

# RIEŠENIA ÚLOH

## Elektrostatika nábojov vo vákuu

1. Výsledná sila pôsobiaca na náboj  $q_0$  na obr. R1 môže byť nulová iba vtedy, ak sily od nábojov  $q_1$  a  $q_2$  sú opačného znamienka. To môže nastať vtedy ak:

- $q_1$  a  $q_2$  sú opačného znamienka, pritom  $x > d$  alebo  $x < 0$ ,
- $q_1$  a  $q_2$  sú rovnakého znamienka, pričom  $0 < x < d$ .



Obr. R1

Podmienka rovnováhy síl je

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{|q_1|q_0}{x^2} - \frac{|q_2|q_0}{(x-d)^2} \right) = 0$$

z čoho pre  $x$  plynie kvadratická rovnica

$$(1-p)x^2 - 2dx + d^2 = 0$$

kde  $p = |q_2|/|q_1|$ . Korene tejto rovnice sú

$$x_{1,2} = d \frac{1 \pm \sqrt{p}}{1-p} = \frac{d}{1 \mp \sqrt{p}}$$

a udávajú polohy náboja  $q_0$ , v ktorých je tento náboj v rovnováhe. Pritom môžu nastať tieto prípady:

α) ak  $0 < p < 1$  ( $|q_2| < |q_1|$ ), potom

$$x_1 > d \quad \text{a} \quad 0 < x_2 < d$$

Prvý koreň zodpovedá nábojom opačného znamienka a druhý nábojom rovnakého znamienka.

β) ak  $p > 1$  ( $|q_2| > |q_1|$ ), potom

$$x_1 < 0 \quad \text{a} \quad 0 < x_2 < d$$

Prvý koreň zodpovedá nábojom opačného znamienka a druhý nábojom rovnakého znamienka.

γ) ak  $p = 1$  ( $|q_2| = |q_1|$ ), potom pre náboje rovnakého znamienka je rovnovážna poloha medzi nábojmi vo vzdialenosti  $x = d/2$ . Pre náboje opačného znamienka rovnovážna poloha neexistuje, resp. je v  $\pm\infty$ .

2.  $f = 9,2 \cdot 10^{-8}$  N.

3. Dostredivá sila sa rovná Coulombovej sile a platí

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

z čoho plynie pre rýchlosť hodnota  $v = 2,25 \cdot 10^6$  m/s.

4. Využitím Gaussovho zákona dostaneme pre intenzitu elektrického poľa vo vnútri rovnomerne nabitaj gule výraz

$$E(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad \text{pre } r < R$$

Elektrón má rovnovážnu polohu v strede gule. Ak sa vychýli z jej stredu do vzdialenosti  $r$ , bude naň pôsobiť centrálna sila

$$F(r) = eE(r) = \frac{eQr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Pohybová rovnica pre elektrón bude tvaru

$$m_e \frac{d^2 r}{dt^2} = -F(r) = -\frac{eQr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Je to diferenciálna rovnica pre netlmený harmonický pohyb s frekvenciou

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}}$$

Pre vodík ( $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg,  $Q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C)  $f = 7 \cdot 10^{15}$  Hz. Táto frekvencia spadá do ďalej UV-oblasti za hranou Lymanovej série – pojem z atómovej fyziky.

5.  $E = 6,4 \cdot 10^{20} Z/A^{3/2}$  [V/m].

6. a)  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ,  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ . Pretože  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , daná funkcia môže predstavovať reálne elektrostatické pole.

b) Integrál  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  po dráhe 1 na obr. R6 je

$$I_1 = K \int_{(0,0)}^{(0,1)} (y dx + x dy) + K \int_{(0,1)}^{(1,1)} (y dx + x dy) = K(0+1) = K$$

Integrál po dráhe 2

$$I_2 = K \int_{(0,0)}^{(1,0)} (y dx + x dy) + K \int_{(0,1)}^{(1,1)} (y dx + x dy) = K(0+1) = K$$

Dráhu 3 predstavuje priamka  $y = x$ , pričom vzdialenosť  $l$  od začiatku súradníc sa dá vyjadriť ako

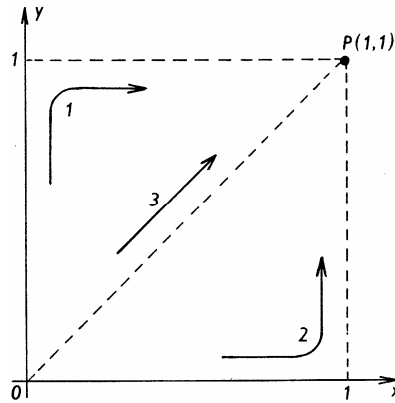
$$l = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Na dráhe 3 má intenzita elektrického poľa veľkosť

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kl$$

a smeruje pozdĺž priamky, takže integrál po dráhe 3

$$I_3 = \int_0^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = K \int_0^{\sqrt{2}} l dl = K$$



Obr. R6

Všetky tri integrály majú rovnakú hodnotu  $K$ , teda hodnota integrálu  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  nezávisí od zvolených dráh.

c) Potenciálová funkcia je tvaru

$$V = -Kxy + \text{konšt.}$$

7. a) Celkový náboj v guľovej vrstve  $q = Q$

b) Pre  $r < R_2$  je  $E = 0$ . Pre  $R_2 < r < R_1$  z Gaussovhovho zákona pre intenzitu plynie

$$E(r) = \frac{Q(r - R_2)}{4\pi\epsilon_0(R_1 - R_2)r^2}$$

Pre  $r > R_1$  je

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

c) Potenciál pre  $r > R_1$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Pre  $R_2 < r < R_1$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1 - R_2)} \left( \frac{r - R_2}{r} + \ln \frac{R_1}{r} \right)$$

a pre  $r < R_2$  je potenciál konštantný a z dôvodov spojitosti rovnaký ako pri  $r = R_2$ , teda

