Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenskej technickej univerzity v Bratislave

Katedra fyziky

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

Doc. RNDr. Ivan Červeň, CSc.

© Ivan Červeň

V roku 2005 vydala Fakulta elektrotechniky a informatiky STU
v Bratislave

9
ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

V kapitolách o elektrostatickom a magnetickom poli sa neuvažovalo s časovými zmenami týchto polí. Ak sa magnetické pole s časom začne meniť, indukuje sa v priestore elektrické pole a naopak. Cieľom kapitoly je opísať tieto javy. Základným z týchto javov je **elektromagnetická indukcia**, ktorej je venovaná **prvá podkapitola**. V ***druhej podkapitole*** sú odvodené dve ***Maxwellove rovnice***, ktoré sú matematickým vyjadrením súvislostí medzi časovo premennými elektrickými a magnetickými poliami. V tejto podkapitole sú ďalej zhrnuté všetky základné rovnice týkajúce sa elektromagnetických javov - štyri Maxwellove rovnice, Ohmov zákon v diferenciálnom tvare a tzv. materiálové vzťahy medzi vektormi opisujúcimi elektromagnetické pole ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$) a vektormi opisujúcimi elektrické a magnetické vlastnosti materiálov, t.j. vektorom elektrickej polarizácie $\boldsymbol{P}$ a vektorom magnetizácie $\boldsymbol{M}$. **Tretia podkapitola** sa zaoberá **elektromagnetickým vlnením**, odvodením diferenciálnej rovnice, z ktorej vyplýva existencia elektromagnetických vĺn, poukazuje na niektoré ich vlastnosti, napr. polarizáciu a sú v nej odvodené vzorce vyjadrujúce koľko energie prenáša elektromagnetická vlna.

Potrebné vedomosti

Na zvládnutie tejto kapitoly je potrebné dobre ovládať pojmy, veličiny a vzťahy z elektrostatiky a magnetostatiky, ako intenzita, potenciál, energia v elektrostatickom poli, Gaussov zákon, Biotov-Savartov-Laplaceov vzorec, javy v dielektriku a v magnetickom prostredí. Treba ovládať rovnicu spojitosti elektrického prúdu, Kirchhoffove zákony a Ohmov zákon v diferenciálnom tvare. Nevyhnutnou podmienkou je ovládanie diferenciálnych a integrálnych operácií z vektorového počtu. Na zvládnutie poslednej podkapitoly je potrebné poznať vlnovú rovnicu.

9.1 ELEKTROMAGNETICKÁ INDUKCIA

Kľúčové slová

Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie, Lenzovo pravidlo, vlastná a vzájomná indukčnosť, vznik striedavého napätia, magnetická energia, objemová hustota magnetickej energie.

9.1.1 *Základné vzťahy*

Elektromagnetickú indukciu objavil Michael Faraday v prvej tretine XIX. storočia. Výsledky svojich experimentov publikoval v roku 1831 .

Pri elektromagnetickej indukcii rozhodujúcou veličinou je ***magnetický tok*** definovaný už v kapitole 8. ako integrál vektora magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ cez ohraničenú plochu:

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

(9.1.1.1)

Faradayove experimentálne výsledky možno zhrnúť vetou - ***"Indukované elektromotorické napätie v uzavretom vodiči vzniká vtedy, keď sa mení magnetický tok Φ cez plochu ohraničenú vodičom".***

Zmenu magnetického toku plochou ohraničenou uzavretým vodičom (závitom, cievkou) možno dosiahnuť niekoľkými spôsobmi, ktoré možno uviesť týmito príkladmi

- približovaním permanentného magnetu k cievke, alebo vzďaľovaním od nej,
- zmenou veľkosti el. prúdu v susednej cievke (dve cievky vedľa seba, v jednej meníme veľkosť prúdu),
- zmenou magnetickej väzby medzi cievkami, posúvaním feromagnetického jadra medzi dvomi cievkami.

Ako experimentálne zistil už M. Faraday, (***Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie***) elektromotorické napätie indukované vo všetkých uvedených experimentoch sa rovná

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

(9.1.1.2)

V sústave SI sa magnetický tok meria v jednotkách *weber*, indukované elektromotorické napätie vo *voltoch* .

Keď sa začne meniť magnetický tok cez plochu ohraničenú uzavretým vodičom, indukuje sa v ňom elektromotorické napätie U_i , a začne ním tiecť ***indukovaný elektrický prúd*** . Tečie takým smerom, že magnetické pole ním generované sa snaží zachovať pôvodné magnetické pole. To možno vyjadriť aj inak - ***indukovaný elektrický prúd svojimi magnetickými účinkami pôsobí proti zmenám, ktoré ho vyvolali.*** Túto skutočnosť objavil v roku 1834 nemecký fyzik H. F. E. Lenz , pôsobiaci v Petrohrade, preto sa nazýva ***Lenzovo pravidlo***, alebo ***Lenzov zákon*** .

Elektrické napätie sa indukuje aj vo vodiči, ktorý nemusí byť uzavretý, ale pohybuje sa v magnetickom poli. Napr. v kovových vodičoch sa nachádzajú voľné nosiče elektrického náboja - elektróny. Ak sa vodič nachádza v magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$, a vodič sa voči nám pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}$, potom pozorujeme, že na nosiče elektrického náboja, ktoré sa v ňom nachádzajú a majú náboj Q, pôsobí sila:

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \ . \tag{9.1.1.3}$$

Ak túto rovnicu vydelíme nábojom Q, na ľavej strane dostaneme veličinu E_i :

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{\boldsymbol{F}}{Q} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{9.1.1.4}$$

ktorú nazývame ***intenzita indukovaného elektrického poľa***. Jej integráciou pozdĺž vodiča dostaneme rozdiel elektrických potenciálov U_i medzi začiatočným bodom A a koncovým bodom B integrácie:

$$U_i = \int_A^B \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{9.1.1.5}$$

Intenzita E_i nemá charakter intenzity elektrostatického poľa, lebo integrál tejto intenzity po uzavretej integračnej krivke sa nerovná nule.

Príklad 9.1.1.1 Rovinná slučka tvorená vodičom ohraničuje plochu veľkosti S = 15 cm^2. Nachádza sa v homogénnom magnetickom poli s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$. Vektor $\boldsymbol{B}$ zviera s normálou na rovinu slučky uhol $\varphi = 60°$. Veľkosť vektora $\boldsymbol{B}$ sa začala s časom lineárne zmenšovať, pričom v čase $t_o = 0$ bola jeho veľkosť $B_o = 0{,}5$ T, a v čase $t_1 = 3$ s už len $B_1 = 0{,}2$ T . Vypočítajte indukované napätie v slučke.
Riešenie Indukované napätie vypočítame pomocou vzorca (9.1.1.2), pričom magnetický tok, ktorý vo vzorci vystupuje, budeme počítať podľa vzorca (9.1.1.1). Integrál v tomto vzorci vypočítame ľahko, lebo v homogénnom poli je vektor $\boldsymbol{B}$ konštantný, možno ho dať pred integrál. Integrál potom vyjadruje len **vektorový súčet** elementárnych plôch d$\boldsymbol{S}$, čo sa rovná vektoru $\boldsymbol{S}$, ktorý je na rovinu slučky kolmý a ktorého veľkosť zodpovedá plošnému obsahu plochy ohraničenej slučkou. Tak dostaneme $\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} = B\,S\cos\varphi$. Veľkosť vektora $\boldsymbol{B}$ sa s časom lineárne mení, preto $B = B_o + kt$. Konštantu k získame tak, že využijeme známu hodnotu B_1 v čase t_1 : $B_1 = B_o + kt_1$, odkiaľ $k = (B_1 - B_o)/\,t_1$ a $B = B_o + t\,(B_1 - B_o)/t_1$. Pre magnetický tok tak dostaneme vzťah $\Phi = B\,S\cos\varphi = (S\cos\varphi)[\,B_o + t\,(B_1 - B_o)/\,t_1\,]$. Indukované napätie získame deriváciou posledného vzťahu podľa času:
$U_i = -\,(S\cos\varphi)[(B_1 - B_o)/\,t_1\,]$. Po dosadení číselných hodnôt $U_i = 5 \cdot 10^{-5}$ V .

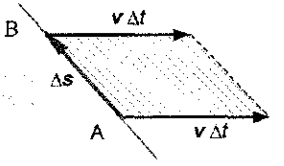
Kontrolné otázky

1. *Napíšte definíciu magnetického toku a uveďte jeho jednotku.*
2. *Akými experimentmi možno dokumentovať elektromagnetickú indukciu?*
3. *Slovne vyjadrite Lenzovo pravidlo!*
4. *Napíšte Faradayov vzorec vyjadrujúci indukované elektrické napätie!*
5. *Akým vzorcom sa vyjadruje intenzita indukovaného elektrického poľa vo vodiči, ktorý sa pohybuje v magnetickom poli?*
6. *Akým vzorcom sa vyjadruje napätie indukované medzi koncami otvoreného vodiča, ktorý sa pohybuje rýchlosťou* $\boldsymbol{v}$ *v magnetickom poli s indukciou* $\boldsymbol{B}$*!*

9.1. 2 Faradayov vzorec indukovaného elektrického napätia

V tejto časti poukážeme na súvislosť medzi Faradayovým vzorcom (9.1.1.2) a vzorcom (9.1.1.5), vyjadrujúcim napätie vznikajúce medzi koncami neuzavretého vodiča, ktorý sa pohybuje v magnetickom poli.

Na obrázku 9.1.2.1 je nakreslený kúsok vodiča Δs pohybujúceho sa magnetickým poľom. Predpokladajme, že v tomto malom priestore vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ je konštantný (jeho smer zatiaľ nie je podstatný).



Obr.9.1.2.1

Pre indukované napätie na krátkom úseku vodiča s dĺžkou Δs (začiatočný bod A, koncový bod B), chápanom ako vektor $\Delta \boldsymbol{s}$, potom platí:

$$U_i = \int_A^B \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{\Delta s} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \Delta \boldsymbol{s} = -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}) \cdot \Delta \boldsymbol{s} = -\frac{1}{\Delta t}[(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}\Delta t) \cdot \Delta \boldsymbol{s}]$$

Pri úprave sme zamenili poradie vektorov $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{v}$ a do vzťahu - do čitateľa aj do menovateľa - sme vložili krátky časový interval Δt, čím sme neovplyvnili veľkosť výsledku, ale čo umožní vzťah vhodnejšie upraviť. Pri ďalšej úprave využijeme pravidlo o zámene skalárneho a vektorového súčinu, platné pre zmiešaný súčin:

$$-(1/\Delta t)\,[(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}\Delta t) \cdot \Delta \boldsymbol{s}] = -\boldsymbol{B} \cdot [(\boldsymbol{v}\Delta t) \times \Delta \boldsymbol{s}]\,(1/\Delta t) \ .$$

Ďalej si uvedomíme, že výraz v hranatej zátvorke $[(\boldsymbol{v}\Delta t) \times \Delta \boldsymbol{s}]$ predstavuje vektor $\Delta \boldsymbol{S}$, ktorého veľkosť ΔS sa rovná veľkosti malej plôšky, ktorú počas krátkeho časového intervalu Δt v priestore vytvorí vektor Δs pohybujúci sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ (*na obrázku vyšrafovaná plôška*). Preto môžeme písať:

$$-\boldsymbol{B} \cdot [(\boldsymbol{v}\Delta t) \times \Delta \boldsymbol{s}]\,(1/\Delta t) = -\boldsymbol{B} \cdot (\Delta \boldsymbol{S} / \Delta t) = -\Delta(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S}) / \Delta t = -\Delta \Phi / \Delta t \quad ,$$

takže nakoniec dostávame výsledok

$$U_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

ktorý má zhodný tvar so vzorcom (9.1.1.2) .

Použitý postup pri získaní výsledku môže vyvolávať určité pochybnosti, napríklad v súvislosti so znamienkom mínus, vystupujúcom vo výsledku, ktoré sme získali výmenou poradia vektorov $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{v}$. Preto uvedieme **iný, exaktný postup**, za cenu istého obmedzenia všeobecnosti.

Budeme uvažovať prípad uzavretého vodiča, ktorý sa vzhľadom na našu vzťažnú sústavu pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}$, pričom túto rýchlosť má každý jeho element (vodič sa pri pohybe nedeformuje). Ďalej sa obmedzíme na prípad magnetického poľa, ktoré sa s časom nemení, ale v rôznych bodoch priestoru má vektor magnetickej indukcie rôzne veľkosti aj smer. Aj v tomto prípade začneme výpočet použitím vzorca (9.1.1.5), s tým rozdielom, že integrovať budeme pozdĺž celého uzavretého vodiča:

$$U_{\mathrm{i}} = \oint_{\mathrm{K}} \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_{\mathrm{K}} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\mathrm{S}} \mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

(9.1.2.1)

pričom sme na zámenu krivkového integrálu na plošný použili Stokesovu vetu (pozri kapitolu o vektoroch). Ďalšia úprava vyžaduje podrobnejší komentár týkajúci sa výrazu $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Tento výraz predstavuje aplikáciu nabla operátora vektorovo na súčin funkcií. Pri aplikácii operátora by sme mali derivovať aj vektor $\boldsymbol{v}$, ale obmedzili sme sa na prípad, že všetky elementy vodiča sa pohybujú rovnakou rýchlosťou, takže vektor $\boldsymbol{v}$ nie je funkciou priestorových súradníc. Z hľadiska derivácií predpísaných použitím operátora, je teda vektor $\boldsymbol{v}$ konštantný. Preto k operátoru nabla pripíšeme index ∇_{B}, čo bude znamenať, že sa vzťahuje iba na vektor $\boldsymbol{B}$. Preto platí:

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \nabla_{\mathrm{B}} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{v}\,(\nabla_{\mathrm{B}} \cdot \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\mathrm{B}})\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{v} \cdot (\nabla_{\mathrm{B}}\boldsymbol{B}) = -\,\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\boldsymbol{B}\,,$$

(9.1.2.2)

lebo podľa Maxwellovej rovnice $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$. Výraz $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\boldsymbol{B}$ je súčasťou totálnej derivácie vektora $\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$ podľa času:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\boldsymbol{B} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,.$$

(9.1.2.3)

Podľa predpokladu vektor $\boldsymbol{B}$ sa v žiadnom z bodov uvažovaného priestoru s časom nemení, preto jeho parciálna derivácia podľa času sa rovná nule. Potom

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\,\boldsymbol{B}\;,$$

(9.1.2.4)

a po dosadení do rovnice (9.1.2.2) dostaneme:

$$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\;.$$

(9.1.2.5)

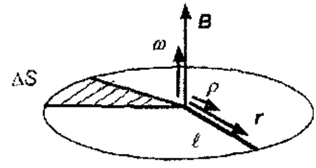
Posledný vzťah dosadíme do rovnice (9.1.2.1):

$$U_{\mathrm{i}} = \iint_{\mathrm{S}} \mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

(9.1.2.6)

Týmto postupom sa podarilo ukázať, že vzťahy (9.1.1.2) a (9.1.1.5) majú spoločného menovateľa. Nemožno ho však považovať za všeobecný dôkaz správnosti Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie.

