Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenskej technickej univerzity v Bratislave

Katedra fyziky

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

ELEKTRICKÝ PRÚD

Doc. RNDr. Ivan Červeň, CSc.

V roku 2005 vydala Fakulta elektrotechniky a informatiky STU
v Bratislave

7
ELEKTRICKÝ PRÚD

Prvá časť kapitoly sa zaoberá základnými pojmami súvisiacimi s elektrickým prúdom, ale nezaoberá sa zvláštnosťami elektrického prúdu v kovoch, plynoch alebo elektrolytoch. Opiera sa o zákon zachovania elektrického náboja, z ktorého je odvodený prvý Kirchhoffov zákon. Nevšíma si silové pôsobenie na pohybujúce sa náboje, dalo by sa povedať, že má kinematický charakter. Ďalšia časť kapitoly sa zaoberá silovým pôsobením na nabité častice vo vodičoch prúdu, pričom sa odvíja od Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare, zaoberá sa matematickým opisom zdrojov energie zaradených do elektrického obvodu a stratami tejto energie vo vodičoch. V závere kapitoly sa poukazuje na súvislosť Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare s druhým Kirchhoffovým zákonom. Kapitola sa nezaoberá špecifikami striedavého elektrického prúdu.

Potrebné vedomosti

Treba poznať pojmy zavedené už v mechanike, ako zrýchlenie, sila, práca, energia. Rovnako sú nevyhnutné základné poznatky z elektrostatiky o potenciáli, intenzite, ich jednotkách a ich vzájomnej súvislosti. V kapitole sa používa aj vektorový počet, vrátane nabla operátora, opísaného v kapitole o vektoroch (gradient, divergencia, rotácia). Znalosť diferenciálneho a integrálneho počtu je rovnako nevyhnutná, vrátane jeho aplikácií na vektorové funkcie, ako derivácia a integrácia skalárnej i vektorovej funkcie viacerých premenných, vrátane Gaussovej integrálnej vety.

7.1 Kinematika elektrického prúdu

Kľúčové slová
Elektrický prúd, hustota elektrického prúdu, ampér, transportná rýchlosť, rovnica kontinuity, prvý Kirchhoffov zákon

7.1.1 Definícia elektrického prúdu, hustota prúdu

Elektrický prúd, ako **jav**, je usmernený pohyb elektricky nabitých častíc (elektrónov, iónov), napríklad kovovým vodičom, ionizovaným plynom alebo elektrolytom.

Ako **veličina** je elektrický prúd I definovaný podielom elektrického náboja ΔQ ktorý prejde prierezom vodiča a príslušného časového intervalu Δt ; okamžitá hodnota elektrického prúdu je limitou tohto podielu pre $\Delta t \to 0$:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{7.1.1.1}$$

Elektrický **prúd** I **je skalárna veličina**, lebo v jeho definícii vystupujú iba skalárne veličiny. Jednotkou elektrického prúdu v SI je ***ampér*** , čo je prúd, pri ktorom prierezom vodiča prejde za jednu sekundu elektrický náboj veľkosti 1 C (coulomb). To znamená, že medzi jednotkami ampér a coulomb platí vzťah 1A = 1 C/s, ako aj opačný vzťah 1C = 1As (ampérsekunda). V praxi sa používajú násobky aj diely tejto jednotky. Pre názornejšiu predstavu o veľkosti ampéra je vhodné uviesť, že cez 100 W žiarovku napájanú sieťovým napätím 230 V tečie prúd približne 0,5 A, cez vodiče diaľkového vedenia veľmi vysokého napätia rádovo 10^3 A , a v atóme vodíka elektrón obiehajúci okolo jadra vytvára prúd na úrovni 10^{-3} A .

Z praktického hľadiska významnou veličinou je ***hustota elektrického prúdu***, (aj ***plošný elektrický prúd***), definovaná vzťahom

$$J = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} \tag{7.1.1.2}$$

Hustota elektrického prúdu predstavuje prúd pripadajúci na prierez vodiča s jednotkovým plošným obsahom, preto jednotkou tejto veličiny je A/m^2. Z praktického hľadiska je to veľká jednotka, preto v technickej praxi sa hustota elektrického prúdu často vyjadruje pomocou jednotky A/mm^2. Hustota elektrického prúdu nebýva v celom priereze vodiča rovnaká, preto táto veličina má praktický význam.

Prúdovú hustotu možno vyjadriť pomocou tzv. **transportnej rýchlosti** v, ktorou sa súbor voľných elektrónov vo vodiči posúva vodičom. Táto rýchlosť rádovo predstavuje iba mm/s , a je neobyčajne malá v porovnaní s rýchlosťou chaotického tepelného pohybu voľných elektrónov v kove, ktorá pri izbových teplotách dosahuje rádovo 10^2 km/s. Vzťah medzi hustotou elektrického prúdu a transportnou rýchlosťou (často nazývanou **driftová rýchlosť**) možno získať nasledujúcou úvahou. Predpokladajme že v objemovej jednotke kovového vodiča je n voľných elektrónov. Tomu zodpovedá objemová hustota voľného elektrického náboja $\rho = ne$, kde e je náboj elektrónu. Na základe toho upravíme vzorec (7.1.1.1) tak, že namiesto náboja ΔQ dosadíme výraz $\rho\Delta\tau$, kde $\Delta\tau$ predstavuje objem s elektrónmi, ktorý za časový interval Δt prešiel prierezom vodiča:

$$I = \frac{\rho\Delta\tau}{\Delta t} . \tag{7.1.1.3}$$

Predpokladáme, že elektróny sa vplyvom vonkajšieho elektrického poľa posúvajú vodičom transportnou rýchlosťou v, preto za časový interval Δt sa posunú o dĺžku $v\Delta t$. Objem $\Delta\tau$ zaplnený elektrónmi, ktorý pritom prejde prierezom S, je $\Delta\tau = S\, v\Delta t$. Po dosadení do rovnice (7.1.1.3) dostaneme pre prúd výraz

$$I = \frac{\rho\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{\rho S v \Delta t}{\Delta t} = \rho S v \tag{7.1.1.4}$$

Po vydelení rovnice plošným obsahom prierezu S dostaneme pre hustotu elektrického prúdu vzorec

$$J = \frac{I}{S} = \rho v = nev \tag{7.1.1.5}$$

Transportná rýchlosť v má nie iba veľkosť, ale aj smer, je to teda vektorová veličina. Preto aj hustotu elektrického prúdu zavádzame ako vektorovú veličinu, ako skalárny násobok vektora transportnej rýchlosti

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \tag{7.1.1.6}$$

V ionizovaných plynoch a v elektrolytoch je elektrický prúd podmienený pohybom kladne aj záporne nabitých častíc (*iónov*), s objemovými hustotami nábojov ρ_+ resp. ρ_-. Kladné ióny sa pohybujú v smere intenzity elektrického poľa transportnou rýchlosťou v_+, záporne nabité opačným smerom rýchlosťou v_-. Tomu zodpovedajú hustoty elektrického prúdu

$$\mathbf{J}_+ = \rho_+ \mathbf{v}_+ \quad \text{a} \quad \mathbf{J}_- = \rho_- \mathbf{v}_- \tag{7.1.1.7}$$

Napriek tomu, že transportné rýchlosti kladných a záporných iónov majú opačný smer, vektory hustoty elektrického prúdu $\mathbf{J}_+$ a $\mathbf{J}_-$ majú smer súhlasný, lebo objemová hustota náboja ρ_- je záporná. Ich smer sa zhoduje so smerom pohybu kladného náboja (so smerom vektora transportnej rýchlosti).

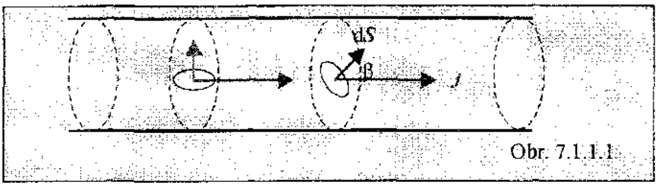
Skutočnosť, že hustota elektrického prúdu je vektorová veličina, sa prejaví aj pri úprave vzorca (7.1.1.2), ktorý prepíšeme do tvaru $\mathrm{d}I = J\,\mathrm{d}S$. Takýto vzťah je však správny iba vtedy, keď plôška $\mathrm{d}S$ je na smer vektora transportnej rýchlosti kolmá. V opačnom prípade treba vzťah upraviť na tvar (obr. 7.1.1.1)

$$\mathrm{d}I = J\,\mathrm{d}S\cos\beta \tag{7.1.1.8}$$

kde β je uhol medzi vektorom transportnej rýchlosti a normálou na plôšku $\mathrm{d}S$. Plôške $\mathrm{d}S$ možno priradiť vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, ktorý má smer normály, takže rovnicu (7.1.1.8) možno upraviť na tvar

$$\mathrm{d}I = \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{7.1.1.9}$$

To znamená, že ak sú vektory $\boldsymbol{J}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ na seba kolmé, cez plôšku prúd netečie.



Obr. 7.1.1.1

Z posledného vzorca vyplýva dôležitý vzťah, vyjadrujúci prúd pretekajúci prierezom S vodiča :

$$I = \iint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad . \tag{7.1.1.10}$$

Vyplýva z neho zaujímavý dôsledok, že prúd I cez konkrétnu plochu S môže byť záporný, ak sú vektory $\boldsymbol{J}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ orientované proti sebe (všeobecnejšie ak zvierajú tupý uhol). Táto okolnosť sa uplatňuje v Kirchhoffových zákonoch. Je vhodné na tomto mieste zopakovať, že na ľavej strane rovnice vystupuje elektrický prúd, teda veľkosť náboja, ktorý za sekundu prejde plochou S .

Poznámka Elektrický prúd je skalárna veličina, preto jej nemôžeme pripísať smer, iba znamienko. Napriek tomu sa často hovorí o smere elektrického prúdu, lebo to zjednodušuje, resp. skracuje vysvetľovanie niektorých javov, najmä v magnetizme. Vtedy sa pod pojmom *smer prúdu* rozumie smer pohybu kladne nabitých častíc, teda smer vektora hustoty elektrického prúdu

---

Príklad 7.1.1.1 Aká je hustota elektrického prúdu v hliníkovom vodiči s priemerom $d = 2$ mm, ak ním tečič prúd $I = 4$ A ?
Riešenie Hustota prúdu sa rovná $J = I\,/\,(\pi d)^2 \cong 4\,/\,(10\cdot 4)$ A /mm^2 = 0.1 A /mm^2 .

