

$$\boldsymbol{M}_e = \boldsymbol{P}\Delta\tau$$

(6.2.1.6)

Pre elementárne malý objem $\mathrm{d}\tau$ potom platí

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M}_e = \boldsymbol{P}\,\mathrm{d}\tau$$

a elektrický moment konečného objemu získame integráciou

$$\boldsymbol{M}_e = \iiint_{\Delta\tau} \boldsymbol{P}\,\mathrm{d}\tau\ .$$

(6.2.1.7)

Predpokladajme, že dipóly sú dokonale usporiadané, ako na obr. 6.2.1.2 vľavo. Elektrický moment N dipólov, vzhľadom na ich dokonalú usporiadanosť, môžeme napísať ako N-násobok elektrického momentu jedného dipólu:

$$\boldsymbol{M}_e = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = N\,\boldsymbol{p}_1 = N\,q_+\,\boldsymbol{a}\ .$$

(6.2.1.8)

Keď takto vypočítaný elektrický moment vydelíme objemom $\Delta\tau$, v ktorom je týchto N dipólov rozmiestnených, dostaneme ďalšie vyjadrenie vektora elektrickej polarizácie $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} \approx \frac{Nq_+ \boldsymbol{a}}{\Delta\tau} = \rho_+ \boldsymbol{a} \quad , \tag{6.2.1.9}$$

kde $\rho_+ = (Nq_+)/\Delta\tau$ je objemová hustota kladného elektrického náboja v danom objeme.

Príklad 6.2.1.1 Porovnajte veľkosť elektrického momentu dipólu skladajúceho sa z dvoch bodových nábojov veľkosti 1 C navzájom vzdialených 1 m, s elektrickým momentom molekuly vody, kde náboje s veľkosťou rádovo 10^{-19} C sú od seba vzdialené rádovo 10^{-10}m.
Riešenie Veľkosti elektrických momentov $p_{voda} = Q_+a = 10^{-29}$ Cm, $p_{náb} = 1$ Cm. Preto pomer momentov $p_{voda} / p_{náb} = 10^{-29}$.

Príklad 6.2.1.2 Vypočítajte veľkosť elektrického momentu jedného litra vody pre prípad, že dipólové momenty všetkých molekúl sú orientované navzájom rovnobežne.
Riešenie Jeden mól vody obsahuje približne $6{\cdot}10^{23}$ molekúl a má hmotnosť 18 gramov, čo predstavuje objem 18 cm^3. Na jednu molekulu takto pripadá objem $18/(6{\cdot}10^{23}) = 3{\cdot}10^{-23}cm^3$. V jednom litri je teda $(10^3\ cm^3)/(3{\cdot}10^{-23}cm^3) = (1/3)10^{26}$ molekúl. Ak jedna z nich má elektrický moment 10^{-29} Cm (príklad 6.2.1.1), liter vody by mal mať moment $(1/3)10^{-3}$ Cm.

Kontrolné otázky

1. *Čo si predstavujeme pod elektrickým dipólom?*
2. *Ako sa definuje elektrický moment dipólu?*
3. *Ako sa definuje elektrický moment sústavy elektrických nábojov?*
4. *Akú veličinu predstavuje elektrická polarizácia?*
5. *Aká je jednotka elektrického momentu?*
6. *Aká je jednotka elektrickej polarizácie?*

6.2.2 Elektrický potenciál v okolí dipólu

Elektrický dipól vytvára vo svojom okolí elektrostatické pole, ktoré má svoje špecifiká. Opísať ho možno - rovnako ako v prípade jediného bodového náboja - skalárnym potenciálom, alebo vektorovou intenzitou. Jednoduchšie sa počíta potenciál, preto je vhodné začať opis poľa v okolí dipólu elektrickým potenciálom.

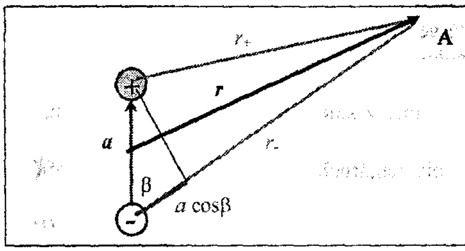
Idealizovaný dipól predstavuje dvojicu bodových nábojov, takže potenciál sa počíta na základe vzorca (6.1.5.4):

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i}{r_i} \ .$$

Keďže pri dipóle ide iba o dva náboje, sumácia pozostáva z dvoch členov, jeden člen predstavuje potenciál budený kladným, druhý záporným nábojom:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_+}{r_+} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_-}{r_-} = \frac{Q_+}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \tag{6.2.2.1}$$

pričom pri úprave sme využili vzťah $Q_- = - Q_+$. Pri ďalšej úprave vzorca, špeciálne výrazu v zátvorkách, využijeme obrázok:



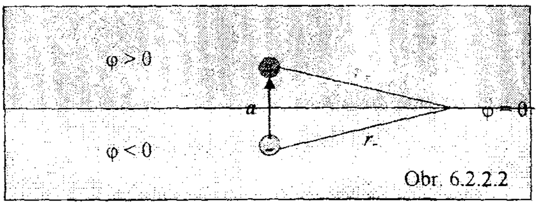
Obr. 6.2.2.1

$$\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{r_- - r_+}{r_+ \cdot r_-} \cong \frac{a\cos\beta}{r^2}$$

Pri úprave sme použili približné vzťahy, ktoré platia tým lepšie, čím väčšia je vzdialenosť bodu A od dipólu. Súčin vzdialeností (r_+ r_-) kladného a záporného náboja od bodu A sme nahradili druhou mocninou veľkosti vektora $\boldsymbol{r}$ a rozdiel vzdialeností (r_- - r_+) sme vyjadrili pomocou vzájomnej vzdialenosti nábojov a vynásobenej kosínusom uhla, ktorý zviera vektor $\boldsymbol{r}$ s vektorom $\boldsymbol{a}$. Upravenú zátvorku dosadíme nazad do vzorca (6.2.2.1) a pokračujeme v jeho úprave:

$$\varphi = \frac{Q_+}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{Q_+}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\beta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q_+ a)\, r\cos\beta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{6.2.2.2}$$

Z výsledného vzorca sa na prvý pohľad zdá, že potenciál sa zmenšuje s treťou mocninou vzdialenosti od dipólu, ale vzdialenosť vo forme polohového vektora je aj v čitateli. V skutočnosti sa potenciál zmenšuje s druhou mocninou vzdialenosti. Klesá teda rýchlejšie ako v okolí samostatného bodového náboja, čo súvisí s čiastočným vzájomným kompenzovaním účinkov kladného a záporného náboja dipólu.



Obr. 6.2.2.2

Podľa vzorca (6.2.2.2) je potenciál nulový vo všetkých bodoch, ktorých polohové vektory $\boldsymbol{r}$ sú kolmé na vektor $\boldsymbol{p}$. Tieto body tvoria rovinu predstavujúcu ekvipotenciálnu plochu s nulovým potenciálom. Je to preto, lebo vzdialenosť do ktoréhokoľvek bodu roviny je od oboch nábojov dipólu rovnaká, takže ich príspevky k potenciálu sa vzájomne kompenzujú. Nad touto rovinou, v polpriestore kde sa nachádza kladný náboj, je potenciál kladný, lebo tam prevládajú účinky kladného náboja. Pod rovinou je potenciál záporný, čo je vyjadrené aj tým, že uhol medzi vektormi $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{r}$ je vtedy tupý a jeho kosínus záporný.

Príklad 6.2.2.1 Porovnajte veľkosti potenciálov v okolí elementárneho elektrického náboja a v okolí dipólu molekuly vody vo vzdialenosti zodpovedajúcej 10^{-8} m, ku ktorej sa približujú rozmery najjemnejších mikroelektronických štruktúr. V prípade molekuly vody počítajte potenciál v smere, kde dosahuje maximálnu hodnotu. (e = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $p_{\text{vody}} \cong 6 \cdot 10^{-30}$ Cm)

Riešenie Potenciál v okolí elementárneho náboja má hodnotu $\varphi_e = (1/4\pi\varepsilon_o)(e/r) \cong 10^{10}(1{,}6 \cdot 10^{-19}/10^{-8}) = 1{,}6 \cdot 10^{-1}\ \text{V} = 0{,}16\ \text{V}$.

Potenciál v okolí molekuly vody $\varphi_{\text{voda}} = (1/4\pi\varepsilon_o)(p/r^2) \cong 10^{10} \cdot 6 \cdot 10^{-30}/10^{-16} = 6 \cdot 10^{-4}$ V $= 0{,}0006$ V.

Kontrolné otázky

1. *S ktorou mocninou vzdialenosti ubúda potenciálu v okolí dipólu?*
2. *V ktorých bodoch v okolí dipólu je potenciál nulový?*
3. *V ktorej časti priestoru je potenciál v okolí dipólu záporný?*

6.2.3 Intenzita v okolí elektrického dipólu

Intenzitu by bolo možné počítať podobne ako potenciál v predošlom paragrafe, t.j. ako vektorový súčet intenzít budených bodovými nábojmi, podľa vzorca (6.1.3.3):

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{Q_+ \boldsymbol{r}_+}{r_+^3} + \frac{Q_- \boldsymbol{r}_-}{r_-^3}\right) \tag{6.2.3.1}$$

Rýchlejšie a schodnejšou cestou vedie k výsledku výpočet intenzity pomocou gradientu potenciálu: $\boldsymbol{E} = -\,\text{grad}\varphi$. Aplikovať operáciu gradient na potenciál znamená derivovať ho parciálne podľa priestorových súradníc. To znamená, že potenciál v okolí dipólu treba prepísať do takého tvaru, v ktorom priestorové súradnice x, y, z explicitne vystupujú. Vzorec na výpočet potenciálu v okolí dipólu má tvar (6.2.2.2) :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{6.2.3.2}$$

Veličiny vystupujúce v tomto vzorci vyjadríme v karteziánskej sústave s jednotkovými vektormi $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= p_x \boldsymbol{i} + p_y \boldsymbol{j} + p_z \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\ r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} &= xp_x + yp_y + zp_z\end{aligned} \qquad (6.2.3.3)$$

Pomocou takto vyjadrených veličín potenciál nadobudne tvar

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(xp_x + yp_y + zp_z)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \qquad (6.2.3.4)$$

Parciálna derivácia potenciálu podľa premennej x je:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[p_x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + (xp_x + yp_y + zp_z)(-\tfrac{3}{2})(2x)(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p_x}{r^3} - \frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}x\right]$$

K výsledku - pravej i ľavej strane - pripíšeme jednotkový vektor $\boldsymbol{i}$, a analogické operácie urobíme aj pri deriváciách podľa premenných y a z. Nakoniec výsledky sčítame, takže pre intenzitu dostaneme vzťah

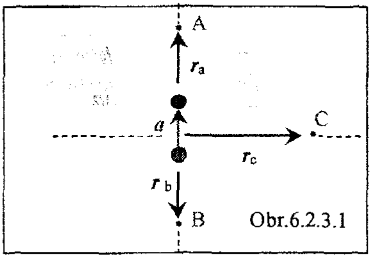
$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) - \frac{p_x\boldsymbol{i} + p_y\boldsymbol{j} + p_z\boldsymbol{k}}{r^3}\right] \qquad (6.2.3.5)$$

a po využití vzťahov (6.2.3.3.) jeho konečnú formu:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right]. \qquad (6.2.3.6)$$

Treba upozorniť, že vzorec (6.2.2.2) pre potenciál bol odvodený aproximatívnym postupom, čo potom platí aj o vzorci (6.2.3.6) pre intenzitu, ktorý bol z neho získaný. Vzorec pre intenzitu, podobne ako pre potenciál je korektný až vo vzdialenostiach, ktoré sú podstane väčšie ako rozmer dipólu.

Vzorec umožňuje vypočítať veľkosť aj smer vektora $\boldsymbol{E}$ v ľubovoľnom bode v okolí dipólu. Jestvujú dve množiny polôh, v ktorých vzorec na výpočet intenzity nadobúda zjednodušený tvar. Ide o tzv. **Gaussove polohy**.



Obr.6.2.3.1

Prvá množina bodov leží na priamke, ktorá je predĺžením spojnice nábojov dipólu (obr. 6.2.3.1). Jeden z takýchto bodov (bod A) má polohový vektor $\boldsymbol{r}_a$ (na obrázku nie je nakreslený celý, mal by začínať v strede dipólu) a je teda rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{a}$, ktorý začína v zápornom a končí v kladnom náboji dipólu. Je teda rovnobežný aj s vektorom $\boldsymbol{p} = Q_+\boldsymbol{a}$. Ak jednotkový vektor $\boldsymbol{j}$ zvolíme tak, aby bol súhlasne rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{a}$, potom možno vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{r}_a$ napísať ako jeho skalárne násobky

$$\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{j} \quad , \boldsymbol{r}_a = r_a\boldsymbol{j}$$

a využiť tento zápis na úpravu vzorca pre intenzitu:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{3(pr)r\boldsymbol{j}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{3r^2(p\boldsymbol{j})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] =$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{3\boldsymbol{p}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}$$

(6.2.3.7)

Z výsledku vidno, že vektor $\boldsymbol{E}$ má v bode A rovnaký smer ako vektor $\boldsymbol{p}$. Navyše z výsledku zretelne vidno, že veľkosť intenzity sa zmenšuje s treťou mocninou vzdialenosti od dipólu, teda rýchlejšie ako v prípade samostatného bodového náboja. Bod A ležiaci v predĺžení vektora $\boldsymbol{a}$ reprezentantuje prvú Gaussovu polohu.

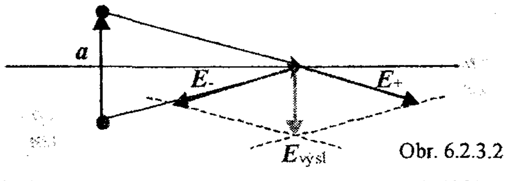
Podobným výpočtom sa možno presvedčiť, že aj v bode B má vektor $\boldsymbol{E}$ rovnaký smer ako vektor $\boldsymbol{p}$, je s ním súhlasne rovnobežný.

Pre bod C, ktorý je reprezentantom druhej Gaussovej polohy platí, že vektor $\boldsymbol{r}_c$ je kolmý na elektrický moment dipólu $\boldsymbol{p}$. Preto ich skalárny súčin vystupujúci v prvej časti vzorca (6.3.2.5) sa rovná nule a vzorec sa opäť zjednoduší:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}$$

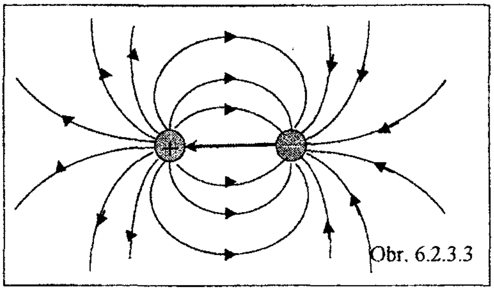
(6.2.3.8)

Opäť sa bezprostredne prejavuje pokles intenzity s treťou mocninou vzdialenosti. V tomto prípade má však vektor $\boldsymbol{E}$ opačný smer ako elektrický moment dipólu $\boldsymbol{p}$. Možno sa o tom presvedčiť aj nakreslením vektorového súčtu intenzít budených kladným a záporným nábojom dipólu.



Obr. 6.2.3.2

Elektrostatické pole v okolí dipólu charakterizujú siločiary, nakreslené na obrázku 6.2.3.3.


Obr. 6.2.3.3

Príklad 6.2.3.1 Porovnajte veľkosť intenzity el. poľa vo vzdialenosti 10^{-8}m vyvolanej elementárnym elektrickým nábojom $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C a dipólom molekuly vody, ktorý má veľkosť približne $p = 6\cdot10^{-30}$ Cm. (Porovnaj s výpočtom potenciálu v príklade 6.2.2.1)

Riešenie Intenzita v okolí elementárneho náboja:
$(1/4\pi\varepsilon_0)(e/r^2) \cong 10^{10}\cdot 1{,}6\cdot10^{-19}/(10^{-16}) = 1{,}6\cdot10^{7}$ V/m, slovom 16 miliónov voltov na meter. Intenzita v okolí molekuly vody - v prvej Gaussovej polohe - má veľkosť:
$(1/2\pi\varepsilon_0)(p/r^3) = 2\cdot10^{10}\cdot6\cdot10^{-30}/10^{-24} = 1{,}2\cdot10^{5}$ V/m.

Príklad 6.2.3.2 Vypočítajte uhol β, ktorý zviera vektor $\boldsymbol{E}$ s vektorom $\boldsymbol{p}$ v bode, do ktorého smeruje polohový vektor $\boldsymbol{r}$ zvierajúci s vektorom $\boldsymbol{p}$ uhol $\gamma = 60°$. Závisí uhol β od veľkosti vektora $\boldsymbol{r}$?

Riešenie Vychádzame zo vzorca na výpočet vektora intenzity $\boldsymbol{E}$ v okolí dipólu. Zvolíme súradnicovú sústavu v rovine s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{j}$ majúcim smer vektora $\boldsymbol{p}$ a vektorom $\boldsymbol{i}$ kolmým naň. Vtedy $\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, r \sin\gamma + \boldsymbol{j}\, r\cos\gamma = \boldsymbol{i}r\,3^{1/2}/2 + \boldsymbol{j}r/2$. Na základe toho $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} = pr/2$. Po dosadení do vzorca pre intenzitu dostaneme

$$\boldsymbol{E} = K\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] = K\left[\frac{3pr/2\,(\boldsymbol{i}r\sqrt{3}/2 + \boldsymbol{j}r/2)}{r^5} - \frac{p\boldsymbol{j}}{r^3}\right] = \boldsymbol{i}\frac{Kp}{r^3}\frac{3\sqrt{3}}{4} + \boldsymbol{j}\frac{Kp}{r^3}\left(\frac{3}{4} - 1\right)$$

Tým sme získali súradnice vektora $\boldsymbol{E}$, ich podielom dostaneme tangens uhla, ktorý hľadáme:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{E_x}{E_y} = \frac{3\sqrt{3}}{4}/(-1/4) = -3\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \beta \cong -79°$$

Kontrolné otázky

1. *Aký je vzorec na výpočet intenzity el. poľa v okolí dipólu?*
2. *Ktoré sú Gaussove polohy v okolí dipólu?*
3. *S ktorou mocninou vzdialenosti od dipólu klesá intenzita el. poľa?*
4. *Môže mať vektor intenzity opačný smer ako elektrický moment dipólu?*
5. *V ktorých miestach je vektor intenzity súhlasne rovnobežný s elektrickým momentom dipólu?*

6.2.4 Dipól v elektrickom poli

Dipól, ako každý iný objekt obsahujúci elektrické náboje, podlieha vplyvu elektrického poľa. Vonkajšie pole, v ktorom sa dipól nachádza, môže byť homogénne, vtedy je intenzita $\boldsymbol{E}$ tohto poľa v každom jeho bode rovnaká. Na kladný náboj dipólu Q_+ pôsobí sila $\boldsymbol{F}_+ = Q_+\boldsymbol{E}$, ktorá má rovnaký smer ako vektor intenzity. V homogénnom poli na záporný náboj dipólu pôsobí rovnako veľká sila, ale s opačným smerom $\boldsymbol{F}_- = Q_-\boldsymbol{E}$. To znamená, že vektorový súčet síl pôsobiacich na dipól sa rovná nule.