Príklad 9.1.2.1 . V homogénnom magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$ rotuje uhlovou rýchlosťou ω vodič, ktorý má dĺžku ℓ . Rotuje okolo svojho koncového bodu v rovine, ktorá je kolmá na vektor $\boldsymbol{B}$, pričom vektor $\boldsymbol{\omega}$ je s ním súhlasne rovnobežný. Vypočítajte elektrické napätie, ktoré sa indukuje medzi jeho koncami a uveďte, na ktorom konci vodiča bude kladný pól elektrického napätia.



Obr.9.1.2.2

Riešenie Príklad budeme riešiť dvojakým spôsobom.
a) Otvorený vodič (neuzavretý) sa pohybuje v magnetickom poli, takže sa v ňom indukuje intenzita el. poľa (vzorec 9.1.1.4) $\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{\rho}$ je polohový vektor začínajúci v strede otáčania a končiaci v ľubovoľnom bode vodiča, pričom $\boldsymbol{\rho}$ je jednotkový vektor súhlasne rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{r}$. Vektor $\boldsymbol{r}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{B}$, preto ďalšou úpravou, dostaneme:

$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{r}\,\omega B = r\,\omega B\,\boldsymbol{\rho}$,

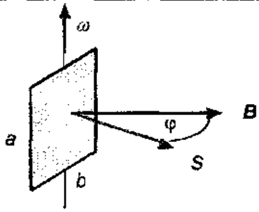
z čoho vyplýva, že vektor $\boldsymbol{E}_i$ je súhlasne rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{r}$. Preto elektróny, nesúce záporný elektrický náboj, sa budú pohybovať proti smeru vektora intenzity, t.j. k stredu otáčania, ktorý bude predstavovať záporný pól. Veľkosť el. napätia získame integráciou intenzity od stredu otáčania po okraj vodiča:

$$U_i = \int_0^\ell \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^\ell r\,\omega B\, dr = \frac{1}{2}\omega B \ell^2$$

b) Rovnaký výsledok dostaneme, ak použijeme vzorec (9.1.1.2), pričom zmenu magnetického toku získame vynásobením magnetickej indukcie prírastkom plochy ΔS (na obrázku je vyšrafovaná), ktorú opíše otáčajúci sa vodič za jednotku času, resp. plošným obsahom kruhu vydeleným periódou otáčania:

$$U_i = (\pi\ell^2 B)/(T) = (\pi\ell^2 B)/(2\pi/\omega) = (1/2)\,\omega B \ell^2 \; .$$

Príklad 9.1.2.2 . V homogénnom magnetickom poli s magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$ sa konštantnou uhlovou rýchlosťou ω otáča pravouhlý závit s rozmermi a, b . Otáča sa okolo osi kolmej na vektor $\boldsymbol{B}$, ktorá leží v rovine závitu a prechádza stredmi strán s dĺžkou b. Vypočítajte, aké elektromotorické napätie sa indukuje v závite, a akú má maximálnu hodnotu.



Obr.9.1.2.3

Riešenie Použijeme vzorec 9.1.1.2 $U_i = -(\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t)$, pričom magnetický tok vyjadríme ako skalárny súčin $\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} = B\,S \cos\varphi$. Uhol φ sa s časom mení, pričom platí $\varphi = \omega t$, takže aj magnetický tok cez plochu ohraničenú závitom sa mení: $\Phi = B\,S \cos(\omega t)$. Indukované napätie dostaneme deriváciou magnetického toku:
$U_i = -(\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t) = +BS\,\omega \sin(\omega t) = U_{max} \sin(\omega t)$.
Výpočtom sme získali hneď aj maximálne indukované napätie: $U_{max} = BS\,\omega = Bab\,\omega$.

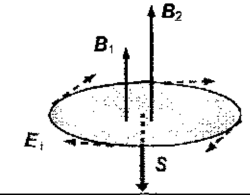
Poznámka Uvedený príklad 9.1.2.2 predstavuje princíp **vzniku striedavého sínusového napätia**, aké sa generuje v alternátoroch.

Kontrolné otázky

1. *Dokážte súvislosť medzi Faradayovým vzorcom pre indukované napätie a vzorcom pre napätie medzi koncami vodiča pohybujúceho sa magnetickým poľom.*
2. *Z hľadiska indukovaného napätia - vedie zmena magnetického toku uzavretým vodičom k rovnakým výsledkom ako jeho pohyb nehomogénnym magnetickým poľom?*
3. *Môže otáčaním priameho vodiča v magnetickom poli vzniknúť medzi jeho koncami rozdiel elektrických potenciálov?*
4. *Môže otáčanie uzavretého vodiča v homogénnom magnetickom zapríčiniť pohyb elektrického náboja v ňom?*
5. *Akú polohu musí mať os otáčania kruhového závitu vzhľadom na rovinu závitu a vzhľadom na vonkajšie magnetické pole, aby sa v ňom indukovalo maximálne možné elektrické napätie?*
6. *Môže v uzavretom vodiči, otáčajúcom sa jedným smerom v homogénnom magnetickom poli, vzniknúť striedavé elektrické napätie?*

9.1.3 Význam záporného znamienka vo Faradayovom zákone

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že záporné znamienko vo Faradayovom zákone elektromagnetickej indukcie súvisí iba s Lenzovým pravidlom. Indukovaný elektrický prúd svojimi magnetickými účinkami sa snaží zabrániť zmene, ktorá ho vyvolala, pôsobí proti nej, čo vyvoláva pocit, že indukované elektromotorické napätie musí mať záporné znamienko.



Obr.9.1.3.1

Na obrázku je znázornený uzavretý vodič (závit), nachádzajúci sa v magnetickom poli. Magnetická indukcia nech sa s časom zväčšuje. Vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}_1$ zodpovedá časovému okamihu t_1 , vektor $\boldsymbol{B}_2$ okamihu $t_2 > t_1$ (vektory nech sú pre jednoduchosť kolmé na rovinu závitu). Podľa Lenzovho pravidla pri takejto zmene magnetického poľa sa vo vodiči indukuje elektrický prúd, ktorého smer je na obrázku naznačený čiarkovanými šípkami. Rovnaký smer má aj intenzita indukovaného elektrického poľa $\boldsymbol{E}_i$, ktorá podľa našich predstáv pôsobí na nosiče elektrického náboja vo vodiči a tak vyvoláva indukovaný prúd.

Indukované elektromotorické napätie vyjadríme na jednej strane ako integrál intenzity $\boldsymbol{E}_i$ po uzavretej krivke totožnej s vodičom, na druhej strane pomocou Faradayovho zákona:

$$U_i = \oint \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\lim_{t_2 \to t_1} \frac{(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1)\cdot \boldsymbol{S}}{t_2 - t_1} \quad ,$$

kde $\boldsymbol{S}$ predstavuje vektor priradený ploche ohraničenej vodičom. Ak v krivkovom integráli vektory $\boldsymbol{E}_i$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sú súhlasne rovnobežné, t.j. integrujeme v smere súhlasnom s intenzitou $\boldsymbol{E}_i$, výsledkom integrácie je kladné číslo. Vtedy aj na druhej strane rovnosti musí byť kladné číslo, takže výraz za limitou musí byť záporný. Keďže menovateľ je kladný, záporný musí byť výraz v čitateli, t.j. skalárny súčin $(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) \cdot \boldsymbol{S}$. To znamená, že vektor $\boldsymbol{S}$ musí mať opačný smer ako vektor $(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1)$, tak ako je to naznačené na obrázku.

Tu si treba všimnúť, že smer vektora $\boldsymbol{S}$ a smer integrácie navzájom súvisia, a že táto súvislosť sa dá vyjadriť pomocou pravotočivej skrutky (pravidla pravej ruky). Ak by sme smer vektora $\boldsymbol{S}$ zmenili na opačný, vo Faradayovom zákone by sme museli záporné znamienko zmeniť na kladné. Preto *záporné znamienko vo Faradayovom zákone nie je dôsledkom iba Lenzovho pravidla, ale aj dohody o voľbe smeru vektora* $\boldsymbol{S}$ *podľa pravidla pravej ruky.*

Kontrolné otázky

1. *Prečo vo Faradayovom zákone elektromagnetickej indukcie vystupuje záporné znamienko?*
2. *Ako by sa zmenil Faradayov zákon, keby sme namiesto pravotočivej sústavy používali ľavotočivú?*
3. *Ako súvisí záporné znamienko vo Faradayovom zákone s Lenzovým pravidlom?*

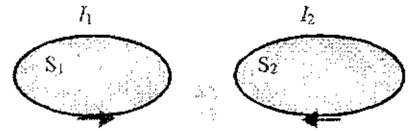
9.1.4 Vlastná a vzájomná indukčnosť

Magnetický tok Φ cez plochu ohraničenú závitom (uzavretým vodičom, napr. aj cievkou) môže byť vyvolaný permanentným magnetom nachádzajúcim sa v blízkosti závitu, ale aj elektrickým prúdom prechádzajúcim buď samotným závitom, alebo vodičom nachádzajúcim sa v jeho blízkosti. Ak je magnetický tok Φ závitom budený elektrickým prúdom I, zapisuje sa tento vzťah jednoduchým vzorcom

$$\Phi = LI \ . \tag{9.1.4.1}$$

Ak je magnetický tok budený prúdom tečúcim cez ten istý uzavretý vodič (závit), potom L je ***vlastná indukčnosť***, ak prúdom tečúcim cez iný vodič, ide o ***vzájomnú indukčnosť***, pričom sa používa označenie M, alebo L_{mn}.

Uvážime tieto dva prípady - podľa obrázku, kde pre jednoduchosť sú dva uzavreté vodiče nakreslené ako dva závity. Prvým závitom tečie prúd I_1, druhým I_2.



Obr.9.1.4.1

Magnetický tok je definovaný integrálom $\Phi = \iint\limits_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, pričom vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ sa počíta podľa Biotovho-Savartovho-Laplaceovho vzorca. Pre vektor $\boldsymbol{B}_1$ v okolí prvého vodiča preto platí

$$\boldsymbol{B}_1 = \oint \frac{I_1 \ \mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \ .$$

Spojením dvoch predošlých vzorcov dostaneme pre magnetický tok Φ_{21} plochou ohraničenou druhým závitom, ale vyvolaným prúdom tečúcim prvým závitom:

$$\Phi_{21} = \iint\limits_{S2} \boldsymbol{B}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \iint\limits_{S2}\left[\oint \frac{I_1 \ \mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = I_1 \iint\limits_{S2}\left[\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = I_1 \ L_{21} \ , \tag{9.1.4.2}$$

kde L_{21}, teda plošný integrál cez plochu S_2, je vzájomná indukčnosť dvoch závitov. Podobným postupom možno získať vzťah pre vlastnú indukčnosť, ak namiesto integrácie cez plochu ohraničenú druhým vodičom, integrujeme vektor $\boldsymbol{B}_1$ cez plochu ohraničenú prvým vodičom.

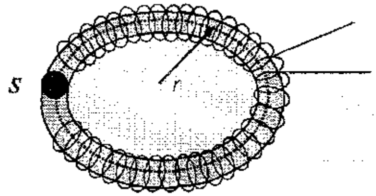
Vychádzajúc zo vzťahu (9.1.4.1) a z Faradayovho zákona pre indukované elektrické napätie, dostaneme všeobecný vzorec (bez ohľadu na to, či ide o vlastnú, alebo vzájomnú indukčnosť):

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \ . \tag{9.1.4.3}$$

Podľa tohto vzorca, v súlade s Lenzovým pravidlom, sa v cievke s vlastnou indukčnosťou L indukuje elektrické napätie, ak sa mení prúd cez ňu tečúci.

Jednotkou vlastnej i vzájomnej indukčnosti je **henry** (H). Vlastnú indukčnosť veľkosti 1 H má cievka, v ktorej sa pri zmene elektrického prúdu o 1 A za 1 s , indukuje elektrické napätie 1 V .

Príklad 9.1.4.1 Vypočítajte vlastnú indukčnosť tenkej toroidálnej cievky, pričom polomer toroidu je r , prierez S, cievka má N závitov a je navinutá na jadre s permeabilitou μ (obr.).



Obr.9.1.4.1

Riešenie . Najprv treba vypočítať intenzitu magnetického poľa a magnetickú indukciu v toroide. Použijeme na to zákon celkového prúdu

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = NI \Rightarrow H 2\pi r = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{2\pi r} \Rightarrow B = \mu \frac{NI}{2\pi r}$$

Magnetický tok cez jeden závit cievky je $\Phi_1 = BS$, cez všetky závity spolu $\Phi = NBS = (\mu N^2 S I)/(2\pi r)$, odkiaľ na základe vzorca (9.1.4.1) pre vlastnú indukčnosť L dostaneme

$$L = \frac{\mu N^2 S}{2\pi r}. \qquad (9.1.4.4)$$

Poznámka Na základe vzorca pre vlastnú indukčnosť toroidálnej cievky môžeme získať vzorec pre vlastnú indukčnosť veľmi dlhého solenoidu, keď namiesto obvodu $2\pi r$ dosadíme dĺžku solenoidu ℓ .

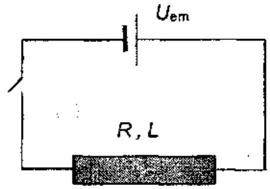
Príklad 9.1.4.1 Vypočítajte, koľko závitov by musela mať cievka s tvarom toroidu bez feromagnetického jadra, aby mala vlastnú indukčnosť $L = 0{,}1$ H ? Prierez toroidu $S = 1\ \mathrm{cm}^2$, stredný polomer $r = 2$ cm .
Riešenie Na výpočet použijeme vzorec (9.1.4.4), z ktorého pre počet závitov N dostaneme $N = (L\ 2\pi r\ /\ S\mu_0)^{1/2}$, lebo v toroide $\mu_r = 1$. Po dosadení hodnôt dostaneme výsledok $N = 10^4$ závitov.