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R_1 - R_2)} \ln \frac{R_1}{R_2} = \text{konšt.}$$

8. Ak napíšeme daný potenciál v tvare

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ar} - 1}{r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

vidíme, že je superpozíciou potenciálu bodového náboja  $q$  a potenciálu

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-ar} - 1}{r}$$

na ktorý treba aplikovať Poissonovu rovnicu v sférických súradniciach (pozri tabuľku 23)

$$\Delta_r V'(r) = \frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V'}{\partial r} = \frac{qa^2 e^{-ar}}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\rho'(r)}{\epsilon_0}$$

z čoho hustota náboja zodpovedajúca potenciálu  $V'(r)$  je

$$\rho'(r) = -\frac{qa^2 e^{-ar}}{4\pi r}$$

Ak hustotu bodového náboja vyjadríme pomocou Diracovej  $\delta$ -funkcie

$$\rho_0 = \delta(r)q$$

potom výsledná hustota náboja je superpozíciou  $\rho_0$  a  $\rho'(r)$ , teda

$$\rho(r) = \rho_0 + \rho'(r)$$

Yukawov potenciál je teda buденý bodovým nábojom  $q$  a záporným nábojom, ktorý je rozložený so sférickou symetriou okolo náboja  $q$  s hustotou  $\rho'(r)$ . Celkový náboj rozloženia  $\rho'(r)$  je

$$\int_0^\infty \rho'(r) 4\pi r^2 dr = -qa^2 \int_0^\infty e^{-ar} r dr = -q$$

Rovnica pre Yukawov potenciál sa dá napísať v tvare

$$\Delta V - a^2 V = -\frac{q\delta(r)}{\epsilon_0}$$

v ktorom je známa z literatúry.

9. a) Celkový náboj

$$Q = \int \rho d\tau = -\frac{4e}{a_0^3} \int_0^\infty r'^2 \exp\left(\frac{-2r'}{a_0}\right) dr' = -e$$

b) Intenzita elektrického poľa buденá elektrónovým mrakom

$$\begin{aligned} E_e(r) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{e}{\pi a_0^3} \int_0^r \exp\left(\frac{-2r'}{a_0}\right) 4\pi r'^2 dr' = \\ &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^3 r^2} \left[ 1 - \left(1 + \frac{2r}{a_0}\right) \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right) \right] + \frac{e}{2\pi\epsilon_0 a_0^2} \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right) \end{aligned}$$

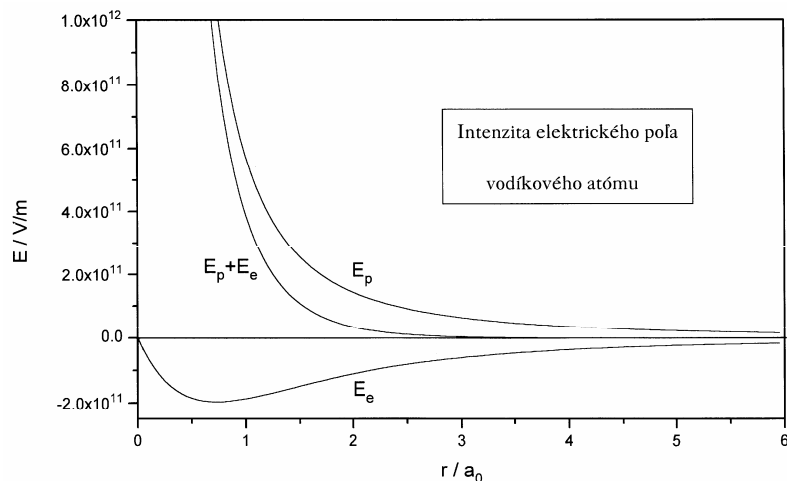
Protón nachádzajúci sa v strede symetrie budí v svojom okolí elektrické pole s intenzitou

$$E_p(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

takže výsledná intenzita elektrického poľa vodíkového atómu je

$$E(r) = E_e(r) + E_p(r)$$

Závislosť intenzity poľa od argumentu  $r/a_0$  je graficky znázomená na obr. R9a (Bohrov polomer  $a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11}$  m, náboj protónu a elektrónu  $e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19}$  C). Z grafu vidíme, že intenzita elektrického poľa vo vnútri atómu je obrovská a nedá sa porovnať so žiadnym makroskopickým poľom v bežnom živote.



Obr. R9a

c) Podľa výrazu (2.88) potenciál sféricky symetrického rozloženia náboja je daný výrazom

$$V_e(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^\infty \rho(r') r' dr' = -\frac{e}{\pi\epsilon_0 a_0^3} \left( \frac{1}{r} I_1 + I_2 \right)$$

kde

$$I_1 = \int_0^r \exp\left(\frac{-2r'}{a_0}\right) r'^2 dr' = \frac{a_0^3}{4} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2r}{a_0} + \frac{2r^2}{a_0^2} \right) \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right) \right]$$

$$I_2 = \int_r^\infty \exp\left(\frac{-2r'}{a_0}\right) r' dr' = \frac{a_0^2}{4} \left( 1 + \frac{2r}{a_0} \right) \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)$$

takže

$$V_e(r) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 1 - \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right) \right] + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0} \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)$$