V nehomogénnom poli súčet síl nie je nulový a možno ho vyjadriť vzťahom

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{F}_- = Q_+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_+) + Q_-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_-) = Q_+[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_+) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_-)] = Q_+\,\Delta\boldsymbol{E} \tag{6.2.4.1}$$

Zo vzorca vidno, že smer, aj veľkosť výslednej sily sú určené rozdielom $\Delta\boldsymbol{E}$. Ak ďalšiu úpravu vzorca zjednodušíme, a budeme predpokladať že vektory $\boldsymbol{F}$ a $\Delta\boldsymbol{E}$ majú smer osi y, rovnicu (6.2.4.1) môžeme previesť na skalárny tvar:

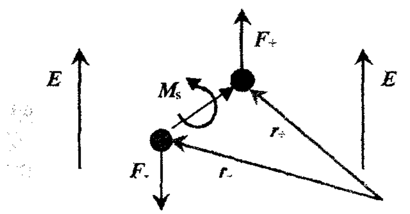
$$F_y = Q_+\,\Delta E_y \quad\Rightarrow\quad F_y = Q_+\frac{\Delta E_y}{\Delta y}\Delta y = Q_+\frac{\Delta E_y}{\Delta y}a$$

kde sme výraz umelo rozšírili o Δy , ktorý sa rovná vzdialenosti a medzi nábojmi dipólu. Preto súčin Q_+a sa rovná veľkosti elektrického momentu dipólu p, takže pre výslednú silu dostaneme v tomto zjednodušenom prípade výraz

$$F_y = p\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}y} \tag{6.2.4.2}$$

Ak by smer vektora $\boldsymbol{p}$ a smer najstrmšej zmeny intenzity neboli navzájom rovnobežné, vzorec (6.2.4.2) by nebol správny. Dôsledný výpočet vedie k výsledku $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{p}\cdot\mathrm{grad}\boldsymbol{E}$, v ktorom grad$\boldsymbol{E}$ je veličina tenzorového charakteru. Tenzorové veličiny sú však už nad rámec tohto textu, preto vzorec nemožno podrobnejšie komentovať.

V nehomogénnom elektrostatickom poli pôsobí na dipól sila, ktorej smer závisí od vzájomnej orientácie elektrického mometu dipólu a smeru najstrmšej zmeny intenzity. Nehomogénne pole má tendenciu dipól posúvať. Homogénne elektrostatické pole dipól neposúva, ale pôsobí naň momentom sily $\boldsymbol{M}_s$, má tendenciu dipól otočiť.



Obr.6.2.4.1

Moment sily vytvára dvojica síl F_+ a F_- , ktorej moment je:

$$M_s = (r_+ \times F_+) + (r_- \times F_-) = (r_+ \times Q_+E_+) + (r_- \times Q_- E_-) = (Q_+r_+ \times E_+) + (Q_-r_- \times E_-) =$$

$$= (Q_+r_+ + Q_-r_-) \times E = Q_+ (r_+ - r_-) \times E = Q_+ a \times E = p \times E \tag{6.2.4.3}$$

Z výsledku vyplýva, že moment dvojice síl je najväčší, keď vektory p a E sú na seba kolmé a je nulový, keď sú rovnobežné. Pokiaľ sú nesúhlasne rovnobežné, stačí malé pootočenie dipólu a dipól sa pod účinkom momentu sily začne otáčať. Stabilnú rovnovážnu polohu nadobudne až vtedy, keď sú vektory p a E súhlasne rovnobežné.

Ak chceme dipól zo stabilnej rovnovážnej polohy pootočiť, musíme naň pôsobiť momentom sily M_v , ktorý účinkuje opačným smerom ako moment M_s . Pri pootočení dipólu moment sily M_v vykoná prácu, takže takže dipól tým získava potenciálnu energiu vo vonkajšom homogénnom elektrostatickom poli. Dodaná práca je mierou zmeny potenciálnej energie dipólu, takže vypočítaním práce pri pootočení z východiskového uhla θ do konečnej polohy ψ dostaneme formulu na výpočet potenciálnej energie.

Pred vykonaním výpočtu treba zaviesť vhodné označenie. Podľa obrázku 6.2.4.1 vektor M_s je kolmý na rovinu obrázku a smeruje k čitateľovi. Vektor M_v má opačný smer, teda za obrázok a v tomto smere zvolíme jednotkový vektor j . Potom $M_v = M_v j$, pričom veľkosť vektora M_v , podľa vzorca (6.2.4.3) je $M_v = pE \sin \varphi$. Pomocou jednotkového vektora vyjadríme aj vektor priradený uhlu φ . Budeme ho považovať za nulový, keď vektor p je súhlasne rovnobežný s vektorom E . Potom platí $\varphi = \varphi j$ a prácu vyjadríme integrálom (podľa vzorca (2.2.4.5) z mechaniky, z kapitoly o práci a výkone):

$$\int_\theta^\psi (M_v j) \cdot (j \, d\varphi) = \int_\theta^\psi M_v \, d\varphi = \int_\theta^\psi pE \sin \varphi \, d\varphi = -pE (\cos \psi - \cos \theta) \tag{6.2.4.4}$$

Práca vykonaná vonkajším momentom sily sa rovná prírastku potenciálnej energie :

$$\int_\theta^\psi M_v \, d\varphi = W_p(\psi) - W_p(\theta) \tag{6.2.4.5}$$

a tak porovnaním dvoch posledných vzorcov získame formulu pre potenciálnu energiu dipólu v homogénnom elektrostatickom poli:

$$W_p = -pE\cos\varphi = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} \qquad (6.2.4.6)$$

Vzorec potvrdzuje skutočnosť, že potenciálna energia je najmenšia, keď sú vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{E}$ súhlasne rovnobežné. Vtedy má energia zápornú hodnotu $-pE$. Nulovú hodnotu nadobúda, keď sú vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{E}$ na seba kolmé, maximálnu $+pE$, keď sú nesúhlasne rovnobežné.

Príklad 6.2.4.1 Vypočítajte maximálny moment sily, ktorý môže pôsobiť na elektrický dipól molekuly vody ($p = 6.10^{-30}$Cm) v blízkosti veľkej elektricky nabitej platne. Pošná hustota náboja na platni $\sigma = 10^{-6}$ C/m. Akým uhlovým zrýchlením α sa začne molekula otáčať po vložení do takéhoto poľa, keď moment zotrvačnosti molekuly vody je pribl. $J = 10^{-46}$ kgm^2 ?

Riešenie V blízkosti veľkej platne je intenzita (príklad 6.1.7.2)
$E = \sigma/(2\varepsilon_0) \cong 10^{-6}/(2\cdot10^{-11}) = 5\cdot10^4$ V/m. Moment sily $M_s = pE = 6\cdot10^{-30}Cm\cdot5\cdot10^4$ V/m $= 3\cdot10^{-25}$ N$\cdot$m . Uhlové zrýchlenie α sa vypočíta z pohybovej rovnice pre teleso otáčajúce sa okolo osi $M_s = J\alpha$: $\alpha = M_s/J = 3.10^{-25}$ N.m / 10^{-46} kgm^2 $= 3.10^{21}$ rad/s^2 .

Poznámka Nepredstaviteľne veľké uhlové zrýchlenie znamená, že otočenie dipólov do smeru vonkajšieho poľa prebieha extrémne rýchlo.

Kontrolné otázky

1. *Aká výsledná sila pôsobí v homogénnom elektrostatickom poli na dipól?*
2. *V akej polohe dipólu vzhľadom na vonkajšie pole pôsobí naň maximálny moment sily?*
3. *Akým vzorcom sa vyjadruje moment sily pôsobiaci na dipól v homogénnom poli?*
4. *Akým vzorcom sa vyjadruje potenciálna energia dipólu v homogénnom elektrickom poli?*
5. *V akej polohe vzhľadom na vonkajšie pole má elektrický dipól minimálnu potenciálnu energiu?*

6.3 Elektrostatické pole v prostredí

Kľúčové slová
Voľné a viazané elektrické náboje, potenciál a intenzita vo vodiči v ustálenom stave, elektrostatické tienenie, Faradayova klietka, vektor elektrickej polarizácie v dielektriku, elektrická susceptibilita, permitivita, permitivita vákua, relatívna permitivita, 1. Maxwellova rovnica, Coulombov zákon v dielektriku, lom elektrických siločiar.

Úvahy v predchádzajúcich paragrafoch sa týkali elektrostatického poľa vo vákuu. Vzorce na výpočet potenciálu a intenzity uvedené v týchto paragrafoch preto platia iba vo vákuu. Ak sa v elektrostatickom poli nachádzajú látky v plynnom, kvapalnom, alebo tuhom skupenstve, ich atómy a molekuly sú ovplyvňované vonkajším elektrostatickým poľom. Kladné elektrické náboje (viazané na atómové jadrá) navonok elektricky neutrálneho prostredia, majú tendenciu posunúť sa v smere intenzity vonkajšieho elektrického poľa $\boldsymbol{E}_v$, zatiaľ čo záporné náboje, viazané na pohyblivejšie elektróny - opačným smerom. Tým sa v látke vytvára (indukuje) vlastné elektrostatické pole, ktorého intenzitu označíme $\boldsymbol{E}_d$. Výsledná (celková) intenzita $\boldsymbol{E}_c$ v prostredí je vektorovým súčtom intenzity vonkajšieho a indukovaného poľa: $\boldsymbol{E}_c = \boldsymbol{E}_v + \boldsymbol{E}_d$, pričom sa vychádza z predpokladu (axiómy), že intenzita vonkajšieho poľa sa v prostredí vznikom indukovaného poľa nezmení, ako keby naďalej pôsobila vo vákuu. Táto skutočnosť je v súlade s princípom superpozície elektrických síl.

V nasledujúcich paragrafoch sú opisované javy, ktoré vznikajú v telesách po ich vložení do elektrostatického poľa. *Zásadný rozdiel je medzi látkami ktoré obsahujú* voľné elektróny (vodiče elektrického prúdu, najmä kovy) a látkami, v ktorých sú elektróny viazané k atómom, takže sa nemôžu premiestňovať na makroskopické vzdialenosti (dielektriká). V niektorých látkach sa môžu relatívne voľne pohybovať aj ióny (ionizovaný plyn, kvapalný, alebo tuhý elektrolyt), ale javy v týchto prostrediach nie sú predmetom elektrostatiky.

6.3.1 Vodič v elektrostatickom poli

Pod vodičom sa rozumie teleso obsahujúce relatívne voľne sa pohybujúce častice nesúce elektrický náboj. V tomto paragrafe pôjde o vodiče v ktorých sa voľne pohybujú elektróny, čo je prípad kovov. Hovorí sa, že ide o telesá s voľným elektrickým nábojom. *Voľný náboj sa môže v telese premiestňovať na makroskopické vzdialenosti a má pôvod buď priamo v telese, alebo mohol byť na teleso prinesený zvonka (nabíjanie telies).*

Poznámka Elektróny vo vodiči nie sú absolútne voľné, inak by sa pod účinkom vlastných odpudivých síl rozpŕchli čo najďalej, teda na povrch vodiča. Nachádzajú sa v elektrickom poli ostatných záporne nabitých elektrónov a kladne nabitých jadier, s ktorými sú veľmi slabo viazané, takže na usmernenie ich inak intenzívneho chaotického tepelného pohybu postačuje už aj veľmi malá intenzita vonkajšieho elektrického poľa.

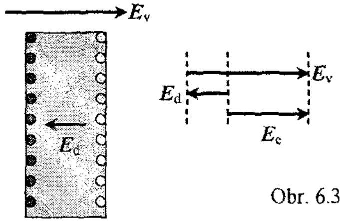
Po vložení vodiča do elektrostatického poľa sa voľné náboje (elektróny) začnú v telese pohybovať. Napríklad v medi na každý atóm pripadá jeden voľný elektrón, čo predstavuje rádovo 10^{23} voľných elektrónov na kubický centimeter.

Na obrázku je schematicky nakreslený rez kovovou platničkou vloženou do elektrostatického poľa s intenzitou $\boldsymbol{E}_v$. Voľné elektróny - naznačené tmavými krúžkami - sa začnú presúvať v smere proti intenzite, teda na ľavú stranu platničky, na pravej zostanú atómy ochudobnené o elektrón, teda kladne nabité ióny. Medzi kladnými a zápornými nábojmi na okrajoch platničky vzniká vnútorné indukované elektrostatické pole s intenzitou $\boldsymbol{E}_d$, ktorej veľkosť sa rovná σ_d/ε_o (príklad 6.1.7.3) . Výsledná intenzita $\boldsymbol{E}_c$, ktorá je vektorovým súčtom intenzít

$$\boldsymbol{E}_c = \boldsymbol{E}_v + \boldsymbol{E}_d$$

(6.3.1.1)

naďalej pôsobí na voľné elektróny, posúva ich na ľavú stranu platničky, čím sa zvyšuje plošná hustota indukovaného náboja σ_d a tým aj príslušná intenzita E_d .



Obr. 6.3.1.1

Tento proces prebieha dovtedy, pokým sa celková intenzita E_c nerovná nule. To znamená, že **v ustálenom stave je celková intenzita** v kovovej platničke, a všeobecne **vo vodiči** nachádzajúcom sa vo vonkajšom elektrostatickom poli, **nulová.** Treba poznamenať, že tento proces prebieha extrémne rýchlo, o čom si možno urobiť kvantitatívnu predstavu na základe príkladu 6.1.3.3 .

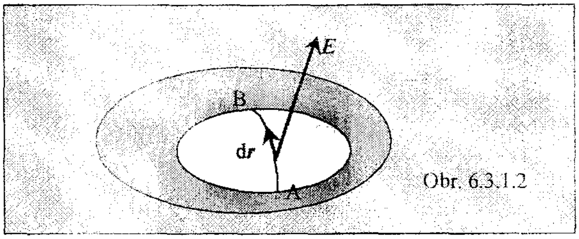
Poznámka Indukované elektrické náboje na povrchu platničky vytvárajú pole iba vo vnútri platničky, mimo nej je ich príspevok nulový. Vyplýva to z výsledku príkladu 6.1.7.3, paragrafu o Gaussovom zákone. Prípad s platničkou a vonkajším poľom kolmým na jej povrch je však veľmi špeciálny. Ak by kovové teleso malo napr. tvar elipsoidu, alebo ešte komplikovanejší, indukované plošné hustoty náboja by sa po povrchu rozložili tak, aby výsledná intenzita mimo telesa bola vždy kolmá na povrch. V opačnom prípade by intenzita mala zložku rovnobežnú s povrchom a pozdĺž povrchu by urýchľovala voľné elektróny dovtedy, pokým by nenastal ustálený stav charakterizovaný vektorom výslednej intenzity kolmým na povrch telesa.

Otvorenou zostáva otázka, či je v kove dostatok elektrónov na to, aby indukované plošné hustoty na okraji platničky vykompenzovali intenzitu vonkajšieho elektrostatického poľa. Predpokladajme, že vonkajšie pole má intenzitu 1000 V/cm = 10^5 V/m, čo sa blíži kritickej hodnote vo vzduchu na vznik elektrického výboja. Plošná hustota náboja σ_d na plochách platničky potrebná na vytvorenie intenzity takejto veľkosti je (pozri príklad 6.1.7.3) $\sigma_d = \varepsilon_o E_d \cong 10^{-11}.10^5 = 10^{-6}$ C/m^2. Ak jeden elektrón nesie náboj veľkosti rádovo 10^{-19} C, potom na vytvorenie takejto plošnej hustoty treba na jeden štvorcový meter nahromadiť $n = 10^{-6}/10^{-19} = 10^{13}$ elektrónov. Na jeden štvorcový centimeter ich treba nahromadiť 10^9, ale ako bolo uvedené vyššie, v jednom kubickom centimetri sa ich nachádza rádovo 10^{23} . Potrebný počet voľných elektrónov tak pripadá na vrstvičku, ktorej hrúbka predstavuje menej ako milióntinu medziatómovej vzdialenosti, ktorá v medi dosahuje pribl. 3.10^{-8}cm. V kove je teda vždy dostatok voľných elektrónov, aby dokázali vykompenzovať intenzitu vonkajšieho elektrostatického poľa.

Ak v ustálenom stave vo vodiči je výsledná intenzita elektrického poľa nulová, potom rozdiel potenciálov medzi ľubovoľnými dvoma bodmi vo vodiči sa rovná nule, lebo $\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$. To znamená, že **elektrický potenciál vo všetkých bodoch vodiča, vrátane povrchu, je rovnaký.**

Nulová hodnota intenzity vo vodiči má aj ďalší dôsledok. Ak by sme vo vodiči zvolili uzavretú plochu a počítali cez ňu tok intenzity elektrického poľa (Gaussov zákon), dostali by sme nulový výsledok. To ale znamená, že aj pravá strana rovnice vyjadrujúcej Gaussov zákon sa rovná nule, čiže nule sa rovná súčet elektrických nábojov v ľubovoľnej uzavretej ploche ležiacej vo vodiči. **Vnútro vodiča je teda elektricky neutrálne.**

Zvláštnu úvahu si vyžaduje elektrostatické pole v dutine vodiča. Dutina netvorí



Obr. 6.3.1.2

súčasť materiálu kovu (vodiča), preto sa treba presvedčiť o možnosti existencie poľa v nej. Ak by v dutine existovalo pole s intenzitou $\boldsymbol{E}$, potom by integrál $\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$, ktorým sa počíta rozdiel potenciálov medzi bodmi A a B ležiacimi na opačných stranách dutiny, nebol nulový. To by však bolo v rozpore s úvahami zo začiatku paragrafu a tvrdením, že v ustálenom stave v elektrostatickom poli, potenciál vo všetkých bodoch vodiča je rovnaký. Preto **intenzita v dutine je nulová, potenciál konštantný** a má rovnakú hodnotu, ako v ostatných bodoch vodiča.

Táto skutočnosť sa využíva na ochranu ľudí i prístrojov pred účinkami vonkajšieho elektrostatického poľa. Ide o tzv. ***elektrostatické tienenie***, realizované pomocou ***Faradayovej klietky***, ktorá sa zhotovuje z plechu, alebo drôteného pletiva. Pod účinkom vonkajšieho elektrostatického poľa dochádza v materiáli klietky k takému posunu voľných elektrónov, že v klietke je intenzita výsledného elektrostatického poľa nulová a nemôže poškodiť objekty nachádzajúce sa v klietke.

Príklad 6.3.1.1 Pomocou Gaussovho zákona vypočítajte veľkosť intenzity elektrického poľa tesne nad povrchom vodiča, na povrchu ktorého je rovnomerne rozložený elektrický náboj s plošnou hustotou σ .
Riešenie Postup je úplne analogický ako v príklade 6.1.7.2 . Rozdiel je iba v tom, že jedna základňa uzavretej valcovej plochy sa nachádza v kove, v ktorom je intenzita nulová. Druhá základňa je mimo kovu, tam počítame intenzitu. Pochopiteľne vychádza dvojnásobok hodnoty z príkladu 6.1.7.2 , t.j. $E = \sigma / \varepsilon_0$.