Kontrolné otázky

1. *Definujte veličinu vzájomná indukčnosť.*
2. *Definujte veličinu vlastná indukčnosť.*
3. *Ako sa vyjadruje indukované napätie na cievke s vlastnou **indukčnosťou** L ?*
4. *Ako sa volá jednotka vlastnej indukčnosti v sústave SI ?*
5. *Ktorá cievka má jednotkovú vlastnú indukčnosť?*

9.1.5 Energia magnetického poľa

Uvážime jednoduchý elektrický obvod, pozostávajúci zo zdroja jednosmerného prúdu s elektromotorickým napätím U_{em} a cievky, ktorej vinutie má elektrický odpor R a vlastnú indukčnosť L.



Obr.9.1.5.1

Po zopnutí kľúča začne obvodom tiecť elektrický prúd, pričom pomery v obvode opíšeme druhým Kirchhoffovým zákonom :

$$\sum_i (U_{em})_i = \sum_i R_i I_i \quad ,$$

ktorý prispôsobíme nášmu prípadu. V obvode je zaradený jediný rezistor s elektrickým odporom R, takže na pravej strane rovnice zostane iba člen RI. V obvode však pôsobia dva zdroje elektromotorického napätia - jednosmerný zdroj s napätím U_{em} a cievka, v ktorej sa pri zmene prúdu indukuje napätie $U_i = -L(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)$. Po dosadení do Kirchhoffovho zákona dostaneme rovnicu:

$$U_{em} - L\,(\mathrm{d}I/\,\mathrm{d}t) = RI \quad ,$$

ktorú vynásobíme elektrickým nábojom $\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t$. Tak dostaneme rovnicu

$$U_{em}\,\mathrm{d}Q - L\,(\mathrm{d}I/\,\mathrm{d}t)\,I\,\mathrm{d}t = RI^2\,\mathrm{d}t \quad ,$$

ktorú budeme integrovať:

$$\int_0^Q U_{em}\,\mathrm{d}Q = \int_0^I LI\,\mathrm{d}I + \int_0^t RI^2\,\mathrm{d}t \,.$$

Na ľavej strane rovnice je energia, ktorú zdroj jednosmerného prúdu dodal do obvodu, keď obvodom prešiel náboj Q. Posledný člen rovnice (na pravej strane) predstavuje Jouleove straty, ktoré vznikli v časovom intervale $(0, t)$. Prostredný člen v rovnici po uskutočnení integrácie má tvar

$$E_m = \tfrac{1}{2} L I^2 \quad , \tag{9.1.5.1}$$

a predstavuje ***energiu magnetického poľa***, ktoré sa vytvorilo v cievke, resp. v okolí vodiča s indukčnosťou L, ktorým preteká prúd I.

Vnútri v cievke je magnetické pole silnejšie, mimo cievky slabne so vzdialenosťou. Preto má význam zaviesť veličinu ***(objemová) hustota energie magnetického poľa***, ktorá vyjadruje energiu pripadajúcu na objemovú jednotku. Túto

Z rovnosti pravých strán upravených rovníc vyplýva:

$$\iint \mathrm{rot}\boldsymbol{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = - \iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Medze plošných integrálov sú určené integračnou krivkou, ktorá však v priestore môže byť ľubovoľná, preto na splnenie rovnosti je potrebné, aby sa rovnali integrované funkcie:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\ . \qquad (9.2.1.3)$$

Tak sme získali ***tretiu Maxwellovu rovnicu***, ktorá vyjadruje skutočnosť, že v časovo premennom magnetickom poli sa indukuje elektrické pole.

Do rovnice (9.2.1.3) môžeme k intenzite $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ indukovaného poľa pridať aj intenzitu elektrostatického poľa $\boldsymbol{E}_\mathrm{s}$, pre ktorú platí

$$\oint \boldsymbol{E}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \iint \mathrm{rot}\boldsymbol{E}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \quad .$$

Z týchto vzťahov vyplýva, že $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}_s = 0$, lebo obidva integrály sa vždy rovnajú nule, bez ohľadu na tvar zvolenej integračnej krivky. Preto namiesto $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ do rovnice (9.2.1.3) môžeme dosadiť celkovú intenzitu $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\mathrm{i} + \boldsymbol{E}_\mathrm{s}$ a napísať ju v tvare

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\ .$$

Kontrolné otázky

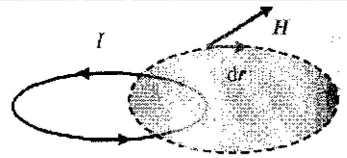
1. *Vyjadrite indukované elektromotorické napätie pomocou Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie.*
2. *Vyjadrite vzťah pre intenzitu indukovaného elektrického poľa.*
3. *Vyjadrite elektromotorické napätie ako cirkuláciu intenzity indukovaného elektrického poľa.*
4. *Napíšte všeobecnú Stokesovu vetu o zámene krivkového integrálu plošným integrálom.*
5. *Napíšte tretiu Maxwellovu rovnicu a uveďte jej fyzikálny význam.*
6. *Ako vyzerá tretia Maxwellova rovnica v stacionárnom elektromagnetickom poli?*

9.2.2 Maxwellova rovnica spájajúca vektory H a D

V kapitole o magnetickom poli bola odvodená rovnica (8.4.3.1), vyjadrujúca tzv. zákon celkového prúdu (zákon prietoku):

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_k I_k \ . \tag{9.2.2.1}$$

Tento zákon hovorí, že krivkový integrál vektora intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ po uzavretej krivke sa rovná súčtu všetkých makroskopických prúdov I_k spriahnutých s integračnou krivkou. Pod spriahnutým prúdom rozumieme prúd tečúci takým vodičom, ktorý je s uzavretou integračnou krivkou spojený ako dve susedné ohnivká reťaze.



Obr.9.2.2.1

Ľavú stranu rovnice (9.2.2.1) upravíme pomocou Stokesovej vety na plošný integrál. Na obrázku je integračná krivka znázornená prerušovanou čiarou. Prechod na plošný integrál znamená integrovať po ploche ohraničenej touto krivkou. Aj pravú stranu vyjadríme ako plošný integrál prúdovej hustoty makroskopických prúdov cez tú istú plochu, pričom do vektora prúdovej hustoty $\boldsymbol{J}$ prispievajú všetky spriahnuté makroskopické prúdy:

$$\iint \mathrm{rot}\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \ . \tag{9.2.2.2}$$

Integračná krivka je ľubovoľná, výsledok nezávisí od jej tvaru. Preto aj integračné medze plošných integrálov v rovnici (9.2.2.2) sú ľubovoľné, takže rovnica bude platiť iba vtedy, keď funkcie za integrálmi na ľavej a pravej strane rovnice budú rovnaké :

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \ . \tag{9.2.2.3}$$

Táto rovnica je správna iba dovtedy, pokým sa v okolí integračnej krivky nemení vonkajšie elektrické pole. Platí v stacionárnom stave. Maxwell rozšíril pravú stranu rovnice tak, aby platila aj pri zmenách elektrického poľa:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9.2.2.4}$$

pričom $\boldsymbol{D}$ je vektor elektrickej indukcie. Toto je ***štvrtá Maxwellova rovnica***, ktorá ukazuje, že magnetické pole vzniká nie iba v okolí **vodičov elektrického** prúdu, ale aj v časovo premennom elektrickom poli.

Pripísanie ďalšieho člena do rovnice vyžaduje podrobné zdôvodnenie. Ak na rovnicu (9.2.2.3) aplikujeme nabla operátor skalárne (t.j. vykonáme operáciu *divergencia*), na ľavej strane dostaneme div rot $\boldsymbol{H}$, čo sa identicky rovná nule. Na pravej strane vznikne pritom člen div$\boldsymbol{J}$, ktorý sa podľa rovnice kontinuity pre elektrický prúd rovná nule iba v stacionárnom stave. Podľa rovnice kontinuity platí

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \tag{9.2.2.5}$$

v ktorej ρ_v je objemová hustota voľného elektrického náboja, ktorá vystupuje aj v prvej Maxwellovej rovnici $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho_v$. Túto Maxwellovu rovnicu použijeme pri úprave rovnice kontinuity:

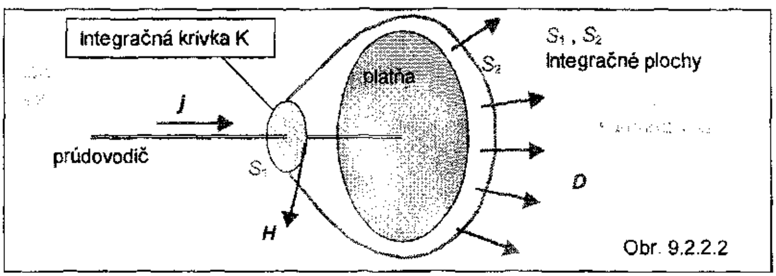
$$\operatorname{div}\boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \operatorname{div}\boldsymbol{J} + \frac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{D})}{\partial t} = \operatorname{div}\boldsymbol{J} + \operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0 \quad .$$

Preto vo *všeobecnosti*, aj pri *nestacionárnych* javoch, platí:

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = 0 \quad .$$

Takáto úprava naznačuje, že zatiaľ čo v stacionárnom stave (keď $\partial\boldsymbol{D}/\partial t = 0$) platí vzťah div $\boldsymbol{J} = 0$, v časovo premenných poliach platí všeobecnejší vzťah (9.2.2.5). Preto pripísanie ďalšieho člena do rovnice (9.2.2.3) znamená jej rozšírenie aj na nestacionárne procesy. Člen $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ má rovnaký rozmer ako hustota elektrického prúdu, t.j. meria sa v jednotkách $\mathrm{A{\cdot}m^{-2}}$. Je to plošná hustota ***Maxwellovho (posuvného) prúdu***, ktorý je jej plošným integrálom.

Fyzikálny význam posuvného prúdu možno vysvetliť na nasledujúcom príklade. Vodičom nech priteká prúd na platňu kondenzátora, ktorá sa pritom nabíja voľným elektrickým nábojom, čo znamená, že v jej okolí sa mení elektrické pole. Elektrické pole vytvorené voľným nábojom môžeme charakterizovať vektorom elektrickej indukcie $\boldsymbol{D}$. Pritekajúci elektrický prúd vytvára vo svojom okolí



Obr. 9.2.2.2

magnetické pole, ktoré opisujeme vektorom intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$. Cirkulácia vektora $\boldsymbol{H}$, t.j. jeho dráhový integrál pozdĺž integračnej krivky (obr.) sa rovná pritekajúcemu prúdu, lebo prúd prechádza plochou S_1, ktorá je ohraničená integračnou krivkou. Na ploche S_1 existuje časť, na ktorej prúdová hustota pritekajúceho prúdu nie je nulová, preto ani plošný integrál na pravej strane rovnice (9.2.2.2) nie je nulový. Plochu S_1 však možno nahradiť plochou S_2, ktorá má tvar banky s otvorom tvoreným integračnou krivkou K. Cez túto plochu pritekajúci prúd neprechádza, preto plošný integrál prúdovej hustoty pritekajúceho prúdu cez túto plochu sa rovná nule. Ak by v štvrtej Maxwellovej rovnici na pravej strane chýbala hustota posuvného prúdu, vznikol by nesúlad medzi pravou a ľavou stranou rovnice (9.2.2.1). Prítomnosť posuvného prúdu však odstraňuje tento nedostatok. V miestach, kde sme zvolili plochu S_2, sa počas pritekania elektrického náboja na platňu kondenzátora mení elektrické pole. Derivácia vektora $\boldsymbol{D}$ sa preto nerovná nule a rovnako ani plošný integrál hustoty posuvného prúdu cez plochu S_2. Potom opäť dochádza k rovnosti ľavej a pravej strany rovnice (9.2.2.1).

Príklad 9.2.2.1 Ukážte, že v rovinnom kondenzátore, medzi platňami ktorého je vákuum, možno Maxwellov posuvný prúd I vyjadriť v tvare $I = C \cdot (\mathrm{d}U / \mathrm{d}t)$, kde C je kapacita kondenzátora a U napätie medzi jeho platňami.

Riešenie Pre kapacitu rovinného kondenzátora platí $C = (\varepsilon_0 S)/\ell$, kde S je plošný obsah jednej platne, ℓ vzdialenosť medzi platňami. Ak na platniach kondenzátora je voľný náboj s plošnou hustotou σ, medzi platňami je elektrická indukcia $D = \sigma$ a intenzita elektrického poľa $E = \sigma/\varepsilon_0$. To využijeme pri nasledujúcej úprave:

$$C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E\,\ell) = C\,\ell\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = C\,\ell\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) = \frac{C\,\ell}{\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon_0 S}{\ell}\frac{\ell}{\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = S\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = S\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$$

čím sme dostali súčin plošného obsahu platne kondenzátora s hustotou Maxwellovho posuvného prúdu. Preto je to Maxwellov posuvný prúd.

Kontrolné otázky

1. *Napíšte štvrtú Maxwellovu rovnicu pre stacionárny stav.*
2. *Napíšte štvrtú Maxwellovu rovnicu platnú aj pre nestacionárny stav.*
3. *Vyjadrite všeobecný obsah štvrtej Maxwellovej rovnice.*
4. *Napíšte rovnicu kontinuity pre elektrický prúd.*
5. *Uveďte súvislosť rovnice kontinuity pre elektrický prúd so štvrtou Maxwellovou rovnicou.*
6. *Uveďte čo je Maxwellov posuvný prúd.*
7. *Aký význam má Maxwellov posuvný prúd pri nestacionárnych javoch?*
8. *Čomu sa rovná cirkulácia vektora **H** v stacionárnom elektromagnetickom poli?*
9. *Čomu sa rovná cirkulácia vektora **H** v nestacionárnom elektromagnetickom poli?*

9.2.3 Súhrn rovníc opisujúcich elektromagnetické pole

V kapitole o elektrostatickom poli bola odvodená prvá Maxwellova rovnica:

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{D} = \rho_v \ , \tag{9.2.3.1}$$

v ktorej $\boldsymbol{D}$ je vektor elektrickej indukcie a ρ_v objemová hustota **voľného** elektrického náboja. Treba ešte raz zdôrazniť, že ide o voľný elektrický náboj, teda náboj, ktorý sa môže premiestňovať na makroskopické vzdialenosti. K veľkosti vektora $\boldsymbol{D}$ neprispievajú viazané náboje, teda náboje spolarizovaného dielektrika. Prvá Maxwellova rovnica je zovšeobecnením Coulombovho zákona i Gaussovho zákona.