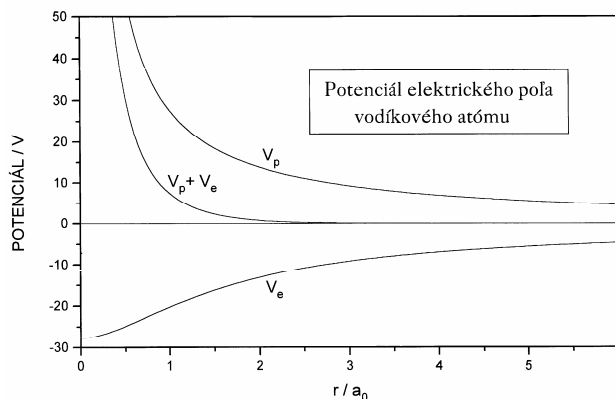
Potenciál od celého vodíkového atómu je

$$V(r) = V_e(r) + V_p(r)$$

kde

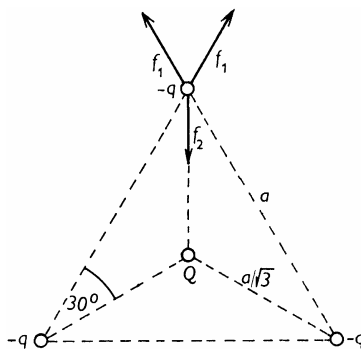
$$V_p(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

je potenciál jadra (protónu). Závislosť potenciálu od argumentu  $r/a_0$  je pre uvedené numerické hodnoty  $e$  a  $a_0$  graficky znázornená na obr. R9b.



Obr. R9b

10. a) Dĺžka dipólu  $d = p/e = 3,85 \cdot 10^{-11}$  m. b) Intenzita poľa na osi dipólu je  $4,1 \cdot 10^6$  V/m, kolmo na os dipólu je  $-2,05 \cdot 10^{-6}$  V/m. c) Maximálna sila, ktorou dipól pôsobí na vodíkový ión je  $6,55 \cdot 10^{-13}$  N. d) Elektrická sila medzi dvoma molekulami vody je  $3,27 \cdot 10^{-11}$  N.



Obr. R11

11. a) Z obr. R11 vidieť, že výsledná sila pôsobiaca na jeden z nábojov  $-q$  je

$$f = 2f_1 \cos 30^\circ - f_2 = \frac{\sqrt{3}q}{4\pi\epsilon_0 a^2} (q - \sqrt{3}Q)$$

Ak  $q > \sqrt{3}Q$ , sila pôsobí von z trojuholníka, ak  $q < \sqrt{3}Q$ , potom sila pôsobí dovnútra.

b) Energia sústavy

$$W = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a} (q - \sqrt{3}Q)$$

c) Sila pôsobiaca na náboj  $-q$  bude nulová, ak  $q = \sqrt{3}Q$ . Energia sústavy je vtedy nulová. Systém je nestabilný, pretože akákoľvek zmena polohy jedného z nábojov vedie k vzniku nenulovej sily pôsobiacej na náboj  $Q$ , čím sa celý systém zrúti. Elektrostatický systém voľných nábojov je vždy nestabilný (Earnshawova veta).

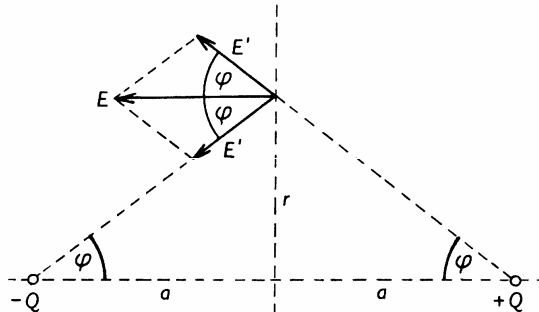
12. Intenzita bude maximálna vo vzdialenosti  $x = 7,1 \cdot 10^{-2}$  m od stredu kružnice na jej osi a jej hodnota je  $E_{max} = 1,73 \cdot 10^3$  V/m.

13. Podľa obr. R13 je v rovine symetrie nábojov intenzita elektrického poľa daná výrazom

$$E = 2E' \cos \varphi = \frac{Qa}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}}$$

a je kolmá na rovinu symetrie nábojov. Tok vektora intenzity elektrického poľa je

$$\Psi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^R \frac{Qa}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}} 2\pi r dr = \frac{Q}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right)$$



Obr. R13

14. Dosku možno rozložiť na prúžky podľa obr. R14, pričom potenciál od jedného prúžku v strede dosky je

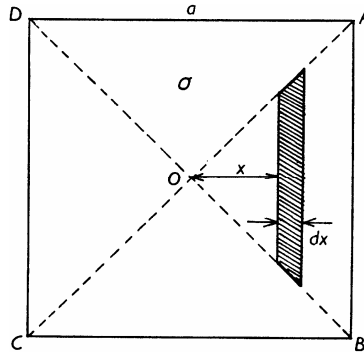
$$dV' = \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{x + \sqrt{2}x}{x} = \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$$

Potenciál od trojuholníkovej časti OAB

$$V' = \frac{\sigma \ln(1 + \sqrt{2})}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{a/2} dx = \frac{\sigma a}{4\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$$

a od celej dosky

$$V = 4V' = \frac{\sigma a}{\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2})$$