Kontrolné otázky

1. *Prečo vo vodiči nachádzajúcom sa vo vonkajšom elektrickom poli je v ustálenom stave nulová intenzita?*
2. *Viete zdôvodniť prečo v elektrostatickom poli je potenciál vo vodiči konštantný?*
3. *Ako zdôvodníte, že intenzita v dutine vodiča je nulová a potenciál konštantný?*
4. *Na čo sa používa Faradayova klietka?*
5. *Aký smer musí mať intenzita elektrostatického poľa tesne nad povrchom vodiča v ustálenom stave?*

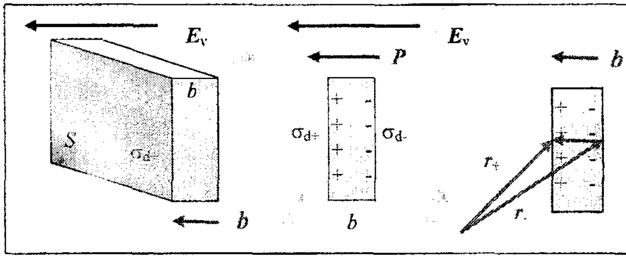
6.3.2 Dielektrikum v elektrostatickom poli

Pod dielektrikom rozumieme látku (tuhú, kvapalnú, alebo plynnú), ktorá neobsahuje voľne sa pohybujúce častice nesúce elektrický náboj, takže nemôže viesť elektrický prúd. Dielektriká sa preto používajú ako izolanty, napríklad v kondenzátoroch medzi jehoelektródami, ale aj pri rôznych iných elektrotechnických aplikáciách.

Podobne ako vo vodiči, aj v dielektriku, po vložení do elektrostatického poľa nastanú zmeny v rozložení elektrického náboja. Kladné náboje sa posúvajú v smere vektora intenzity vonkajšieho elektrického poľa (nepatrne, lebo sú viazané na ťažké jadrá atómov), záporné náboje viazané na elektróny sa posúvajú opačným smerom. V prípade dielektrika sa tomuto javu hovorí ***polarizácia dielektrika***. Už aj celkom malé posunutie náboja sa môže vzhľadom na jeho množstvo (pozri príklad v paragrafe 6.1.1) výrazne prejaviť vytvorením indukovaného vnútorného elektrostatického poľa, ktoré čiastočne kompenzuje pole vonkajšie.

Vzhľadom na rôznu štruktúru látok sa polarizácia môže uskutočniť niekoľkými spôsobmi. ***Atómová polarizácia*** vzniká vzájomným posunutím kladne nabitého jadra a záporne nabitého elektrónového obalu atómu, čím dochádza k deformácii atómu. Atóm sa zmení na elektrický dipól s elektrickým momentom, ktorého veľkosť je úmerná vzájomnému posunutiu kladných a záporných nábojov. Ako príklad môže poslúžiť polarizácia atómov hélia. Tento druh polarizácie vzniká v každej látke, ale v porovnaní s typmi polarizácie uvedenými ďalej, je menej významná. ***Iónová polarizácia*** vzniká v látkach s viacatómovými molekulami. Takéto molekuly, poskladané z iónov, mávajú nenulový elektrický moment spontánne, bez pôsobenia vonkajšieho elektrického poľa. Ak sú elektrické momenty molekúl náhodne orientované, vektorový súčet veľkého počtu momentov je nulový. Po vložení látky do vonkajšieho elektrostatického poľa, posunú sa kladné ióny vo všetkých molekulách v smere poľa a záporné ióny proti tomuto smeru, takže výsledný elektrický moment už nebude nulový. Príkladom na tento typ polarizácie sú iónové kryštály, napr. NaCl. ***Orientačná polarizácia*** vzniká v kvapalinách a v plynoch, ktorých molekuly majú vlastný elektrický moment (polárne molekuly, napríklad molekula vody). Priestorová orientácia jednotlivých molekúl, a teda aj elektrických momentov, sa vplyvom zrážok podmienených tepelným pohybom neustále mení. Časová stredná hodnota výsledného elektrického momentu jednotlivých molekúl sa rovná nule. Po vložení takejto látky do vonkajšieho elektrostatického poľa sa elektrické momenty molekúl začnú orientovať do smeru intenzity vonkajšieho poľa, takže výsledný elektrický moment príslušného telesa nebude nulový, teleso sa spolarizuje.

Najjednoduchším prípadom na kvantitatívne posúdenie polarizácie dielektrika je opäť teleso v tvare platničky (obr. 6.3.2.1). Objem platničky nech je Sb, kde S je plošný obsah jej steny a b hrúbka platničky. Platnička nech sa nachádza vo vonkajšom elektrostatickom poli, ktorého vektor intenzity E_v je kolmý na platničku. Spolarizovaním platničky sa na jej stenách vytvoria indukované viazané náboje s plošnými hustotami σ_{d+} a $\sigma_{d-} = -\sigma_{d+}$. Predpokladáme, že platnička sa spolarizuje homogénne, takže v celom jej objeme je vektor elektrickej polarizácie $\boldsymbol{P}$ rovnaký. Vektor $\boldsymbol{P}$ smeruje od záporného indukovaného náboja ku kladnému, podobne ako vektor elektrického momentu dipólu. Zo symetrie prípadu vyplýva, že vektor $\boldsymbol{P}$ je kolmý na steny platničky. Spolarizovaná platnička má výsledný elektrický moment, ktorý vypočítame dvomi spôsobmi.



Obr. 6.3.2.1

Na základe vzorca (6.2.1.6) môžeme elektrický moment vyjadriť vzťahom:

$$\boldsymbol{M}_e = \boldsymbol{P} Sb \,. \tag{6.3.2.1}$$

Druhý spôsob je veľmi zjednodušený, ale poskytne rovnaký výsledok, ako jeho korektné odvodenie (pozri dodatok D2). Platničku si predstavíme ako makroskopický dipól s nábojmi na plochách $Q_{d+} = \sigma_{d+}S$ a $Q_{d-} = \sigma_{d-}S$, medzi ktorými je vzdialenosť b . Elektrický moment vypočítame ako skalárny násobok vektora $\boldsymbol{b}$ nábojom nachádzajúcim sa na celej kladne nabitej stene platničky:

$$\boldsymbol{M}_e = Q_{d+}\,\boldsymbol{b} = \sigma_{d+} S\,\boldsymbol{b} \tag{6.3.2.2}$$

Elektrické momenty podľa vzťahov (6.3.2.1) a 6.3.2.2) by mali byť rovnaké, preto platí:

$$\boldsymbol{P} Sb = \boldsymbol{b} S\sigma_{d+} \tag{6.3.2.3}$$

Podľa obr. 6.3.2.1 vektory $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{b}$ majú rovnaký smer, preto platí aj skalárny vzťah

$$P\,Sb = bS\sigma_{d+}\,,$$

odkiaľ

$$P = \sigma_{d+} \tag{6.3.2.4}$$

Podľa tohto výsledku elektrická polarizácia homogénne spolarizovanej dielektrickej platničky sa rovná plošnej hustote na povrchu vytvoreného viazaného elektrického náboja. Ak vektor elektrickej polarizácie nie je kolmý na povrch spolarizovaného dielektrika, potom možno všeobecnejším postupom dokázať, že platí

$$P_n = \sigma_{d+} \tag{6.3.2.5}$$

kde P_n predstavuje veľkosť normálovej zložky vektora elektrickej polarizácie, teda zložky kolmej na rovinu povrchu dielektrika.

Kontrolné otázky

1. *Čo rozumieme pod polarizáciou dielektrika?*
2. *Aké druhy polarizácie dielektrika poznáte?*
3. *Ako možno vypočítať elektrický moment spolarizovanej platničky?*
4. *Čomu sa rovná plošná hustota indukovaného náboja na povrchu spolarizovanej platničky?*

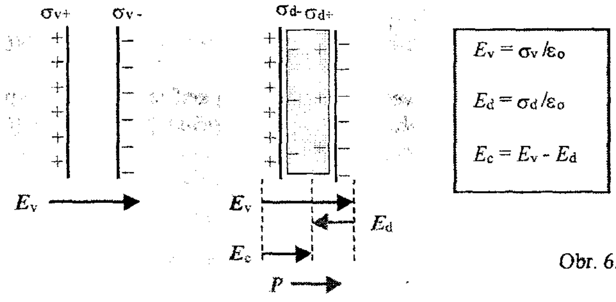
6.3.3 Vektor elektrickej indukcie, permitivita

Na opis elektrostatického poľa v dielektriku je užitočné zaviesť ďalšiu veličinu, ktorá závisí iba od voľných elektrických nábojov. Je to vektorová veličina, má názov ***elektrická indukcia***. Je akýmsi protikladom veličiny ***elektrická polarizácia***, ktorá súvisí výhradne s viazanými nábojmi dielektrika. Voľný náboj sa v ideálnom dielektriku nevyskytuje, nanajvýš sa môže dostať na jeho povrch zvonku, ale nemôže sa tam voľne pohybovať tak ako v kove. Voľný náboj nachádzajúci sa mimo dielektrika vytvára elektrické pole aj v dielektriku, ktoré sa modifikuje procesmi polarizácie, ale veličina *elektrická indukcia* je zavedená tak, že nezávisí od prítomnosti či neprítomnosti dielektrika. To znamená, že vložením dielektrika do elektrostatického poľa sa v danom mieste vektor elektrickej indukcie nezmení. (Dôsledné zavedenie *elektrickej indukcie* pomocou Gaussovho zákona je v dodatku D3).

Pri ďalších úvahách týkajúcich sa zavedenia *elektrickej indukcie* zjednodušeným postupom, použijeme kondenzátor s rovinnými kovovými platňami (elektródami). Predpokladáme, že platne sú dostatočne veľké, aby nebolo potrebné všímať si javy na ich okrajoch. Medzi platňami sa nachádza platnička z dielektrika (obr.6.3.3.1). Keď je kondenzátor nabitý, na jeho platniach sa nachádza elektrický náboj s istou plošnou hustotou σ_v (na jednej platni kladná, na druhej rovnako veľká záporná plošná hustota náboja). Keby medzi platňami bolo vákuum, bolo by v tomto priestore elektrostatické pole s intenzitou veľkosti

$$E_v = \sigma_v / \varepsilon_0 , \tag{6.3.3.1}$$

ako vyplynulo z riešenia príkladu 6.1.7.3 . Za plošnú hustotu tu treba vziať jej absolútnu hodnotu, resp. kladnú plošnú hustotu.



Obr. 6.3.3.1

Po vložení dielektrika medzi platne kondenzátora sa dielektrikum spolarizuje, kladné viazané náboje sa posunú v smere intenzity $\boldsymbol{E}_v$, záporné opačným smerom a na povrchu dielektrika vzniknú viazané náboje s plošnou hustotou σ_d (na jednej strane je kladná, na druhej záporná). Viazané náboje vytvoria v dielektriku pole s intenzitou

$$E_d = \sigma_d / \varepsilon_o \ , \tag{6.3.3.2}$$

ktorá má opačný smer ako intenzita $\boldsymbol{E}_v$. Aj tu treba dosadiť kladnú plošnú hustotu. Intenzity $\boldsymbol{E}_v$ a $\boldsymbol{E}_d$, ktoré majú opačný smer, sa vektorovo sčítajú, preto veľkosť výslednej (celkovej) intenzity E_c je

$$E_c = E_v - E_d = \frac{\sigma_v}{\varepsilon_o} - \frac{\sigma_d}{\varepsilon_o}, \tag{6.3.3.3}$$

takže je menšia ako veľkosť intenzity vonkajšieho poľa. Podľa vzorca (6.3.2.4) plošná hustota viazaného elektrického náboja na povrchu dielektrickej platničky $\sigma_d = P$, čiže sa rovná veľkosti vektora elektrickej polarizácie, čo dosadíme do predchádzajúcej rovnice:

$$E_c = \frac{\sigma_v}{\varepsilon_o} - \frac{P}{\varepsilon_o}$$

Rovnicu vynásobíme elektrickou konštantou ε_o, čím dostaneme:

$$\varepsilon_o E_c = \sigma_v - P$$

a po ďalšej úprave

$$\sigma_v = \varepsilon_o E_c + P \ . \tag{6.3.3.4}$$

Elektrická polarizácia P súvisí iba s viazanými elektrickými nábojmi a rovná sa v našom prípade ich plošnej hustote. Na ľavej strane rovnice vystupuje *plošná hustota voľných nábojov a v tomto konkrétnom prípade ju budeme považovať za novú veličinu* - **elektrickú indukciu**, (značka D), takže $\sigma_v = D$. Preto rovnicu (6.3.3.4) prepíšeme, a namiesto plošnej hustoty viazaného náboja napíšeme *elektrickú indukciu*:

$$D = \varepsilon_o E_c + P \,. \tag{6.3.3.5}$$

V tejto rovnici vystupujú vektorové veličiny $\boldsymbol{E}_c$ a $\boldsymbol{P}$. Aj keď to z uvedeného postupu priamo nevyplýva, aj *elektrická indukcia je vektorová veličina*, preto rovnicu (6.3.3.5) prepíšeme do vektorového tvaru, ktorý platí všeobecne:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_o \boldsymbol{E}_c + \boldsymbol{P} \,. \tag{6.3.3.6}$$

Táto rovnica vyjadruje súvislosť medzi elektrickým poľom voľných a viazaných nábojov v dielektriku. Nazýva sa aj **materiálový vzťah**, lebo sa netýka iba vákua, ale rôznych dielektrických materiálov.

Materiálový vzťah (6.3.3.6) sa zapisuje aj v stručnejšej forme. Predpokladá sa, že elektrická polarizácia závisí od celkovej intenzity elektrického poľa v dielektriku a ako vektorová veličina má aj jej smer. Čím silnejšie je celkové pole, tým väčšia je hodnota elektrickej polarizácie. Preto možno napísať vektorový vzťah

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_o \chi \boldsymbol{E}_c \tag{6.3.3.7}$$

kde χ je bezrozmerná veličina s názvom ***elektrická susceptibilita***. Sprostredkuje vzťah medzi vektormi $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{E}_c$. Po dosadení do rovnice (6.3.3.6) dostaneme:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_o \boldsymbol{E}_c + \varepsilon_o \chi \boldsymbol{E}_c = \varepsilon_o (1+\chi) \boldsymbol{E}_c = \varepsilon_o \varepsilon_r \boldsymbol{E}_c = \varepsilon \boldsymbol{E}_c \tag{6.3.3.8}$$

teda vzťah

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}_c \,. \tag{6.3.3.9}$$

Pri úpravách boli použité vzťahy

$$(1+\chi) = \varepsilon_r \quad \text{a} \quad \varepsilon_o \varepsilon_r = \varepsilon \tag{6.3.3.10}$$

pričom veličina ε sa nazýva *permitivita* a ε_r *relatívna permitivita* (daného prostredia).

Kontrolné otázky

1. *Ktorá veličina v dielektriku súvisí iba s voľnými nábojmi?*
2. *Ktorá veličina v dielektriku súvisí iba s viazanými nábojmi?*
3. *V akých jednotkách sa meria elektrická indukcia?*
4. *Čo je elektrická susceptibilita?*
5. *Čo je permitivita a relatívna permitivita?*
6. *Ako súvisí elektrická susceptibilita s relatívnou permitivitou?*

6.3.4 Maxwellova rovnica s vektorom elektrickej indukcie

V predchádzajúcom paragrafe bol odvodený tzv. materiálový vzťah, v ktorom vystupujú všetky vektory používané na opis elektrostatického poľa. V spojení s Gaussovým zákonom možno pomocu neho získať prvú zo štyroch Maxwellových rovníc, úplne vystihujúcich deje v elektromagnetickom poli.

Do Gausovho zákona $T = \oint\!\!\oint_S \boldsymbol{E}_c \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i$ dosadíme vektor celkovej intenzity v dielektriku vyjadrený z materiálového vzťahu $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_c + \boldsymbol{P}$. Najprv upravíme ľavú stranu Gaussovho zákona:

$$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{E}_c \cdot d\boldsymbol{S} = \oint\!\!\oint_S \frac{\boldsymbol{D}-\boldsymbol{P}}{\varepsilon_0} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad (6.3.4.1)$$

Na pravej strane Gaussovho zákona, v sumácii, treba sčitovať **všetky** náboje prítomné v uzavretej ploche, teda voľné i viazané. Preto náboje takto **rozpíšeme**, takže pravá strana Gaussovho zákona zmení tvar:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_{vi} + \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_k Q_{dk} \; . \qquad (6.3.4.2)$$

V Gaussovom zákone vystupuje celková inenzita elektrického poľa, ktorá súvisí s existenciou voľných i viazaných nábojov. Integrál cez uzavretú plochu v rovnici (6.3.4.1) sa podarilo rozpísať na dva členy, pričom v prvom integráli vystupuje vektor elektrickej indukcie, ktorý súvisí iba s voľnými nábojmi, v druhom integráli vektor elektrickej polarizácie, ktorý má opodstatnenie iba ak sa v prostredí nachádzajú viazané elektrické náboje. Na rovnakom princípe bola rozpísaná aj pravá strana Gaussovho zákona, teda náboje nachádzajúce sa v objeme ohraničenom uzavretou plochou. Preto oprávnene možno dať do súvislosti príslušné členy z ľavej i pravej strany Gaussovho zákona a napísať rovnice:

$$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \sum_i Q_{vi} \, , \qquad \oint\!\!\oint_S \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{S} = -\sum_i Q_{di} \qquad (6.3.4.3)$$

V prvej rovnici upravíme integrál podľa Gaussovej integrálnej vety, t.j. premeníme plošný integrál na objemový a súčasne aj náboj na pravej strane vyjadríme pomocou objemového integrálu, teda ako integrál objemovej hustoty náboja:

$$\iiint_V \mathrm{div}\, \boldsymbol{D} \, d\tau = \iiint_V \rho_v \, d\tau \; .$$

Integračné medze integrálov sú rovnaké, ale ľubovoľné, **takže musí platiť rovnosť,** ktorá je známa pod názvom **1. Maxwellova rovnica:**

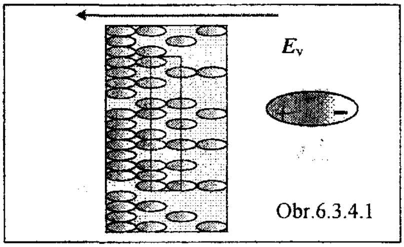
$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{D} = \rho_v \; . \qquad \textbf{(6.3.4.4)}$$

Vzťah z ktorého sme ju získali - ľavá z rovníc (6.3.4.3) - sa nazýva 1. Maxwellova rovnica v integrálnom tvare. Je vhodné znovu pripomenúť, že v oboch rovniciach - či v diferenciálnom, či integrálnom tvare, na pravej strane vystupuje iba voľný elektrický náboj.