V kapitole o magnetickom poli bola odvodená druhá Maxwellova rovnica:

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0 \ , \tag{9.2.3.2}$$

ktorá vyjadruje skutočnosť, že statické magnetické pole nemá podobné (bodové) zdroje ako elektrostatické pole, že magnetické indukčné čiary nemajú začiatok a koniec, ale že sú to uzavreté krivky.

Prvá a druhá Maxwellova rovnica sa týkajú stacionárnych polí - elektrostatického a magnetostatického, ktoré sa s časom nemenia. *Tretia a štvrtá Maxwellova rovnica opisujú nestacionárne polia* a vyjadrujú významnú prírodnú zákonitosť - zmena magnetického poľa vedie ku vzniku elektrického poľa a naopak, časovo premenné elektrické pole má za následok vznik magnetického poľa.

V paragrafe 9.2.1 bola odvodená tretia Maxwellova rovnica :

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = -(\partial \boldsymbol{B}/\, \partial t) \ , \tag{9.2.3.3}$$

v ktorej $\boldsymbol{E}$ je vektor intenzity elektrického poľa a $\boldsymbol{B}$ vektor magnetickej indukcie. Rovnica vyjadruje vznik elektrického poľa v časovo premenlivom magnetickom poli.

V paragrafe 9.2.2 bola odvodená štvrtá Maxwellova rovnica :

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + (\partial \boldsymbol{D}/\, \partial t) \ , \tag{9.2.3.4}$$

v ktorej $\boldsymbol{H}$ je vektor intenzity magnetického poľa, $\boldsymbol{D}$ vektor elektrickej indukcie a $\boldsymbol{J}$ vektor hustoty elektrického prúdu, reprezentujúci transport voľného elektrického náboja (nie viazaného, t.j. nevzťahuje sa na mikroskopické prúdy cirkulujúce v molekulách). Rovnica vyjadruje skutočnosť, že magnetické pole vzniká v okolí vodičov elektrického prúdu, i v časovo premenlivom elektrickom poli. V podstate obsahuje aj rovnicu kontinuity elektrického prúdu.

V uvedených štyroch Maxwellových rovniciach vystupujú derivácie (priestorové i časové) štyroch základných vektorov ***E, D, B, H,*** opisujúcich elektromagnetické pole. Preto sa tieto rovnice uvádzajú aj pod názvom *Maxwellove rovnice v diferenciálnom tvare*. Každá z týchto rovníc má svoj ekvivalent v ***integrálnom tvare***. V nasledujúcich riadkoch sú tieto ekvivalenty uvedené po súvisiacich dvojiciach:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho_v && \oiint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_v \\
&\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 && \oiint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} && \oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} && \oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_k I_k
\end{aligned}$$

(9.2.3.5)

K poslednej zo série rovníc v integrálnom tvare treba uviesť, že do súčtu makroskopických prúdov I_k treba zarátať aj Maxwellove posuvné prúdy. Odvodenie vzťahov medzi integrálnym a diferenciálnym tvarom Maxwellových rovníc možno nájsť v príslušných paragrafoch.

Na úplný opis javov v elektromagnetickom poli, najmä v látkovom prostredí, nevystačíme s Maxwellovými rovnicami. V dielektrikách treba na opis ich spolarizovaného stavu pridať *vektor elektrickej polarizácie* $\boldsymbol{P}$ a v magnetikách *vektor magnetickej polarizácie* $\boldsymbol{J}_m$, resp. *vektor magnetizácie* $\boldsymbol{M}$. Tieto vektory vstupujú do tzv. ***materiálových vzťahov*** :

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_c + \boldsymbol{P} \quad , \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}_m = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$$

(9.2.3.6)

kde $\boldsymbol{D}$ je vektor elektrickej indukcie, $\boldsymbol{E}_c$ vektor výslednej intenzity elektrického poľa v dielektriku (vektorový súčet intenzít vytvorených voľnými i viazanými nábojmi), $\boldsymbol{B}$ vektor magnetickej indukcie (vyvolaný makro- i mikroprúdmi), ε_0 elektrická konštanta (permitivita vákua) a μ_0 magnetická konštanta (permeabilita vákua).

Na opis elektrických prúdov treba pridať rovnicu kontinuity (spojitosti)

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \ ,$$

(9.2.3.7)

v ktorej $\boldsymbol{J}$ je vektor hustoty elektrického prúdu a ρ_v objemová hustota voľného elektrického náboja. Z rovnice kontinuity v stacionárnom stave vyplýva prvý Kirchhoffov zákon. Vzťah medzi prúdovou hustotou $\boldsymbol{J}$ a pôsobiacim elektrickým poľom s intezitou $\boldsymbol{E}$ vyjadruje Ohmov zákon v diferenciálnom tvare

$$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$$

(9.2.3.8)

kde γ je *konduktivita* prostredia (prevrátená hodnota *rezistivity*). Integráciou Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare možno získať Ohmov zákon v integrálnom tvare, ako aj druhý Kirchhoffov zákon pre elektrický obvod.

Elektromagnetické pole charakterizujeme aj objemovou hustotou energie. V paragrafoch 6.4.3 a 9.1.5 boli odvodené vzťahy pre objemové hustoty energie v elektrickom, resp. v magnetickom poli. Sčítaním týchto parciálnych vzťahov dostaneme súhrnný vzorec pre objemovú hustotu energie elektromagnetického poľa:

$$w = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} \tag{9.2.3.9}$$

V tomto vzorci vystupujú všetky štyri základné vektory opisujúce elektromagnetické pole.

Kontrolné otázky

1. *Napíšte všetky štyri Maxwellove rovnice v diferenciálnom tvare.*
2. *Ktoré z Maxwellových rovníc sa týkajú stacionárneho stavu?*
3. *Aký vzájomný vzťah medzi elektrickým a magnetickým poľom vyplýva z tretej a štvrtej Maxwellovej rovnice?*
4. *Napíšte Maxwellove rovnice v integrálnom tvare.*
5. *Čo vyjadrujú materiálové vzťahy?*
6. *Uplatňujú sa materiálové vzťahy vo vákuu?*
7. *Ktorými základnými rovnicami opisujeme deje súvisiace s vedením elektrického prúdu?*
8. *Napíšte a vysvetlite rovnicu kontinuity pre elektrický prúd.*
9. *Uveďte rozdiel medzi vektorom magnetickej polarizácie a vektorom magnetizácie.*
10. *Aké významné vzťahy (zákony) možno odvodiť z Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare?*
11. *Aký zákon pre elektrický prúd vyplýva z rovnice kontinuity v stacionárnom stave?*

9.2.4 Maxwellove rovnice vo vákuu

Vo vákuu niet voľných, ani viazaných elektrických nábojov, a netečú v ňom elektrické prúdy. Preto v Maxwellových rovniciach pre vákuum tieto veličiny nevystupujú. Navyše používanie všetkých štyroch vektorov $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$ nie je vo vákuu opodstatnené, lebo vektor elektrickej indukcie $\boldsymbol{D}$ súvisí len s voľnými elektrickými nábojmi a vektor intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ len s makroskopickými prúdmi. Ďalej treba podotknúť, že silové pôsobenie na elektrické náboje, ktoré sú vzhľadom na vzťažnú sústavu v pokoji, je určené len vektorom intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ (nie iba elektrostatického, ale aj indukovaného v premenlivom magnetickom poli). Na pohybujúce sa náboje pôsobí sila, ktorú vyjadrujeme pomocou vektora magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$. Preto na opis elektromagnetických javov vo vákuu postačujú len dva vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$.

Aj materiálové vzťahy (9.2.3.6) a (9.2.3.7) sa vo vákuu zjednodušia, nebude v nich vystupovať vektor elektrickej polarizácie $\boldsymbol{P}$, ani vektor magnetickej polarizácie $\boldsymbol{J}_M$ (resp. magnetizácie $\boldsymbol{M}$), a relatívna permitivita a relatívna permeabilita sa rovnajú jednotke. Zostanú jednoduché vzťahy medzi vektormi:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_o \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu_o \boldsymbol{H} . \tag{9.2.4.1}$$

Postupne budeme upravovať jednotlivé Maxwellove rovnice na tvar vo vákuu:

$$\text{div}\boldsymbol{D} = \rho_v \quad \Rightarrow \quad \text{div}(\varepsilon_o \boldsymbol{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div}\boldsymbol{E} = 0 \;, \tag{9.2.4.2}$$

$$\text{div}\boldsymbol{B} = 0 \quad \textit{sa nezmení}\,, \quad \Rightarrow \quad \text{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{9.2.4.3}$$

$$\text{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \textit{sa nezmení}\,, \quad \Rightarrow \quad \text{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9.2.4.4}$$

$$\text{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \text{rot}(\mu_o \boldsymbol{H}) = \mu_o \frac{\partial(\varepsilon_o \boldsymbol{E})}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \text{rot}\boldsymbol{B} = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \;. \tag{9.2.4.5}$$

Z rovníc obsahujúcich rotáciu vyplýva, že aj vo vákuu zmena elektrického poľa má za následok vznik magnetického poľa a naopak. Rovnice s divergenciou potvrdzujú, že vo vákuu nie iba magnetické, ale ani elektrické pole nemá žriedla. Takto upravené rovnice využijeme v ďalšom paragrafe na odvodenie diferenciálnej rovnice popisujúcej elektromagnetické vlnenie.

Kontrolné otázky

1. *Ktoré skutočnosti ovplyvňujú zmenu Maxwellových rovníc pri ich formulácii vo vákuu?*
2. *Ako sa zmení materiálový vzťah medzi vektormi* ***E*** *a* ***D*** *vo vákuu?*
3. *Ako sa zmení materiálový vzťah medzi vektormi* ***B*** *a* ***H*** *vo vákuu?*
4. *Napíšte Maxwellove rovnice, ktoré sú vo vákuu a v prostredí rovnaké.*
5. *Reprodukujte postup pri zmene štvrtej Maxwellovej rovnice na rovnicu* ***platnú*** *vo vákuu.*

9.3 ELEKTROMAGNETICKÉ VLNENIE

Kľúčové slová
Elektromagnetické vlnenie, vlnová rovnica, rýchlosť elektromagnetických vĺn, rovinná vlna, guľová vlna, polarizácia elektromagnetickej vlny, Poyntingov vektor

9.3.1 Vlnová rovnica elektromagnetického vlnenia

Možno ju odvodiť vychádzajúc z Maxwellových rovníc. Z tohto hľadiska najjednoduchší je prípad elektromagnetického vlnenia vo vákuu. Preto budeme vychádzať z rovníc (9.2.4.2) až (9.2.4.5), odvodených v predchádzajúcom paragrafe.

Vlnovú rovnicu, v ktorej vystupuje vektor $\boldsymbol{E}$ získame, keď najprv vykonáme rotáciu ľavej i pravej strany rovnice (9.2.4.4):

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \mathrm{rot}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right). \tag{9.3.1.1}$$

Úpravou ľavej strany, s využitím vzorca na rozpis dvojnásobného vektorového súčinu dostaneme:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - (\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{E} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{E} - \nabla^2\boldsymbol{E} = -\nabla^2\boldsymbol{E}\quad,$$

lebo $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0$. Pritom

$$-\nabla^2\boldsymbol{E} = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial z^2}\right). \tag{9.3.1.2}$$

Pravú stranu rovnice (9.3.1.1) upravíme tak, že najprv vymeníme poradie derivácií podľa priestorových premenných a časovej premennej, potom dosadíme za $\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$ výraz z Maxwellovej rovnice (9.2.4.5):

$$\mathrm{rot}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\mathrm{rot}\boldsymbol{B})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{9.3.1.3}$$

Upravené vzťahy (9.3.1.2) a (9.3.1.3) vrátime do rovnice (9.3.1.1):

$$\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial z^2}\right) = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{9.3.1.4}$$

čím sme dostali ***parciálnu diferenciálnu rovnicu*** pre vektor $\boldsymbol{E}$. Rovnakú rovnicu by sme dostali pre vektor $\boldsymbol{B}$, keby sme postup zopakovali, ale začínali by sme s rovnicou (9.2.4.5).

Rovnica (9.3.1.4) sa svoju formou zhoduje s parciálnou diferenciálnou rovnicou opisujúcou vlnenie - **vlnovou rovnicou** :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

v ktorej $u(x,y,z,t)$ je funkcia troch priestorových súradníc a času, predstavujúca výchylku vlnenia, a v je fázová rýchlosť vlnenia. Porovnaním týchto rovníc získame predovšetkým výsledok poukazujúci na to, že vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ môžu predstavovať ekvivalent výchylky vlnenia. Navyše porovnaním členov na pravej strane získavame informáciu o rýchlosti šírenia týchto vĺn:

$$\frac{1}{v^2}=\varepsilon_0\mu_0 \quad\Rightarrow\quad v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{9.3.1.5}$$

z čoho po dosadení hodnôt konštánt $\varepsilon_0 = 8{,}8542\,.10^{-12}$ F/m a $\mu_0 = 4\pi\,.10^{-7}$ H/m pre rýchlosť elektromagnetických vĺn dostaneme

$$v = 2{,}998\,.10^8 \text{ m/s} \tag{9.3.1.6}$$

Táto rýchlosť sa zhoduje s rýchlosťou svetla, ktorá bola známa už v 17. storočí. Experimentálny dôkaz existencie elektromagnetických vĺn poskytol pokus zostavený H. R. Hertzom v roku 1886, ale teoretické práce, z ktorých vyplynula ich existencia, Maxwell publikoval o 20 rokov skôr.