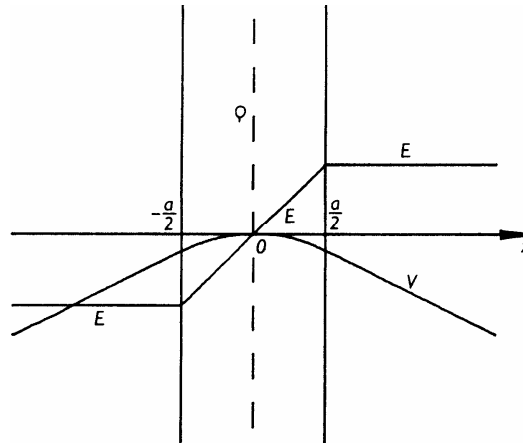
Obr. R14

15. Z vyjadrenia intenzity elektrického poľa v sférických súradniciach (pozri tabuľku 22)

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

dostaneme pre zložky poľa výrazy

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2a \cos \vartheta}{r^3} + \frac{b}{r^2} \quad E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{a \sin \vartheta}{r^2}$$



Obr. R16

16. Nech os  $x$  smeruje kolmo na vrstvu, pričom  $x = 0$  v strede vrstvy. Použitím Gaussovho zákona:

– pre  $|x| < a/2$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} x \mathbf{i} \quad V = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} x^2$$

– pre  $|x| > a/2$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} \frac{x}{|x|} \mathbf{i} \quad V = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} |x| + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$$

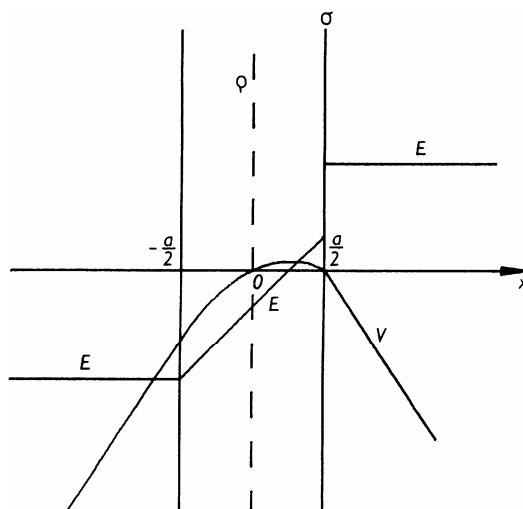


$i$  je jednotkový vektor v smere osi  $x$ . V rovine  $x = 0$  je  $V = 0$ . Grafické závislosti  $E$  a  $V$  od  $x$  sú na obr. R16.

17. Nech os  $x$  smeruje kolmo na vrstvu, pričom  $x = 0$  v strede vrstvy a nekonečná rovina nabitá plošným nábojom  $\sigma$  je vo vzdialenosti  $a/2$  na vrstve vpravo. Potom:

– pre  $|x| < a/2$

$$E = \frac{2\rho x - \sigma}{2\epsilon_0} i \quad V = -\frac{\rho x^2 - \sigma x}{2\epsilon_0}$$



Obr. R17

– pre  $|x| > a/2$

$$E = \frac{\rho a + \sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{|x|} i \quad V = -\frac{\rho a + \sigma}{2\epsilon_0} |x| + \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} + \frac{\sigma a}{4\epsilon_0} \left(1 + \frac{x}{|x|}\right)$$

$i$  je jednotkový vektor v smere osi  $x$ . Pre  $x = 0$  je  $V = 0$ . Priebehy  $E$  a  $V$  v závislosti od  $x$  sú pre  $\sigma = \rho a/2$  zobrazené na obr. R17.

18. Intenzita elektrického poľa na osi disku vo vzdialenosti  $z$  od jeho stredu

$$E = \frac{Az}{2\epsilon_0} \left( \ln \frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

a potenciál

$$V = \frac{A}{4\epsilon_0} \left( R\sqrt{R^2 + z^2} - z^2 \ln \frac{R + \sqrt{R^2 + z^2}}{z} \right)$$

19. Na disku možno zvoliť nekonečne tenké kruhové prúžky podľa obr. R19 s plochou  $dS = 2r\vartheta dr$ , pričom  $r = 2R \cos \vartheta$  a  $dr = -2R \sin \vartheta d\vartheta$ , takže  $dS = -8R \vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta$ . Potenciál, ktorý budí náboj na prúžku v bode 0 je

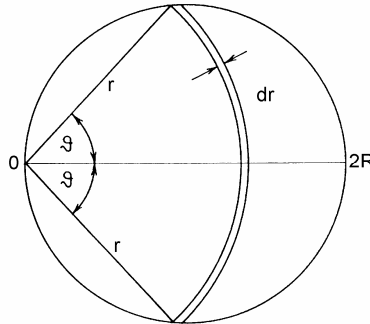
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r} = -\frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

a od celého disku 
$$V = -\frac{\sigma R}{\pi \epsilon_0} \int_{\pi/2}^0 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\sigma R}{\pi \epsilon_0}$$

V strede disku je potenciál [pozri výraz (2.84), pri  $z = 0$ ]

$$V_{stred} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} > V \quad \text{takže pomer} \quad \frac{V_{stred}}{V} = \frac{\pi}{2} > 1$$

Potenciál na disku teda smerom od stredu disku k jeho okraju klesá.



Obr. R19

20. Potenciál a intenzita elektrického poľa pre  $0 < r < R$  je daná výrazmi

$$V = \frac{A(4R^3 - r^3)}{12\epsilon_0} \quad E = \frac{Ar^2}{4\epsilon_0}$$

a pre  $r > R$

$$V = \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r} \quad E = \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r^2}$$

Intenzita má radiálny smer zo stredu symetrie.