Aj druhú z rovníc (6.3.4.3) možno upraviť podobným spôsobom. Uvedieme priamo výsledok výpočtu:

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{P} = -\rho_d \qquad (6.3.4.5)$$

v ktorom sa na pravej strane objavuje objemová hustota viazaných nábojov. Prejaví sa iba v nehomogénne spolarizovanom dielektriku. Ak by elektrická polarizácia $\boldsymbol{P}(x,y,z)$ bola v celom objeme dielektrika rovnaká, potom derivácie podľa priestorových súradníc, ktoré predpisuje operácia div $\boldsymbol{P}$, by sa rovnali nule a nulová by bola aj hustota ρ_d. Z obrázku 6.3.4.1 si možno urobiť kvalitatívnu predstavu o vzniku priestorového náboja, ktorého zdrojom sú dipóly nehomogénne spolarizovaného dielektrika.



Obr.6.3.4.1

Hrubý model na obrázku znázorňuje spolarizované molekuly ako dipóly s kladným a záporným koncom. Súčet kladného a záporného náboja všetkých molekúl na obrázku sa rovná nule, lebo každá z nich nesie rovnaký kladný i záporný náboj. Ale v rámčeku uprostred obrázku počet záporných nábojov (svetlých) je väčší. Tak sa lokálne prejaví viazaný náboj vo forme nenulovej objemovej hustoty ρ_d. Znamienko tohto náboja závisí od vzájomnej orientácie smeru intenzity vonkajšieho poľa a smeru vzrastu veľkosti vektora $\boldsymbol{P}$. Na obrázku sa veľkosť tohto vektora zväčšuje z pravej strany na ľavú, preto hustota $\rho_d < 0$. Pri opačnom smere vzrastu veľkosti $\boldsymbol{P}$ by hustota $\rho_d > 0$. Znamienka by sa zmenili na opačné, aj keby sa obrátil smer intenzity E_v vonkajšieho poľa.

Príklad 6.3.4.1 Objemová hustota voľného náboja ρ_d sa v istej časti priestoru rovná nule. Aká podmienka pre vektor elektrickej indukcie vyplýva z tejto skutočnosti a z Maxwellovej rovnice ?

Riešenie Podľa Maxwellovej rovnice v tomto prípade div$\boldsymbol{D}$ = 0, čo po rozpise poskytuje podmienku $\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=0$. Ak súradnicovú sústavu v konkrétnom mieste zvolíme tak, aby vektor $\boldsymbol{D}$ mal iba zložku v smere osi x, takže D_y aj D_z sa rovnajú nule, z troch členov výrazu zostane iba prvý, $dD_x/dx = 0$. Z toho však vyplýva, že D_x je konštanta a tým aj celý vektor je konštantný.

Poznámka Z výsledku vyplýva, že ak sa vedľa seba nachádzajú dve dielektriká, pritom vektor ***D*** je na ich rovinné rozhranie kolmý, a v dielektrikách, ani na rozhraní medzi nimi sa nevyskytuje voľný náboj, vektor ***D*** je v oboch dielektrikách rovnaký. Trochu odlišná je situácia, ak vektor ***D*** nie je na rozhranie kolmý - pozri kapitolu 6.3.6 o javoch na rozhraniach.

Príklad 6.3.4.2 Vektor elektrickej polarizácie v intervale <+5,+10> premennej x je vyjadrený v tvare $\boldsymbol{P} = ax\boldsymbol{i}$, t.j. lineárne sa zväčšuje v smere osi x, v ostatných smeroch sa nemení. Vypočítajte objemovú hustotu ρ_d viazaného náboja a zvážte, aký vplyv na výsledok má znamienko konštanty a.

Riešenie Pre objemovú hustotu viazaného náboja platí vzťah (6.3.4.5) : $\rho_d = -\,\mathrm{div}\boldsymbol{P}$, z ktorého v tomto prípade vyplýva :

$\rho_d = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(ax\boldsymbol{i}) = -a$. Ak je konštanta a kladná, potom objemová hustota viazaného náboja je záporná. Vieme, že smer vektora ***P*** je vždy zhodný so smerom vektora intenzity vonkajšieho poľa, takže ak je $a > 0$, potom aj vonkajšie pole má smer jednotkového vektora ***i***. Samostatne posúďte situáciu, ak konštanta $a < 0$.

Kontrolné otázky

1. *Aká je formulácia integrálneho tvaru Maxwellovej rovnice s vektorom **D** ?*
2. *Aká je formulácia diferenciálneho tvaru Maxwellovej rovnice s vektorom **D** ?*
3. *Aký je významový rozdiel medzi integrálnym a diferenciálnym tvarom Maxwellovej rovnice?*
4. *Viete vysvetliť prečo sa v dielektriku lokálne prejaví objemová hustota viazaných nábojov?*
5. *Čomu sa rovná objemová hustota viazaných nábojov v dielektriku, ktoré je nehomogénne spolarizované?*

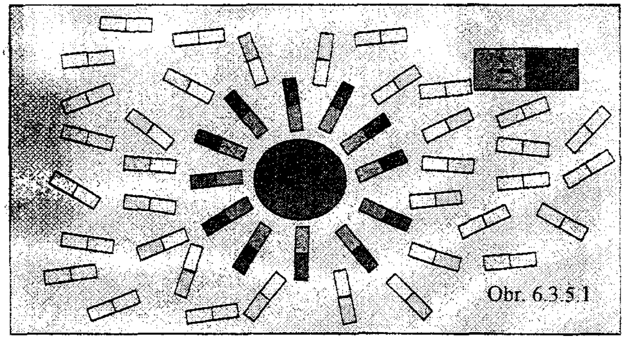
6.3.5 Coulombov zákon v dielektriku

Vzájomné silové pôsobenie medzi dvomi voľnými bodovými nábojmi Q, q, sa vo vákuu vyjadruje Coulombovým zákonom $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$. Sila F pôsobiaca na náboj q sa môže vyjadriť aj ako súčin tohto náboja s intenzitou elektrického poľa E, ktorá charakterizuje elektrické pole vytvorené nábojom Q : $F = qE$. Ak sa náboje nachádzajú v dielektriku, sila pôsobiaca na náboj q je menšia, lebo k pôvodnému elektrostatickému poľu sa pridáva indukované pole vyvolané spolarizovaním prostredia. Intenzita indukovaného poľa má vo všeobecnosti opačný smer ako pôvodné pole. V zmysle princípu superpozície výsledná intenzita v mieste náboja q je vektorovým súčtom intenzít vytvorených nábojom Q a indukovanými nábojmi spolarizovaného prostredia. Bodový náboj Q vo vákuu, či v dielektriku, vytvára intenzitu:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

(6.3.5.1)

V dielektriku, ak je $Q > 0$, sú k nemu priťahované záporné náboje blízkych molekúl, kladné sú odpudzované.



Obr. 6.3.5.1

Tým sa v okolí voľného náboja Q – v súlade s Gaussovým zákonom – vytvorí také elektrostatické pole, ako keby sa veľkosť náboja Q efektívne zmenšila o istý náboj Q^*. Preto do vzorca vyjadrujúceho intenzitu, namiesto náboja Q dosadíme súčet $Q + Q^*$, ktorý by mal mať absolútnu hodnotu menšiu než pôvodný náboj Q. Z toho vyplýva, že náboj Q^* musí mať opačné znamienko ako voľný náboj Q:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q + Q^*}{r^2}$$

(6.3.5.2)

Číselne rovnakú hodnotu dostaneme, ak vo vzorci (6.3.5.1) do menovateľa pridáme bezrozmerný faktor $g > 1$:

$$E = \frac{1}{g} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

(6.3.5.3)

Ukážeme, že týmto faktorom je relatívna permitivita. Na tento cieľ možno využiť materiálový vzťah $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_c + \boldsymbol{P}$, v úprave podľa rovníc (6.3.3.8):

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_c + \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}_c = \varepsilon_0 (1+\chi) \boldsymbol{E}_c = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}_c = \varepsilon \boldsymbol{E}_c$$

Podľa toho vo vákuu platí vzťah $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_c$, ale v prostredí $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}_c$. Z toho vidno, že celková intenzita v prostredí je ε_r - krát menšia než vo vákuu, lebo elektrická indukcia D v okolí voľného náboja Q je vo vákuu aj v prostredí rovnaká. Vzťah (6.3.5.3) napíšeme s relatívnou permitivitou:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2}$$

(6.3.5.4)

Takáto intenzita sa prejaví v okolí náboja Q pri pôsobení na **ľubovoľný** iný náboj v dielektriku, bez ohľadu na to či ide o náboj voľný, alebo viazaný.

K zaujímavému výsledku vedie porovnanie vzťahov (6.3.5.2) a (6.3.5.4). Ľavé strany sú rovnaké, preto sa musia sebe rovnať aj pravé strany:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+Q^*}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2} \Rightarrow Q+Q^*=\frac{Q}{\varepsilon_r} \Rightarrow Q^*=Q\left(\frac{1}{\varepsilon_r}-1\right)=-Q\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) \qquad (6.3.5.6)$$

Výraz v zátvorke v poslednom člene je kladný a menší ako jednotka, lebo relatívna permitivita nemôže byť menšia než číslo 1. To znamená, že *indukovaný tieniaci náboj* Q^* okolo voľného náboja Q *má opačné znamienko a menšiu absolútnu hodnotu* ako náboj Q.

Zámena elektrickej konštanty ε_o permitivitou $\varepsilon = \varepsilon_o\varepsilon_r$ sa netýka iba uvedeného prípadu bodového náboja. Uplatňuje sa aj v iných prípadoch, keď sa voľné náboje nachádzajú v dielektrickom prostredí. Ak sa veľká rovinná platňa nabitá hustotou voľného náboja σ_v nachádza v dielektriku, intenzita v jej okolí $E = \sigma_v/(2\varepsilon_o\varepsilon_r)$, na rozdiel od vákua, kde v menovateli vzorca vystupuje iba elektrická konštanta ε_o (= permitivita vákua). Takáto zámena je nevyhnutná aj v iných prípadoch, pokiaľ chceme vzťahy písať iba s voľnými nábojmi. Ak by sme chceli dôsledne používať princíp superpozície, vzorce by sme písali iba s elektrickou konštantou ε_o, ale vtedy by sme do vzorcov museli zahrnúť aj indukované elektrické náboje.

Na záver treba ešte uviesť závažnú skutočnosť, že Coulombov zákon má makroskopický charakter. Úvahy o vkladaní voľného náboja do dielektrika sa týkajú makroskopických objektov, napríklad vloženia malej elektricky nabitej guľky do kvapalného dielektrika a podobne. Uvedený postup sa nehodí na opis procesov po vložení jedného iónu do dielektrika, či kryštálu. Tam prebiehajú procesy na mikroskopicej úrovni, ktoré sa opisujú jednak aparátom kvantovej mechaniky, jednak tzv. mikroskopickými elektromagnetickými poliami. Na opis takýchto procesov je teda potrebný náročnejší aparát.

Príklad 6.3.5.1 Vákuový kondenzátor s rovinnými elektródami bol nabitý tak, že na jeho platniach sa vytvorila plošná hustota voľného elektrického náboja s absolútnou hodnotou σ. Medzi elektródy bolo vložené dielektrikum s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 5$, pričom sa plošná hustota voľného náboja nezmenila. Koľkokrát sa zmenšila intenzita elektrického poľa v kondenzátore ?

Riešenie Vložením dielektrika do kondenzátora sa veľkosť vektora elektrickej indukcie nezmení, a podľa vzťahu (6.3.4.2) má hodnotu $D = \sigma_v$. Vo vákuu platí $E_c = D/\varepsilon_o$, v dielektriku $E_c = D/(\varepsilon_o\varepsilon_r)$, takže výsledná intenzita po vložení dielektrika je ε_r krát menšia.

Príklad 6.3.5.2 V homogénnom elektrostatickom poli, ktorého elektrická indukcia je D, sú tesne pri sebe uložené dve dielektrické platničky, s permitivitami ε_1 a ε_2. Vektor elektrickej indukcie je kolmý na platničky. Vypočítajte pomer intenzít elektrického poľa E_{c1}/E_{c2} v týchto platničkách.

Riešenie Medzi celkovou intenzitou a elektrickou indukciou platí vzťah $D = \varepsilon E_c$. Keďže elektrická indukcia v oboch dielektrikách je rovnaká, platí rovnosť $\varepsilon_1 E_{c1} = \varepsilon_2 E_{c2}$, odkiaľ vyplýva $E_{c1}/ E_{c2} = \varepsilon_2 /\varepsilon_1$. Veľkosti intenzít sú nepriamo úmerné veľkostiam permitivít. Čím väčšiu hodnotu má relatívna permitivita prostredia, tým menšia je v ňom výsledná intenzita elektrického poľa.

Príklad 6.3.5.3 V homogénnom elektrostatickom poli s elektrickou indukciou D je dielektrikum, ktorého relatívna permitivita je ε_r. Vypočítajte veľkosť intenzity elektrického poľa a veľkosť elektrickej polarizácie v dielektriku.
Riešenie Z materiálového vzťahu v stručnom tvare $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_c$ vypočítame veľkosť intenzity $E_c = D / \varepsilon_0 \varepsilon_r$ z ktorého vyplýva, že čím väčšia je permitivita, tým slabšie je výsledné elektrické pole. Potom z plnej formy vzťahu $D = \varepsilon_0 E_c + P$ vypočítame veľkosť vektora elektrickej polarizácie : $P = D(1 - 1/\varepsilon_r)$. Z výsledku vyplýva, že čím väčšia je relatívna permitivita, tým väčšia je aj elektrická polarizácia. Na druhej strane ak $\varepsilon_r \to 1$, t.j. blíži sa ku svojej minimálnej hodnote, vtedy $P \to 0$.

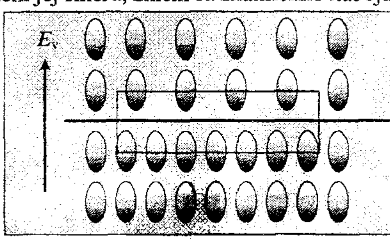
Kontrolné otázky

1. *Viete kvalitatívne vysvetliť prečo sa silový účinok medzi voľnými elektrickými nábojmi v dielektriku zoslabuje?*
2. *Prečo sa menovateľ vo vzorci vyjadrujúcom intenzitu v prípade dielektrika rozširuje práve o relatívnu permitivitu?*
3. *Aké znamienko a akú veľkosť má indukovaný tieniaci náboj?*

6.3.6 Javy na rozhraní dielektrík

V elektrotechnickej praxi sa často kombinujú kovy s izolantmi, alebo aj izolanty navzájom, čím vznikajú rozhrania medzi materiálmi s rôznymi elektrickými vlastnosťami (drôt - izolácia, platňa kondenzátora - dielektrikum, vonkajšia - vnútorná izolácia a pod.).

Ak sa dotýkajú dve dielektriká s rôznymi permitivitami (ε_1, ε_2), po ich vložení do vonkajšieho elektrostatického poľa sa spolarizujú. Vznikne medzi nimi rozhranie s nevykompenzovaným viazaným elektrickým nábojom. Ako vzniká, si možno názorne overiť na obrázku. V naznačenom obdĺžniku na rozhraní je viac kladných (svetlejších) ako záporných viazaných nábojov. Znamienko nevykompenzovaného náboja závisí od toho, ktoré z dielektrík má väčšiu permitivitu, ale aj od smeru intenzity vonkajšieho poľa - pri obrátení jej smeru, zmení sa znamienko náboja.

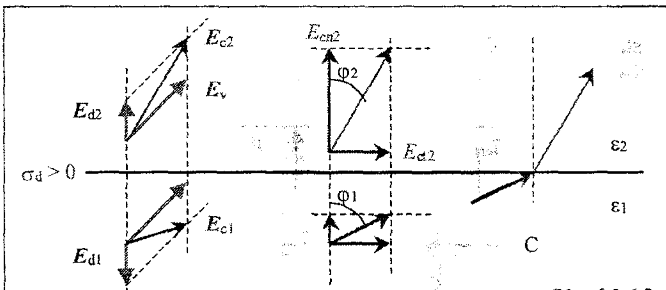


Obr. 6.3.6.1

Už v príklade 6.3.5.3 bol uvedený výsledok, že čím väčšia je permitivita prostredia, tým slabšie je v ňom výsledné pole E_c, ale tým väčšia je veľkosť vektora elektrickej polarizácie. Ak je vektor E_v kolmý na rozhranie, ako na obr. 6.3.6.1 , potom sú na rozhranie kolmé aj vektory E_c a $\boldsymbol{P}$. V takom prípade na stýkajúcich sa rovinných plochách dielektrík vzniknú plošné hustoty náboja (absolútne hodnoty): $\sigma_{d1} = P_1$ resp. $\sigma_{d2} = P_2$, ktoré majú opačné znamienka (pozri vzorec (6.3.2.4)). Ich súčet sa rovná plošnej hustote σ_d viazaného nevykompenzovaného náboja na rozhraní, ktorej znamienko závisí od prevládajúceho náboja. Ten je príčinou vzniku indukovaného elektrostatického poľa na oboch stranách rozhrania, podobne ako v okolí nabitej platne (pozri príklad 6.1.7.2). Veľkosť intenzity E_d indukovaného poľa je $E_d = \sigma_d / (2\varepsilon_o)$, pričom táto intenzita sa sčítava s intenzitou vonkajšieho poľa E_v a tak vzniká výsledná (celková) intenzita E_c . Ak je $\sigma_d > 0$, vektor E_d na oboch stranách rozhrania smeruje od neho, čo znamená, že na jednej strane rozhrania je výsledné pole silnejšie, na druhej slabšie ako vonkajšie pole.

Poznámka To je na prvý pohľad v rozpore s tvrdením z paragrafu 6.3.3, že celková intenzita v dielektriku je menšia ako intenzita vonkajšieho poľa (pozri vzťah (6.3.3.3)). Tu však ide o inú geometriu. Zatiaľ čo v paragrafe 6.3.3 išlo o platničku, a na oboch jej povrchoch vznikol indukovaný viazaný náboj, v tomto prípade ide o polonekonečné prostredia s nábojom na ploche, ktorá ich rozdeľuje.

Ak intenzita E_v vonkajšieho poľa nie je kolmá na rovinné rozhranie dielektrík, potom vektorový súčet intenzity vonkajšieho a indukovaného poľa E_d nemá v oboch dielektrikách rovnaký smer. Na rozhraní dochádza k lomu siločiar celkovej intenzity E_c . Aj tento prípad možno ilustrovať obrázkom. Vidno z neho, že indukované pole, ktorého intenzita E_d je na rozhranie kolmá, mení len normálovú zložku intenzity vonkajšieho poľa (obr. 6.3.6.2 A). Preto celková intenzita na oboch stranách rozhrania má rovnakú tangenciálnu zložku (zložka rovnobežná s rozhraním, obr. 6.3.6.2 B).