Príklad 9.3.1.1 Vyjadrite rozmery konštánt ε_0 a μ_0 pomocou rozmerov základných jednotiek SI a ukážte, že výraz $1/(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$ má rozmer rýchlosti m/s !
Riešenie Rozmer konštanty ε_0 získame z Coulombovho zákona:
$f = (1/4\pi\varepsilon_0)(Q_1\,Q_2)/r^2$, odkiaľ $[\,\varepsilon_0\,] = (A^2\,s^2)(m^{-2})(s^2)(kg^{-1}\,m^{-1}) = A^2\,s^2\,kg^{-1}\,m^{-3}$.
Rozmer konštanty μ_0 získame zo vzorca vyjadrujúceho magnetickú silu pôsobiacu medzi dvomi rovnobežnými dlhými vodičmi $F = (\mu_0\,I_1\,I_2)/(2\pi r)$, odkiaľ
$[\,\mu_0\,] = kg\;m\;s^{-2}\;A^{-2}$. Súčin týchto rozmerov: $[\,\varepsilon_0\,][\,\mu_0\,] = s^2\,m^{-2}$. Odmocnina z prevrátenej hodnoty tohto výrazu je rozmer rýchlosti m/s.

Kontrolné otázky

1. *Z ktorých Maxwellových rovníc možno odvodiť vlnovú rovnicu pre vektor **E** ?*
2. *Z ktorých Maxwellových rovníc možno odvodiť vlnovú rovnicu pre vektor **B** ?*
3. *Aký fyzikálny rozmer má súčin permitivity vákua s permeabilitou vákua?*
4. *Kto a kedy experimentálne dokázal existenciu elektromagnetických vĺn?*
5. *Aká je hodnota fázovej rýchlosti elektromagnetických vĺn vo vákuu?*

9.3.2 Rovinná elektromagnetická vlna

Vlnová rovnica (9.3.1.4) má rôzne riešenia, ale za najvýznamnejšie považujeme riešenia v tvare **rovinnej vlny** a v tvare **guľovej vlny**. Ideálna guľová elektromagnetická vlna je vyžarovaná bodovým zdrojom. Reálny zdroj (napr. malá vysielacia anténa) má však konečné rozmery a priestorom sa z neho šíria vlnoplochy, ktoré guľový tvar nadobúdajú až vo vzdialenosti niekoľkonásobne presahujúcej rozmery antény. V dostatočnej vzdialenosti od zdroja je krivosť týchto vlnoplôch už pomerne malá a v priblížení môžeme ich malé časti považovať za rovinné. Preto aj rovinná vlna je len istou idealizáciou reálneho prípadu. Na opis vlastností elektromagnetického vlnenia je však veľmi výhodná. Súradnicovú sústavu si možno zvoliť tak, aby napr. os x mala smer šírenia rovinnej vlny. V takom prípade vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ elektromagnetickej vlny budú závisieť iba od dvoch premenných - času t a priestorovej súradnice x. Napríklad pre vektor $\boldsymbol{E}$ harmonickej elektromagnetickej vlny možno potom napísať rovnicu:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \sin(\omega t - kx)\,, \tag{9.3.2.1}$$

kde ω je uhlová frekvencia vlny, $k = 2\pi/\lambda$ uhlové vlnové číslo a λ jej vlnová dĺžka. Vektor $\boldsymbol{E}_0$ predstavuje amplitúdu vlny, pričom je na smer šírenia vlny kolmý. To, že je na smer šírenia kolmý, bude teraz predmetom podrobnej analýzy.

Zo zápisu rovinnej vlny (9.3.2.1) je zrejmé, že vektor $\boldsymbol{E}$ nezávisí od priestorových premenných y a z. Táto skutočnosť sa týka všetkých jeho troch súradníc E_x, E_y a E_z (a teda aj zložiek $E_x \boldsymbol{i}$, $E_y \boldsymbol{j}$, $E_z \boldsymbol{k}$). Preto pre ich parciálne derivácie platí:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0\,,\qquad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0\,,\qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0\,, \tag{9.3.2.2}$$

To využijeme na dôkaz, že E_x nezávisí ani od premennej x. Použijeme pritom prvú Maxwellovu rovnicu (9.2.4.2):

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + 0 + 0 = 0$$

Z uvedeného vidno, že súradnica E_x nezávisí od priestorových premenných. Ďalším výpočtom ukážeme, že nezávisí ani od času. Na tento cieľ využijeme štvrtú Maxwellovu rovnicu (9.2.4.5):

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \varepsilon_0 \mu_0 \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \boldsymbol{j}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \boldsymbol{k}\frac{\partial E_z}{\partial t} \right)$$

Determinant rozpíšeme, pričom si uvedomíme, že na základe rovníc (9.3.2.2) derivácie podľa premenných y a z sa rovnajú nule. Tak dostaneme rovnicu:

$$-\boldsymbol{j}\frac{\partial B_z}{\partial x}+\boldsymbol{k}\frac{\partial B_y}{\partial x}=\varepsilon_0\mu_0\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial E_x}{\partial t}+\boldsymbol{j}\frac{\partial E_y}{\partial t}+\boldsymbol{k}\frac{\partial E_z}{\partial t}\right) .$$

Na ľavej strane rovnice chýba zložka rovnobežná s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{i}$. Preto aj na pravej strane rovnice musí byť táto zložka nulová. Z toho vyplýva, že parciálna derivácia E_x podľa času sa rovná nule. Preto zložka $E_x\boldsymbol{i}$ nezávisí od času. Predtým sme zistili, že nezávisí ani od priestorových premenných. *Je to teda konštanta.* Keďže hovoríme o vlnách, nie o statických poliach, je korektné považovať túto zložku vektora $\boldsymbol{E}$ rovinnej elektromagnetickej vlny, šíriacej sa v smere osi x za nulovú.

Na základe týchto výsledkov tvrdíme, že **vektor** $\boldsymbol{E}$ rovinnej elektromagnetickej vlny, vystupujúci v rovnici (9.3.2.1), má len zložky v smere osí y a z, takže **je kolmý na smer šírenia vlny**.

Analogickým spôsobom by sme mohli získať informáciu aj o vektore $\boldsymbol{B}$, ktorý je tiež kolmý na smer šírenia rovinnej vlny. Dôležitá je však vzájomná orientácia vektorov $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ v tejto vlne. Informáciu o nej získame, keď využijeme tretiu Maxwellovu rovnicu (9.2.4.4), v ktorej vystupuje $\text{rot}\,\boldsymbol{E}$. Nech

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{j}A\sin\left(\omega t-\frac{\omega x}{c}\right), \tag{9.3.2.3}$$

kde A **je amplitúda vektora** E, c fázová rýchlosť **vlny**. Rovnicu (9.3.2.3) najprv **parciálne derivujme podľa času**:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{j}A\omega\cos\left(\omega t-\frac{\omega x}{c}\right) .$$

Teraz vypočítame výraz $\text{rot}\boldsymbol{E}$, pričom si uvedomíme, že derivácie podľa premenných y a z, ktoré predpisuje operátor nabla, sa v rovinnej vlne šíriacej sa v smere osi x rovnajú nule:

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\boldsymbol{E}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\times\left[\boldsymbol{j}A\sin\left(\omega t-\frac{\omega x}{c}\right)\right]=$$

$$=-\frac{\boldsymbol{i}}{c}\times\left[\boldsymbol{j}A\omega\cos\left(\omega t-\frac{\omega x}{c}\right)\right] ,$$

čiže

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E}=-\frac{\boldsymbol{i}}{c}\times\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} . \tag{9.3.2.4}$$

Podľa Maxwellovej rovnice však $\text{rot}\,\boldsymbol{E}=-(\partial \boldsymbol{B}/\partial t)$, **takže porovnaním** s rovnicou (9.3.2.4) získame vzťah medzi vektormi $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{1}{c}\boldsymbol{i}\times\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} . \tag{9.3.2.5}$$

Rovnica (9.3.2.5) bude splnená, keď sa splní podmienka

$$B = \frac{1}{c}(i \times E) .$$

(9.3.2.6)

Podľa tohto výsledku vektory B , i a E v rovinnej elektromagnetickej vlne sú navzájom na seba kolmé a v danom poradí tvoria pravotočivú sústavu. Pritom vektor i ukazuje smer šírenia vlny.

Ak si vektory E a B zachovávajú svoj smer (v danom bode priestoru, ktorým vlna prechádza), t.j. s časom sa ich smer nemení, vlna je ***lineárne polarizovaná***. To je prípad rádiových vín, najmä z pásma veľmi krátkych vín. Pokiaľ ide o svetelné vlny, v danom bode priestoru môžu tieto vektory meniť smer náhodne, alebo vlna môže byť polarizovaná lineárne, ale aj inak, čo však nebude predmetom tejto kapitoly.

Príklad 9.3.2.1 Dosadením do vlnovej rovnice si overte, že rovnica (9.3.2.3) je jej riešením.

Riešenie Vlnová rovnica obsahuje parciálne derivácie vektora E podľa času a podľa priestorových premenných. V tomto prípade sú derivácie podľa premenných y a z nulové, treba vypočítať len derivácie podľa premenných x a t :

$(\partial E / \partial t) = \boldsymbol{j} A\, \omega \cos(\omega t - \omega x/c)$, $(\partial^2 E / \partial t^2) = -\boldsymbol{j} A\, \omega^2 \sin(\omega t - \omega x/c)$

$(\partial E / \partial x) = -\boldsymbol{j} A\, (\omega /c) \cos(\omega t - \omega x/c)$, $(\partial^2 E / \partial x^2) = -\boldsymbol{j} A\, (\omega /c)^2 \sin(\omega t - \omega x/c)$.

Porovnaním získame vzťah $(\partial^2 E / \partial x^2) = (1/c^2)\, (\partial^2 E / \partial t^2)$, čo znamená, že rovnica (9.3.2.3) je riešením diferenciálnej rovnice vlnenia.

Príklad 9.3.2.2 Pre súradnice vektora E rovinnej elektromagnetickej vlny platia vzťahy $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z = 2 \cos [\pi \cdot 10^{15} (t - x/c)]$. Napíšte vzťahy pre súradnice vektora B tejto vlny.

Riešenie Zo zápisu súradníc vektora E vyplýva, že vlna sa šíri rovnobežne s osou x , vektor E osciluje rovnobežne s osou z , preto ho možno vyjadriť ako $E = \boldsymbol{k} E_z$. Medzi vektormi B a E v rovinnej vlne platí vzťah (9.3.2.6):

$B = (1/c)\, (i \times E) = (1/c)\, (i \times \boldsymbol{k} E_z) = -(1/c)\, \boldsymbol{j} E_z)$. Preto vektor B má len zložku v smere osi y : $B_x = 0$, $B_y = -(1/c)\, 2 \cos [\pi \cdot 10^{15} (t - x/c)]$, $B_z = 0$.

Príklad 9.3.2.3 Rovinná elektromagnetická vlna má amplitúdu E vektora $2 \cdot 10^{-4}$ V/m . Vypočítajte amplitúdu vektora B .

Riešenie Použijeme vzťah (9.3.2.6), z ktorého pre veľkosti vektorov platí $B = E / c$. Po dosadení do vzorca dostaneme $B = 6{,}66 \cdot 10^{-13}$ T .

Kontrolné otázky

1. *Kedy by ste elektromagnetickú vlnu považovali za rovinnú?*
2. *Prečo v rovinnej vlne, ktorá sa šíri pozdĺž osi* x , *zložky vektora* E *nezávisia od priestorových súradníc* y *a* z *?*
3. *Ako sú navzájom orientované vektory* E , B *a smer šírenia rovinnej vlny?*
4. *Ako by ste dokázali, že vektory* B a E *v rovinnej vlne sú na seba kolmé?*
5. *Aká je to lineárne polarizovaná vlna?*

9.3.3 Poyntingov vektor

Je to vektor, ktorý svojou veľkosťou predstavuje hustotu toku energie, ktorú prenáša elektromagnetická vlna. Inak povedané - ide o veličinu vyjadrujúcu koľko energie prenesie elektromagnetická vlna cez plochu s jednotkovým obsahom za jednotku času (plocha musí byť postavená kolmo na smer šírenia vlny). Poyntingov vektor $\boldsymbol{P}_S$ sa vyjadruje sa vzorcom

$$\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \ , \qquad (9.3.3.1)$$

kde $\boldsymbol{E}$ je vektor intenzity elektrického poľa a $\boldsymbol{H}$ vektor intenzity magnetického poľa príslušnej elektromagnetickej vlny. Z fyzikálnych rozmerov vektorov $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ vyplýva, že rozmer Poyntingovho vektora je watt na štvorcový meter:

$$[P_S] = [E][H] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \ . \qquad (9.3.3.2)$$

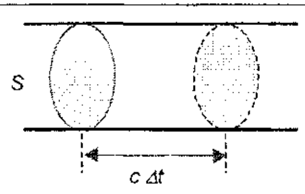
Rozmerom veličiny sa potvrdzuje, že ide o prenos výkonu cez plochu s jednotkovým plošným obsahom.

Táto veličina - (plošná) hustota toku elektromagnetickej energie - sa niekedy nazýva aj ***intenzita elektromagnetického vlnenia*** .

Poznámka Poyntingov vektor sa v norme STN ISO 31, i v rade novších publikácií, označuje písmenom $\boldsymbol{S}$. V minulosti sa používalo aj písmeno $\boldsymbol{P}$. Vzhľadom na označovanie vektora priradeného ploche ($\boldsymbol{S}$), ktoré sa používa v celom tomto texte, nie iba v tejto kapitole, pre Poyntingov vektor je použité označenie $\boldsymbol{P}_S$. Na označenie výkonu sa naďalej bude používať písmeno P, teda bez indexu $_S$.

Vzhľadom na význam tejto veličiny je potrebné podrobnejšie sa zaoberať odvodením vzorca (9.3.3.1).

Najprv vzorec odvodíme zjednodušeným spôsobom. Predstavíme si potrubie, ktorým prúdi energia. Na objemovú jednotku nech pripadá energia w (J/m^3), ktorá prúdi potrubím rýchlosťou c , potrubie nech má prierez S . Za časový interval Δt energia postúpi potrubím o dĺžku $c\Delta t$, takže zaplní objem $S\,c\Delta t$.