Príklad 7.1.1.2 Aká je transportná rýchlosť elektrónov v medenom vodiči pri hustote prúdu $J = 10$ A/mm^2, keď počet elektrónov v 1 cm^3 je približne $n = 10^{23}$ cm^{-3} a jeden elektrón nesie náboj $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ?
Riešenie Použijeme vzorec $J = \rho v = \rho\, ne$: 10^3 Acm^{-2} = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$·As $\cdot 10^{23}$ cm^{-3} $\cdot v$, odkiaľ pre v dostaneme $v = (1/1{,}6) \cdot 10^{-1}$ cm/s .

Príklad 7.1.1.3 Veľkosť elektrického prúdu vo vodiči rastie lineárne s časom. V čase $t_o = 0$ bol prúd nulový, v čase t_1 mal hodnotu I_1 . Koľko elektrického náboja Q_1 prešlo celým prierezom vodiča v časovom intervale $(0, t_1)$?
Riešenie Lineárna závislosť prúdu od času sa vyjadrí vzťahom $I = kt + I_o$.
Z podmienky, že v čase $t_o = 0$ bol prúd nulový vyplýva, $I_o = 0$. Zo známej veľkosti prúdu v čase t_1 získame konštantu k : $I_1 = kt_1 \Rightarrow k = (I_1 / t_1)$, ktorú dosadíme do všeobecnej závislosti prúdu od času: $I = (I_1 / t_1)\, t$. Z definičného vzťahu elektrického prúdu (7.1.1.1) získame vzťah vyjadrujúci náboj: $\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t \Rightarrow$

$$Q_1 = \int_0^{Q_1} \mathrm{d}Q = \int_0^{t_1} I\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_1} \frac{I_1}{t_1} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{I_1}{t_1} t_1^2 = \frac{I_1}{2} t_1$$

Výsledok príkladu 7.1.1.3 ukazuje, že rovnako veľký náboj by prešiel vodičom aj vtedy, ak by vodičom tiekol po celý časový interval $(0, t_1)$ prúd s veľkosťou $I_{str} = (I_1/2)$. Prúd I_{str} s uvedenou vlastnosťou sa nazýva ***stredná hodnota elektrického prúdu*** a zavádza sa všeobecným vzťahom

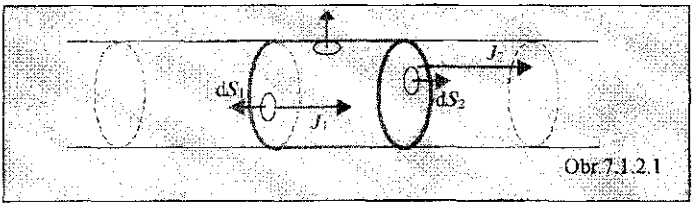
$$I_{str} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(7.1.1.11)}$$

Využíva sa prakticky len v prípade periodickej závislosti prúdu od času, teda pri striedavých elektrických prúdoch.

Kontrolné otázky
1. *Ako je definovaná veličina elektrický prúd?*
2. *Aký je názov jednotky elektrického prúdu?*
3. *Ako súvisí jednotka coulomb s jednotkou ampér?*
4. *Ako je definovaná hustota elektrického prúdu?*
5. *Čo je jednotkou hustoty elektrického prúdu?*
6. *Čo je transportná rýchlosť elektrónov a akú má rádove veľkosť?*
7. *Ako súvisí hustota elektrického prúdu s transportnou rýchlosťou?*

7.1.2 Rovnica kontinuity elektrického prúdu

Rovnica kontinuity pre elektrický prúd (nazývaná aj rovnica spojitosti) je matematickým vyjadrením zákona zachovania elektrického náboja. Ak do objemu ohraničeného uzavretou plochou (napríklad v tvare valca, na obrázku vyznačeného hrubou čiarou) vteká za sekundu viac náboja ako vyteká, potom v uzavretej ploche náboja pribúda. Uvedená veta je kvalitatívnym slovným vyjadrením rovnice kontinuity.



Obr.7.1.2.1

Pri odvodení rovnice kontinuity budeme používať vzťah (7.1.1.10):

$$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \ .$$

Predpokladajme, že vektor $\boldsymbol{J}_1$ a podobne aj vektor $\boldsymbol{J}_2$ (podľa obrázku), je v každom bode základne valca čo do veľkosti rovnaký a kolmý na rovinu základne. Podľa obrázku vektor $\boldsymbol{J}$ je rovnobežný s povrchovými priamkami valcovej plochy, preto cez plášť valca elektrický prúd netečie. Ak plošný obsah základne je S a vektory priradené základniam ako celkom označíme $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$, potom integrály na jednej a druhej základni možno ľahko vypočítať:

$$I_1 = \iint_{S_1} \boldsymbol{J}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{S}_1 \quad , \quad I_2 = \iint_{S_2} \boldsymbol{J}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{J}_2 \cdot \boldsymbol{S}_2 \ . \tag{7.1.2.1}$$

Prúd I_1 do valca vteká (podľa zvoleného smeru vektorov $\boldsymbol{J}_1$ a $\boldsymbol{S}_1$ je záporný), prúd I_2 z valca vyteká a je kladný. Ak sú oba prúdy čo do veľkosti rovnaké, ich súčet sa rovná nule a vo valcovej ploche sa elektrický náboj nehromadí, ani ho neubúda. Ak však prúdy nie sú rovnako veľké, ich súčet sa rovná zmene náboja pripadajúcej na jednotku času, čo sa vyjadruje ako derivácia náboja nachádzajúceho sa v uzavretej ploche podľa času:

$$\boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{J}_2 \cdot \boldsymbol{S}_2 = \ ? \ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{7.1.2.2}$$

Pred deriváciou na pravej strane je otáznik, ktorý má upozorniť na nevyhnutnosť úvahy o znamienku. Ak prvý člen na ľavej strane rovnice (je záporný !) je v absolútnej hodnote väčší než druhý člen, vtedy je celá ľavá strana rovnice záporná. Ale náboja vo valci vtedy pribúda, takže derivácia na pravej strane rovnice je kladná (pozri poznámku na konci odseku). Ak by na namieste otáznika bolo kladné znamienko, prišlo by k nesúladu znamienok medzi ľavou a pravou stranou rovnice. Preto otáznik treba nahradiť záporným znamienkom. Rovnicu (7.1.2.2) upravíme v súlade s týmto výsledkom a prúdy vyjadríme tak ako v rovnici (7.1.2.1) integrálmi:

$$\iint_{S_1} J_1 \cdot dS + \iint_{S_2} J_2 \cdot dS = -\frac{dQ}{dt} \tag{7.1.2.3}$$

Treba opätovne zdôrazniť, že náboj Q vystupujúci v tejto rovnici je celkový voľný náboj obsiahnutý v uzavretej ploche, nie náboj ktorý z plochy odišiel.

Poznámka
Deriváciu náboja podľa času vyjadríme ako limitu:

$$\frac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Predpokladajme, že $t_2 > t_1$, takže menovateľ zlomku je kladný. Ak náboja s časom pribúda, potom aj $Q_2(t_2) - Q_1(t_1)$ je kladné číslo a celý zlomok je kladný

Ľavú stranu rovnice (7.1.2.3) upravíme tak, že do integrácie zahrnieme aj plášť valca, takže budeme integrovať cez celý povrch uzavretej valcovej plochy. Tým pribudne na ľavú stranu tretí člen, ktorý síce v uvažovanom konkrétnom prípade sa rovná nule, ale rovnica tým nadobudne všeobecný charakter a bude vhodná aj pre prípady, keď do daného miesta priteká prúd z viacerých smerov. Tak sa integrácia vykoná cez celú uzavretú plochu:

$$\oiint_{S} J \cdot dS = -\frac{dQ}{dt} \; . \tag{7.1.2.4}$$

Tým sme získali **rovnicu kontinuity v integrálnom tvare.**

Rovnica kontinuity je známejšia vo svojom diferenciálnom tvare. Na jeho získanie treba upraviť obidve strany rovnice (7.1.2.4). Náboj na pravej strane vyjadríme ako objemový integrál objemovej hustoty voľného elektrického náboja:

$$Q = \iiint_V \rho_v d\tau \quad ,$$

a pre jeho deriváciu podľa času dostaneme:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_V \rho_v d\tau \right) = \iiint_V \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right) d\tau \; . \tag{7.1.2.5}$$

Pri úprave ľavej strany využijeme Gaussovu integrálnu vetu, vyjadrujúcu zámenu plošného integrálu cez uzavretú plochu objemovým integrálom:

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\tau \,.$$

(7.1.2.6)

Dosadením do rovnice kontinuity v integrálnom tvare dostaneme rovnicu, v ktorej na oboch stranách vystupujú objemové integrály so zhodnými integračnými medzami:

$$\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\tau = -\iiint_V \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\right)\mathrm{d}\tau \,.$$

Rovnaké, ale inak ľubovoľné integračné medze znamenajú, že integrované funkcie na ľavej a pravej strane rovnice musia byť rovnaké. Z toho potom získame **rovnicu kontinuity v diferenciálnom tvare:**

$$\mathrm{div}\boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

(7.1.2.7)

Obidve formulácie rovnice kontinuity majú významné uplatnenie v teórii elektromagnetického poľa, ako aj v teórii elektrických obvodov.

Kontrolné otázky

1. *Aký je fyzikálny obsah rovnice kontinuity elektrického prúdu?*
2. *Kedy je elektrický prúd prechádzajúci uzavretou plochou záporný?*
3. *Ako je formulovaná rovnica kontinuity v integrálnom tvare?*
4. *Ako je formulovaná rovnica kontinuity v diferenciálnom tvare?*

7.1.3 Prvý Kirchhoffov zákon

Je dôsledkom zákona zachovania elektrického náboja, preto ho možno odvodiť z rovnice kontinuity elektrického prúdu. Platí však len v ustálenom stave, čo znamená, že objemová hustota elektrického náboja sa vo vodiči nemení, čiže na žiadnom mieste vodiča sa náboj nehromadí, ani ho tam neubúda.