21. Použitím Poissonovej rovnice dostaneme pre hľadané nábojové rozloženie výraz

$$\rho = \frac{\alpha A}{4\pi} e^{-ar} \left( \frac{2}{r} - \alpha \right)$$

22.  $\rho = -6\epsilon_0 a$ ; náboj na guli je rovnomerne rozložený.

23. Intenzita elektrického poľa

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -(\alpha y \mathbf{i} + \alpha x \mathbf{j} - 2\alpha z \mathbf{k})$$

kde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sú jednotkové vektory v smeroch súradnicových osí. Priemet  $\mathbf{E}$  do smeru vektora  $\mathbf{a}$  je daný výrazom

$$E_a = \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\alpha(6z - y)}{\sqrt{10}}$$

V bode  $M$  je  $E_a = -(19/\sqrt{10})\alpha$ .

24. Pre  $r < r_1$

$$E = 0 \qquad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r_1} \right)$$

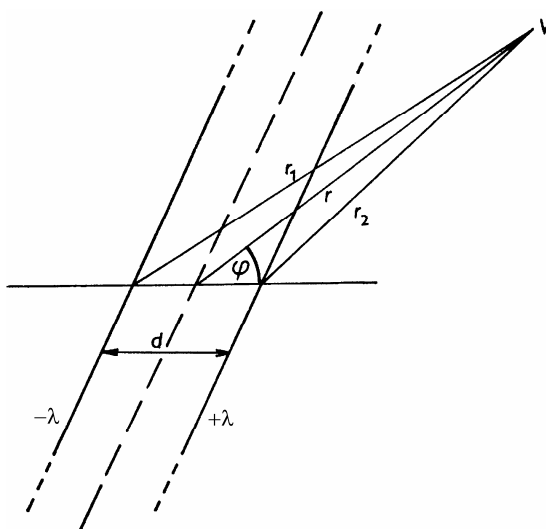
pre  $r_1 < r < r_2$

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} e_r \qquad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_2}{r_2} - \frac{q_1}{r} \right)$$

a pre  $r > r_2$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 - q_1}{r^2} e_r \qquad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 - q_1}{r}$$

$e_r$  je jednotkový vektor v radiálnom smere zo stredu symetrie. Ak sa gule navzájom posunú, potenciál vo vzdialenom bode bude superpozíciou potenciálu bodového náboja veľkosti  $q_2 - q_1$  a potenciálu dipólu s momentom  $p = q_2 \delta x$ .



Obr. R25

25. Z obr. R25 plynie pre potenciál vo veľkej vzdialenosti  $r$  (v rovine kolmej na dvojicu priamok)

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_1 - \ln r_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

pričom pre  $r \gg d$

$$\ln \frac{r_1}{r_2} = \ln \frac{r_1^2}{r_1 r_2} \approx \ln \frac{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + rd \cos \varphi}{r^2} \approx \ln \left( 1 + \frac{d}{r} \cos \varphi \right) \approx \frac{d}{r} \cos \varphi$$

Potenciál priamkového dipólu je teda

$$V = \frac{\lambda d \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

kde  $\mathbf{p}' = \lambda \mathbf{d}$  je moment priamkového dipólu. Intenzita elektrického poľa

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}')}{r^4} - \frac{\mathbf{p}'}{r^2} \right]$$

26. Pre  $r > a$  je hľadaný potenciál riešením Poissonovej rovnice, ktorá má v cylindrických súradniciach pri osovej symetrii tvar (pozri tabuľku na str. 19)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = -\frac{k}{\epsilon_0 r}$$

Po úprave rovnice a prvej integrácii dostaneme

$$\frac{dV}{dr} = -E = -\frac{k}{\epsilon_0} + \frac{C_1}{r}$$

kde  $C_1$  je prvá integračná konštanta. V oblasti  $r \leq a$  je intenzita elektrického poľa nulová, a teda pre  $r = a$

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{k}{\epsilon_0} + \frac{C_1}{r} = 0$$

odkiaľ pre integračnú konštantu plynie hodnota

$$C_1 = a \frac{k}{\epsilon_0}$$

Potenciál dostaneme ďalšou integráciou výrazu  $dV/dr$  v tvare

$$V = -\frac{k}{\epsilon_0} r + C_1 \ln r + C_2 = \frac{k}{\epsilon_0} (a \ln r - r) + C$$

kde  $C_2 = C$  je druhá integračná konštanta. V oblasti  $r < a$  je potenciál konštantný a rovný jeho hodnote pri  $r = a$ , teda

$$V = \frac{k}{\epsilon_0} (a \ln a - a) + C$$

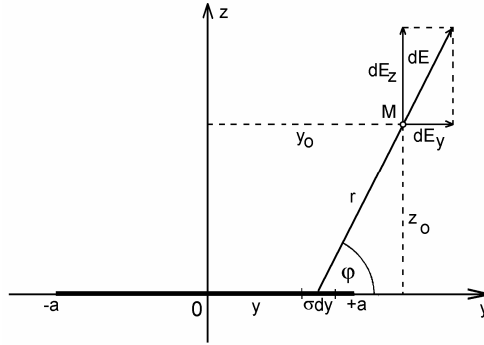
27. Umiestnime pásik symetricky okolo osi  $x$  pravouhlého súradnicového systému podľa obr. R27. Nekonečne úzky prúžok  $dy$  s dĺžkovým nábojom  $d\tau = \sigma(y)dy$  vytvorí v bode  $M(y_0, z_0)$  elementárnu intenzitu

$$dE = \frac{d\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma(y)dy}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{(y_0 - y)^2 + z_0^2}}$$