Obr. 6.3.6.2

Zmenu uhla φ medzi vektorom E_c a normálou na rozhranie možno ohodnotiť kvantitatívne. Platí

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{E_{ct1}}{E_{cn1}} \quad , \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{E_{ct2}}{E_{cn2}} \quad ,$$

z čoho vyplýva

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2}=\frac{E_{cn2}}{E_{cn1}},$$

(6.3.6.1)

lebo tangenciálne zložky vektora E_c sú v oboch prostrediach rovnaké a v zloženom zlomku sa ich veľkosti vykrátia. Normálové zložky vyjadríme pomocou vektora elektrickej indukcie a pomocou permitivít prostredí

$$\frac{E_{cn2}}{E_{cn1}}=\frac{D_{n2}/\varepsilon_2}{D_{n1}/\varepsilon_1}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

kde sa vykrátili veľkosti normálových zložiek vektora elektrickej indukcie, lebo sú rovnaké. Po dosadení do (6.3.6.1) dostaneme výsledný vzťah vyjadrujúci zmenu smeru siločiar

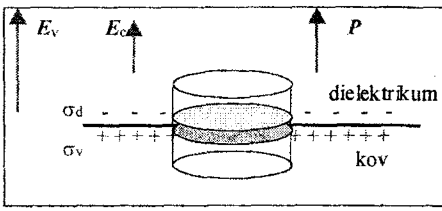
$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

(6.3.6.2)

O zachovaní veľkosti vektora elektrickej indukcie bol uvedený komentár už v príklade 6.3.4.1, ale vektor indukcie bol na rozhranie kolmý. V tomto prípade vektor elektrickej indukcie nie je na rozhranie kolmý, lebo v súlade s materiálovým vzťahom $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}_c$ je rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{E}_c$ (vektor $\boldsymbol{D}$ je skalárnym násobkom vektora $\boldsymbol{E}_c$) Preto tvrdenie, že normálové zložky vektora indukcie na oboch stranách rozhrania sú rovnaké, treba dokázať (dôkaz je v dodatku D4).

Rozhranie kov - dielektrikum

Ak sa rozhranie nenachádza vo vonkajšom poli a navyše na povrchu kovu sa nenachádza voľný náboj, intenzita výsledného elektrostatického poľa je v oboch prostrediach nulová. Po vložení rozhrania do vonkajšieho poľa s intenzitou $\boldsymbol{E}_v$, na povrch kovu vystúpia voľné náboje, ktoré (v ustálenom stave) budú mať plošnú hustotu σ_v. Znamienko tohto náboja závisí od smeru intenzity vonkajšieho poľa. V ustálenom stave musí byť intenzita výsledného elektrostatického poľa kolmá na povrch vodiča.



Obr. 6.3.6.2

Aj v dielektriku dôjde ku zmenám - spolarizuje sa, a na rozhranie vystúpi viazaný náboj s plošnou hustotou σ_d, pričom jeho znamienko je opačné ako znamienko voľného náboja na povrchu kovu. V kove je celková intenzita poľa nulová, preto je tam nulový aj vektor elektrickej indukcie. Nenulové pole je iba v dielektriku, v ktorom medzi celkovou intenzitou $\boldsymbol{E}_c$, elektrickou polarizáciou $\boldsymbol{P}$ a elektrickou indukciou D platí materiálový vzťah (6.3.5.7). Na rozhraní kov-dielektrikum, sa preto normálová zložka vektora D nezachováva.

Kontrolné otázky

1. *Aké znamienko má indukovaný elektrický náboj na rozhraní dvoch dielektrík?*
2. *Ako súvisí plošná hustota indukovaného náboja s vektorom polarizácie?*
3. *Ktorá zložka vektora elektrickej indukcie je na oboch stranách rozhrania rovnaká?*
4. *Ktorá zložka intenzity elektrického poľa je na oboch stranách rozhrania rovnaká?*
5. *Aké náboje vznikajú na rozhraní kov - dielektrikum vo vonkajšom poli?*

6.4 Elektrická kapacita, energia nabitého vodiča

Kľúčové slová

elektrická kapacita, farad, energia nabitého vodiča, objemová hustota energie elektrického poľa.

6.4.1 Elektrická kapacita vodiča

Keď na osamelý vodič prenesieme voľný elektrický náboj, v jeho okolí vznikne elektrostatické pole. Pole môžeme opísať intenzitou elektrického poľa, alebo potenciálom (ich závislosťou od priestorových súradníc). Vnútro vodiča, vrátane jeho povrchu sa vyznačujú rovnakou hodnotou potenciálu. Veľkosť potenciálu závisí od množstva prineseného náboja, ale aj od geometrie a rozmerov vodiča. Praktická skúsenosť učí, že čím väčší je vodič, tým menší je jeho potenciál (pri rovnakom prenesenom náboji na vodič).

Vplyv rozmerov (geometrie) vodiča na potenciál sa vyjadruje veličinou, ktorá sa nazýva *elektrická kapacita* (značka C). Ak ide o izolovaný (osamelý) vodič, zavádza sa vzťahom

$$C = \frac{Q}{\varphi} \tag{6.4.1.1}$$

kde φ je absolútny potenciál na povrchu vodiča a Q prinesený voľný elektrický náboj nachádzajúci sa na jeho povrchu. Kapacita je kladná veličina, bez ohľadu na to, či na vodič prinášame kladný, alebo záporný náboj, lebo v prípade záporného náboja aj absolútny potenciál je záporný.

Jednotkou kapacity je **farad** (značka F). Takúto kapacitu má vodič, ktorého povrch prinesením náboja 1 C nadobudne absolútny potenciál 1 V.

Príklad 6.4.1.1 Vypočítajte kapacitu telesa, ktoré má tvar gule s polomerom R.
Riešenie Elektrostatické pole v okolí rovnomerne nabitej gule je rovnaké, akoby celý náboj Q bol sústredený v jej strede (pozri príklad 6.1.7.1). Preto absolútny potenciál tesne pri povrchu gule je $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$. Po dosadení do definičného vzorca pre kapacitu dostaneme výsledok

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (6.4.1.2)$$

Poznámka Výraz $4\pi\varepsilon_0$ má hodnotu rádovo 10^{-10} SI jednotiek. To znamená, že guľa by mala mať polomer približne 10^{+10} metrov, aby dosiahla kapacitu 1 F. To je polomer, ktorý sa rádovo približuje polomeru Slnka.
C.F.Gauss v Coulombovom zákone namiesto konštanty $1/(4\pi\varepsilon_0)$ použil bezrozmernú jednotku. V jeho sústave sa potom kapacita gule vyjadruje priamo jej polomerom. Preto jednotkou kapacity v jeho sústave bol centimeter.

Elektrická kapacita ako veličina sa najčastejšie používa v súvislosti s kondenzátormi. Kondenzátor predstavuje dva blízko pri sebe sa nachádzajúce vodiče (budeme ich nazývať elektródy - kladná a záporná), ktoré sa súčasne nabíjajú rovnako veľkými nábojmi s opačnými znamienkami. **Kapacita kondenzátora** sa definuje podielom náboja privedeného na jednu z elektród a rozdielu potenciálov medzi touto elektródou a druhou z nich podľa vzťahu:

$$C = \frac{Q_+}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{Q_-}{\varphi_- - \varphi_+} \qquad (6.4.1.3)$$

Z definičného vzťahu vidno, že aj kapacita kondenzátora je kladná veličina, lebo zatiaľ čo $\varphi_+ - \varphi_- > 0$, tak $\varphi_- - \varphi_+ < 0$.

Príklad 6.4.1.2 Vypočítajte kapacitu kondenzátora s rovinnými elektródami, keď plošný obsah každej z elektród je S a vzdialenosť medzi nimi je d. Medzi platňami je vákuum.
Riešenie V nabitom kondenzátore, keď na platniach je plošná hustota voľného náboja σ_v, intenzita elektrického poľa $E_v = \sigma_v/\varepsilon_0$ (pozri príklad 6.1.7.3). Na základe toho absolútna hodnota rozdielu potenciálov medzi elektródami je $U = \int_0^d E_v \, dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$.

Na každej elektróde je voľný náboj veľkosti $Q_v = S\sigma_v$. Dosadením do definičného vzorca pre kapacitu dostaneme

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} . \qquad (6.4.1.4)$$

Príklad 6.4.1.3 Vypočítajte kapacitu kondenzátora s rovinnými elektródami, keď plošný obsah každej z platní je S a vzdialenosť medzi nimi je d. Medzi platňami je dielektrikum s relatívnou permitivitou ε_r.
Riešenie V nabitom kondenzátore, keď na platniach je plošná hustota voľného náboja σ_v, po vložení dielektrika sa na povrchu dielektrickej platničky vytvorí viazaný elektrický náboj s plošnou hustotou σ_d. Tá vytvára intenzitu $E_d = \sigma_d / \varepsilon_o$ s opačným smerom ako intenzita vyvolaná voľnými nábojmi, preto sa výsledná intenzita zmenší. Veľkosť vektora elektrickej indukcie, ktorý súvisí iba s voľnými nábojmi, sa pritom zachová, takže $\sigma_v = D = \varepsilon E_c$, odkiaľ $E_c = D / \varepsilon = \sigma_v / \varepsilon = \sigma_v / (\varepsilon_o\varepsilon_r)$. Preto napätie medzi platňami je ε_r - krát menšie ako v prípade vákuového kondenzátora. Pre kapacitu kondenzátora tak dostaneme výsledok

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_v S}{E_c d} = \frac{\sigma_v S(\varepsilon_o\varepsilon_r)}{\sigma_v d} = (\varepsilon_o\varepsilon_r)\frac{S}{d} = \varepsilon\frac{S}{d} \qquad (6.4.1.5)$$

Príklad 6.4.1.4 Vypočítajte kapacitu kondenzátora s rovinnými elektródami, keď plošný obsah každej z rovinných platní je S a medzi platňami sú dve vrstvy dielektrík, prvá má permitivitu ε_1 a hrúbku d_1, druhá permitivitu ε_2 a hrúbku d_2.
Riešenie Vektor elektrickej indukcie má v oboch dielektrikách rovnakú veľkosť, takže podľa materiálového vzťahu platí $D = \varepsilon_1 E_{c1} = \varepsilon_2 E_{c2}$, pričom $D = \sigma_v$, t.j. rovná sa plošnej hustote voľného náboja. Celkový voľný náboj na platni je potom $Q = S\sigma_v$ a rozdiel potenciálov medzi platňami $U = E_{c1}d_1 + E_{c2}d_2 = \sigma_v\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$. Odtiaľ pre kapacitu získame výsledok

$$U = E_{c1}d_1 + E_{c2}d_2 = \sigma_v\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right) \qquad C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_v S}{\sigma_v\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)} = \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}$$

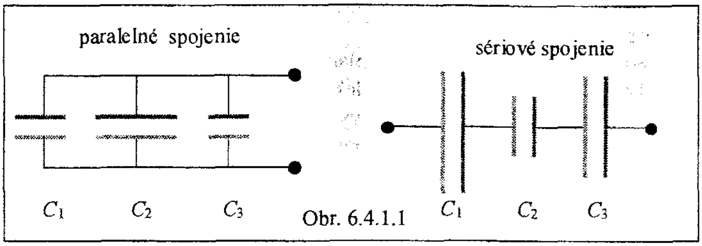
Kondenzátory možno navzájom spájať, pričom sa rozlišujú dve základné spojenia - **paralelné** (vedľa seba) a **sériové** (za sebou).

Pri paralelnom zapojení sa v podstate spoja plošné obsahy elektród, takže pri spojení dvoch kondenzátorov sa výsledná kapacita rovná súčtu ich kapacít. Sčítajú sa náboje na spojených elektródach a elektródy ktoré sú spojené vodičom, majú rovnaký potenciál. Medzi elektródami každého z kondenzátorov je rovnaké napätie U. Pre výslednú kapacitu (podľa obrázku) platí

$$C = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} + \frac{Q_3}{U} = C_1 + C_2 + C_3$$

Vo všeobecnosti pri paralelnom spojení kondenzátorov výsledná kapacita sa rovná súčtu kapacít jednotlivých kondenzátorov:

$$C = \sum_i C_i \qquad (6.4.1.6)$$



Obr. 6.4.1.1

Pri sériovom spojení nemôžeme na vnútorné kondenzátory priniesť zvonku voľný náboj. Po prinesení náboja na krajné elektródy sústavy kondenzátorov sa na vnútorných kondenzátoroch náboje separujú, ale súčet nábojov na nich sa rovná nule; napr. $C_{1+} + C_{2-} = 0$. Z toho vyplýva, že čo do veľkosti sú náboje na elektródach všetkých troch kondenzátorov rovnaké. Preto platia rovnice

$$C_1 = \frac{Q_1}{U_1}, \quad C_2 = \frac{Q_1}{U_2}, \quad C_3 = \frac{Q_1}{U_3} \; .$$

Okrem toho napätie medzi svorkami sústavy kondenzátorov sa rovná súčtu napätí na jednotlivých kondenzátoroch: $U = U_1 + U_2 + U_3$. Pre kapacitu sériovo zapojených kondenzátorov tak postupne dostaneme vzorce:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1}{U_1 + U_2 + U_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C} = \frac{U_1}{Q_1} + \frac{U_2}{Q_1} + \frac{U_3}{Q_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

z ktorých vyplýva všeobecný vzťah vyjadrujúci kapacitu sústavy do série zapojených kondenzátorov:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} \qquad (6.4.1.7)$$

Kontrolné otázky

1. *Ako je definovaná elektrická kapacita osameléno vodiča?*
2. *Ako sa nazýva jednotka elektrickej kapacity v SI ?*
3. *Aké vlastnosti má vodič s jednotkovou kapacitou?*
4. *Ako je definovaná elektrická kapacita kondenzátora?*
5. *Môže byť elektrická kapacita kondenzátora záporná?*
6. *Akým vzťahom sa vyjadruje elektrická kapacita kondenzátora s rovinnými elektródami?*
7. *Akým vzorcom sa vyjadruje kapacita sústavy paralelne spojených kondenzátorov?*
8. *Akým vzorcom sa vyjadruje kapacita sústavy sériovo spojených kondenzátorov?*

6.4.2 Energia nabitého vodiča

Postupné prinášanie elektrického náboja na osamelý vodič je spojené s prekonávaním odpudivej elektrickej sily medzi prinášaným nábojom a nábojom už sídliacim na vodiči. Pri postupnom prinášaní náboja vonkajšia sila - ktorá musí mať opačný smer ako elektrická sila - koná prácu, čím sa zväčšuje potenciálna energia náboja nahromadeného na vodiči. Ak sa na vodiči s kapacitou C už nachádza náboj Q, jeho povrch má absolútny potenciál $\varphi = Q / C$. Vonkajšia sila F_v, ktorá prinesie ďalší elementárny náboj $\mathrm{d}Q$ z nekonečna na povrch vodiča, vykoná elementárnu prácu $\mathrm{d}A = \varphi\,\mathrm{d}Q$ (pozri podrobnejší výpočet v dodatku D5), takže práca potrebná na nabitie vodiča postupným prinášaním elementárnych množstiev náboja sa vypočíta integráciou:

$$A = \int_0^{Q_k} \varphi\,\mathrm{d}Q = \int_0^{Q_k} \frac{Q}{C}\,\mathrm{d}Q = \frac{1}{2}\frac{Q_k^2}{C} \tag{6.4.2.1}$$

Vypočítaný výraz súčasne predstavuje energiu nabitého vodiča, ktorú označíme W_p. Možno ho ešte upraviť do ďalších tvarov, ak použijeme definičný vzorec kapacity vodiča (6.4.1.1):

$$W_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\varphi = \frac{1}{2}C\varphi^2 \tag{6.4.2.2}$$

Ak sú nabité viaceré vodiče nachádzajúce sa blízko pri sebe, energia takejto sústavy sa **rovná súčtu energií** jednotlivých nabitých vodičov :

$$W_p = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\,\varphi_i \tag{6.4.2.3}$$

kde Q_i je náboj na i - tom vodiči a φ_i jeho potenciál, ktorý je však ovplyvnený nie iba vlastným nábojom, ale aj nábojmi na ostatných vodičoch.

Špeciálnym prípadom sústavy vodičov je kondenzátor. Energia nabitého kondenzátora sa na základe vzorca (6.4.2.3) vyjadrí vzťahom:

$$W = \frac{1}{2}Q_+\varphi_+ + \frac{1}{2}Q_-\varphi_- = \frac{1}{2}Q_+(\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{1}{2}Q_+U \tag{6.4.2.4}$$

Aj tomuto vzorcu možno dať ďalšie tvary, podobne ako pri (6.4.2.2):

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{6.4.2.5}$$

Príklad 6.4.2.1 Aká veľká elektrická energia sa môže uskladniť v kondenzítore s kapacitou 100 μF, ak je kondenzátor dimenzovaný na elektrické napätie 12 V ? Aký veľký náboj Q_+ sa v kondenzátore pritom nahromadí na kladnej elektróde? Výsledky si porovnajte s parametrami autobatérie 12 V , 36 Ah .

Riešenie Energiu vypočítame pomocou vzorca (6.4.2.5), dosadením zadaných číselných údajov: $W = (0{,}5)CU^2 = (0{,}5)\cdot 100\cdot 10^{-6}\text{F} \cdot 12^2\,\text{V}^2 = 7{,}2\cdot 10^{-3}$ W·s. Náboj vypočítame pomocou vzťahu (6.4.1.3): $Q = CU = 10^{-4}\text{F}\cdot 12\,\text{V} = 1{,}2\cdot 10^{-3}$ C = $1{,}2\cdot 10^{-3}$ As.

Kontrolné otázky

1. *Akým vzorcom sa vyjadruje energia osameléhо nabitého vodiča?*
2. *Akým vzorcom sa vyjadruje energia sústavy nabitých vodičov?*
3. *Zhoduje sa jednotka energie nabitého vodiča so súčinom jednotiek z pravej strany vzorca?*
4. *Akým vzorcom sa vyjadruje energia nabitého kondenzátora?*
5. *Ak nabijeme vodič záporným nábojom, bude jeho energia záporná?*

6.4.3 Objemová hustota energie elektrického poľa

Elektrostatické pole v okolí nabitých telies siaha teoreticky nekonečne ďaleko, ale jeho intenzita i potenciál sa s rastúcou vzdialenosťou postupne zmenšujú. V paragrafe 6.4.2 bol odvodený vzťah vyjadrujúci energiu nabitého telesa. Túto energiu však možno chápať ako energiu elektrostatického poľa v okolí nabitého telesa, čo sa dá dokázať exaktným postupom. V tejto súvislosti je účelné zaviesť veličinu vyjadrujúcu energiu tohto poľa pripadajúcu na jednotku objemu, t.j. ***objemovú hustotu energie elektrického poľa.***

Poznámka Treba rozlišovať medzi elektrickou energiou, čo je technický pojem a energiou elektrického poľa, čo je veličina. Názov energia elektrického poľa sa používa aj v elektrostatike, používa sa všeobecne v náuke o elektrine.

Na odvodenie príslušného vzorca použijeme zjednodušený postup (pozri aj presný postup v dodatku D6), pomocou rovinného kondenzátora. Ak zanedbáme javy na okraji rovinných elektród, môžeme tvrdiť, že celé elektrostatické pole kondenzátora sa nachádza iba medzi nabitými platňami (pozri príklad 6.1.7.3).