Pri odvodení prvého Kirchhoffovho zákona je vhodné vychádzať z integrálnej formy rovnice kontinuity:

$$\oint\!\!\!\oint \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

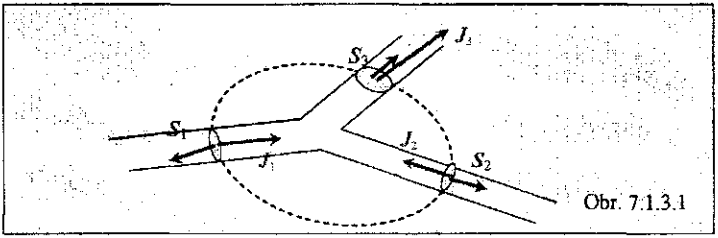
(7.1.3.1)

Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je podľa dohody orientovaný vždy z uzavretej plochy von, takže integrál je kladný vtedy, keď aj vektor hustoty elektrického prúdu $\boldsymbol{J}$ smeruje z plochy von. Vtedy ubúda z náboja nachádzajúceho sa v objeme ohraničenom uzavretou plochou. V ustálenom stave sa však veľkosť tohto náboja s časom nemení, takže $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$. Preto sa aj ľavá strana rovnice rovná nule:

$$\oiint \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \quad .$$

(7.1.3.2)

Táto rovnosť sa splní v triviálnom prípade, keď vektor $\boldsymbol{J}$ sa v každom bode uzavretej plochy rovná nule. Z praktického hľadiska je však zaujímavé, keď na niektorých miestach plochy nulový nie je. Vtedy týmto miestom priteká prúd, ale aby sa v uzavretej ploche náboj nehromadil, iným miestom musí prúd odtekať.



Obr. 7.1.3.1

Na obrázku je naznačená uzavretá plocha a do nej tri prívody prúdu, čím vzniká vo vnútri plochy uzol. Integrál (7.1.3.2) rozpíšeme na toľko integrálov, koľko prívodov prichádza do uzla (integrály cez časti uzavretej plochy, cez ktoré netečie prúd, sú nulové):

$$\oiint \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S1} \boldsymbol{J}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{S2} \boldsymbol{J}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{S3} \boldsymbol{J}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

(7.1.3.3)

pričom v súlade s rovnicami (7.1.2.1) môžeme písať aj

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

(7.1.3.4)

Podľa obrázku prúdy I_1 a I_2 sú záporné, prúd I_3 kladný, ale ich súčet sa musí rovnať nule.

Prvý Kirchhoffov zákon sa týka ľubovoľného počtu prívodov do uzla a hovorí, že *súčet prúdov pritekajúcich do uzla sa rovná súčtu prúdov z uzla odtekajúcich.* Odtekajúce prúdy možno považovať za záporné pritekajúce prúdy, a vtedy sa prvý Kirchhoffov zákon formuluje stručnejšie: súčet prúdov pritekajúcich do ľubovoľného uzla elektrického obvodu sa rovná nule.

Pri odvodení prvého Kirchhoffovho zákona možno vychádzať aj z diferenciálneho tvaru rovnice kontinuity:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \quad .$$

V ustálenom stave sa objemová hustota voľného náboja v žiadnej časti vodiča nemení, takže $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$, z čoho vyplýva, že aj $\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0$ v každom bode vodiča. Preto sa nule rovná aj objemový integrál

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}\tau = 0,$$

ktorý pomocou Gaussovej integrálnej vety premeníme na plošný integrál cez uzavretú plochu

$$\oiint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 .$$

Potom sa už postupuje rovnako ako v predchádzajúcom prípade.

Kontrolné otázky

1. *Aká podmienka sa musí splniť, aby platil prvý Kirchhoffov zákon?*
2. *Ako je sformulovaný prvý Kirchhoffov zákon?*
3. *Platí prvý Kirchhoffov zákon iba pre jednosmerný elektrický prúd?*
4. *Akým matematickým vzťahom sa dá vyjadriť ustálený stav vo vodiči prúdu?*

7.2 Dynamika elektrického prúdu

Kľúčové slová
Ohmov zákon, konduktivita, rezistivita, pohyblivosť, Joulovo teplo, druhý Kirchhoffov zákon

7.2.1 Ohmov zákon v diferenciálnom tvare

Ohmov zákon má dve významné formy, pre ktoré sú zaužívané názvy **Ohmov zákon v diferenciálnom tvare** a **Ohmov zákon v integrálnom tvare** (aj **Ohmov zákon pre úsek vodiča**). Prvý z nich vyjadruje lokálny vzťah medzi intenzitou elektrického poľa a hustotou elektrického prúdu, pričom platí v každom bode vodiča. Pri Ohmovom zákone v integrálnom tvare ide o integráciu Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare cez objem úseku vodiča (odtiaľ alternatívny názov).

K Ohmovmu zákonu v diferenciálnom tvare možno dospieť pomocou úvah o pôsobení elektrickej sily na elektróny nachádzajúce sa vo vodiči, ktoré sú touto silou urýchľované. Vo vodiči musí byť nenulová intenzita elektrického poľa, takže nejde o elektrostatický prípad. Nenulová intenzita je podmienkou existencie prúdu vo vodiči, a prítomné elektrické pole je vytvárané vonkajším zdrojom, ktorý udržiava stály elektrický prúd (pozri paragraf o elektromotorickom napätí). Rýchlosť, ktorú elektrón nadobudne pôsobením elektrického poľa, prakticky ihneď stratí zrážkou s niektorým z atómov vodiča, ale poľom je zase urýchľovaný a procedúra sa neustále opakuje. Napriek obrovskému zrýchleniu, ktoré elektróny dosahujú v elektrickom poli (pozri príklad 6.1.3.3 v elektrostatike), pre svoje časté zrážky sa vodičom pohybujú veľmi malou priemernou rýchlosťou, nazývanou ***transportná*** (***driftová***) rýchlosť.

Elektrický prúd v kovoch je sprostredkovaný elektrónmi, ktoré nesú elementárny elektrický náboj e a majú hmotnosť m_e. Ak je vo vodiči elektrické pole s intenzitou E, na elektrón pôsobí elektrická sila

$$F = eE$$

ktorá elektrónu udeľuje zrýchlenie

$$a = F/m_e = eE/m_e .$$

Ak sa elektrón pohybuje konštantným zrýchlením, jeho rýchlosť rastie lineárne s časom a to až po okamih zrážky. V zjednodušenom modeli predpokladáme, že pri zrážke úplne stratí rýchlosť a procedúra sa pravidelne opakuje, pričom strednú dobu medzi zrážkami označíme symbolom τ. Maximálna rýchlosť, ktorú tesne pred zrážkou dosiahne, je

$$v_{max} = a\tau = eE\tau/m_e . \qquad (7.2.1.1)$$

Transportná rýchlosť je priemernou rýchlosťou, to znamená, že v súlade s jednoduchým modelom predstavuje iba polovicu maximálnej rýchlosti:

$$v_d = eE\tau/(2m_e) \qquad (7.2.1.2)$$

Pre hustotu elektrického prúdu bol odvodený vzťah (7.1.1.5), podľa ktorého

$$J = \rho v = nev_d , \qquad (7.2.1.3)$$

kde n je počet elektrónov v objemovej jednotke (koncentrácia), e elementárny náboj a v_d transportná (driftová) rýchlosť. Po dosadení driftovej rýchlosti zo vzťahu (7.2.1.2) dostaneme pre prúdovú hustotu výraz

$$J = \frac{ne^2\tau}{2m_e} E = \gamma E , \qquad (7.2.1.4)$$

čo je skalárna forma Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare. Intenzita elektrického poľa, ako aj hustota prúdu, sú vektorové veličiny, preto sa Ohmov zákon zapisuje vo vektorovom tvare

$$J = \gamma E \,, \tag{7.2.1.5}$$

kde koeficient $\gamma = (ne^2\tau)/(2m_e)$ je **konduktivita** prostredia, ktorej starší, dnes už neplatný názov bol *merná elektrická vodivosť*. Jednotkou konduktivity v SI je $A/(V \cdot m) = \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$. Prevrátená hodnota konduktivity je **rezistivita**, ktorej jednotka je $\Omega \cdot m$ a jej starý názov *merný elektrický odpor*. Ak sa v Ohmovom zákone v diferenciálnom tvare použije rezistivita namiesto konduktivity, zapisuje sa v tvare

$$E = \rho J \,. \tag{7.2.1.6}$$

Konduktivita podľa vzorca (7.2.1.4) závisí od koncentrácie voľných elektrónov n a od strednej doby medzi zrážkami τ. Doba τ sa s rastúcou teplotou vodiča zmenšuje, lebo atómy intenzívnejšie kmitajú a tak väčšmi prekážajú pohybu elektrónov. Preto konduktivita s rastúcou teplotou vodiča klesá, ale rezistivita naopak rastie. V polovodičoch sa s rastúcou teplotou zväčšuje koncentrácia voľných elektrónov (alebo dier), čo prispieva k zväčšeniu konduktivity polovodičov. Tento nárast býva kvantitatívne väčší ako pokles konduktivity v dôsledku skracovania strednej doby medzi zrážkami, preto sa konduktivita polovodičov s teplotou zvyčajne zvyšuje.

Podľa vzorca (7.2.1.2) transportná (driftová) rýchlosť je vyjadrená vzťahom

$$v_d = \frac{e\tau}{2m_e} E = bE \,, \tag{7.2.1.7}$$

v ktorom vystupuje koeficient b, ktorý sa nazýva **pohyblivosť** (elektrónov, alebo dier) a vyjadruje veľkosť transportnej rýchlosti v elektrickom poli s jednotkovou intenzitou. Pohyblivosť elektrónov v polovodičoch dosahuje vysoké hodnoty, napr. b_{Si} = 1350 cm²/(Vs), b_{Ge} = 3600 cm²/(Vs), čo je podstatne viac ako v bežných kovových vodičoch. Príčinou je dokonalá kryštalická štruktúra týchto látok, lebo v technickej praxi sa používajú vo forme monokryštálov.

Príklad 7.2.1.1 Vypočítajte pohyblivosť b elektrónov v medenom vodiči, keď poznáte jeho rezistivitu $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-6}$ Ωcm, koncentráciu voľných elektrónov $n = 8{,}45 \cdot 10^{22}$ cm^{-3} a elementárny náboj $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As.