Priemety intenzity do smerov osí  $y$  a  $z$  sú

$$E_y = \int dE \cos \varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\sigma(y)(y_0 - y)dy}{(y_0 - y)^2 + z_0^2}$$

$$E_z = \int dE \sin \varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\sigma(y)z_0 dy}{(y_0 - y)^2 + z_0^2}$$



Obr. R27

a) Ak  $\sigma = \sigma_0 = \text{konšt.}$ , integráciou posledných výrazov dostaneme

$$E_y = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(y_0 - a)^2 + z_0^2}{(y_0 + a)^2 + z_0^2} \quad E_z = \frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \left( \arctg \frac{a + y_0}{z_0} + \arctg \frac{a - y_0}{z_0} \right)$$

b) V tomto prípade integrácia vedie na tvary

$$E_y = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} |z_0|\right) \cos \frac{2\pi}{\lambda} y_0 \quad E_z = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} |z_0|\right) \frac{z_0}{|z_0|} \sin \frac{2\pi}{\lambda} y_0$$

*Poznámka:* V prípade b) treba využiť integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b + cy}{p + 2qy + y^2} \sin(ay) dy = \pi \exp\left(-a\sqrt{p - q^2}\right) \left[ \frac{cq - b}{\sqrt{p - q^2}} \sin(aq) + c \cos(aq) \right]$$

28.  $E_e = (q_1 + q_2)/(2\epsilon_0)$ ,  $E_i = (q_1 - q_2)/(2\epsilon_0)$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = (q_1 + q_2)/2$ ,  $\sigma_1' = -\sigma_2' = (q_1 - q_2)/2$ .

29. Hľadaný potenciál je riešením Laplaceovej rovnice

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

a v rovine  $y = 0$  predstavuje periodickú obdĺžnikovú funkciu, ktorú možno rozvinúť do Fourierovho radu

$$V(x, 0) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

kde  $n = 1, 3, 5, \dots$  sú všetky nepárne kladné čísla. Riešenie Laplaceovej rovnice možno hľadať v tvare

$$V(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

Dosadením tohto výrazu do Laplaceovej rovnice a po jej úprave dostaneme rovnicu

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Prvý člen tejto rovnice závisí iba od  $x$  a druhý iba od  $y$ . Aby rovnica bola splnená pre všetky  $x$  a  $y$  treba aby sa jednotlivé členy rovnali konštantám. Položme teda

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k_x^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_y^2$$

kde

$$k_x^2 = k_y^2 = k^2$$

je predbežne ľubovoľná konštantá. Riešenia týchto rovníc sú

$$X = A \sin kx + B \cos kx \quad Y = C e^{ky} + D e^{-ky}$$

takže

$$V(x,y) = XY = (A \sin kx + B \cos kx)(C e^{ky} + D e^{-ky})$$

kde  $A, B, C, D$  sú integračné konštanty. Riešením Laplaceovej rovnice bude aj superpozícia takýchto riešení teda

$$V(x,y) = XY = \sum_n (A_n \sin k_n x + B_n \cos k_n x)(C_n e^{k_n y} + D_n e^{-k_n y})$$

pre  $n$  nepárne. Hodnoty konštant  $A_n, B_n, C_n, D_n$  treba určiť z okrajových podmienok. Pre  $|y| \rightarrow \infty$  potenciál musí klesať k nule, y čoho plynie, že musí platiť

$$C_n = 0 \text{ pre } y > 0 \quad \text{a} \quad D_n = 0 \text{ pre } y < 0$$

Tiež  $B_n = 0$ , pretože riešenie v rovine  $y = 0$  neobsahuje členy s kosínusmi. Pre konštanty  $A_n$  a  $k_n$  z výrazu pre potenciál v rovine  $y = 0$  plynie

$$A_n = \frac{4V_0}{n\pi} \quad k_n = \frac{n\pi}{a}$$

Hľadaný potenciál je teda tvaru

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n\pi}{a} y\right) \sin \frac{n\pi}{a} x \quad \text{pre } y \geq 0$$

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \exp\left(+\frac{n\pi}{a} y\right) \sin \frac{n\pi}{a} x \quad \text{pre } y \leq 0$$

Jednotlivé členy potenciálu (harmonické zložky) klesajú exponenciálne s nárastom  $|y|$ .  $n$ -tá harmonická zložka klesne na  $1/e$ -tínu vo vzdialenosti  $y_n = a/(n\pi)$ . Amplitúdy harmonických zložiek klesajú veľmi rýchle, takže už pre  $|y| \geq a/\pi$  možno potenciál vyjadriť približnými výrazmi

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi}{a} y\right) \sin \frac{\pi}{a} x \quad \text{pre } y \geq a/\pi$$

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \exp\left(+\frac{\pi}{a} y\right) \sin \frac{\pi}{a} x \quad \text{pre } y \leq -a/\pi$$

**30.** V bode  $A$  je hodnota intenzity elektrického poľa  $E_y = 3,1 \cdot 10^7$  V/m a v bode  $B$  je  $E_y = 6,2 \cdot 10^7$  V/m.

**31.** Energia dipólu  $p_1$  v elektrickom poli  $E_2$  dipólu  $p_2$  je  $W = -p_1 \cdot E_2$ , pričom

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_2}{r^3} \right]$$

takže

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right]$$

Výraz pre energiu je symetrický vzhľadom na  $\mathbf{p}_1$  a  $\mathbf{p}_2$  – ide o vzájomnú (interakčnú) energiu.