Energia nabitého kondenzátora sa vyjadruje vzorcom (6.4.2.5) , podľa ktorého $W = \frac{1}{2}QU$. Náboj na platni vyjadríme ako súčin plošného obsahu platne S a plošnej hustoty voľného náboja σ_v : $Q = \sigma_v S$, napätie medzi platňami ako súčin celkovej intenzity medzi platňami a vzdialenosti medzi nimi: $U = E_c d$. To dosadíme do vzorca pre energiu:

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\sigma_v SE_c d = \frac{1}{2}\sigma_v E_c (Sd)$$

Súčin Sd predstavuje objem priestoru medzi platňami kondenzátora, a plošná hustota voľného náboja sa rovná elektrickej indukcii D medzi platňami (pozri paragraf 6.3.3). Vzorec vyjadrujúci energiu podľa toho upravíme:

$$W = \tfrac{1}{2} D E_c (Sd) \; .$$

(6.4.3.1)

Po vydelení **rovnice objemom** Sd , dostaneme **energiu pripadajúcu** na jednotku objemu:

$$w = \frac{W}{Sd} = \tfrac{1}{2} D E_c$$

(6.4.3.2)

Tento vzorec prepíšeme do vektorového tvaru, pričom medzi vektormi $\boldsymbol{E}_c$ a $\boldsymbol{D}$ je skalárny súčin:

$$w = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{E}_c \cdot \boldsymbol{D}$$

(6.4.3.3)

Vektorová podoba vzorca sa dá odvodiť exaktným postupom (dodatok D6), ktorý nie je viazaný na špeciálny prípad, ale je celkom všeobecný. Skalárny súčin vo vzorci naznačuje, že vektory $\boldsymbol{E}_c$ a $\boldsymbol{D}$ nemusia byť vždy rovnobežné. Úvahy na túto tému sú však nad rámec tohto textu.

Príklad 6.4.3.1 Vypočítajte objemovú hustotu energie elektrického poľa v rovinnom kondenzátore s kapacitou $C_1 = 100$ μF, nabitého na napätie 12 V, ak vieme, že vzdialenosť medzi elektródami je $d_1 = 1 \cdot 10^{-6}$ m a medzi elektródami je dielektrikum, ktorého relatívna permitivita $\mu_r = 5$.

Riešenie Treba vypočítať aká veľká je energia W_1 nahromadená v kondenzátore a objem τ priestoru medzi platňami kondenzátora. Objemová hustota energie sa rovná podielu týchto veličín:

$$w = \frac{W}{\tau} = \frac{0{,}5CU^2}{S_1 d_1} \; , \text{ ale } C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S_1}{d_1} \; , \text{ teda } w = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{0{,}5U^2}{d_1^2} = 3186 \text{ J/m}^3 \; .$$

Poznámka V poslednom vzorci vystupuje druhá mocnina podielu elektrického napätia medzi platňami kondenzátora a ich vzdialenosti, teda druhá mocnina intenzity elektrického poľa medzi platňami. Súčin $\varepsilon_0 \varepsilon_r E = D$, takže sme dostali zhodu so vzorcom (6.4.3.2).

Kontrolné otázky

1. *Akým vzorcom sa vyjadruje objemová hustota energie elektrického poľa?*
2. *Aká je jednotka SI objemovej hustoty energie elektrického poľa?*

Súhrn vzorcov

Definícia elektrického náboja	$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{F_1}{F_2}$
Coulombov zákon	$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \boldsymbol{r}_{12}$
Princíp superpozície síl	$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_i \frac{qQ_i}{\lvert(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)\rvert^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$
Definícia intenzity elektrického poľa	$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}$
Intenzita v okolí bodového náboja	$\boldsymbol{E}_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{r^3} \boldsymbol{r}$
Intenzita v okolí spojito rozloženého elektrického náboja	$\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\mathrm{d}Q}{\lvert\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}\rvert^3} (\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r})$
Definícia potenciálnej energie	$A = \int_A^B \boldsymbol{F}_{elst}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B Q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -[W_p(B) - W_p(A)]$
Vzájomná potenciálna energia dvoch bodových nábojov	$W_p = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r} + C$
Vzájomná potenciálna energia viacerých nábojov	$W_p = \frac{1}{2} \sum\sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}$
Definícia elektrického potenciálu	$\varphi\,(A) = \frac{W_p(A)}{q}$
Absolútny potenciál bodového náboja	$\varphi_Q = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r}$
Potenciál sústavy bodových nábojov	$\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_i \frac{Q_i}{r_i}$
Potenciál spojite rozloženého náboja	$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\mathrm{d}Q}{r}$

Vzťah medzi intenzitou a potenciálom	$\varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$
Vzťah medzi intenzitou a potenciálom	$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$
Gaussov zákon	$T = \oint\!\!\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_i Q_i$
Gaussov zákon v diferenciálnom tvare	$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_o}\rho(x,y,z)$
Elektrický moment dipólu	$\boldsymbol{p} = Q_+ \boldsymbol{a}$
Elektrický moment sústavy nábojov	$\boldsymbol{M}_e = \sum_i Q_i \boldsymbol{r}_i$
Elektrická polarizácia	$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\boldsymbol{M}_e}{\Delta\tau}, \qquad \boldsymbol{P} = \rho_+ \boldsymbol{a}$
Potenciál okolo elektrického dipólu	$\varphi = \frac{Q_+}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$
Intenzita v okolí elektrického dipólu	$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right]$
Moment síl pôsobiaci na dipól v homogénnom elektrickom poli	$\boldsymbol{M}_s = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$
Potenciálna energia dipólu v homogénnom elektrickom poli	$W_p = -pE\cos\varphi = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$
Vzťah medzi elektrickou indukciou, intenzitou elektrického poľa a elektrickou polarizáciou v dielektriku	Materiálový vzťah $\boldsymbol{D} = \varepsilon_o \boldsymbol{E}_c + \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}_c$
Elektrická susceptibilita χ, permitivita ε, relatívna permitivita ε_r	$\boldsymbol{P} = \varepsilon_o\chi \boldsymbol{E}_c, \quad \varepsilon_o(1+\chi) = \varepsilon_o\varepsilon_r = \varepsilon$
Prvá Maxwellova rovnica v diferenciálnom a v integrálnom tvare	$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho_v, \qquad \oint\!\!\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \sum_i Q_{vi}$
Objemová hustota viazaných nábojov v nehomogénnom dielektriku	$\rho_d = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}$

Intenzita elektrického poľa okolo bodového náboja v dielektriku	$E = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2}$
Lom siločiar na rozhraní dielektrík	$\frac{\mathrm{tg}\,\varphi_1}{\mathrm{tg}\,\varphi_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$
Elektrická kapacita osamelého vodiča	$C = \frac{Q}{\varphi}$
Elektrická kapacita kondenzátora	$C = \frac{Q_+}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{Q_-}{\varphi_- - \varphi_+}$
Elektrická kapacita rovinného kondenzátora	$C = \varepsilon \frac{S}{d}$
Kapacita paralelne zapojených kondenzátorov	$C = \sum_i C_i$
Kapacita do série zapojených kondenzátorov	$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$
Energia nabitého vodiča	$W_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q\varphi = \frac{1}{2} C\varphi^2$
Energia nabitého kondenzátora	$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$
Objemová hustota energie elektrického poľa	$w = \frac{1}{2} \boldsymbol{E_e} \cdot \boldsymbol{D}$

Slovník

absolútny elektrický potenciál (φ) – elektrický potenciál, pri ktorom vzťažný bod s nulovou hodnotou potenciálu leží v nekonečne; jednotka – volt (V)

atómová polarizácia – jeden z druhov polarizačných procesov, pri ktorom elektrické dipóly vznikajú pôsobením vonkajšieho elektrického poľa, protismerným posúvaním ťažiska kladného a ťažiska záporného náboja v jednotlivých atómoch dielektrika

bodový elektrický náboj – abstrakcia, podľa ktorej priestorovú veľkosť elektrického náboja nachádzajúceho sa na malej častici, možno považovať za zanedbateľne malú, a to z hľadiska vzdialeností, z ktorých posudzujeme jeho účinky

coulomb (C) – jednotka elektrického náboja v SI; veľkosťou predstavuje $6{,}25\cdot 10^{18}$ - násobok elementárneho elektrického náboja, t.j. náboja protónu

Coulombov zákon – zákon o vzájomnom silovom pôsobení dvoch bodových elektrických nábojov, podľa ktorého sila medzi nábojmi je úmerná súčinu veľkostí týchto nábojov a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzdialenosti

dĺžková hustota elektrického náboja – skalárna veličina, podiel elektrického náboja a dĺžky vlákna (vodiča), na ktorej sa tento náboj nachádza, t.j. náboj pripadajúci na jednotkovú dĺžku; jednotka - C/m

ekvipotenciálna plocha – plocha v trojrozmernom priestore, na ktorej sa elektrický potenciál vyznačuje všade rovnakou hodnotou

elektrická indukcia (D) – vektorová veličina charakterizujúca elektrické pole, ktorej veľkosť závisí iba od rozloženia voľných elektrických nábojov v priestore; vystupuje v materiálovom vzťahu $D = \varepsilon_o E + P$, i v Maxwellovej rovnici div $D = \rho_V$; jednotka - C/m^2

elektrická kapacita (C) – veličina definovaná ako podiel voľného elektrického náboja prineseného na izolovaný vodič a absolútneho elektrického potenciálu, ktorý sa tým na povrchu vodiča vytvorí; jednotka – farad (F)

elektrická konštanta, permitivita vákua (ε_o) – konštanta v Coulombovom zákone, ktorej hodnota $\varepsilon_o \approxeq 8{,}85\cdot 10^{-12}$ F/m

elektrická polarizácia (P) – vektorová veličina definovaná ako podiel súčtu momentov elektrických dipólov nachádzajúcich sa v istom objeme, a tohto objemu; jednotka – C/m^2

elektrická sila – sila pôsobiaca na časticu nesúcu elektrický náboj, ktorá nezávisí od rýchlosti častice vzhľadom na pozorovateľovu vzťažnú sústavu (pokiaľ rýchlosť častice nie je porovnateľná s rýchlosťou svetla)

elektrická susceptibilita (χ) – veličina sprostredkujúca vzťah medzi elektrickou polarizáciou P a celkovou intenzitou elektrického poľa E_c v dielektriku; súvisí s relatívnou permitivitou vzťahom $\chi = \varepsilon_r - 1$; bezrozmerná veličina

elektrické napätie (U) – rozdiel elektrických potenciálov medzi dvomi bodmi v priestore; jednotka – volt (V)

elektrický dipól – dvojica elektrických nábojov rovnakej veľkosti, ale s opačnými znamienkami, ktorých vzájomná vzdialenosť je zanedbateľná v porovnaní so vzdialenosťami, z ktorých pozorujeme účinky elektrického dipólu; kvantitatívne sa charakterizuje elektrickým momentom

elektrický moment dipólu (p) – vektorová veličina, definovaná ako skalárny násobok polohového vektora začínajúceho v zápornom náboji dipólu a končiaceho v kladnom náboji, pričom násobiacim skalárom je veľkosť kladného elektrického náboja dipólu; jednotka - C·m

elektrický moment sústavy nábojov (M_e) – vektorový súčet skalárnych násobkov polohových vektorov bodových elektrických nábojov sústavy, pričom násobiacimi skalármi sú príslušné elektrické náboje, vrátane ich znamienka

elektrický náboj (Q) – skalárna veličina kvantitatívne charakterizujúca elektricky nabité telesá z hľadiska ich vzájomného silového pôsobenia; jednotka - coulomb (C)

elektrický potenciál (φ) – skalárna veličina definovaná podielom práce elektrických síl vynaloženej na premiestnenie elektrického náboja zo vzťažného miesta do miesta (bodu) v ktorom potenciál určujeme, a tohto náboja; jednotka - volt (V)

elektrostatické pole – pole vytvárané elektrickými nábojmi, ktoré sa vzhľadom na pozorovateľovu vzťažnú sústavu nepohybujú

elektrostatické tienenie – odtienenie silných elektrostatických polí kovovým pletivom alebo plechmi, na základe skutočnosti, že v dutine kovového vodiča je v ustálenom stave intenzita elektrického poľa nulová

elektrostatika – súčasť náuky o elektrine, zaoberajúca sa vzájomným pôsobením elektrických nábojov, ktoré sú vzhľadom na pozorovateľovu vzťažnú sústavu v pokoji

elementárny elektrický náboj (e)– elektrický náboj protónu, najmenší experimentálne zistený elektrický náboj; $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C

energia elektricky nabitého vodiča – energia rovnajúca sa práci potrebnej na nabitie izolovaného vodiča postupným prinášaním elektrického náboja, čo je spojené s prekonávaním odpudivej elektrickej sily medzi prinášaným nábojom a nábojom už sídliacim na vodiči

energia nabitého kondenzátora – energia rovnajúca sa práci potrebnej na nabitie kondenzátora

farad (F) – jednotka elektrickej kapacity; predstavuje kapacitu izolovaného vodiča, ktorý po nabití nábojom veľkosti 1 C nadobudne absolútny potenciál 1 V

Faradayova klietka – priestor ohraničený uzemnenou uzavretou plochou z kovového pletiva, alebo plechov, ktorým sa realizuje elektrostatické tienenie

Gaussov zákon – zákon vyjadrujúci súvislosť medzi tokom intenzity elektrického poľa cez uzavretú plochu a elektrickými nábojmi nachádzajúcimi sa v objeme ohraničenom touto plochou

Gaussove polohy – špeciálne miesta v okolí dipólu (elektrického, aj magnetického), nachádzajúce sa na priamke v predĺžení vektora momentu elektrického dipólu (prvá Gaussova poloha), alebo na priamke kolmej na tento vektor (druhá Gaussova poloha)

intenzita elektrického poľa – vektorová veličina, definovaná podielom sily pôsobiacej na elektrický náboj v danom mieste a tohto náboja

iónová polarizácia – jeden z druhov polarizačných procesov, ktorý vzniká v látkach s viacatómovými molekulami, ktoré sa skladajú z iónov, a teda majú nenulový elektrický moment; vonkajším elektrickým poľom sa tieto momenty zväčšujú a navyše orientujú do smeru poľa

kapacita vodiča – skalárna veličina vyjadrujúca schopnosť vodiča prijať pri danej hodnote potenciálu isté množstvo elektrického náboja

kondenzátor – sústava dvoch navzájom izolovaných vodičov, obyčajne plochých, s malou vzdialenosťou medzi nimi

konzervatívne pole – fyzikálne pole, v ktorom práca vykonaná pri premiestňovaní častice, závisí iba od začiatočnej a koncovej polohy častice, nie od cesty medzi týmito bodmi

Laplaceova diferenciálna rovnica – rovnica, ktorú spĺňa potenciál elektrostatického poľa v miestach, kde sa nenachádzajú elektrické náboje

materiálový vzťah – vzťah medzi vektormi elektrickej indukcie, intenzity elektrického poľa a elektrickej polarizácie v dielektriku

Maxwellova rovnica č.1. – parciálna diferenciálna rovnica, podľa ktorej v každom bode elektrostatického poľa sa divergencia elektrickej indukcie rovná objemovej hustote voľného elektrického náboja

moment elektrického dipólu → **elektrický moment dipólu**

objemová hustota elektrického náboja (ρ) – podiel elektrického náboja nachádzajúceho sa v istom objeme a tohto objemu; jednotka - C/m^3

objemová hustota energie elektrického poľa (w) – podiel energie elektrického poľa pripadajúcej na istý objem a tohoto objemu; jednotka - J/m^3

orientačná polarizácia – polarizačný proces najmä v kvapalinách a v plynoch, ktorých molekuly majú vlastné elektrické momenty, ale orientované náhodne; vplyvom vonkajšieho elektrostatického poľa sa elektrické momenty molekúl začnú orientovať do smeru intenzity vonkajšieho poľa

permitivita (ε) – súčin elektrickej konštanty a relatívnej permitivity

permitivita vákua $\rightarrow$ elektrická konštanta

plošná hustota elektrického náboja (σ) – podiel elektrického náboja nachádzajúceho sa na určitej ploche a jej plošného obsahu; jednotka - C/m^2

Poissonova diferenciálna rovnica – rovnica, ktorú spĺňa potenciál elektrostatického poľa v miestach, kde sa nachádzajú elektrické náboje

polarizácia dielektrika – proces v dielektriku, pri ktorom sa vplyvom vonkajšieho elektrického poľa kladné a záporné elektrické náboje posúvajú navzájom opačnými smermi, alebo v dielektriku sa nachádzajúce elektrické dipóly sa natáčajú, čím vektor elektrickej polarizácie dielektrika nadobúda nenulovú hodnotu

potenciál elektrického poľa $\rightarrow$ elektrický potenciál

potenciálna energia elektrického náboja – energia rovnajúca sa práci, ktorú musia vykonať vonkajšie sily pri premiestnení náboja zo vzťažného miesta do miesta, v ktorom sa určuje jeho potenciálna energia

princíp superpozície síl – princíp, podľa ktorého sila pôsobiaca medzi dvomi elektrickými nábojmi nie je ovplyvnená prítomnosťou iných nábojov - výsledná sila pôsobiaca na elektrický náboj v elektrickom poli vytvorenom viacerými elektrickými nábojmi, sa rovná vektorovému súčtu síl od jednotlivých nábojov

relatívna permitivita (ε_r) – bezrozmerná veličina, kvantitatívne vyjadrujúca schopnosť dielektrického prostredia zoslabovať intenzitu elektrického poľa vytváranú voľnými elektrickými nábojmi

siločiary – myslené čiary v elektrickom poli, ktorých základnou vlastnosťou je, že vektor intenzity elektrického poľa je v ľubovolnom mieste poľa dotyčnicou niektorej zo siločiar

tok intenzity elektrického poľa – plošný integrál intenzity elektrického poľa

viazaný elektrický náboj– elektrický náboj v dielektriku viazaný na jednotlivé atómy, ktorý sa nemôže premiestňovať na makroskopické vzdialenosti, iba mierne posúvať

voľný elektrický náboj – náboj, ktorý sa môže v telese premiestňovať na makroskopické vzdialenosti a má pôvod buď priamo v telese, alebo mohol byť na teleso prinesený

volt (V) – jednotka elektrického potenciálu a elektrického napätia

zákon zachovania elektrického náboja – zákon vyjadrujúci skutočnosť, že v uzavretej sústave, z ktorej náboj neuniká, ani do nej neprichádza, sa celkový súčet kladného a záporného elektrického náboja nemení

Dodatky

D1
Jednotka priestorového uhla - steradián

Priestorový uhol je tvorený povrchovými priamkami kuželovej, alebo inej podobnej plochy, pri ktorej povrchové priamky vychádzajú z jedného bodu. Jednotkou priestorového uhla v SI je **steradián** , ktorý sa zavádza podobne ako **radián** pre rovinný uhol. Na obrázku sú oba prípady znázornené.
Pre jednotku rovinného uhla - *uhlový stupeň* - platí úmera

$$\frac{s}{2\pi R} = \frac{\varphi}{360} \qquad (1)$$

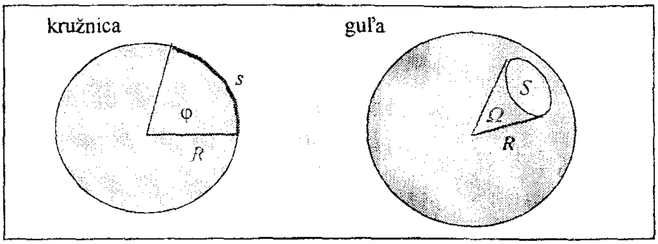
z ktorej pre uhol φ vychádza vzťah

$$\varphi = \frac{360}{2\pi}\frac{s}{R} .$$

Nevýhodou jednotky *uhlový stupeň* je, že vo vzťahu vystupuje prevodový faktor $360/2\pi$. Keby sa do úmery (1) namiesto čísla 360 dosadilo číslo 2π, úmera by sa zjednodušila :

$$\frac{s}{2\pi R} = \frac{\varphi}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{s}{R} . \qquad (2)$$

To však znamená, že namiesto jednotky *uhlový stupeň* , ktorých do plného uhla vojde 360, bola zavedená jednotka *radián*, ktorých do plného uhla vojde $2\pi \cong 6{,}28...$, čo je iracionálne číslo. Výhodou však je jednoduchý vzťah (2) medzi dĺžkou oblúka, uhlom a polomerom kružnice.