Riešenie Pre konduktivitu platí vzťah $\gamma = ne^2\tau/(2m_e) = ne\cdot(e\tau/2m_e) = neb$, pričom rezistivita je prevrátená hodnota konduktivity, takže

$b = 1/(ne\rho) = 1/(8{,}45 \cdot 10^{22} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-6}) \cong 43$ cm^2/(V·s)

Príklad 7.2.1.2 Vypočítajte strednú dobu medzi zrážkami elektrónu v medenom vodiči, keď pri izbovej teplote sú známe nasledujúce hodnoty: rezistivita $\rho = 1{,}7\cdot10^{-6}$ Ω·cm, náboj elektrónu $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$As, hmotnosť elektrónu $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg a koncentrácia voľných elektrónov $n = 8{,}45\cdot10^{22}$ cm^{-3} .

Riešenie $1/\rho = \gamma = ne^2\tau/(2m_e) \Rightarrow \tau = (2m_e)/(\rho\, ne^2) =$
$= (2\cdot 9{,}1\cdot10^{-31}\,\text{kg})/(1{,}7\cdot10^{-8}\,\Omega\text{m}\cdot 8{,}45\cdot10^{28}\,\text{m}^{-3}\cdot 2{,}56\cdot10^{-38}\text{A}^2\text{s}^2) \cong 5\cdot10^{-14}\,\text{s}$.

Príklad 7.2.1.3 Akú dráhu preletí elektrón medzi dvomi zrážkami v medenom vodiči pri izbovej teplote, keď vezmeme do úvahy a) jeho termodynamicky rovnovážnu rýchlosť $v_T \cong 100$ km/s b) jeho driftovú rýchlosť $v_d \cong 1$ mm/s ?

Riešenie Elektrón letí konštantnou rýchlosťou, preto sa dráha počíta vzťahom $s = v\Delta t$:

a) $s = 10^5\,\text{m/s}\cdot 5\cdot10^{-14}\,\text{s} = 5\cdot10^{-9}\text{m} = 5\,\text{nm}$,

b) $s = 10^{-3}\,\text{m/s}\cdot 5\cdot10^{-14}\,\text{s} = 5\cdot10^{-17}\text{m}$

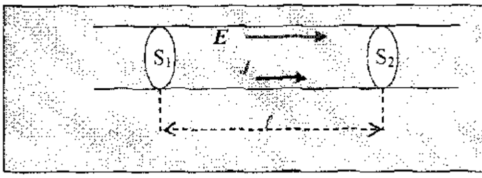
Vzdialenosť medzi najbližšími atómami v medi je 0,256 nm.

Kontrolné otázky

1. *Aký je tvar Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare?*
2. *Ako sa nazýva veličina sprostredkujúca vzťah medzi hustotou prúdu a intenzitou elektrického poľa?*
3. *Aký rozmer má v SI konduktivita?*
4. *Ako je konduktivita ovplyvnená strednou dobou medzi zrážkami elektrónu?*
5. *Ako je konduktivita ovplyvnená koncentráciou elektrónov?*
6. *V akom vzájomnom vzťahu sú konduktivita a rezistivita?*
7. *Aký bol starý názov konduktivity?*
8. *Aký bol starý názov rezistivity?*
9. *Čo sa rozumie pod pohyblivosťou elektrónov v kove?*

7.2.2 Ohmov zákon v intergálnom tvare, elektrický odpor

Ohmov zákon v diferenciálnom tvare je vhodný viac pri teoretických úvahách, v technickej praxi sa uplatňuje Ohmov zákon vyjadrujúci vzťah medzi elektrickým napätím na časti (úseku) vodiča, elektrickým odporom tejto časti a elektrickým prúdom, ktorý ním preteká, t.j. vzťah $U = IR$. Tento vzťah možno získať z Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare integráciou cez objem úseku vodiča, preto sa preň používa názov Ohmov zákon v integrálnom tvare.



Obr. 7.2.2.1

Zvolíme úsek vodiča s dĺžkou ℓ medzi prierezmi S_1 a S_2 . Ohmov zákon v diferenciálnom tvare zapíšeme tak, aby v ňom vystupovala rezistivita (vzťah 7.2.1.6), pričom ho napíšeme v skalárnej forme:

$$E = \rho J \ .$$

Integrovať budeme cez objem medzi prierezmi S_1 a S_2 pozdĺž osi vodiča (os x):

$$\iiint E \, \mathrm{d}\tau = \iiint \rho J \, \mathrm{d}\tau$$

Elementárny objem $\mathrm{d}\tau$ vyjadríme ako súčin prierezu S vodiča a dĺžkového elementu $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}\tau = S \, \mathrm{d}x \, ,$$

pričom v snahe zjednodušiť výpočet prierez S vodiča budeme na celom úseku integrácie považovať za konštantný. Rovnako aj veličiny vystupujúce pod integrálmi, t.j. intenzitu E, hustotu prúdu J a rezistivitu ρ budeme považovať za konštantné v celom objeme úseku vodiča. Tak sa objemový integrál zjednoduší:

$$S \int_0^{\ell} E \, \mathrm{d}x = S \int_0^{\ell} \rho J \, \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad S \, E \, \ell = (SJ)(\rho \ell) \quad \Rightarrow \quad E \, \ell = (JS)\left(\rho \frac{\ell}{S}\right) . \tag{7.2.2.1}$$

Súčin $E\ell$ sa rovná elektrickému napätiu U medzi vyznačenými prierezmi vodiča, na pravej strane rovnice súčin JS sa rovná prúdu I tečúcemu vodičom a výraz

$$\rho \frac{\ell}{S} = R \tag{7.2.2.2}$$

predstavuje elektrický odpor R vodiča. Po dosadení do poslednej rovnice v riadku (7.2.2.1), dostaneme všeobecne známy tvar Ohmovho zákona:

$$U = IR \ . \tag{7.2.2.3}$$

Ako vidno zo vzorca (7.2.2.2), elektrický odpor R úseku vodiča je úmerný jeho dĺžke a nepriamo úmerný prierezu vodiča. Kvalita materiálu je zohľadnená rezistivitou ρ. Jednotkou elektrického odporu v SI je **ohm** (značka Ω); je pomenovaná po nemeckom vedcovi *G.S. Ohmovi*. Z Ohmovho zákona vyplýva, že platí vzťah $1\Omega = 1\text{V/A}$.

Súčiastka vyrobená tak, aby sa v elektrickom obvode využíval len jej elektrický odpor, sa volá **rezistor**.

Zo vzorca (7.2.2.2) si možno urobiť lepší obraz o význame rezistivity ρ. Vyplýva z neho, že rezistivita sa čo do veľkosti rovná elektrickému odporu vodiča, ktorý má jednotkovú dĺžku a prierez s jednotkovým plošným obsahom. V SI sústave to predstavuje vodič s prierezom 1 m^2 a dĺžkou 1 m. To je však veľmi nepraktický rozmer vodiča, preto sa v tabuľkách rezistivita materiálov neudáva v jednotkách $\Omega\cdot\text{m}$, ale v jednotkách $\Omega\cdot\text{cm}$.

Rezistivita, ako prevrátená hodnota konduktivity, sa v súlade so vzorcom (7.2.1.4) vyjadruje vzťahom

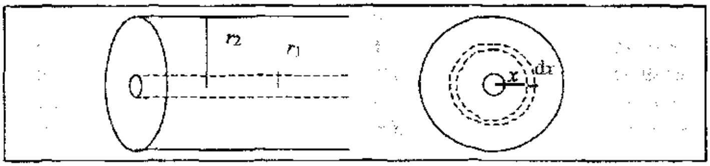
$$\rho = \frac{2m_e}{ne^2\tau} \ . \tag{7.2.2.4}$$

Vyplýva z neho, že v kovových vodičoch, kde sa stredná doba medzi dvomi zrážkami elektrónu s teplotou skracuje, rezistivita sa zväčšuje. V obmedzenom intervale teplôt možno túto závislosť považovať za lineárnu, čo sa vyjadruje vzťahom

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(t - t_0)] \tag{7.2.2.5}$$

kde ρ_0 je rizistivita pri teplote t_0. Koeficient α vyjadruje strmosť závislosti, čím je väčší, tým je nárast rezistivity s teplotou prudší. Závislosť rezistivity, a tým aj elektrického odporu od teploty, sa využíva v precíznych teplomeroch.

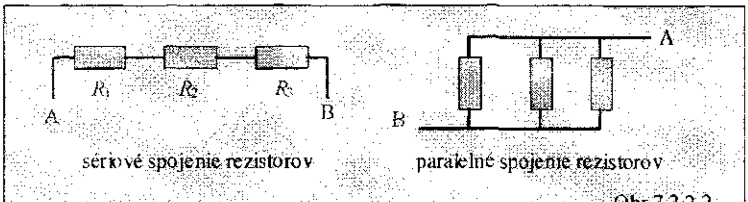
Príklad 7.2.2.1 Vypočítajte elektrický odpor izolácie koaxiálneho kábla, ktorého vnútorný vodič má priemer 1 mm, vonkajší vodič 8 mm, dĺžka kábla je 100 m, rezistivita izolačného materiálu medzi vodičmi $\rho = 2\cdot 10^9\ \Omega\cdot\text{m}$.
Riešenie Prúd cez izoláciu by tiekol od jedného vodiča (napr. stredného) k druhému, preto aj elektrický odpor treba počítať takým spôsobom. Z obrázku, na ktorom je znázornený koaxiálny kábel, vyplýva postup pri výpočte:



elementárny elektrický odpor tenkej rúrky s polomerom x, hrúbkou steny dx a dĺžkou L, medzi jej vnútornou a vonkajšou stenou je $dR = \rho\frac{dx}{2\pi xL}$, lebo prúd prekonáva elementárnu dĺžku dx a prechádza plochou s obsahom $2\pi xL$. Celý odpor vypočítame integráciou od vnútorného polomeru po vonkajší:

$R = \int_{r1}^{r2}\rho\frac{dx}{2\pi xL} = \frac{\rho}{2\pi L}\int_{r1}^{r2}\frac{dx}{x} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\frac{r_2}{r_1}$. Po dosadení číselných hodnôt $R \cong 6{,}6\cdot 10^6\ \Omega$.

V elektrických obvodoch sa rezistory často navzájom kombinujú, pričom ich spojenie môže byť principiálne dvojakého druhu - sériové, alebo paralelné.