Obr. 11.3.3.1

Vynásobením tohto objemu objemovou hustotou energie w dostaneme energiu, ktorá prešla prierezom S za časový interval Δt :

$$W = wSc\Delta t$$

Keď túto energiu vydelíme plošným obsahom prierezu S a časovým intervalom Δt, dostaneme veličinu, vyjadrujúcu koľko energie prešlo jednotkovým plošným obsahom za jednotku času, t.j. hustotu toku energie P :

$$P_S = \frac{W}{S\Delta t} = \frac{wSc\Delta t}{S\Delta t} = cw \ . \tag{9.3.3.3}$$

Teraz môžeme dosadiť objemovú hustotu energie elektromagnetického poľa podľa vzorca (9.2.3.9):

$$w = (1/2)ED + (1/2)BH \ , \tag{9.3.3.4}$$

pričom predpokladáme, že ide o izotrópne prostredie, v ktorom je vektor $\boldsymbol{E}$ rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{D}$ a vektor $\boldsymbol{B}$ s vektorom $\boldsymbol{H}$, takže namiesto ich skalárneho súčinu možno napísať len súčin ich veľkostí. Vzorec pre hustotu energie ďalej upravíme pre prípad rovinnej elektromagnetickej vlny, v ktorej platí vzorec (9.3.2.6) , ktorý pre veľkosti vektorov $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$ poskytuje vzťah: $B = E / c$. Tento vzťah ešte upravíme pre prípad vo vákuu, kde $D = \varepsilon_0 E$ a $B = \mu_0 H$:

$$B = \frac{E}{c} \ \Rightarrow \ \mu_0 H = \frac{E}{c} \ \Rightarrow \ \mu_0 H = E\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \ \Rightarrow \ \sqrt{\mu_0}\, H = \sqrt{\varepsilon_0}\, E \ \Rightarrow \ \mu_0 H^2 = \varepsilon_0 E^2$$

Výsledok využijeme pri úprave vzorca pre hustotu toku energie:

$$P_S = cw = c\tfrac{1}{2}(ED + BH) = \frac{c}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = c\varepsilon_0 E^2 = c\sqrt{\varepsilon_0}\, E \sqrt{\mu_0}\, H = EH$$

Získali sme vzorec pre veľkosť hustoty toku elektromagnetickej energie:

$$P_S = E H \tag{9.3.3.5}$$

Vzorec nezohľadňuje vektorový charakter hustoty toku energie. Zohľadnením vzájomných smerov vektorov $\boldsymbol{P}_S$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ (resp. $\boldsymbol{B}$) v rovinnej vlne, môžeme tento vzorec napísať vo vektorovom tvare:

$$\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \ . \tag{9.3.3.6}$$

Precízny spôsob jeho odvodenia - teda odvodenie Poyntingovho vektora - nájdete v nasledujúcom paragrafe.

Príklad 9.3.3.1 Odporová špirála je zhotovená z drôtu, ktorý má priemer $d = 0{,}6$ mm a dĺžku $\ell = 2$ m. Jej elektrický odpor je $5\ \Omega$ a prechádza ňou prúd $I = 2$ A . Vypočítajte veľkosť Poyntingovho vektora, vyjadrujúceho príkon elektromagnetickej energie do vodiča jeho povrchom.

Riešenie Joulove straty v špirále predstavujú príkon $RI^2 = 20$ W . Tieto straty sú kompenzované prítokom elektromagnetickej energie povrchom špirály, ktorý má veľkosť $S = 2\pi r\ell = 3{,}77.10^{-2}$ m^2 . Keď vydelíme Joulove straty veľkosťou povrchu špirály, dostaneme veľkosť Poyntingovho vektora : $P_S = 20\text{W} / 3{,}77.10^{-2}$ m^2 $= 530{,}5$ W/m^2 .

Kontrolné otázky

1. *Čo vyjadruje Poyntingov vektor?*
2. *Napíšte vzorec Poyntingovho vektora.*
3. *Ako súvisí Poyntingov vektor s hustotou elektromagnetickej energie?*
4. *Určte rozmer Poyntingovho vektora.*

9.3.4 Odvodenie Poyntingovho vektora

Precízny spôsob odvodenia vzťahu (9.3.3.1) vychádza zo vzorca pre objemovú hustotu energie elektromagnetického poľa (9.2.3.9). V elektromagnetickom poli si zvolíme oblasť ohraničenú uzavretou plochou S, a vypočítame energiu W nachádzajúcu sa v nej ako objemový integrál hustoty energie w:

$$W = \iiint w\,\mathrm{d}\tau = \iiint (\tfrac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\,\mathrm{d}\tau \; .$$

Vypočítame deriváciu tejto energie podľa času, čím vyjadríme jej zmenu pripadajúcu na jednotku času:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\iiint\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\tau \; .$$

Ďalej predpokladáme, že permeabilita μ a permitivita ε nezávisia od času, takže ich pri derivácii budeme považovať za konštanty. Na základe vzťahov $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\iiint\left(2\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E} + 2\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}\tau = \iiint\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\tau \; .$$

Do posledného integrálu dosadíme vzťahy vyplývajúce z Maxwellových rovníc

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J} \; , \quad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$$

a rozdelíme ho na dva integrály:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \iiint[\boldsymbol{E}\cdot(\operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}) - \boldsymbol{H}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]\mathrm{d}\tau = \iiint(\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E})\,\mathrm{d}\tau - \iiint(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J})\,\mathrm{d}\tau \qquad (9.3.4.1)$$

Posledný integrál predstavuje Joulove straty v zvolenom objeme poľa. V zjednodušenom prípade sa o tom možno presvedčiť jeho úpravou, keď si zvolíme objem v tvare valca s prierezom S a dĺžkou d, konštantnú hustotu elektrického prúdu $\boldsymbol{J}$ rovnobežnú s vektorom $\boldsymbol{E}$ a s osou valca. Potom:

$$\iiint(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J})\,\mathrm{d}\tau = E\,J\,Sd = (Ed)(JS) = UI = RI^2 \; ,$$

kde $Ed = U$ je elektrické napätie medzi základňami valca, $JS = I$ je prúd tečúci medzi základňami a R je príslušný elektrický odpor.

Prvý z dvoch integrálov si vyžaduje náročnejšiu úpravu. Preto si najprv vypočítame výraz div $(\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E})$. Operácia *divergencia* predpisuje derivácie, pričom výraz v zátvorke musíme derivovať ako súčin. Preto pri úprave budeme pri nabla operátore používať indexy symbolizujúce veličinu, na ktorú sa vzťahuje. Pri úpravách použijeme pravidlo o vzájomnej zámene skalárneho a vektorového súčinu v zmiešanom súčine:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) = \nabla_{\mathrm{H}} \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) + \nabla_{\mathrm{E}} \cdot (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) = (\nabla_{\mathrm{H}} \times \boldsymbol{H}) \cdot \boldsymbol{E} - (\nabla_{\mathrm{E}} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{H} =$$

$$= \boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{E}$$

Do prvého z integrálov v rovnici (9.3.4.1) dosadíme namiesto $(\boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{E})$ výraz div $(\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E})$, čím dostaneme :

$$\iiint (\boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{E})\, \mathrm{d}\tau = \iiint \operatorname{div}\ \mathrm{d}\tau = \oiint (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\oiint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

pričom sme použili Gaussovu integrálnu vetu o zámene objemového integrálu na plošný integrál cez uzavretú plochu. Táto plocha uzatvára zvolený objem $\boldsymbol{V}$ elektromagnetickom poli. Rovnica (9.3.4.1) tak dostane konečnú podobu:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\oiint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iiint (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J})\, \mathrm{d}\tau \ . \qquad (9.3.4.2)$$

V prvom integráli vystupuje Poyntingov vektor $\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$, takže tento člen predstavuje únik elektromagnetickej energie cez uzavretú plochu za jednotku času.

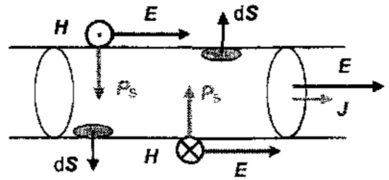
Ak by sa Poyntingov vektor rovnal nule, v uzavretej ploche by ubúdalo elektromagnetickej energie len prostredníctvom Joulových strát. Ak by existovali Joulove straty, ale celková energia v objeme ohraničenom uzavretou plochou by sa nemenila, potom by platila rovnosť:

$$0 = -\oiint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iiint (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J})\, \mathrm{d}\tau \quad \Rightarrow \quad \iiint (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J})\, \mathrm{d}\tau = -\oiint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \, .$$

To znamená, že Joulove straty by mali byť kompenzované prítokom energie zvonku. Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ má podľa zaužívaných dohôd smer z uzavretej plochy von, a aby aj pravá strana bola kladná, vektor $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ musí mať opačný smer ako vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, aby ich skalárny súčin $\boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ bol záporný. Potom bude elektromagnetická energia pritekať zvonku do uzavretej plochy.

Príklad 9.3.4.1 Dlhým priamym vodičom s kruhovým prierezom tečie elektrický prúd I. Overte si, že v takomto prípade Poyntingov vektor smeruje dovnútra vodiča - zo všetkých strán jeho valcového plášťa.

Riešenie Elektrický prúd je vyvolaný elektrickým poľom s intenzitou $\boldsymbol{E}$, pričom vodičom tečie prúd s prúdovou hustotou $\boldsymbol{J}$. Elektrické pole existuje aj mimo vodiča. Tečúci prúd vytvára v okolí vodiča magnetické pole, ktorého smer určíme z Biotovho - Savartovho zákona. Nad vodičom (na obrázku) vektor intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ smeruje pred obrázok, pod vodičom za obrázok. Vektorový súčin $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ smeruje v oboch prípadoch dovnútra vodiča.



Obr.9.3.4.1

Kontrolné otázky

1. *Akými mechanizmami dochádza k stratám energie elektromagnetického poľa?*
2. *Akým objemovým integrálom možno vo vodiči vyjadriť Joulove straty?*
3. *Aký smer má Poyntingov vektor na povrchu vodiča, ktorým tečie elektrický prúd?*
4. *Rozpíšte výraz div $(\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E})$.*
5. *Na základe vzorca pre Poyntingov vektor ukážte, aký má fyzikálny rozmer.*

9.3.5 Poyntingov vektor rovinnej elektromagnetickej vlny

V pomerne veľkej vzdialenosti od zdroja možno obmedzenú časť vlnoplochy elektromagnetickej vlny považovať za rovinnú. Napríklad v niekoľko kilometrovej vzdialenosti od vysielacej antény - v blízkosti prijímača. Vzorec (9.3.3.1) pre Poyntingov vektor :

$$\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{9.3.5.1}$$

platí všeobecne, bez ohľadu na tvar vlnoplochy. V prípade rovinnej vlny nadobúda osobitný tvar, ktorý je užitočný nie iba pri rozhlasových vlnách, ale aj v optike, pri opise energie prenášanej svetlom. Pre rovinnú vlnu bol odvodený vzorec (9.3.2.6) , vyjadrujúci vzťah medzi vektormi $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\,\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E}$$

z ktorého vyplýva, že medzi vektormi $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ existuje podobný vzťah :

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\,\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\,\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0 c}\,\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E} \tag{9.3.5.2}$$

Výsledok dosadíme do vzorca (9.3.5.1):

$$\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0 c}\,[\boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E})] = \frac{1}{\mu_0 c}\,[\boldsymbol{i}\, E^2 - \boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E})]\,.$$

Skalárny súčin $(\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E}) = 0$, lebo v rovinnej vlne je vektor $\boldsymbol{E}$ kolmý na smer šírenia vlny, v tomto prípade opísanom jednotkovým vektorom $\boldsymbol{i}$. Preto Poyntingov vektor rovinnej vlny má tvar :

$$\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{i}\left(\frac{1}{\mu_o c}\right)E^2 = \boldsymbol{i}\,(\varepsilon_o c)\,E^2 = \boldsymbol{i}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\,E^2 \ , \tag{9.3.5.3}$$

pričom všetky tri vyjadrenia sú rovnocenné, lebo pre rýchlosť elektromagnetických vĺn platí vzťah (pozri vzorec 9.3.1.5) $c^2 = 1/(\,\varepsilon_o\,\mu_o\,)$, pomocou ktorého možno uvedené vyjadrenia získať.

Vzorec (9.3.5.3) vyjadruje okamžitú hodnotu Poyntingovho vektora. Ak ide o harmonickú elektromagnetickú vlnu, vektor $\boldsymbol{E}$ periodicky mení svoju veľkosť i smer, takže aj veľkosť Poyntingovho vektora sa periodicky mení. Frekvencie elektromagnetických vĺn s ktorými sa stretávame sú také vysoké, že oscilácie Poyntingovho vektora zmyslami nedokážeme vnímať. Napríklad pri svetle vnímame akúsi priemernú hodnotu, ktorú možno vyjadriť pomocou amplitúdy vektora intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$. Vypočítame ju ako strednú hodnotu veľkosti Poyntingovho vektora počas jednej periódy. Pritom budeme predpokladať, že vektor $\boldsymbol{E}$ sa v danom mieste elektromagnetického poľa (napríklad pri prijímači, alebo v oku) mení podľa funkcie sínus : $E_z = E_o \sin(\,\omega t + \varphi)$, kde E_o je amplitúda (maximálna hodnota) jeho veľkosti. Potom:

$$\langle P_S\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\,E_z^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\,E_o^2\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\,E_o^2$$

takže

$$\langle P_S\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\,E_o^2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_o c E_o^2 \ . \tag{9.3.5.4}$$

Stredná hodnota Poyntingovho vektora rovinnej harmonickej vlny je preto úmerná druhej mocnine amplitúdy vektora $\boldsymbol{E}$.

Príklad 9.3.5.1 Dokážte, že stredná hodnota Poyntingovho vektora sa dá vyjadriť vzorcom $< P_S > \; = \; (1/2)B_o^2/(\mu_o c)$, kde B_o je amplitúda magnetickej zložky harmonickej elektromag. vlny.

Riešenie Veľkosť Poyntingovho vektora vyjadríme vzťahom $P_S = EH$ (9.3.3.5), ktorý upravíme pre prípad rovinnej vlny. Namiesto veľkosti vektora E dosadíme veľkosť vektora B , ktorú získame zo vzťahu (9.3.2.6) upraveného pre veľkosti týchto vektorov - $E = B\,c$:

$P_S = EH = B\,c\,H = B\,c\,(B/\mu_o) = (c/\mu_o)B^2$. Toto je vzorec pre okamžitú hodnotu Poyntingovho vektora. Strednú hodnotu v prípade harmonickej vlny získame postupom, ktorý bol použitý pri odvodení vzorca (9.3.5.4)

Príklad 9.3.5.2 Hélium - neónový laser vysiela zväzok monochromatického svetla, ktorý má kruhový prierez s polomerom $R = 1$ mm , pričom jeho intenzita je v celom priereze rovnaká. Celkový priemerný výkon lasera je $P = 3{,}5$ mW a vlnová dĺžka $\lambda =$ 633 nm. Vypočítajte a) frekvenciu f monochromatického svetla , b) amplitúdu elektrickej a magnetickej zložky príslušnej elektromagnetickej vlny.