Podobným spôsobom sa postupuje pri zavedení jednotky priestorového uhla - **steradiánu**. Vychádza sa opäť z úmery (veličiny sú znázornené na obrázku, S je plošný obsah guľového vrchlíka, R polomer gule a Ω priestorový uhol)

$$\frac{S}{4\pi R^2} = \frac{\Omega}{4\pi} \qquad \Rightarrow \qquad S = R^2\,\Omega\,. \tag{3}$$

Z takto zavedenej jednotky priestorového uhla vyplýva, že plný priestorový uhol, pokrývajúci celý povrch gule je 4π steradiánov.

Zo vzorca (3) vyplýva, že pre diferenciálne malú plôšku dS platí vzťah

$$\mathrm{d}S = R^2\,\mathrm{d}\Omega \tag{4}$$

použitý v hlavnom texte pri odvodzovaní Gaussovho zákona.

D2
Odvodenie vzťahu pre elektrický moment homogénne spolarizovanej platničky

Pri korektnom postupe upravíme vzorec (6.2.1.3) do tvaru zodpovedajúcemu spojitému rozloženiu nábojov:

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{e} = \int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}q\;, \tag{1}$$

pričom budeme integrovať po oboch stranách platničky. Preto integrál v tomto vzorci rozdelíme na dve časti - na integrál po ploche s kladnými nábojmi a integrál po ploche so zápornými nábojmi:

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{e} = \int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}q = \int \boldsymbol{r}_+\,\mathrm{d}q_+ + \int \boldsymbol{r}_-\,\mathrm{d}q_-\,. \tag{2}$$

Každému elementárnemu náboju dq_+ nachádzajúcemu sa na jednej strane platničky zodpovedá rovnako veľký náboj opačného znamienka na druhej strane, a to vo vzdialenosti b ktorej možno priradiť vektor $\boldsymbol{b}$ s veľkosťou b a smerujúci od steny so záporným viazaným nábojom ku stene s kladným nábojom (obr. 6.3.2.1). Medzi vektorom $\boldsymbol{b}$ a vektormi $\boldsymbol{r}_+$ a $\boldsymbol{r}_-$ platí zrejme vzťah:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r}_-$$

Takúto dvojicu elementárnych nábojov možno chápať ako elementárny dipól, čo využijeme na dokončenie výpočtu začatého vzťahom (1):

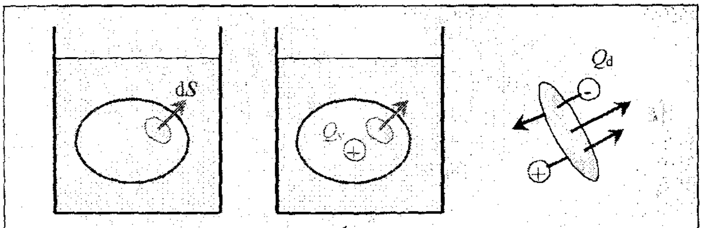
$$M_e = \int r\,\mathrm{d}q = \int r_+\,\mathrm{d}q_+ + \int r_-\,\mathrm{d}q_- = \int (r_+ - r_-)\mathrm{d}q_+ = \int b\,\mathrm{d}q_+ = bQ_{d+} = bS\sigma_{d+} \qquad (3)$$

lebo $Q_{d+} = \sigma_{d+}S$. Výsledný vzťah sa zhoduje so vzorcom (6.3.2.2)

D3
Zavedenie vektora elektrickej indukcie

V dielektriku, napríklad demineralizovanej vode, zvolíme uzavretú plochu (obr. a), na ktorú aplikujeme Gaussov zákon.(§ 6.1.7) Keďže v dielektriku sa normálne nenachádzajú voľné elektrické náboje Q_v, a navyše kladné a záporné viazané náboje Q_d sú vzájomne vykompenzované, podľa Gaussovho zákona platí rovnica

$$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\{\sum Q_{vi} + \sum Q_{di}\} = 0\ . \qquad (1)$$



a b c

Keď do uvažovanej plochy vložíme voľný elektrický náboj $+Q_v$ (obr. b), situácia sa zmení. V uvažovanej uzavretej ploche pribudol voľný náboj, ale navyše sa viazané elektrické náboje molekúl dielektrika z pôvodných polôh mierne posunú, z molekúl vzniknú dipóly. Kladné viazané náboje sú od vloženého kladného náboja odpudzované, záporné k nemu priťahované. Preto cez elementárnu plôšku d$\boldsymbol{S}$ na uvažovanej uzavretej ploche prechádzajú kladné náboje z uzavretej plochy von, záporné vstupujú dnu (obr. c).
Predpokladajme, že každý kladný viazaný náboj sa posunie o $(\boldsymbol{a}_+)$, záporný o $(\boldsymbol{a}_-)$. Ak objemové hustoty týchto nábojov sú ρ_{d+}, resp. ρ_{d-}, cez elementárnu plôšku d$\boldsymbol{S}$ prejdú náboje

$$\mathrm{d}Q_+ = \rho_{d+}(\boldsymbol{a}_+ \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}) \qquad (2)$$

$$\mathrm{d}Q_- = \rho_{d-}(\boldsymbol{a}_- \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}) \qquad (3)$$

lebo skalárny súčin $(\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S})$ má význam objemu a vynásobený objemovou hustotou náboja predstavuje náboj obsiahnutý v tomto objeme. Vektor d$\boldsymbol{S}$ je podľa všeobecnej dohody orientovaný vždy z uzavretej plochy von, takže ak kladné náboje vychádzajú z plochy von, skalárny súčin $(\boldsymbol{a}_+ \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S})$ je kladný. Kladný je teda aj výraz (2), lebo objemová hustota kladných nábojov je kladná. Skalárny súčin ($\boldsymbol{a}_- \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$) je záporný, ale po vynásobení objemovou hustotou záporného náboja (ktorá je záporná), aj výraz (3) je kladný. Výsledok sa dá teda interpretovať tak, ako keby cez elementárnu plôšku odišiel von kladný náboj veľkosti

$$\mathrm{d}Q_{\mathrm{von}} = \rho_{\mathrm{d}+}(\boldsymbol{a}_+ \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}) + \rho_{\mathrm{d}-}(\boldsymbol{a}_- \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}) = \rho_{\mathrm{d}+}(\boldsymbol{a}_+ - \boldsymbol{a}_-)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\rho_{\mathrm{d}+}\boldsymbol{a})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

lebo v dielektriku platí $\rho_{\mathrm{d}-} = -\rho_{\mathrm{d}+}$. Pritom sme označili $(\boldsymbol{a}_+ - \boldsymbol{a}_-) = \boldsymbol{a}$, čo je v elektrickom dipóle vektor začínajúci v zápornom a končiaci v kladnom náboji.
Výraz $(\rho_{\mathrm{d}+}\boldsymbol{a})$ sa podľa vzorca (6.2.1.9) rovná vektoru elektrickej polarizácie $\boldsymbol{P}$, takže platí vzťah $\mathrm{d}Q_{\mathrm{von}} = \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Integrál z tohto výrazu sa rovná náboju, ktorý vyšiel cez celú uzavretú plochu:

$$Q_{\mathrm{von}} = \oiint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \; .$$

Na pravej strane Gaussovho zákona (1) súčet nábojov už nebude nulový, ale bude tam súčet vloženého voľného náboja Q_{v} a nevykompenzovaného viazaného náboja, ktorý tam z pôvodne neutrálneho stavu vznikol odchodom časti kladného viazaného náboja. Gaussov zákon tak nadobudne tvar:

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}[Q_{\mathrm{v}} + (0 - Q_{\mathrm{von}})] \quad \Rightarrow \quad \oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q_{\mathrm{v}} - \oiint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \right).$$

Posledný výraz upravíme tak, aby na pravej strane zostal iba voľný elektrický náboj:

$$\oiint_S (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_{\mathrm{v}} \; .$$

Výraz pod integrálom, t.j.

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

sa považuje za novú veličinu - **elektrickú indukciu** (značka $\boldsymbol{D}$), ktorá súvisí iba s voľným elektrickým nábojom Q_{v} . Gaussov zákon (1) tak nadobudne tvar

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_{\mathrm{v}} \; .$$

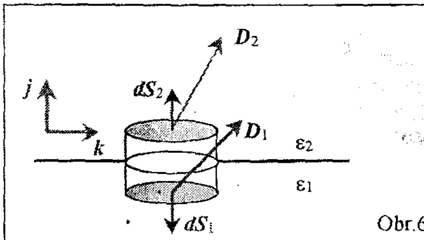
D4

Dôkaz zachovania normálovej zložky vektora D na rozhraní dielektrík

Dôkaz sa opiera o Maxwellovu rovnicu v integrálnom tvare. Časť rozhrania obklopíme uzavretou valcovou plochou s veľmi malou výškou, ktorej jedna základňa leží pod rozhraním, druhá nad ním. Podľa predpokladu vo valci sa nenachádza voľný náboj (biela plôška na rozhraní), takže podľa Maxwellovej rovnice platí

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \iint_{Z1} \boldsymbol{D}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 + \iint_{Z2} \boldsymbol{D}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = 0 \tag{a}$$

Predpokladajme, že základne valca sú dostatočne malé, takže vektor $\boldsymbol{D}$ má na nich konštantnú hodnotu. Potom môžeme integrály vyjadriť ako skalárne súčiny:



Obr.6.3.6.3

$$\iint_{Z1} \boldsymbol{D}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{D}_1\cdot \boldsymbol{S}_1 \ , \qquad \iint_{Z2} \boldsymbol{D}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{D}_2\cdot \boldsymbol{S}_2 \tag{b}$$

Všetky vektory vyjadríme ako lineárnu kombináciu jednotkových vektorov $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{D}_1 = D_{1n}\boldsymbol{j} + D_{1t}\boldsymbol{k} \ , \quad \boldsymbol{D}_2 = D_{2n}\boldsymbol{j} + D_{2t}\boldsymbol{k} \ , \quad \boldsymbol{S}_1 = -S\boldsymbol{j} \ , \boldsymbol{S}_2 = S\boldsymbol{j} \ , \tag{c}$$

kde S je plošný obsah základní ($S_1 = S_2 = S$). Po dosadení vzťahov (b) a (c) do rovnice (a) dostaneme :

$$\boldsymbol{D}_1\cdot\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{D}_2\cdot\boldsymbol{S}_2 = 0$$

$$(D_{1n}\boldsymbol{j} + D_{1t}\boldsymbol{k})\cdot(-S\boldsymbol{j}) + (D_{2n}\boldsymbol{j} + D_{2t}\boldsymbol{k})\cdot(S\boldsymbol{j}) = 0$$

$$-D_{1n}S + D_{2n}S = 0 \ ,$$

odkiaľ po vykrátení plošného obsahu dostaneme už výsledok

$$D_{1n} = D_{2n}$$

D5
Výpočet práce vonkajšej sily pri nabíjaní osameleho telesa

Výpočet práce vonkajšej sily vychádza zo vzorca na výpočet rozdielu potenciálov (6.1.6.3), ktorý vynásobíme elektrickým nábojom Q:

$$Q\,(\varphi_2 - \varphi_1) = -Q\int_1^2 \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_1^2 Q\,\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_1^2 \boldsymbol{F}_{el}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = +\int_1^2 \boldsymbol{F}_{vonk}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = A$$

Pri prenášaní náboja z nekonečna, kde kladieme $\varphi_1 \equiv \varphi_\infty = 0$, pre prácu vonkajšej sily $\boldsymbol{F}_{\mathrm{vonk}}$ dostaneme

$$Q\varphi_2 = A\ ,$$

odkiaľ pre diferenciál práce pri prenesení elementárneho množstva náboja vyplýva vzťah použitý v hlavnom texte:

$$\mathrm{d}Q\,\varphi_2 = \mathrm{d}A\ .$$

D6
Všeobecné odvodenie vzorca vyjadrujúceho objemovú hustotu energie elektrického poľa

Energia sústavy nabitých vodičov bola vyjadrená vzorcom

$$W = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i Q_i\ ,$$

ktorý zmeníme do podoby zodpovedajúcej spojitému rozdeleniu elektrického náboja v priestore:

$$W = \tfrac{1}{2}\int \varphi\,\mathrm{d}Q \tag{a}$$

kde φ je potenciál v bode, v ktorom sa nachádza element voľného náboja $\mathrm{d}Q$. Tento element náboja sa nachádza v elementárnom objeme $\mathrm{d}\tau$ a vyjadríme ho prostredníctvom jeho objemovej hustoty: $\mathrm{d}Q = \rho_v\,\mathrm{d}\tau$. Výraz dosadíme do integrálu (a):

$$W = \tfrac{1}{2}\int \varphi\,\mathrm{d}Q = \tfrac{1}{2}\iiint \varphi\,\rho_v\,\mathrm{d}\tau \tag{b}$$

Objemovú hustotu voľného náboja vyjadríme podľa I. Maxwellovej rovnice: $\rho_v = \mathrm{div}\boldsymbol{D}$, a dosadíme do rovnice (b):

$$W = \tfrac{1}{2}\iiint \varphi\,\mathrm{div}\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\tau \tag{c}$$

Ďalej upravíme výraz $\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{D})$, pričom výraz v zátvorke budeme derivovať ako súčin (operácia divergencia predpisuje parciálne derivácie):

$$\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{D}) = \nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D}) = \nabla_\varphi\cdot(\varphi\boldsymbol{D}) + \nabla_D\cdot(\varphi\boldsymbol{D}) = (\nabla_\varphi\varphi)\cdot\boldsymbol{D} + (\nabla_D\cdot\boldsymbol{D})\varphi = (\mathrm{grad}\varphi)\cdot\boldsymbol{D} + \varphi\,\mathrm{div}\boldsymbol{D} =$$
$$= \varphi\,\mathrm{div}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}_c\cdot\boldsymbol{D}$$

Do integrálu v rovnici (c) treba dosadiť výraz $(\varphi\ \mathrm{div}\boldsymbol{D})$, ktorý sa podľa úpravy rovná

$$\varphi \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{D}) + \boldsymbol{E}_c \cdot \boldsymbol{D} \ .$$

Po jeho dosadení pre energiu dostaneme:

$$W = \tfrac{1}{2}\iiint \operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{D})\,\mathrm{d}\tau + \tfrac{1}{2}\iiint \boldsymbol{E}_c \cdot \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\tau = \tfrac{1}{2}\oint\!\!\oint(\varphi\boldsymbol{D})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \tfrac{1}{2}\iiint \boldsymbol{E}_c \cdot \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(d)}$$

pričom sme pri zámene objemového integrálu na integrál cez uzavretú plochu použili Gaussovu integrálnu vetu.

Ak chceme vypočítať celú energiu elektrostatického poľa okolo nábojov, musíme integrovať cez veľmi veľký objem a teda aj uzavretá plocha v prvom integráli musí mať obrovské rozmery. Ak by sme ju chápali ako guľu, obsah jej povrchu by bol úmerný druhej mocnine polomeru. Pod integrálom vystupuje súčin potenciálu, ktorý sa zmenšuje s prvou mocninou vzdialenosti, a elektrickej indukcie, ktorá sa zmenšuje s druhou mocninou vzdialenosti. Preto ich súčin sa zmenšuje s treťou mocninou vzdialenosti. To znamená, že ak je uzavretá plocha extrémne veľká, prvý z dvoch integrálov v rovnici (d) sa rovná nule. Energia elektrického poľa sa preto rovná objemovému integrálu, v ktorom ako integrovaná funkcia vystupuje objemová hustota energie elektrického poľa

$$w = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{E}_c \cdot \boldsymbol{D} \ .$$

Úlohy

Sily, intenzita, potenciál a práca vo vákuu

1. Dva rovnako veľké elektrické náboje sa nachádzajú na malých guľôčkach, ktorých polomery sú zanedbateľné v porovnaní s ich vzájomnou vzdialenosťou $d = 20$ cm. Pôsobia na seba silou $F = 0{,}04$ N. Aké veľké sú tieto náboje?

Výsledok: $Q = 4 \cdot 10^{-7}$ C

2. V začiatku súradnicovej sústavy je umiestnený elektrický náboj $Q_1 = 2\ \mu\mathrm{C}$, v bode B so súradnicami (9 cm, 12 cm) náboj $Q_2 = -3\ \mu\mathrm{C}$. Vypočítajte súradnice vektora elektrickej sily $\boldsymbol{F}$ pôsobiacej na náboj Q_2 !

Výsledok: $F_x = -0{,}00144$ N , $F_y = -0{,}00192$ N

3. Dve rovnako veľké kovové guľôčky so zanedbateľnými polomermi sú zavesené na veľmi dlhých nitiach (s dĺžkou l) so spoločným bodom závesu a dotýkajú sa. Po ich nabití sa rozostúpia na vzdialenosť $d_1 = 10$ cm $\ll l$. Čo sa bude diať, ak jednu z nich vybijeme? V akej vzájomnej vzdialenosti d_2 sa potom ustália?

Výsledok: $d_2 = d_1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = 6{,}3$ cm

4. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa v strede spojnice dvoch bodových elektrických nábojov, keď $Q_1 = 3$ nC, $Q_2 = -2$ nC, a vzdialenosť medzi nábojmi $d = 6$ cm.

Výsledok: $E = 5 \cdot 10^4$ N/C

5. O koľko elementárnych elektrických nábojov (N_e) je porušená nábojová rovnováha prachovej častice (jej hmotnosť $m = 0{,}001$ g), ak sa v elektrostatickom poli s intenzitou $E = 10$ V/m pohybuje zrýchlením $a = 10$ m/s^2 ? Koľko protónov (N_p) obsahuje táto častica, ak predpokladáme, že tvoria polovicu jej hmotnosti? (Hmotnosť protónu $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, $e = 1{,}62 \cdot 10^{-19}$ C)

Výsledok: $N_e \cong 6{,}25 \cdot 10^{11}$, $N_p \cong 3 \cdot 10^{20}$

6. Na osi x sa nachádzajú dva bodové elektrické náboje - v mieste $x_1 = 3$ cm náboj $Q_1 = 4$ nC, v mieste $x_2 = 9$ cm náboj $Q_2 = -2$ nC . Vypočítajte súradnicu x_3 bodu na osi x, v ktorom je výsledná intenzita elektrického poľa nulová!