Obr.7.2.2.2

Pri **sériovom** spojení (spojenie za sebou) všetkými rezistormi tečie rovnaký prúd, pričom elektrické napätia na jednotlivých rezistoroch sú $U_1 = R_1I$, $U_2 = R_2I$, $U_3 = R_3I$ (atď...), a výsledné napätie medzi bodmi A, B je súčtom napätí na jednotlivých rezistoroch:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = R_1I + R_2I + R_3I = (R_1 + R_2 + R_3)I = RI,$$

z čoho pre výsledný elektrický odpor sériovo spojených rezistorov vyplýva vzorec:

$$R = \sum_k R_k \ , \qquad (7.2.2.6)$$

čiže výsledný elektrický odpor sa rovná súčtu elektrických odporov rezistorov.

Pri **paralelnom** spojení je na všetkých rezistoroch rovnaké elektrické napätie U, takže platia vzťahy :

$$U = R_1I_1\ ,\ U = R_2I_2\ ,\ U = R_3I_3$$

a navyše podľa prvého Kirchhoffovho zákona prúd I tečúci medzi bodmi A, B sa rovná súčtu prúdov tečúcich jednotlivými rezistormi:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{U}{R}$$

z čoho vyplýva všeobecný výsledok pre väčší počet paralelne spojených rezistorov

$$\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k} \qquad (7.2.2.7)$$

Kontrolné otázky

1. *Ako súvisia Ohmov zákon v diferenciálnom tvare a Ohmov zákon v integrálnom tvare?*
2. *Ktoré veličiny vystupujú v Ohmovom zákone v integrálnom tvare?*
3. *Akým vzorcom sa vyjadruje elektrický odpor drôtu so známou dĺžkou a prierezom?*
4. *Ako závisí rezistivita kovového vodiča od teploty?*
5. *Aký je rozmer rezistivity v SI ?*
6. *Aký je názov jednotky elektrického odporu v SI ?*
7. *Aký je rozmer elektrického odporu vyjadrený pomocou základných jednotiek SI ?*
8. *Ako sa počíta elektrický odpor rezistorov zapojených paralelne a sériovo?*

7.2.3 Tepelné účinky elektrického prúdu, Joulovo teplo

Nie všetka elektrická energia prenášaná vodičmi sa dostane k spotrebičom (svetidlá, motory a pod.). Časť z nej sa stráca vo vodičoch takým spôsobom, že vodiče sa zohrievajú. Elektrická energia sa pritom mení na teplo, nazývané Joulovo (aj Joulove straty). Pôvod a veľkosť týchto strát možno vysvetliť využitím podobného postupu ako pri odvodení Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare.

Elektróny urýchľované vo vodiči elektrickým poľom odovzdávajú získanú kinetickú energiu atómom vodiča pri zrážkach s nimi. Po zrážke s elektrónom atóm začne intenzívnejšie kmitať okolo svojej rovnovážnej polohy. Atómami prijatá energia znamená zväčšenie vnútornej energie vodiča a tým jeho teploty.

Elektróny nesúce elementárny elektrický náboj e sú v elektrickom poli s intenzitou E urýchľované silou $F = eE$, pričom za stredný časový interval τ medzi dvoma zrážkami nadobudnú rýchlosť

$$v_{max} = \frac{eE}{m_e}\tau \quad ,$$

kde m_e je hmotnosť elektrónu. Na konci časového intervalu τ urýchlený elektrón nadobudne kinetickú energiu

$$W_{k1} = \tfrac{1}{2} m_e v_{max}^2 = \tfrac{1}{2} m_e \left(\frac{eE\tau}{m_e} \right)^2 .$$

Podľa zjednodušených predstáv, celú túto energiu odovzdá niektorému atómu vodiča. V objemovej jednotke sa nachádza n voľných elektrónov, čo znamená, že v časovom intervale τ v jednotkovom objeme elektróny odovzdajú energiu

$$W_{kn} = \tfrac{1}{2} \frac{ne^2 \tau^2}{m_e} E^2 .$$

Odovzdaná energia pripadajúca na jednotku času, t.j. príkon P_1 do jednotkovému objemu, je podiel posledného výrazu a časového intervalu τ :

$$P_1 = \frac{1}{\tau} W_{kn} = \frac{ne^2 \tau}{2m_e} E^2 = \gamma E^2 = JE \qquad (7.2.3.1)$$

pričom sme využili vzťah (7.2.1.4) pre konduktivitu γ , ako aj Ohmov zákon v diferenciálnom tvare.

Príkon do vodiča, ktorý má dĺžku ℓ a prierez s obsahom S má veľkosť:

$$P = JE\,S\,\ell = (E\ell)(JS) = UI = RI^2 , \qquad (7.2.3.2)$$

pričom pri úprave boli využité vzťahy $E\ell = U$, $JS = I$ a $U = IR$.

Ak príkon do vodiča s elektrickým odporom R je $P = RI^2$, potom energia odovzdaná vodiču v časovom intervale $(0, t_1)$ je

$$W_s = \int_0^{t1} P\,\mathrm{d}t = \int_0^{t1} RI^2\,\mathrm{d}t \qquad (7.2.3.3)$$

Pri konštantnom prúde, t.j. keď prúd I nezávisí od času, platí $W_s = RI^2 \Delta t$. Táto energia, ako každá iná energia, sa meria v jouloch (= W·s), ale častejšie v násobkoch tejto jednotky, v kilowatthodinách.

Energia odovzdávaná vodiču elektrónmi, má pôvod v energii elektrického poľa, ktoré elektróny urýchľuje. Ide tu o premenu energie elektrického poľa na vnútornú energiu vodiča, čím sa zvyšuje jeho teplota. Preto sa často hovorí o premene elektrickej energie na teplo, hoci z fyzikálneho pohľadu to nie je celkom správne konštatovanie, lebo vnútorná energia nie je totožná s teplom (pozri kapitolu o termodynamike).

Príklad 7.2.3.1 Medeným vodičom, ktorý má dĺžku $\ell = 100$ m, priemer $d = 1$ mm a rezistivitu $\rho = 1{,}7\cdot10^{-6}\ \Omega\cdot$cm, tečie elektrický prúd $I = 5$ A. Aké sú Jouleove straty vo vodiči za sekundu a koľko energie sa v tomto vodiči stratí, ak ním prúd preteká 12 hodín?
Riešenie Najprv treba vypočítať elektrický odpor vodiča -
$R = \dfrac{\rho\ell}{(\pi d^2/4)} = \dfrac{4\cdot1{,}7\cdot10^{-8}\,\Omega\text{m}\cdot100\,\text{m}}{\pi\cdot10^{-6}\,\text{m}} \cong 2{,}16\ \Omega$. Príkon Jouleových strát je
$RI^2 = (2{,}16\ \Omega).25\ \text{A}^2 = 54$ J/s . Za 12 hodín to predstavuje energiu
$54\ \text{J/s}\cdot12\cdot3600\ \text{s} = 2332800\ \text{Ws} = 0{,}648\ \text{kWh}$.

Príklad 7.2.3.2 Vodičom s elektrickým odporom R tečie prúd, ktorého veľkosť sa s časom lineárne zväčšuje. V čase $t_0 = 0$ bol prúd nulový, v čase t_1 mal hodnotu I_1 . Koľko Joulovho tepla sa vo vodiči vytvorilo v časovom intervale $(0, t_1)$?
Riešenie Do vzorca (7.2.3.3) treba dosadiť prúd $I(t)$ ako funkciu času (pozri príklad 7.1.1.3): $I = (I_1/t_1)t$:

$$W_s = \int_0^{t_1} R\left(\frac{I_1}{t_1}\right)^2 t^2\,\mathrm{d}t = R\left(\frac{I_1}{t_1}\right)^2 \frac{t_1^3}{3} = R\left(\frac{I_1}{\sqrt{3}}\right)^2 t_1$$

Výsledok príkladu 7.2.3.2 ukazuje, že rovnaké množstvo Joulovho tepla by sa vo vodiči uvolnilo aj vtedy, ak by vodičom tiekol po celý časový interval $(0, t_1)$ prúd s veľkosťou $I_{ef} = (I_1/3^{1/2})$. Prúd I_{ef} s uvedenou vlastnosťou sa nazýva ***efektívna hodnota elektrického prúdu*** a zavádza sa všeobecným vzťahom

$$(I_{ef})^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\,\mathrm{d}t\ . \qquad \textbf{(7.2.3.4)}$$

Využíva sa prakticky len v prípade periodickej závislosti prúdu od času, teda pri striedavých elektrických prúdoch.

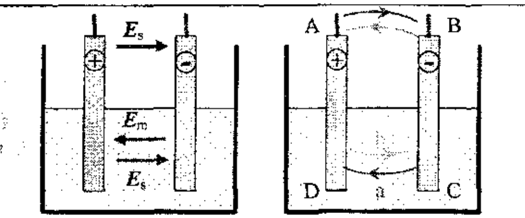
Kontrolné otázky

1. *Aký je mechnizmus zohrievania vodiča, keď ním preteká elektrický prúd?*
2. *Akým vzorcom sa vyjadruje príkon Jouleových strát v objemovej jednotke vodiča?*
3. *Akým vzorcom sa vyjadruje príkon Jouleových strát vo vodiči s elektrckým odporom R ?*
4. *Akým vzorcom sa vyjadruje energia spotrebovaná na ohrev vodiča?*

7.2.4 Elektromotorické napätie

Elektromotorické napätie U_m možno stručne charakterizovať ako maximálne elektrické napätie, ktoré je schopný generovať zdroj elektrického napätia. Rovná sa elektrickému napätiu medzi svorkami nezaťaženého zdroja. Môže mať rôzny pôvod - v chemických procesoch (galvanické články), v účinku svetla (slnečné batérie), teple (termočlánky) ale vzniká aj v generátoroch elektrického prúdu. Vznik elektromotorického napätia v zdroji sa vysvetľuje prítomnosťou iných ako elektrických síl pôsobiacich na nosiče elektrického náboja (elektróny, ióny). Účinkom týchto síl sa kladne nabité častice pohybujú opačným smerom ako záporne nabité častice. Preto sa častice nabité opačnými nábojmi od seba separujú. V galvanickom článku sa týmto procesom nabíjajú elektródy - jedna kladným, druhá záporným nábojom. Medzi nabitými elektródami vzniká elektrické pole, ktoré sa môže využiť pripojením na spotrebič.