Riešenie a) Frekvencia f monochromatickej vlny súvisí s vlnovou dĺžkou λ a fázovou rýchlosťou c vzťahom $c = \lambda f$. Preto $f = c / \lambda =$ (3.10^8 m/s) / (633.10^{-9} m) = 4,74.10^{14} Hz

b) Ak výkon lasera $P = 3{,}5$ mW pripadá na celý prierez lúča, potom stredná hodnota Poyntingovho vektora v lúči je $\langle P_S \rangle = P / (\pi R^2)$. Stredná hodnota Poyntingovho vektora harmonickej vlny sa na druhej strane počíta podľa vzťahu (9.3.5.4), alebo podľa vzťahu uvedeného v príklade 9.3.5.1 . Preto $P / (\pi R^2) = (1/2)(c/\mu_o) B_o^{\,2} = (1/2)(\varepsilon_o c) E_o^{\,2}$. Z týchto vzťahov môžeme vypočítať amplitúdy elektrickej aj magnetickej zložky elektromagnetickej vlny:

$E_o = 915{,}6$ V/m , $B_o = 3{,}06 \,.\, 10^{-6}$ T .

Kontrolné otázky

1. *Napíšte vzorec vyjadrujúci Poyntingov vektor rovinnej elektromagnetickej vlny.*
2. *Napíšte vzorec vyjadrujúci strednú hodnotu Poyntingovho vektora harmonickej vlny.*
3. *Možno strednú hodnotu Poyntingovho vektora harmonickej vlny vyjadriť pomocou amplitúdy jej magnetickej zložky?*

Súhrn vzorcov

Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie	$U_\mathrm{i} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$
Intenzita indukovaného elektrického poľa	$\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = \dfrac{\boldsymbol{F}}{Q} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$
Definícia vlastnej a vzájomnej indukčnosti	$\Phi = LI$
Energia magnetického poľa v okolí vodiča elektrického prúdu	$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} L I^2$
Objemová hustota energie magnetického poľa	$w_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}$
Maxwellove rovnice v diferenciálnom tvare	$\mathrm{div}\, \boldsymbol{D} = \rho_\mathrm{v}$, $\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0$ $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E}_\mathrm{i} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$, $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$
Maxwellove rovnice v integrálnom tvare	$\oint\!\!\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_\mathrm{v}$, $\oint\!\!\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$, $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$, $\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_k I_k$
Maxwellove rovnice vo vákuu	$\mathrm{div}\, \boldsymbol{E} = 0$, $\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0$, $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E}_\mathrm{i} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$, $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{B} = \varepsilon_\mathrm{o}\mu_\mathrm{o} \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$
Objemová hustota energie elektromagnetického poľa	$w = \dfrac{1}{2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \dfrac{1}{2} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}$
Vlnová rovnica	$\left(\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2} \right) = \varepsilon_\mathrm{o}\mu_\mathrm{o} \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$
Vzťah medzi vektormi v rovinnej elektromagnetickej vlne	$\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c} (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{E})$
Poyntingov vektor	$\boldsymbol{P}_\mathrm{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$
Poyntingov vektor rovinnej elektromagnetickej vlny	$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{i} \left(\dfrac{1}{\mu_\mathrm{o} c} \right) E^2 = \boldsymbol{i}\, (\varepsilon_\mathrm{o} c) E^2 = \boldsymbol{i} \sqrt{\dfrac{\varepsilon_\mathrm{o}}{\mu_\mathrm{o}}}\, E^2$,

SLOVNÍK

elektromagnetická indukcia - vznik (indukovaného) elektrického poľa v časovo premenlivom magnetickom poli

elektromagnetické vlnenie - oscilácie v elektromagnetickom poli, šíriace sa priestorom, spojené s prenosom elektromagnetickej energie

energia magnetického poľa (okolí vodiča prúdu) - energia, ktorú pripisujeme magnetickému poľu vytvorenému elektrickým prúdom; v okolí vodiča s vlastnou indukčnosťou L ktorým preteká prúd I je táto energia $(1/2)L\,I^2$

Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie - zákon vyjadrujúci veľkosť indukovaného elektrického napätia v uzavretej slučke ako podiel zmeny magnetického toku prechádzajúceho plochou ohraničenou slučkou a príslušného časového intervalu, t.j. zmenu magnetického toku pripadajúcu na jednotkový časový interval

guľová vlna - vlna, ktorej vlnoplochy, vrátane čela vlny, majú guľový tvar

hustota energie elektromagnetického poľa (w) - elektromagnetická energia pripadajúca na jednotku objemu; skladá sa z elektrickej a magnetickej zložky; meria sa v J/m^3

hustota energie magnetického poľa (w_m) - podiel magnetickej energie a objemu v ktorom sa energia nachádza; meria sa v J/m^3

hustota toku elektromagnetickej energie (P_S) - podiel výkonu prenášaného elektromagnetickým vlnením (žiarením) a obsahu plochy, cez ktorú ho prenáša (plocha kolmá na smer šírenia); meria sa vo W/m^2 ; po priradení smeru šírenia elektromagnetickej vlny tejto veličine, ide o Poyntingov vektor

indukované elektrické napätie (U_i) - elektrické napätie, ktoré vzniká elektromagnetickou indukciou

indukovaný elektrický prúd - elektrický prúd, ktorý vzniká v uzavretom vodiči ako dôsledok elektromagnetickej indukcie

intenzita elektromagnetického vlnenia - alternatívny názov pre → hustotu toku elektromagnetickej energie

intenzita indukovaného elektrického poľa (E_i) - podiel sily pôsobiacej na elektrický náboj a tohto náboja v indukovanom elektrickom poli; keď sa vodič pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ magnetickým poľom s indukciou $\boldsymbol{B}$, intenzita indukovaného elektrického poľa je $\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$; jednotka - N/C

Lenzov zákon - zákon týkajúci sa elektromagnetickej indukcie, podľa ktorého indukované elektrické prúdy svojimi magnetickými účinkami pôsobia proti zmene, ktorá ich vyvolala

Lenzovo pravidlo - alternatívny názov pre Lenzov zákon

materiálové vzťahy - v *elektrickom poli* vzťah $\boldsymbol{D} = \varepsilon_o \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ (alebo $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$) medzi elektrickou indukciou $\boldsymbol{D}$, intenzitou elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ a elektrickou polarizáciou $\boldsymbol{P}$; v *magnetickom poli* vzťah $\boldsymbol{B} = \mu_o \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}_m$ (alebo $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$) medzi magnetickou indukciou $\boldsymbol{B}$, intenzitou magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ a magnetickou polarizáciou $\boldsymbol{J}_m$. Do vzťahov vstupujú permitivita ε a permeabilita μ.

Maxwellov posuvný prúd - elektrický prúd zavedený Maxwellom pri kompletizácii jeho štvrtej rovnice; plošná hustota Maxwellovho posuvného prúdu sa rovná $(\partial \boldsymbol{D}/\partial t)$, kde $\boldsymbol{D}$ je elektrická indukcia; môže existovať aj vo vákuu, napríklad pri nabíjaní kondenzátora medzi jeho platňami, vytvára magnetické pole, ale nemá tepelné účinky.

Maxwellove rovnice - štyri rovnice teórie elektromagnetického poľa, ktoré makroskopicky vyjadrujú jeho základné zákony; popisujú elektromagnetické javy v prostredí aj vo vákuu:
$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho_v$, $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -(\partial \boldsymbol{B}/\partial t)$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + (\partial \boldsymbol{D}/\partial t)$,
kde $\boldsymbol{D}$ je elektrická indukcia, $\boldsymbol{B}$ magnetická indukcia, $\boldsymbol{E}$ intenzita elektrického poľa, $\boldsymbol{H}$ intenzita magnetického poľa, $\boldsymbol{J}$ hustota elektrického prúdu a ρ_v objemová hustota voľného elektrického náboja

objemová hustota energie magnetického poľa - dôslednejší názov pre → hustotu energie magnetického poľa

polarizácia elektromagnetickej vlny - zachovávanie roviny oscilácií vektora $\boldsymbol{E}$ v danom mieste jej pozorovania, alebo iná, pravidelne sa meniaca orientácie tejto roviny. Ak sa poloha roviny oscilácií s časom nemení, ide o lineárne polarizovanú vlnu.

Poyntingov vektor ($\boldsymbol{P}_S$) - vektorová veličina svojou veľkosťou vyjadrujúca podiel výkonu prenášaného elektromagnetickým vlnením (žiarením) a obsahu plochy, cez ktorú ho prenáša (plochu kolmú na smer šírenia); smer Poyntingovho vektora sa zhoduje so smerom šírenia elektromagnetickej energie; vyjadruje sa vzorcom $\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$, meria sa vo W/m^2.

rovinná vlna - vlna, ktorej vlnoplochy sú rovinné; dostatočne dobre aproximuje skutočnú vlnu vo veľkej vzdialenosti od zdroja

rovnica kontinuity elektrického prúdu (rovnica spojitosti) - rovnica vyjadrujúca zákon zachovania elektrického náboja: $\operatorname{div} \boldsymbol{J} + (\partial \rho_v/\partial t) = 0$, kde $\boldsymbol{J}$ je hustota elektrického prúdu a ρ_v objemová hustota voľného elektrického náboja

rýchlosť elektromagnetických vĺn - vo vákuu sa rovná rýchlosti svetla, dnes považovanej za fundamentálnu fyzikálnu konštantu. Vo vákuu sa vyjadruje vzťahom $c = 1/(\varepsilon_o \mu_o)^{1/2}$, kde ε_o je elektrická konštanta, μ_o magnetická konštanta a nezávisí od frekvencie. V prostredí je rýchlosť elektromagnetických vĺn menšia a navyše od frekvencie závisí.

toroid – útvar s tvarom podobným pneumatike

vlastná indukčnosť - skalárna veličina charakterizujúca vlastnosť uzavretého vodiča (slučky), definovaná ako koeficient úmernosti L medzi prúdom I tečúcim týmto vodičom a magnetickým tokom Φ, prechádzajúcim plochou ohraničenou vodičom, pričom tok bol vytvorený týmto prúdom : $\Phi = L\,I$; meria sa v jednotkách henry (H) .

vlnová rovnica - lineárna parciálna diferenciálna rovnica druhého rádu, s deriváciami podľa priestorových premenných a podľa času

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ktorej riešeniami sú rôzne druhy vĺn, mechanických, alebo elektromagnetických. Veličina u predstavuje vo všeobecnosti výchylku (mechanickú, alebo elektrickú či magnetickú zložku elektromagnetickej vlny) a v fázovú rýchlosť vlnenia.

vzájomná indukčnosť - skalárna veličina charakterizujúca vzájomný indukčný vzťah dvoch uzavretých vodičov, definovaná ako koeficient sprostredkujúci vzťah medzi elektrickým prúdom tečúcim jedným z vodičov a magnetickým tokom prechádzajúcim plochou ohraničenou druhým vodičom : $\Phi_2 = L_{21}\,I_1$; meria sa v jednotkách henry (H).

Úlohy

Elektromagetická indukcia

1. Kruhový závit sa nachádza v homogénnom magnetickom poli, ktorého vektor magnetickej indukcie je kolmý na rovinu závitu a smeruje k pozorovateľovi. Ktorým smerom bude tiecť indukovaný elektrický prúd závitom, keď sa veľkosť vektora magnetickej indukcie začne zmenšovať?

Výsledok: Z pohľadu pozorovateľa prúd bude tiecť proti pohybu hodinových ručičiek, elektróny sa budú pohybovaťopačným smerom.

2. Cievka s $N = 35$ závitmi, každý má plošný obsah $S = 150\ \text{cm}^2$, sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0{,}02$ T. Je umiestnená tak, že vektor $\boldsymbol{B}$ je kolmý na roviny závitov cievky. Cievka sa náhle otočí o π radiánov, okolo osi ktorá je kolmá na vektor $\boldsymbol{B}$. Aký elektrický náboj Q pretečie cievkou, ak jej elektrický odpor je $R = 20\ \Omega$?

Výsledok: $Q = (2BS)/R$

3. Obdĺžnikový závit so stranami $a = 15$ cm, $b = 20$ cm a elektrickým odporom $R = 5\ \Omega$ bol náhle vložený do magnetického poľa s indukciou $B = 0{,}02$ T, pričom vektor magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ zvieral s normálou na rovinu závitu uhol $\beta = 60°$. Aký veľký náboj pretiekol závitom?

Výsledok: $Q = (\Delta\Phi)/R = (B\,ab\cos\beta)/R$

4. Obdĺžnikový rámček (závit) so stranami $a = 5$ cm, $b = 15$ cm je umiestnený v jednej rovine s veľmi dlhým priamym vodičom tak, že jeho dlhšia strana je s ním rovnobežná a vzdialená od neho o $c = 7$ cm. Prúd tečúci dlhým vodičom sa s časom lineárne zmenšuje, v čase $t_1 = 2$ s ním tiekol prúd $I_1 = 9$ A, v čase $t_2 = 6$ s už iba $I_2 = 1$ A. Vypočítajte, aké veľké elektrické napätie sa v závite indukuje počas poklesu prúdu vo vodiči.

Výsledok: $U_i = -\dfrac{I_2 - I_1}{t_2 - t_1}\dfrac{\mu_0 I\, b}{2\pi}\ln\dfrac{c+a}{c}$

5. Obdĺžnikový rámček (závit) so stranami $a = 5$ cm, $b = 15$ cm je umiestnený v jednej rovine s veľmi dlhým priamym vodičom tak, že jeho dlhšia strana je s ním rovnobežná a vzdialená od neho o $c = 7$ cm. Dlhým vodičom tečie prúd $I = 12$ A. Závit sa začne vzďaľovať od vodiča rýchlosťou $v = 8$ m/s. Aké napätie sa v závite indukuje v okamihu začiatku pohybu?