32. Vo vzdialenosti  $r$  od priamky je intenzita elektrického poľa

$$\mathbf{E}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$$

kde  $\mathbf{e}_r$  je jednotkový vektor v smere vzdialenosti  $r$ .

a) Vektory  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{e}_r$  resp.  $\mathbf{E}_r$  sú kolineárne. Veľkosť sily pôsobiacej na dipól je daná výrazom

$$F_r = \mathbf{p} \cdot \text{grad } E_r = \mathbf{p} \cdot \frac{dE_r}{dr} \mathbf{e}_r = \pm \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

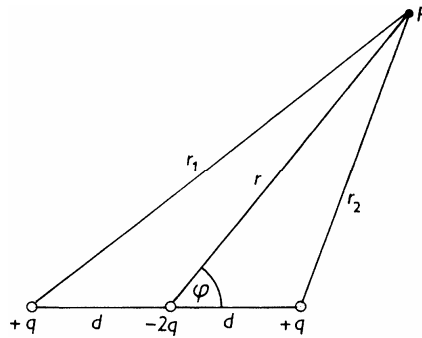
a smeruje k priamke alebo od nej podľa orientácie dipólu. Moment sily

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_r = 0$$

b) Vektory  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{E}_r$  sú navzájom kolmé. Sila  $F_r = 0$  a moment sily

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_r = \pm \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_\varphi$$

kde  $\mathbf{e}_\varphi$  je jednotkový vektor v azimutálnom smere.



Obr. R33

33. Potenciál v bode  $P$  na obr. R33 je daný superpozíciou potenciálov od jednotlivých nábojov, teda

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{2}{r} \right)$$

pričom

$$r_1 = \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos \varphi} = r \sqrt{1 + p^2 + 2p \cos \varphi}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi} = r \sqrt{1 + p^2 - 2p \cos \varphi}$$

kde  $p = d/r$ . Výraz pre potenciál možno teda napísať v tvare

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{\sqrt{1+p^2+2p\cos\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2-2p\cos\varphi}} - 2 \right)$$

Keďže  $p \ll 1$ , možno prvé dva členy v zátvorke rozvinúť do mocninného MacLaurinového radu podľa mocnín  $p$  s využitím rozvoja

$$\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 - \dots \quad \text{kde v našom prípade} \quad \delta = p^2 \pm 2p\cos\varphi$$

takže dostaneme

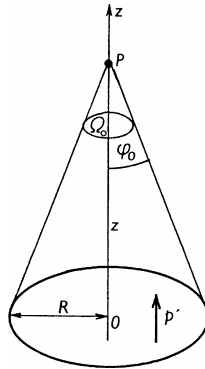
$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2 \pm 2p\cos\varphi}} = 1 \mp p\cos\varphi + \frac{p^2}{2}(3\cos^2\varphi - 1) \pm \text{členy vyšších rádov}$$

Ak sa obmedzíme na členy s mocninami najviac  $p^2$ , potom pre potenciál dostaneme výraz

$$V = \frac{qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\varphi - 1)$$

**34.** Podľa obr. R34 je potenciál na osi kruhovej dvojvrstvy vo vzdialenosti  $z$  daný výrazom

$$V = \frac{p'}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega_0} d\Omega$$



Obr. R34

kde  $d\Omega = 2\pi \sin\varphi d\varphi$  je element priestorového uhlu  $\Omega_0$ , takže

$$V = \frac{p'}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\varphi_0} 2\pi \sin\varphi d\varphi = \frac{p'}{2\epsilon_0} (1 - \cos\varphi_0)$$

Keďže  $\cos\varphi_0 = z/\sqrt{R^2+z^2}$  možno výraz pre potenciál napísať v tvare

$$V = \frac{p'}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) \frac{z}{|z|}$$



Intenzita elektrického poľa v bode  $P$  je

$$E = E_z = -\frac{dV}{dz} = \frac{p'R^2}{2\varepsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}} \frac{z}{|z|}$$

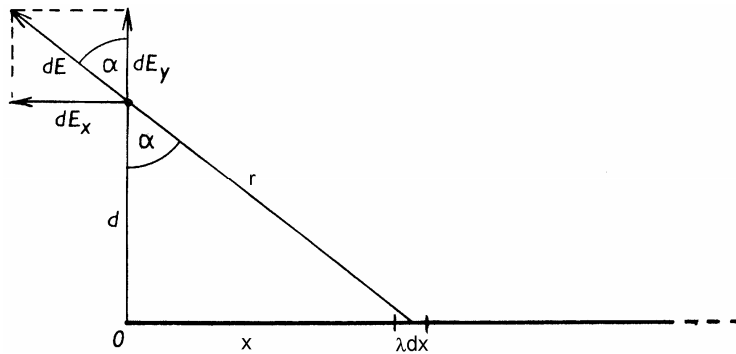
35. Intenzita elektrického poľa od nábojového elementu  $\lambda dx$  (obr. R35) vo vzdialenosti  $r$  je daná výrazom

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

a zložky v smeroch osí  $x$  a  $y$

$$dE_x = -\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sin \alpha$$

$$dE_y = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos \alpha$$



Obr. R35

Ak vezmeme do úvahy, že  $x = d \operatorname{tg} \alpha$ ,  $dx = (d/\cos^2 \alpha) d\alpha$  a  $r = d/\cos \alpha$ , možno posledné výrazy uviesť na tvar

$$dE_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} \sin \alpha d\alpha$$