Sily, ktoré sú v galvanickom článku alebo v inom zdroji elektromotorického napätia, príčinou separácie kladných a záporných nábojov, sa všeobecne nazývajú **cudzie sily**. V tomto texte ich budeme nazývať **motorické sily**, podľa výsledku ich účinku, ktorým je elektro*motorické* napätie. Absolútnu hodnotu podielu motorickej sily pôsobiacej na nabitú časticu a jej elektrického náboja budeme nazývať **motorická intenzita**. Motorická intenzita $\boldsymbol{E}_m$ má svoj smer, preto je to vektorová veličina a v galvanickom článku smeruje od zápornej ku kladnej elektróde. Preto intenzita $\boldsymbol{E}_m$ posúva kladné ióny elektrolytu ku kladnej elektróde, záporné ióny k zápornej elektróde. Nabíjaním elektród vzniká medzi nimi elektrostatické pole s intenzitou $\boldsymbol{E}_s$, ktorá má opačný smer ako intenzita $\boldsymbol{E}_m$. Intenzita $\boldsymbol{E}_m$ existuje iba v elektrolyte galvanického článku, ale intenzita $\boldsymbol{E}_s$ aj mimo neho, medzi svorkami A,B článku.



Obr. 7.2.4.1

Separácia nábojov, a s ňou spojené nabíjanie elektród prebieha dovtedy, pokým sa intenzita E_s veľkosťou nevyrovná intenzite E_m. Vtedy je galvanický článok úplne nabitý a medzi svorkami, pokiaľ sa z článku neodoberá prúd, možno namerať rozdiel potenciálov, ktorý sa rovná elektromotorickému napätiu článku.

Poznámka Treba uviesť, že cudzie sily v galvanickom článku pôsobia na rozhraní medzi elektrolytom a elektródami, ale v záujme zjednodušenia ďalších úvah budeme predpokladať, že pôsobia v celom objeme elektrolytu.

Presná definícia elektromotorického napätia využíva **integrál po uzavretej krivke** všetkých intenzít pôsobiacich v zdroji a jeho okolí:

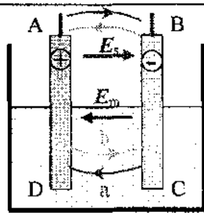
$$U_m = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint (\boldsymbol{E}_m + \boldsymbol{E}_s) \cdot d\boldsymbol{r} \qquad (7.2.4.1)$$

Na obrázku 7.2.4.1 sú naznačené dve možnosti integrácie po uzavretej krivke - písmenom a v smere chodu hodinových ručičiek, písmenom b v opačnom smere. Vektor $d\boldsymbol{r}$ vyjadruje smer integrácie. Ak vektor $\boldsymbol{E}$ má rovnaký smer ako vektor $d\boldsymbol{r}$, ich skalárny súčin je kladný, a potom je kladné aj elektromotorické napätie. To znamená, že znamienko elektromotorického napätia závisí od voľby smeru integrácie po uzavretej krivke. To má dopad na určovanie znamienok v druhom Kirchhoffovom zákone (pozri § 7.2.5).

Definičný vzorec (7.2.4.1) upravíme dvomi spôsobmi. V prvom prípade rozdelíme pravú stranu na dva samostatné integrály po uzavretých krivkách:

$$U_m = \oint (\boldsymbol{E}_m + \boldsymbol{E}_s) \cdot d\boldsymbol{r} = \oint \boldsymbol{E}_m \cdot d\boldsymbol{r} + \oint \boldsymbol{E}_s \cdot d\boldsymbol{r} = \oint \boldsymbol{E}_m \cdot d\boldsymbol{r} \,, \qquad (7.2.4.2)$$

lebo integrál po uzavretej krivke z intenzity v elektrostatickom poli sa rovná nule. Ak integrujeme v smere chodu hodinových ručičiek, vektor $d\boldsymbol{r}$ v galvanickom článku má rovnaký smer ako vektor $\boldsymbol{E}_m$, takže integrál a tým aj U_m sú kladné. Pri opačnom smere integrovania je elektromotorické napätie záporné.



Obr. 7.2.4.1

V druhom prípade rozpíšeme integrál po uzavretej krivke na dva integrály - jeden cez vnútro článku, druhý mimo neho, teda medzi svorkami článku:

$$U_m = \int_{v\ článku} (\boldsymbol{E}_m + \boldsymbol{E}_s) \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{mimo\ článku} (\boldsymbol{E}_m + \boldsymbol{E}_s) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{mimo\ článku} \boldsymbol{E}_s \cdot d\boldsymbol{r} \,, \qquad (7.2.4.3)$$

lebo v nabitom a nezaťaženom článku je $\boldsymbol{E}_m + \boldsymbol{E}_s = 0$ a mimo článku $\boldsymbol{E}_m = 0$. Ak budeme integrovať v smere chodu hodinových ručičiek, elektromotorické napätie získame ako integrál intenzity $\boldsymbol{E}_s$ od kladnej po zápornú svorku:

$$U_m = \int_A^B \boldsymbol{E}_s \cdot d\boldsymbol{r} = -(\varphi_B - \varphi_A) > 0 \,. \qquad (7.2.4.4)$$

(Porovnajte so vzorcom (6.1.6.3) pre rozdiel potenciálov). Vektor $\boldsymbol{E}_s$ má pri tomto smere integrácie rovnaký smer ako vektor $d\boldsymbol{r}$, takže integrál je kladný. Potvrdzuje sa to aj rozdielom potenciálov zápornej (B) a kladnej (A) elektródy, ktorý musí byť záporný, lebo potenciál zápornej elektródy je vždy nižší ako potenciál kladnej elektródy, takže $(\varphi_B - \varphi_A) < 0$, resp. $-(\varphi_B - \varphi_A) > 0$.

Pri opačnom smere integrácie je elektromotorické napätie záporné, o čom sa možno presvedčiť opäť integráciou intenzity $\boldsymbol{E}_s$ medzi svorkami článku, tentoraz v opačnom smere.

Ak na galvanický článok pripojíme spotrebič, napríklad žiarovku, začne obvodom tiecť prúd a v článku sa poruší rovnováha medzi motorickou intenzitou a intenzitou elektrického poľa. Elektróny, ktoré sa pohybujú mimo článku, urýchľuje intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}_s$, pričom sa pohybujú od zápornej ku kladnej elektróde. Po prechode vonkajšou časťou obvodu sa elektróny vracajú nazad do článku, kde musia prejsť od kladnej k zápornej elektróde. Tam ich urýchľuje motorická intenzita $\boldsymbol{E}_m$, ktorá v tomto stave porušenej rovnováhy musí byť väčšia ako intenzita $\boldsymbol{E}_s$. Inak by prúd uzavretým obvodom netiekol. Pokles intenzity $\boldsymbol{E}_s$ sa prejaví aj medzi svorkami, takže rozdiel potenciálov medzi svorkami zaťaženého zdroja je menší ako zdroja nezaťaženého. Pripomeňme ešte raz, že rozdiel potenciálov medzi svorkami nezaťaženého zdroja sa rovná jeho elektromotorickému napätiu. Pokles svorkového napätia pri zaťažení zdroja sa vysvetľuje aj úbytkom elektrického napätia na vnútornom elektrickom odpore galvanického článku.

Bez cudzích (elektromotorických) síl by v elektrickom obvode nemohol trvalo tiecť prúd. Elektrostatické pole je konzervatívne, preto nemôže byť zdrojom práce, ale vytvára podmienky na jej konanie. V tomto smere jestvuje podobnosť s gravitačným poľom. V prečerpávacej hydroelektrárni voda klesajúca do dolnej nádrže odovzdáva svoju kinetickú energiu turbínam, pričom pôvod kinetickej energie je v pôsobení gravitačných síl na vodu. Pri urýchľovaní vody gravitačné sily konajú kladnú prácu. Pri prečerpávaní vody nazad do hornej nádrže, gravitačné sily konajú zápornú prácu, takže celková práca gravitačných síl pri jednom cykle je nulová. Pri prečerpávaní treba gravitačnú silu prekonávať inými, negravitačnými silami (napríklad vodu vyvážať konskými povozmi, pričom koníky čerpajú energiu z potravy !!). Podobne je to pri prechode elektrického prúdu žiarovkou, cez ktorú sú elektróny poháňané elektrickými silami, ale nazad ich dostane napr. chemický proces v galvanickom článku, svetlo v slnečných batériách, alebo elektromagnetická indukcia v generátoroch.

Kontrolné otázky

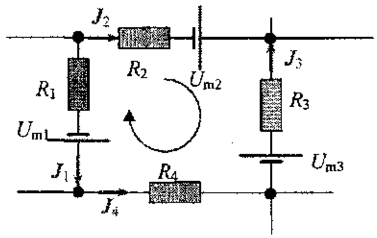
1. *Môže byť elektrostatické pole príčinou vzniku elektromotorického napätia?*
2. *Viete uviesť konkrétne príklady vzniku elektromotorického napätia?*
3. *Aká je jednotka elektromotorického napätia v SI ?*
4. *Akým vzťahom sa definuje elektromotorické napätie?*
5. *Môže byť elektromotorické napätie záporné?*
6. *Kedy sa elektromotorické napätie zdroja rovná svorkovému napätiu?*
7. *Prečo je svorkové napätie zaťaženého zdroja menšie ako elektromotorické?*

7.2.5 Druhý Kirchhoffov zákon

Obsahom tohto zákona je vzťah medzi elektromotorickými napätiami, prúdmi a elektrickými odpormi vo vetvách uzavretej slučky elektrického obvodu. Pri odvodení druhého Kirchhoffovho zákona budeme vychádzať z Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare (7.2.1.6), a to vo verzii v ktorej vystupuje rezistivita :

$$\boldsymbol{E} = \rho \boldsymbol{J} \tag{7.2.5.1}$$

Na ľavej strane Ohmovho zákona je vektorový súčet všetkých intenzít, vrátane motorických (cudzích), pôsobiacich v danom bode vodiča. Na obrázku je nakreslená slučka skladajúca sa zo štyroch vetiev, v ktorých sú zaradené zdroje elektromotorického napätia U_{mk}, elektrické odpory R_k, a tečú nimi prúdy s hustotami $\boldsymbol{J}_k$, ktorých smery sa v slučke vyznačujú.