Výsledok: $U_i = \dfrac{\mu_0 I\, b}{2\pi}\dfrac{v a}{(a+c+vt)(c+vt)}$

6. Po slepej koľaji sa od jej konca vzďaľuje vozeň rýchlosťou $v = 5$ m/s . Vertikálna zložka homogénneho zemského magnetického poľa má veľkosť približne $B_v = 10^{-6}$ T. a) Ak by koľajnice boli na konci prepojené elektrickým odporom R = 20 Ω, aký elektrický prúd by ním tiekol, keď odpor koľajníc je zanedbateľný? b) Predná a zadná náprava vozňa spolu s koľajnicami medzi nápravami predstavuje pohybujúci sa obdĺžnikový závit. Indukuje sa v ňom pri pohybe vozňa elektrické napätie a tečie ním indukovaný prúd? c) Prispievajú k prúdu tečúcemu cez odpor obe nápravy? (Rozchod koľajníc a = 1435 mm, vzdialenosť náprav vozňa b = 6 m.)

Výsledok: $I_i = (B_v a v)/R$. b) Indukované napätie sa rovná nule c) Nie.

7. Kovová tyčka, ktorá má dĺžku ℓ = 1,5 m, je uchytená svojim koncom na horizontálnej osi, okolo ktorej sa môže voľne otáčať. Po vychýlení do vodorovnej polohy ju voľne pustíme, takže začne kmitať. Aké maximálne elektrické napätie sa indukuje medzi jej koncami, keď sa pohybuje v homogénnom magnetickom poli s intenzitou H = 1500 A/m, pričom vektor $\boldsymbol{H}$ je na rovinu jej otáčania kolmý?

Výsledok: $U_i = \mu_0 H \sqrt{\dfrac{3\ell^3 g}{4}}$

8. Popri veľmi dlhom priamom vodiči, ktorým tečie elektrický prúd I = 15 A sa v jednej rovine s ním pohybuje rýchlosťou v = 2 m/s kovová tyč dĺžky ℓ = 1,5 m . Tyč je na vodič kolmá, bližší koniec je pri pohybe od vodiča stále vzdialený o b = 5 cm . Tyč sa pohybuje opačným smerom ako elektróny v dlhom vodiči. Aké veľké elektrické napätie sa indukuje medzi koncami tyče a na ktorom z jej koncov sa nahromadí záporný náboj?

Výsledok: $U_i = \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \dfrac{b+\ell}{b}$ Záporný náboj sa nahromadí na konci, ktorý je od dlhého vodiča ďalej.

9. Od veľmi dlhého priameho vodiča, ktorým tečie prúd I = 20 A , sa rýchlosťou v = 2 m/s vzďaľuje kovová tyč s dĺžkou ℓ = 1,5 m, ktorá je s dlhým vodičom rovnobežná. Aké elektrické napätie sa indukuje medzi jej koncami, keď je od dlhého vodiča vo vzdialenosti b = 20 cm?

Výsledok: $U_i = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi b} v \ell$.

10. Kovová tyč, ktorá má dĺžku ℓ = 1,5 m, rotuje v homogénnom magnetickom poli okolo osi ktorá je na tyč kolmá a prechádza ňou vo vzdialenosti $a = (1/3)\ \ell$ od jej konca. Uhlová rýchlosť tyče ω = 20 rad/s, veľkosť indukcie magnetického poľa B = 0,015 T. Aké elektrické napätie sa indukuje medzi jej koncami, ak vektor uhlovej rýchlosti tyče a vektor magnetickej indukcie sú súhlasne rovnobežné? Ktorý koniec tyče bude kladný?

Výsledok: $U_i = \frac{1}{6}\omega B \ell^2$ b) Kladný bude koniec vzdialenejší od osi otáčania.

Maxwellove rovnice

11. Ukážte, že v rovinnom kondenzátore možno Maxwellov posuvný prúd I_p vyjadriť v tvare $C\cdot(dU/dt)$, kde C je kapacita kondenzátora a U napätie medzi jeho platňami.
Návod: Využite vzťahy pre kapacitu kondenzátora a veľkosť elektrickej indukcie v kondenzátore s rovinnými elektródami.

12. Rovinný kondenzátor s kruhovými platňami s priemerom 20 cm je nabíjaný vonkajším zdrojom, pričom v kondenzátore tečie posuvný prúd s plošnou hustotou $J_p = 20$ A/m^2. Vypočítajte veľkosť magnetickej indukcie B medzi platňami vo vzdialenosti $r = 50$ mm od osi symetrie platní. Na tom istom mieste vypočítajte aj $\partial E/\partial t$.
Výsledok : Použiť zákon celkového prúdu (cirkulácia vektora $\boldsymbol{H}$)

$$a)\ B = \frac{\mu_o}{2} J_p r \ , \quad b)\ \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_o} J_p \ .$$

Elektromagnetické vlny

13. Predpokladajme, že vektor intenzity elektrického poľa elektromagnetickej vlny šíriacej sa vákuom je vyjadrený vzťahom $E = \boldsymbol{j}\, E_o \sin(\omega t - kx)$, kde $E_o = 100$ V/m, $\omega = 5\cdot 10^8$ s^{-1}, $c = 3\cdot 10^8$ m/s a $\boldsymbol{j}$ jednotkový ktorý má smer osi y. Vypočítajte
a) frekvenciu f, vlnovú dĺžku λ a uhlové vlnové číslo $k = 2\pi/\lambda$ tejto vlny,
b) amplitúdu jej magnetickej indukcie.
Výsledok : a) $f = \omega / 2\pi = 8 \cdot 10^7$ Hz, $\lambda = c/f = 3{,}75$ m, $k = 1{,}675$ m^{-1}
b) $B_o = E_o / c = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ T

14. Rovinná elektromagnetická vlna, ktorá má frekvenciu $f = 50$ MHz, sa šíri vákuom v smere osi x. Amplitúda elektrickej zložky tejto vlny je $E_o = 120$ V/m.
Vypočítajte vlnovú dĺžku λ, vlnočet $\sigma = 1/\lambda$, uhlový vlnočet $k = 2\pi\sigma$ a maximálnu hodnotu (amplitúdu) magnetickej indukcie B_o tejto vlny.
Výsledok : a) $\lambda = c/f = 6$ m, $\sigma = 1/6$ m^{-1}, $k = \pi/3$ m^{-1}
b) $B_o = E_o / c = 4 \cdot 10\text{-}7$ T

15. Pre súradnice vektora $\boldsymbol{E}$ rovinnej elektromagnetickej vlny platia vzťahy $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z = 2\cos[\pi \cdot 10^{15}(t - x/c)]$.
Vypočítajte frekvenciu f a vlnovú dĺžku λ vlny.
Napíšte vzťahy pre súradnice zodpovedajúceho $\boldsymbol{B}$ vektora.
Výsledok : a) $f = \omega/2\pi = \pi \cdot 10^{15} / 2\pi = 5 \cdot 10^{14}$ Hz, $\lambda = c/f = 6 \cdot 10^{-7}$ m.
b) $B_x = 0$, $B_y = 2/(3\cdot 10^8)\cos[\pi \cdot 10^{15}(t - x/c)]$, $B_z = 0$

16. Elektromagnetická vlna šíriaca sa v zápornom smere osi y má v istom mieste a v istom čase vektor $\boldsymbol{E}$ smerujúci v kladnom smere osi z, pričom jeho veľkosť je 150 V/m. Aká je veľkosť a aký je smer vektora $\boldsymbol{B}$ v rovnakom mieste a rovnakom čase?
Výsledok : Vektor $\boldsymbol{B}$ smeruje k záporným hodnotám osi x, $B = 150/(3\cdot 10^8)$ T.

17. Pomocou konštánt ε_0 a μ_0 vypočítajte rýchlosť šírenia elektromagnetických vĺn vo vákuu a ukážte, že výsledok je správny aj rozmerovo.

Návod : $c = 1 / (\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}$.

18. Aká má byť frekvencia f vysielača elektromagnetických vĺn, aby ich vlnová dĺžka λ_1 vo vode ($\varepsilon_{r1} = 81$, $\mu_{r1} = 1$) bola jedna tretina metra ? Aká bude vlnová dĺžka λ_2 týchto vĺn vo vzduchu ($\varepsilon_{r2} = 1$, $\mu_{r2} = 1$)? Vypočítajte pomer týchto vlnových dĺžok.

Návod: Rýchlosť elektromagnetickej vlny v prostredí sa rovná $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}}$.

Výsledok : $f = \dfrac{v}{\lambda_1} = \dfrac{c}{\lambda_1 \sqrt{\varepsilon_{r1}}}$ $\qquad \lambda_1 / \lambda_2 = 1/9$.

19. Ukážte, že v ľubovoľnom bode elektromagnetickej vlny časovo stredná hodnota objemovej hustoty energie elektrického poľa sa rovná časovo strednej hodnote objemovej hustoty energie magnetického poľa.

Návod: Použite vzťahy pre objemovú hustotu energie týchto polí a vzťah medzi vektormi intenzity elektrického poľa a magnetickej indukcie v rovinnej elektromagnetickej vlne.

Poyntingov vektor (intenzita elektromagnetického vlnenia)

20. Dokážte, že stredná hodnota intenzity rovinnej monochromatickej vlny I_s (t.j. Poyntingovho vektora P_S) sa dá vyjadriť výrazom $I_s = (1/2)\, \varepsilon_0 E_0^2 c$, alebo $I_s = B_0^2 c/(2\mu_0)$, kde E_0 a B_0 sú amplitúdy elektrickej, resp. magnetickej zložky elektromagnetickej vlny.

Návod : Vychádzajte z definície Poyntingovho vektora a použite vzťah medzi vektormi $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ rovinnej vlny. Stredujte veľkosť Poyntingovho vektora cez jednu periódu.

21. Vypočítajte strednú hodnotu intenzity I_s (t.j. Poyntingovho vektora $\boldsymbol{P}_S$) rovinnej harmonickej elektromagnetickej vlny, keď veľkosť jej vektora $\boldsymbol{E}$ sa mení podľa vzťahu $E = E_0 \sin(\omega t - kx)$, kde $E_0 = 120$ V/m a frekvencia vlny $f = 50$ MHz. ($\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m) . Ukážte, že použitý vzorec je rozmerovo správny.

Výsledok : $I_s = (1/2)\, \varepsilon_0 E_0^2 c$.

22. Poyntingov vektor rovinnej elektromagnetickej vlny (vo vákuu) je vyjadrený vzťahom $\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{j}\, I_0 \sin^2(\omega t - ky)$, kde $I_0 = 220$ W/m^2 , $\omega = 3{,}6 \cdot 10^9$ rad/s , $k = 12$ m^{-1}, $\boldsymbol{j}$ je jednotkový vektor.

Aký je smer šírenia vlny ? Aká je vlnová dĺžka λ a frekvencia f vlny ? Napíšte výrazy pre časovú a priestorovú závislosť vektorov $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ tejto elektromagnetickej vlny.

Výsledok: vlna sa šíri v smere osi y ; $\lambda = 2\pi/k$, $f = \omega/2\pi$;

Napríklad $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}(I_0/\varepsilon_0)^{1/2} \sin(\omega t - ky)$, $\boldsymbol{B} = (-\boldsymbol{k})\,(\mu_0 I_0) \sin(\omega t - ky)$.

23. Aká musí byť amplitúda P_S Poyntingovho vektora rovinnej elektromagnetickej vlny, aby amplitúda B_o jej magnetickej zložky dosiahla 10^{-4} T ?

Výsledok: $P_S = cB_o^2/\mu_o$.

24. Bodový zdroj elektromagnetického žiarenia má priemerný výkon $P_w = 800$ W. Vypočítajte amplitúdy intenzity elektrického poľa E_o a magn. indukcie B_o v bode vzdialenom $r = 35$ m od zdroja, v ktorom môžeme lokálne považovať vlnu približne za rovinnú. ($\varepsilon_o = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m , $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m)

Výsledok : $I_{lok} = P_w / \pi r^2$, $E_o = (2 I_{lok} / (\varepsilon_o c))^{1/2}$, $B_o = (2 I_{lok} \mu_o / c)^{1/2}$.

25. Dlhým priamym vodivým drôtom s elektrickým odporom R , priemerom d a dĺžkou ℓ prechádza elektrický prúd I . Dokážte, že energia elektromagnetického poľa vstupujúca do objemu vodiča za jednotku času (cez jeho plášť) sa rovná uvoľňovanému Joulovmu teplu za jednotku času - RI^2 .

Návod : Do vzorca pre Poyntingov vektor dosaďte hodnoty vektorov $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ na povrchu vodiča - intenzitu el. poľa počítajte z Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare a intenzitu magn. poľa z cirkulácie vektora $\boldsymbol{H}$.

26. Slnečné žiarenie dopadá kolmo na pracovnú plochu zariadenia na premenu slnečnej energie na teplo. Účinnosť zariadenia je 50 % ($\eta = 0{,}5$) a dodáva priemerný výkon $P_1 = 80$ kW . Rozmery pracovnej plochy pokrytej dokonalým absorbátorom sú $S = 160$ m^2 . Vypočítajte aký priemerný výkon P_s prináša slnečné žiarenie na 1 m^2 Zeme v mieste zariadenia.

Výsledok : $P_s = P_1 / (S\,\eta)$.

27. Parabolická anténa v Arecibo má v priemere $d = 300$ m. Toto mimoriadne citlivé zariadenie je schopné zaregistrovať elektromagnetické vlny, ktoré na povrch Zeme (t.j. kruh s polomerom Zeme) prinášajú žiarivý tok $\Phi_o = 1$ pW.
Akej intenzite I_1 vlnenia to zodpovedá (t.j. koľko wattov by dopadalo na 1 m^2 povrchu Zeme)? Aký žiarivý tok Φ_1 vtedy zachytáva anténa (t.j. koľko wattov)?
c) Aký výkon P_w by musel vyžarovať zdroj v strede našej Galaxie, aby poskytol rovnako intenzívny signál? (Vzdialenosť Zeme od stredu Galaxie je pribl. $3 \cdot 10^4$ svetelných rokov, vzdialenosť v metroch vypočítajte.)

Výsledok : $I_1 = 7{,}77 \cdot 10^{-27}$ W/m^2 , $\Phi_1 = 5{,}49 \cdot 10^{-22}$ W , $P_w = 7{,}85 \cdot 10^{15}$ W

Obsah

TEXTY

Súbor zošitkov základného kurzu fyziky

Vektory
Kinematika
Dynamika hmotného bodu
Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa
Kmitanie a vlnenie
Teplo a termodynamika
Elektrostatické pole
Elektrický prúd
Magnetické pole
Elektromagnetické pole
Fyzikálna optika
Kvantové javy