Výsledok: $x_3 = 23{,}48$ cm, druhý koreň kvadratickej rovnice nevyhovuje úlohe

7. Vo vrcholoch štvorca so stranou $a = 12$ cm sú umiestnené elektrické náboje, veľkosťami rovnaké ($|Q| = 2$ nC), pričom dva náboje sú kladné, dva záporné. Uveďte, ako musia byť náboje rozmiestnené, aby intenzita elektrického poľa uprostred štvorca bola nulová. Vypočítajte veľkosť intenzity elektrického poľa uprostred štvorca, keď sú náboje rozmiestnené inak.

Výsledok: b) $E \cong 7 \cdot 10^3$ N/C

8. Dva bodové elektrické náboje $Q_1 = +2$ nC, $Q_2 = -2$ nC, sa nachádzajú vo vrcholoch A, B rovnostranného trojuholníka, ktorého strana má dĺžku $a = 10$ cm. Akú veľkosť E_1 , a aký smer má vektor intenzity elektrického poľa vo vrchole C ?

Výsledok: $E \cong 18 \cdot 10^2$ N/C

9. Základňa rovnoramenného trojuholníka s vrcholmi A, B má dĺžku a , výška trojuholníka je v . Vo vrcholoch základne sú rovnaké náboje Q . Vypočítajte intenzitu elektrického poľa vo vrchole C a ukážte, že ak $v >> a$, potom vzorec vyjadrujúci intenzitu nadobudne tvar, ako keby sa od vrcholu C vo vzdialenosti v nachádzal nábol $2Q$!

Výsledok: $\lim\limits_{a/v \to 0} E_C = 2 \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q}{v^2}$

10. Vlákno, ktoré má dĺžku $l = 50$ cm, je nabité nábojom $Q = 15$ nC , pričom náboj je rovnomerne rozdelený po celom vlákne. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa E_1 v bode B, ktorý leží na priamke kolmej na vlákno a prechádzajúcej stredom vlákna. Bod B leží vo vzdialenosti $d = 10$ cm od vlákna. Na základe výsledku vypočítajte intenzitu E_2 v limitnom prípade - keď $d >> l$!

Výsledok: $E_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q}{d\sqrt{(l^2/4) + d^2}} \cong 5014$ V/m

11. Na osi kruhového závitu s polomerom $R = 5$ cm, nabitého nábojom $+Q = 5\ \mu C$, sa vo vzdialenosti $a = 3$ cm od roviny závitu, nachádza náboj $q = -2\ \mu C$. Akú prácu A vykonajú sily elektrostatického poľa pri presunutí náboja do vzdialenosti $3a$?

Výsledok: $A = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{R^2+9a^2}}\right) \cong -0{,}67$ J

12. Vypočítajte absolútny potenciál φ elektrostatického poľa na osi kruhovej platne vo vzdialenosti $a = 20$ cm od roviny platne, keď polomer platne $R = 10$ cm a elektrický náboj na platni $Q = 10\ \mu C$!

Výsledok: $\varphi = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(\sqrt{a^2+R^2} - a) \cong 4{,}25 \cdot 10^5$ V

13. Kruhové vlákno (závit) s polomerom R je nabité elektrickým nábojom Q . Vypočítajte veľkosť vektora intenzity elektrického poľa na osi závitu, vo vzdialenosti a od jeho roviny a nájdite vzdialenosť a_1 , v ktorej intenzita nadobúda maximálnu hodnotu.

Výsledok: $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \dfrac{a}{(a^2+R^2)^{3/2}}$, $a_1 = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

14. Vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka, so stranou $a = 10$ cm, sú umiestnené bodové elektrické náboje $Q = +3\ \mu C$. Akú prácu A vykonajú sily elektrostatického poľa , keď sa náboj $q = -2\ \mu C$ premiestni zo stredu trojuholníka (bod G), do stredu jednej z jeho strán (bod H)?

Výsledok: $A = q(\varphi_H - \varphi_G) = -0{,}041 \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{a} = 0{,}022$ J

15. Vlákno s tvarom úsečky, ktoré má dĺžku $l = 20$ cm, je rovnomerne nabité nábojom $Q = +3\ \mu C$. Na priamke, ktorá je predĺžením vlákna, sa v bode A, vo vzdialenosti $a = 10$ cm od konca vlákna, nachádza elektrický náboj $q = -2\ \mu C$. Ako sa zmení potenciálna energia sústavy náboj - vlákno, keď sa náboj q premiestni do bodu B vo vzdialenosti $b = 20$ cm od konca vlákna?

Výsledok: $\Delta W_p = q(\varphi_B - \varphi_A) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qQ}{l}\left(\ln\dfrac{b+l}{b} - \ln\dfrac{a+l}{a}\right) > 0$

16. Tenká tyč s dĺžkou l , nabitá elektrickým nábojom Q , vytvára vo svojom okolí elektrické pole. Vypočítajte veľkosť absolútneho potenciálu na priamke, ktorá je predĺžením tyče, vo vzdialenosti x od konca tyče. Potom pomocou gradientu potenciálu vypočítajte intenzitu v tomto bode, a presvedčte sa, že pre $x >> l$ vzorec nadobudne tvar platný pre bodový elektrický náboj Q .

Výsledok: $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{l}\ln\dfrac{x+l}{x}$, $E_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{x(l+x)}$

Gaussov zákon

17. Vo vzdialenosti $d = 10$ mm od veľmi dlhého priameho vlákna, sa vznáša prachová častica, ktorej elektrická neutralita je porušená dvomi chýbajúcimi elektrónmi. Vlákno je rovnomerne nabité dĺžkovou hustotou elektrického náboja $\lambda = +2\cdot10^{-9}$ C/m . Aká veľká elektrická sila F_1 pôsobí na časticu? Ak častica má hmotnosť m = 0,001 g, akým zrýchlením a sa pohybuje?

Výsledok: $F_1 = \dfrac{e\lambda}{\pi\varepsilon_0 d} = 5{,}76\cdot10^{-16}\,\text{N}, \quad a = 5{,}76\cdot10^{-10}\,\text{m/s}^2$

18. Vo vzdialenosti $d_1 = 10$ cm od veľmi veľkej rovinnej platne, nabitej plošnou hustotou elektrického náboja $\sigma = 2\cdot10^{-6}$ C/m^2 , sa nachádza bodový elektrický náboj veľkosti $Q = 3\ \mu$C . Účinkom elektrického poľa sa pohybuje v smere vektora intenzity a prejde do vzdialenosti $d_2 = 30$ cm od platne. Akú veľkú prácu A vykonali sily elektrického poľa? Ako sa touto zmenou polohy zmenila potenciálna energia W_p náboja?

Výsledok: $A = \dfrac{Q\sigma}{2\varepsilon_0}(d_3 - d_1) \cong 0{,}068\,\text{J}, \quad \Delta W_p = -A$

19. Kovová guľa s polomerom $R = 20$ cm, má na povrchu voľný elektrický náboj s plošnou hustotou $\sigma = 10^{-9}$ C/m^2. Vypočítajte intenzitu E_1 a absolútny potenciál φ_1 vo vzdialenosti $r_1 = 36$ cm od stredu gule, a potenciál φ_2 na povrchu gule!

Výsledok: $E_1 = 34{,}9$ V/m , $\varphi_1 = 12{,}57$ V , $\varphi_2 = (\sigma R)/\varepsilon_0 = 22{,}6$ V

20. Veľmi dlhé priame vlákno je nabité kladným elektrickým nábojom s dĺžkovou hustotou λ. Akú prácu A musia vykonať vonkajšie sily, pri prenesení záporného náboja $-Q$ zo vzdialenosti a , do vzdialenosti $5a$ od vlákna? Pri výpočte intenzity elektrického poľa použite Gaussov zákon! Uveďte, či práca je kladná, či záporná!

Výsledok: $A = \lambda Q \ln 5/(2\pi\varepsilon_0)$

Elektrický dipól

21. Vypočítajte pomer elektrických potenciálov φ_A/φ_B v dvoch bodoch A, B v okolí elektrického dipólu s momentom p , vo vzdialenosti r od dipólu, keď bod A leží v predĺžení vektora $\boldsymbol{p}$, bod B na priamke, ktorá zviera s vektorom $\boldsymbol{p}$ uhol 45° .

Výsledok: $\dfrac{\varphi_A}{\varphi_B} = \sqrt{2}$

22. Elektrostatické pole je tvorené veľmi veľkou rovinnou platňou, nabitou záporným elektrickým nábojom s plošnou hustotou $\sigma = -1\cdot10^{-10}$ C/m^2 . Vo vzdialenosti a od platne sa nachádza častica s elektrickým dipólovým momentom $p = 10^{-20}$C·m . Pri akej orientácii dipólu vzhľadom na rovinu platne pôsobí na dipól maximálny moment dvojice síl? Aký veľký je tento moment M_1 ? Pri akej orientácii dipólu je tento moment nulový?

Výsledok: $M_1 = \dfrac{p\sigma}{2\varepsilon_0} = 5{,}6\cdot10^{-20}\,\text{N}\cdot\text{m}$

23. V blízkosti veľkej rovinnej platne, ktorá je nabitá plošnou hustotou elektrického náboja $\sigma = -2\cdot10^{-6}$ C/m^2 , sa nachádza elektrický dipól s momentom $p = 10^{-10}$Cm. Ako musí byť dipól orientovaný vzhľadom na rovinu platne, aby jeho potenciálna energia v homogénnom poli platne bola maximálna? Aká veľká je vtedy jeho potenciálne energia W_p ? Koľko percent energie dipól stratí, ak sa z polohy s maximálnou energiou pootočí o 60° ?

Výsledok: $W_p = \dfrac{p\sigma}{2\varepsilon_o} = 1{,}13\cdot10^{-5}$ J , strata energie 50%

24. Vypočítajte najväčšiu silu, ktorá môže pôsobiť medzi molekulou vody, ako elektrickým dipólom, a iónom vodíka, pri ich vzájomnej vzdialenosti $d = 2$ nm. Elektrický dipólový moment molekuly vody $p \cong 6\cdot10^{-30}$ C·m , elementárny elektrický náboj $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C . Predpokladáme, že ión vodíka sa nachádza v poli vytvorenom dipólom molekuly vody.

Výsledok: $F = 2\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{ep}{d^3} = 2{,}16\cdot10^{-12}$ N

25. Pomocou momentu dvojice síl pôsobiacich na elektrický dipól, by teoreticky bolo možné merať intenzitu elektrického poľa. Treba pritom nájsť takú orientáciu dipólu, aby moment dvojice síl bol maximálny. Aká veľká je intenzita elektrického poľa, ak na dipól s elektrickým momentom $p = 2\cdot10^{-10}$ C·m pôsobí moment síl, ktorého veľkosť $M_s = 4\cdot10^{-8}$ N·m ?

Výsledok: $E = M_s/p = 200$ V/m

Elektrostatické pole v prostredí

26. Do elektrostatického poľa vo vákuu s intenzitou $E_o = 20$ V/m , bolo vložené dielektrikum bez voľných elektrických nábojov, v tvare veľkej rovinnej platne. Rovina platne je kolmá na vektor $\boldsymbol{E}_o$. Relatívna permitivita materiálu platne $\varepsilon_r = 3$. Vypočítajte elektrickú indukciu D v platni, výslednú intenzitu elektrického poľa E_c v platni, a elektrickú polarizáciu P materiálu platne!

Výsledok: $D = \varepsilon_o E_o = 1{,}77\cdot10^{-10}$ C/m^2, $E_c = E_o/\varepsilon_r = 6{,}67$ V/m ,
$P = \varepsilon_o(\varepsilon_r - 1)E_o/3 = (2/3)D = 1{,}18\cdot10^{-10}$ C/m^2

27. Medzi dvomi rovnobežnými rovinnými kovovými platňami je vzdialenosť $d = 10$ mm, pričom polovicu tejto vzdialenosti vypĺňa dielektrický materiál s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 4$. V druhej polovici je vzduch, ktorému prisudzujeme $\varepsilon_r = 1$. Aká je v dielektriku intenzita elektrického poľa E_c , elektrická indukcia D a elektrická polarizácia P, keď rozdiel potenciálov medzi kovovými platňami $U = 100$ V ?

Výsledok: $E_c = (2/5)(U/d) = 4\cdot10^3$ V/m, $D = \varepsilon_o(8/5)(U/d)$, $P = \varepsilon_o(6/5)(U/d)$

28. Dve veľké rovinné rovnobežné platne sú oddelené dvomi vrstvami dielektrika, s hrúbkami d_1 , d_2 a permitivitami ε_1 , ε_2 . Aká plošná hustota σ_v voľného elektrického náboja je na platniach, keď rozdiel elektrických potenciálov medzi platňami je U?

Výsledok: $\sigma_v = \dfrac{U}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}}$

29. Dve veľké rovinné rovnobežné platne sú oddelené dvomi vrstvami dielektrika, s hrúbkami d_1 , d_2 a permitivitami ε_1 , ε_2 . Medzi platňami je elektrické napätie U. Aký má byť pomer hrúbok dielektrík, aby na každé z nich pripadala polovica elektrického napätia medzi platňami?

Výsledok: $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

30. Priestor medzi dvomi kovovými rovnobežnými platňami vypĺňa dielektrikum s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 4$. Vzájomná vzdialenosť platní $d_1 = 1$ cm, plošná hustota viazaných elektrických nábojov na rozhraní dielektrika a kovových platní $\sigma_d = 10^{-7}$ C/m^2. Aká je veľkosť výslednej intenzity elektrického poľa E_c v dielektriku? Aké je elektrické napätie U medzi kovovými platňami?

Výsledok: $E_c = \dfrac{\sigma_d}{\varepsilon_o(\varepsilon_r - 1)} = 3766$ V/m, $U = 37{,}7$ V

Energia elektrostatického poľa, kapacita vodiča

31. Vypočítajte kapacitu kondenzátora tvoreného rovnobežnými rovinnými elektródami, pričom plošný obsah každej z nich $S = 10^{-2}$ m^2 . Priestor medzi elektródami, ktoré sú navzájom vzdialené $d = 4$ mm, je vyplnený dvomi rovnako hrubými vrstvami dielektrika, s relatívnymi permitivitami $\varepsilon_{r1} = 3$, $\varepsilon_{r2} = 6$.

Výsledok: $C = \dfrac{\varepsilon_o S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_{r2}}} = 8{,}85 \cdot 10^{-11}$F

32. Vzduchový kondenzátor má rovinné elektródy, každá s plošným obsahom $S = 200$ cm^2, navzájom vzdialené $d = 1$ mm. Aký veľký voľný náboj Q je na každej z elektród, ak medzi elektródami je rozdiel potenciálov $U = 50$ V, ak je medzi elektródami a) vákuum, b) dielektrikum s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 3$?

Výsledok: a) $Q = U\,\varepsilon_o \dfrac{S}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-9}$ C, b) $Q = U\,\varepsilon_o\,\varepsilon_r \dfrac{S}{d} = 26{,}55 \cdot 10^{-9}$ C

33. Vzduchový kondenzátor má rovinné elektródy, každá s plošným obsahom $S = 200$ cm^2, navzájom vzdialené $d = 1$ mm. Akou silou F_1 sa elektródy priťahujú, ak je medzi nimi rozdiel potenciálov $U = 50$ V ? Akou silou F_2 by sa priťahovali, keby medzi elektródami bol olej s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 3$?

Výsledok: $F_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_o S \frac{U^2}{d^2} = 2{,}21 \cdot 10^{-4}$ N , $F_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o \varepsilon_r S \frac{U^2}{d^2} = 6{,}63 \cdot 10^{-4}$ N

34. Silové pôsobenie medzi platňami rovinného kondenzátora je principiálne možné využiť na meranie elektrického napätia. Kondenzátor nech má platne s plošnými obahmi $S = 400$ cm^2, vzdialenosť medzi platňami $d = 1$ mm. Aké napätie U_1 je medzi platňami, ak nameraná sila $F_1 = 10^{-2}$ N ? Zariadenie dokáže zaregistrovať rozdiel síl $\Delta F_{min} = 10^{-5}$ N. Aké by muselo byť merané napätie U_2, aby sa nameraná sila F_2 od sily F_1 líšila o ΔF_{min}?
Výsledok: $U_1 = 237{,}70$ V , $U_2 = 237{,}82$ V

35. Vzduchový kondenzátor s rovinnými elektródami, z ktorých každá má plošný obsah S, a medzi nimi je medzera d_1, bol nabitý zo zdroja s elektrickým napätím U. a) Po nabití bol kondenzátor odpojený od zdroja a platne oddialené na vzdialenosť $d_2 = 3\, d_1$. Vypočítajte rozdiel potenciálov U_1 po oddialení platní a náboj Q_1 na každej z nich! b) Platne kondenzátora boli oddialené na $d_2 = 3\, d_1$, ale kondenzátor zostal pripojený na zdroj s napätím U. Aký náboj Q_2 bol potom na platniach?
Výsledok: $U_1 = 3U$, $Q_1 = (\varepsilon_o S/d_1)U$. $Q_2 = (1/3)Q_1$.

36. Dva kondenzátory s kapacitami $C_1 = 2$ µF, $C_2 = 5$ µF boli nabité tak, že na prvom z nich bolo napätie $U_1 = 100$ V, na druhom $U_2 = 200$ V. Aké napätie U_3 sa ustáli na kondenzátoroch, keď ich spojíme paralelne tak, že a) spojíme elektródy rovnakého znamienka, b) spojíme elektródy s opačnými znamienkami?
Výsledok: a) $U_3 = 171$ V, b) $U_3 = 114$ V

37. Medzi rovinnými elektródami kondenzátora je vzdialenosť d, plošný obsah každej z elektród je S. Medzi elektródami je elektrické napätie U, v kondenzátore je nahromadená energia elektrického poľa W_1. Priestor medzi elektródami, pôvodne vyplnený vzduchom ($\varepsilon_r = 1$), naplníme olejom s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 3$, čím sa zmení energia nahromadená v kondenzátore na W_2. Vypočítajte pomer energií W_2/W_1, ak a) kondenzátor bol počas výmeny prostredia trvale pripojený na zdroj napätia U, b) ak bol počas výmeny prostredia od zdroja odpojený!
Výsledok: a) $W = (1/2)CU^2$, $W_2/W_1 = \varepsilon_r = 3$,
b) $W = (1/2)Q^2/C$, $W_2/W_1 = 1/\varepsilon_r = 1/3$

38. Vzduchový kondenzátor tvorený rovnobežnými platňami s plošným obsahom každej S, je trvale pripojený na zdroj s elektrickým napätím U. Pôvodná vzdialenosť medzi platňami bola d, zväčšili sme ju na $3d$. Aký je pomer hustôt energie elektrického poľa w_2/w_1 pred a po zväčšení vzdialenosti platní?
Výsledok: $w_2/w_1 = 1/9$

Obsah

Súbor zošitkov základného kurzu fyziky

Vektory
Kinematika
Dynamika hmotného bodu
Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa
Kmitanie a vlnenie
Teplo a termodynamika
Elektrostatické pole
Elektrický prúd
Magnetické pole
Elektromagnetické pole
Fyzikálna optika
Kvantové javy