Obr. 7.2.5.1

Ohmov zákon (7.2.5.1) budeme integrovať v smere naznačenom na obrázku, pozdĺž celej slučky, teda po uzavretej krivke:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint \rho \, \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{7.2.5.2}$$

Ľavú stranu rovnice rozpíšeme tak, že celkovú intenzitu $\boldsymbol{E}$ vyjadríme ako súčet motorickej a elektrostatickej $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_m + \boldsymbol{E}_s$:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint \boldsymbol{E}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint \boldsymbol{E}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \ ,$$

pričom druhý z integrálov sa rovná nule, lebo ide o intenzitu elektrostatického poľa. Prvý integrál, v ktorom vystupuje intenzita $\boldsymbol{E}_m$, rozpíšeme ako súčet integrálov po jednotlivých vetvách, pričom si uvedomíme, že vo štvrtej vetve nie je zaradený zdroj elektromotorického napätia:

$$\oint \boldsymbol{E}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_1 \boldsymbol{E}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_2 \boldsymbol{E}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_3 \boldsymbol{E}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} \ . \tag{7.2.5.3}$$

Znamienka jednotlivých elektromotorických napätí závisia od vzájomného smeru vektora $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ (t.j. smeru integrovania) a vektora $\boldsymbol{E}_m$ v konkrétnom zdroji danej vetvy.

Pri ich súhlasnom smere je elektromotorické napätie kladné. Obrátením smeru integrácie sa zmenia znamienka všetkých elektromotorických napätí v obvode.

Pravú stranu rovnice (7.2.5.2) upravíme obdobne, čiže integrál po uzavretej krivke rozpíšeme na súčet integrálov po jednotlivých vetvách:

$$\oint \rho \, \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_k \int_k \rho_k \, \boldsymbol{J}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \; . \tag{7.2.5.4}$$

Výpočet integrálu v skalárnom tvare bol už uskutočnený v paragrafe 7.2.2 , kde sa dospelo k výsledku

$$\int_k \rho_k \boldsymbol{J}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = R_k I_k \; .$$

Pravú stranu rovnice (7.2.5.2) možno potom napísať v tvare

$$\oint \rho \, \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_k \int_k \rho_k \, \boldsymbol{J}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_k R_k I_k \tag{7.2.5.5}$$

Znamienka prúdov I_k závisia od vzájomného smeru vektorov $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{J}_k$ v príslušnej vetve obvodu. Prúd je kladný, ak sú vektory súhlasne rovnobežné. Preto aj tu platí, že zmenou smeru integrácie sa zmenia znamienka prúdov.

Teraz už možno urobiť konečnú úpravu rovnice (7.2.2.2) s využitím výsledkov (7.2.5.3) a (7.2.5.5):

$$\sum_k U_{mk} = \sum_k R_k I_k \tag{7.2.5.6}$$

čo je už bežne používaný zápis **druhého Kirchhoffovho zákona**. Slovne ho možno formulovať takto :

V uzavretej slučke, ktorá je súčasťou elektrického obvodu, sa súčet elektromotorických napätí zdrojov pôsobiacich v jednotlivých vetváchslučky, rovná súčtu elektrických napätí na jednotlivých rezistoroch (t.j. súčtu súčinov $R_k I_k$).

Na záver je vhodné ešte raz zdôrazniť, že znamienka jednotlivých členov v sumáciách závisia nie iba od smerov motorických intenzít v zdrojoch a od zvolených smerov vektorov hustoty prúdu, ale aj od zvoleného smeru integrácie pozdĺž obvodu.

Kontrolné otázky

1. *Ktorý fyzikálny zákon sa používa ako východisko pri odvodení druhého Kirchhoffovho zákona?*
2. *Ako sa určujú znamienka elektromotorických napätí zaradených do vetiev obvodu?*
3. *Ako sa určujú znamienka elektrických prúdov vo vetvách obvodu?*
4. *Aká je slovná formulácia druhého Kirchhoffovho zákona?*

Súhrn vzorcov

Definícia elektrického prúdu	$I = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$
Definícia hustoty elektrického prúdu	$J = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta I}{\Delta S} = \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}$
Elektrický prúd vyjadrený pomocou hustoty prúdu	$I = \iint\limits_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$
Vzťah hustoty prúdu a transportnej rýchlosti	$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v}_\mathrm{d}$
Rovnica kontinuity v diferenciálnom tvare	$\mathrm{div}\boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$
Prvý Kirchhoffov zákon v integrálnom tvare	$\oiint \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$
Ohmov zákon v diferenciálnom tvare	$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$, alebo $\boldsymbol{E} = \rho \boldsymbol{J}$
Ohmov zákon v integrálnom tvare	$U = IR$
Elektrický odpor úseku vodiča	$\rho \dfrac{\ell}{S} = R$
Závislosť rezistivity kovového vodiča od teploty	$\rho = \rho_\mathrm{o} [1 + \alpha(t - t_\mathrm{o})]$
Elektrický odpor pri sériovom spojení rezistorov	$R = \sum\limits_k R_k$
Elektrický odpor pri paralelnom spojení rezistorov	$\dfrac{1}{R} = \sum\limits_k \dfrac{1}{R_k}$
Energia odovzdaná vodiču, Joulove straty	$W_\mathrm{s} = \int\limits_0^{t1} P \,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{t1} RI^2 \,\mathrm{d}t$
Definícia elektromotorického napätia	$U_\mathrm{m} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint (\boldsymbol{E}_\mathrm{m} + \boldsymbol{E}_\mathrm{s}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

Druhý Kirchhoffov zákon	$\sum_k U_{mk} = \sum_k R_k I_k$

Slovník

ampér (A) – jednotka elektrického prúdu v SI; vodičom tečie prúd 1 A, keď jeho celým prierezom prejde za 1 sekundu elektrický náboj 1 coulomb

ampérsekunda (A·s) – iné vyjadrenie jednotky elektrického náboja - coulombu, prostredníctvom základných jednotiek SI: 1 C = 1 As

cudzie sily → motorické sily

driftová rýchlosť → transportná rýchlosť

druhý Kirchhoffov zákon – zákon platný v elektrických obvodoch, podľa ktorého sa súčet elektromotorických napätí v každej slučke obvodu rovná súčtu súčinov elektrických prúdov s hodnotami elektrických odporov rezistorov zaradených v príslušných vetvách slučky

elektrický prúd (I) – veličina definovaná podielom elektrického náboja, ktorý prešiel daným prierezom vodiča a príslušného časového intervalu; jednotka - ampér (A)

elektromotorické napätie (U_m) – veličina charakterizujúca zdroj elektrického prúdu, určená podielom práce síl, ktoré prenesú elektrický náboj uzavretým obvodom, a tohto náboja; veľkosť elektromotorického napätia sa zhoduje s elektrickým napätím na svorkách nezaťaženého zdroja; jednotka - volt

hustota elektrického prúdu, plošný elektrický prúd (J) – podiel elektrického prúdu a prierezu vodiča, ktorým prúd tečie; jednotka A/m^2

Joulovo teplo – teplo, ktoré vzniká pri prechode elektrického prúdu vodičom; predstavuje straty elektrickej energie vo vodiči

konduktivita (γ, σ) – prevrátená hodnota → rezistivity

motorická intenzita, intenzita cudzích síl (E_m) – veličina zavedená ako podiel motorickej sily (cudzej sily) pôsobiacej na časticu s elektrickým nábojom v galvanickom článku, a tohto náboja

motorické sily – sily pôsobiace v galvanickom článku na elektricky nabité častice, pričom kladne nabité častice posúvajú k anóde článku a záporne nabité ku katóde; nie sú to sily elektrostatického poľa v článku, pôsobia proti nim, preto sa pre ne používa názov ***cudzie sily*** ; keďže separujú kladné a záporné náboje, používa sa pre ne aj názov ***oddeľujúce sily***

Ohmov zákon v diferenciálnom tvare – zákon vyjadrujúci priamu úmernosť hustoty elektrického prúdu - intenzite elektrického poľa; platí v každom bode vodiča

Ohmov zákon v integrálnom tvare – zákon platiaci na ľubovolnom úseku (časti) vodiča, vyjadrujúci vzťah medzi elektrickým napätím na tomto úseku, elektrickým odporom tohto úseku a elektrickým prúdom pretekajúcim vodičom

plošný elektrický prúd → hustota elektrického prúdu

pohyblivosť – koeficient sprostredkujúci priamu úmernosť transportnej rýchlosti častíc istého druhu nesúcich elektrický náboj (elektrónov, iónov), intenzite elektrického poľa vo vodiči; číselne sa rovná transportnej rýchlosti príslušných častíc v elektrickom poli s jednotkou intenzitou

prvý Kirchhoffov zákon – zákon, podľa ktorého súčet veľkostí elektrických prúdov pritekajúcich do uzla elektrického obvodu, sa rovná súčtu veľkostí prúdov z uzla vytekajúcich; platí iba v ustálenom stave; je vyjadrením zákona zachovania elektrického náboja

rezistivita – veličina predstavujúca elektrický odpor vodiča s prierezom 1 m^2 a dĺžkou 1 m ; v minulosti merný elektrický odpor

rezistor – prvok elektrického obvodu skonštruovaný tak, aby sa v obvode prejavoval najmä svojim elektrickým odporom

rovnica kontinuity – rovnica vyjadrujúca zákon zachovania elektrického náboja vo všeobecnom prípade, teda aj stave, ktorý nie je ustálený

rovnica spojitosti → rovnica kontinuity

svorkové napätie – elektrické napätie na svorkách nezaťaženého zdroja elektrického prúdu

transportná rýchlosť – rýchlosť usmerneného pohybu voľných elektrónov vyvolaná vonkajším elektrickým poľom; nakladá sa na chaotické pohyby elektrónov podmienené teplotou vodiča

Úlohy

1. Koľko elektrického náboja pretieklo prierezom vodiča, keď veľkosť elektrického prúdu, ktorá v okamihu t_0 na začiatku merania mala veľkosť $I_0 = 12$ A, exponeciálne klesala, a to za každé $\Delta t = 3$ s o polovicu?

Výsledok: $Q = (I_0\,\Delta t)/\ln 2 = 51{,}94$ C.

2. Anóda klasickej diódy má tvar valca, v osi ktorého je katóda v tvare tenkého žeraveného vlákna. Z katódy sa uvoľňujú elektróny a dopadajú na anódu. Vypočítajte hustotu elektrického prúdu J_k tesne pri katóde a tesne pri anóde (J_a), ak elektrónkou tečie prúd $I = 3$ mA. Dĺžka vlákna katódy (a súčasne výška valca anódy) $\ell = 2$ cm, priemer vlákna $d_k = 0{,}1$ mm, priemer anódy $d_a = 1$ cm. Hustoty prúdu prepočítajte aj na počet elektrónov, ktoré prechádzajú za sekundu cez 1 mm^2.

Výsledok: $J_k = 4{,}77\cdot 10^{-4}$ A/mm^2, t.j. $\approx 4\cdot 10^{15}$ s^{-1} mm^{-2} elektrónov;
$J_a = 4{,}77\cdot 10^{-6}$ A/mm^2.

3. Rezistor má tvar zrezaného kúžela s výškou ℓ. Polomer väčšej kruhovej základne má veľkosť b, menšej a. Rezistivita materiálu má hodnotu ρ. Vypočítajte elektrický odpor rezistora, ktorý sa nameria medzi jeho základňami!

Výsledok: $R = (\rho\ell)/(\pi ab)$

4. Vodič s rezistivitou ρ má dĺžku ℓ, pričom na prvej polovici tejto dĺžky má priemer d_1, na druhej priemer $d_2 = 2\,d_1$. Vodičom tečie prúd I. Vypočítajte podiel hustôt elektrického prúdu J_1 / J_2 a podiel intenzít elektrického poľa E_1 / E_2 v častiach s rôznymi prierezmi a podiel elektrických napätí U_1/U_2 pripadajúcich na tieto úseky vodiča!

Výsledok: $\dfrac{J_1}{J_2} = \dfrac{d_2^2}{d_1^2} = 4,\quad \dfrac{E_1}{E_2} = 4,\quad \dfrac{U_1}{U_2} = 4.$

5. Uhlíkový hranol s dĺžkou $\ell = 10$ cm a prierezom 2 cm^2 je pripojený na elektrické napätie $U = 10$ V. Konduktivita uhlíka $\gamma = 1{,}6\cdot 10^4\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$. Vypočítajte hustotu elektrického prúdu J a veľkosť intenzity elektrického poľa v tomto hranole!

Výsledok: $J = \dfrac{\gamma U}{\ell} = 1{,}6\cdot 10^6\ \mathrm{Am}^{-2}$, $E = 100$ V/m

6. Na medený vodič s dĺžkou $\ell = 100$ m, priemerom $d = 2$ mm^2 a rezistivitou $\rho = 1{,}6\cdot 10^{-8}\ \Omega$m, je pripojený zdroj s elektrickým napätím $U = 2$ V. Aká je hustota elektrického prúdu J vo vodiči? Koľko elektrónov prechádza celým prierezom vodiča za sekundu? (Náboj elektrónu $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C.)

Výsledok: $J = \dfrac{U}{\rho\ell} = 1{,}25\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{mm}^{-2}$, $\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = 1{,}56\cdot 10^{19}\,\mathrm{s}^{-1}$

7. Aká je intenzita E elektrického poľa vo vodiči s tvarom valca (priemer valca d, dĺžka ℓ, rezistivita materiálu ρ), ak ním tečie elektrický prúd I? Aký je rozdiel potenciálov U medzi koncami vodiča?

Výsledok: $E = \rho \dfrac{4I}{\pi d^2}$, $U = \rho \dfrac{4I}{\pi d^2} \ell$

8. Vodič z homogénneho materiálu s rezistivitou ρ má tvar kužela s odrezaným vrcholom, jeho dĺžka je ℓ, a polomery čelných kruhových plôch $r_1 < r_2$. Vodičom tečie ustálený prúd I. Vyjadrite závislosť intenzity E elektrického poľa od polohy pozdĺž osi symetrie vodiča! Pri ktorej základni kuželového vodiča je táto intenzita väčšia? Predpokladajte, že hustota prúdu je v každom reze kolmom na os konštantná.

Výsledok: $E(x) = \dfrac{\rho I}{\pi \left(r_1 + \dfrac{r_2 - r_1}{\ell} x \right)^2}$

9. Elektrický odpor cievky navinutej z medeného drôtu, má pri teplote $t_o = 20\ ^\circ\mathrm{C}$ elektrický odpor $R_o = 15{,}1\ \Omega$. Po istej dobe činnosti cievky sa jej elektrický odpor zvýšil na $R_1 = 17{,}3\ \Omega$. Aká bola vtedy teplota t_1 cievky? Teplotný koeficient elektrického odporu medi má hodnotu $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$.

Výsledok: $t_1 = t_o + \dfrac{R - R_o}{R_o \alpha} = 49{,}14\ ^\circ\mathrm{C}$

10. Teplotný koeficient elektrického odporu medi má hodnotu $\alpha_{Cu} = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$, hliníka $\alpha_{Al} = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$. Aký je teplotný koeficient elektrického odporu vodiča vytvoreného sériovým spojením hliníkového vodiča s elektrickým odporom $R_{Al} = 3\Omega$, a medeného vodiča s elektrickým odporom $R_{Cu} = 2\Omega$?

Výsledok: $\alpha = \dfrac{R_{Cu}\, \alpha_{Cu} + R_{Al}\, \alpha_{Al}}{R_{Cu} + R_{Al}} = 4{,}4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$

11. Na zdroj s elektromotorickým napätím $U_m = 48\ \mathrm{V}$ a zanedbateľným vnútorným elektrickým odporom, chceme pripojiť špirálový ohrievač s príkonom $P_1 = 100\ \mathrm{W}$. Aký elektrický odpor R_{20} musí mať špirála pri teplote $t_o = 20\ ^\circ\mathrm{C}$, ak jej pracovná teplota $t_1 = 400\ ^\circ\mathrm{C}$, a teplotný koeficient elektrického odporu $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$?

Výsledok: $R_{20} = \dfrac{U_m^2}{P_1} \dfrac{1}{1 + \alpha \Delta t} \cong 7\,\Omega$

12. Dva voltmetre s rovnakým rozsahom, ale rôznymi vnútorným elektrickými odpormi $R_1 = 17\ 000\ \Omega$, $R_2 = 5000\ \Omega$ sú zapojené do série a pripojené na elektrické napätie $U_o = 220\ \mathrm{V}$. Aké napätia U_1, U_2 ukazujú voltmetre?

Výsledok: $U_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} U_o = 170\,\mathrm{V}$, $U_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} U_o = 50\,\mathrm{V}$.

13. Zdroj s elektrickým napätím $U_o = 120$ V bol zapojený do série s voltmetrom a rezistorom, ktorého elektrický odpor $R_1 = 10^4$ Ω. Voltmeter ukazoval $U_1 = 50$ V. Po výmene rezistora za iný s neznámym elektrickým odporom, voltmeter ukazoval napätie $U_2 = 10$ V. Aký veľký je neznámy elektrický odpor R_x ?

Výsledok: $R_x = \dfrac{U_o - U_2}{U_2} \dfrac{U_1}{U_o - U_1} R_1 = \dfrac{55}{7} \cdot 10^4 \Omega$.

14. Ak na galvanický článok pripojíme rezistor s elektrickým odporom $R_1 = 5$ Ω, tečie ním prúd $I_1 = 0{,}2$ A . Ak pripojíme rezistor s odporom $R_2 = 8$ Ω, tečie ním prúd $I_2 = 0{,}15$ A . Aký prúd I_3 by tiekol vodičom, ktorým by sme spojili svorky galvanického článku nakrátko?

Výsledok: $I_3 = I_1 I_2 \dfrac{R_2 - R_1}{R_2 I_2 - R_1 I_1} = 0{,}75\,\mathrm{A}$

15. Plochá batéria sa skladá z troch do série zapojených galvanických článkov, každý s elektromotorickým napätím $U_1 = 1{,}5$ V a vnútorným elektrickým odporom $R_i = 0{,}3$ Ω . Pri akom veľkom elektrickom prúde I_1 batéria dodáva do pripojeného spotrebiča výkon $P_1 = 0{,}5$ W ? Aký veľký je elektrický odpor R_s spotrebiča?

Výsledok: $I_1 = \dfrac{3U_1 - \sqrt{(3U_1)^2 - 4 \cdot 3R_i \cdot P_1}}{2 \cdot 3 \cdot R_i} \cong 0{,}114\,\mathrm{A}, \quad R_s \cong 38{,}7\,\Omega$.

16. Rezistor má tvar valčeka s polomerom r a dĺžkou l . Je zhotovený z materiálu s rezistivitou ρ. Straty za sekundu na Joulovo teplo v rezistore majú veľkosť P. Vypočítajte hustotu elektrického prúdu J tečúceho rezistorom a elektrické napätie U medzi koncami valčeka.

Výsledok: $J = \sqrt{\dfrac{P}{\rho \ell \pi r^2}}, \quad U = \sqrt{\dfrac{P \rho \ell}{\pi r^2}}$.

17. Vodičom s elektrickým odporom R = 20 Ω tečie prúd, ktorého veľkosť s časom rovnomerne rástla. V čase $t_1 = 2$ s mal prúd veľkosť $I_1 = 2$ A, v čase $t_2 = 6$ s už $I_2 = 4$ A . Koľko energie W_1 sa premenilo na Joulovo teplo v tomto časovom intervale?

Výsledok: $W \doteq 747$ J .

18. Vodičom s elektrickým odporom $R = 20$ Ω tiekol konštantný prúd, pričom náboj veľkosti ΔQ prešiel vodičom za časový interval Δt . Vypočítajte, koľko Joulovho tepla W sa vo vodiči pritom uvolnilo. Zistite, aký je pomer W_1 / W_2 zodpovedajúci rovnakému množstvu elektrického náboja, ale rozdielnym časovým intervalom Δt_1 a Δt_2 ! V ktorom časovom intervale sa uvolní viac tepla – v kratšom, či v dlhšom?

Výsledok: $W = R \dfrac{(\Delta Q)^2}{\Delta t}$.

Obsah

Súbor zošitkov základného kurzu fyziky

Vektory
Kinematika
Dynamika hmotného bodu
Dynamika sústavy hmotných bodov a telesa
Kmitanie a vlnenie
Teplo a termodynamika
Elektrostatické pole
Elektrický prúd
Magnetické pole
Elektromagnetické pole
Fyzikálna optika
Kvantové javy