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} \cos \alpha d\alpha$$

Integráciou týchto výrazov podľa  $\alpha$  od 0 po  $\pi/2$  dostaneme

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

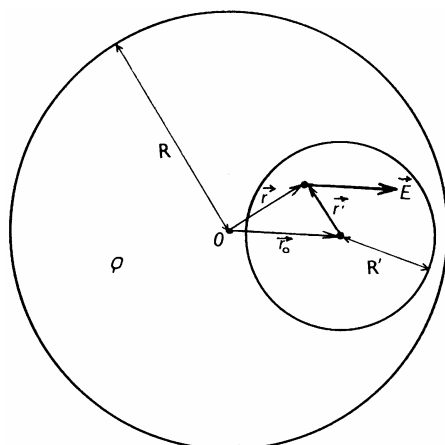
Veľkosť vektora intenzity elektrického poľa

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

a uhol, ktorý zvierá vektor  $\mathbf{E}$  s osou  $x$

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{E_y}{|E_x|} = 45^\circ$$

36. Pole v dutine možno považovať za superpozíciu poľa od náboja rovnomerne rozloženého v celom objeme gule s hustotou  $+\rho$  a poľa náboja rovnomerne rozloženého s hustotou  $-\rho$  v guľovom objeme s polomerom  $R'$ . V dutine bude teda platiť (obr. R36):



Obr. R36

$$\text{a) } \mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}' = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_0$$

Je dobre všimnúť si, že elektrické pole v dutine je homogénne a pre kladné  $\rho$  má smer vektora  $\mathbf{r}_0$ .

b) Pri danom  $R$  bude elektrické pole v dutine maximálne, ak bude  $\mathbf{r}_0$  maximálne, a teda ak  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R} - \mathbf{R}'$ , t. j. ak sa dutina svojím okrajom bude dotýkať vonkajšej guľovej plochy. Objem dutiny  $\tau = 4\pi R'^3/3$ . Súčin

$$\tau E = \frac{4\pi\rho}{9\epsilon_0} (RR'^3 - R'^4)$$

bude maximálny pre také  $R'$ , ktoré spĺňa podmienku

$$\frac{\partial \tau E}{\partial R'} = \frac{4\pi\rho}{9\epsilon_0} (3RR'^2 - 4R'^3) = 0 \quad \text{a teda ak} \quad R'/R = 3/4$$

37. Z výrazu pre nulový potenciál

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_2}{r_2} \right) = 0$$

plynie vzťah medzi vzdialenosťami  $r_1$  a  $r_2$  nábojov od ľubovoľného bodu na ploche nulového potenciálu (pozri obr. R37)

$$Q_1 r_2 = Q_2 r_1$$

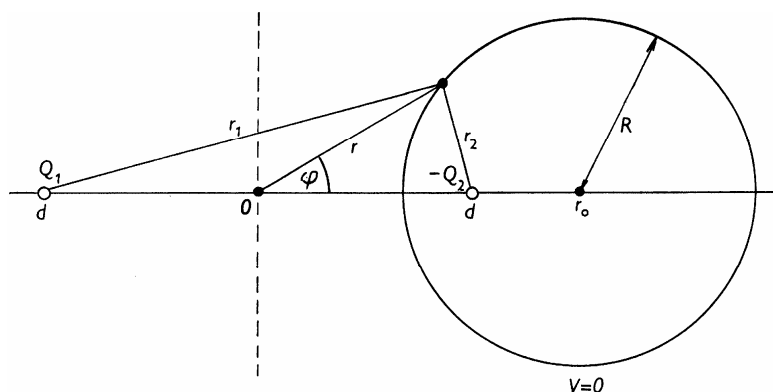
Podľa kosínusovej vety

$$r_1^2 = r^2 + d^2 + 2rd \cos \varphi$$

$$r_2^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi$$

takže rovnicu pre plochu nulového potenciálu možno napísať v tvare

$$r^2 + d^2 - 2rd \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1^2 - Q_2^2} \cos \varphi = 0$$



Obr. R37

V polárnych súradniciach je to rovnica kružnice s polomerom

$$R = d \frac{2Q_1Q_2}{Q_1^2 - Q_2^2}$$

a stredom ležiacim na polárnej osi vo vzdialenosti od bodu 0

$$r_0 = d \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1^2 - Q_2^2}$$

Plocha nulového potenciálu je teda guľová plocha s polomerom  $R$  a vzdialenosťou stredu  $r_0$  od začiatku zvolenej súradnej sústavy.

## Elektrostatické pole za prítomnosti vodičov

38. Intenzita elektrického poľa v guľovom kondenzátore podľa obr. R38 (pre  $a < r < b$ ) je

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{a na povrchu vnútornej gule} \quad E(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Rozdiel potenciálov guľí je

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad \text{z čoho} \quad q = 4\pi\epsilon_0 U \frac{ab}{b-a}$$

takže intenzitu elektrického poľa na povrchu vnútornej gule možno vyjadriť ako

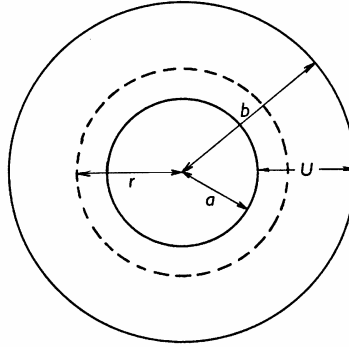
$$E(a) = \frac{bU}{a(b-a)}$$

Intenzita bude mať extrém (v tomto prípade minimum) pre takú hodnotu  $a$ , pre ktorú platí

$$\frac{\partial E(a)}{\partial a} = bU \frac{2a - b}{a^2(b - a)^2} = 0$$

odkiaľ pre polomer vnútornej gule s minimálnou intenzitou plynie hodnota  $a = b/2$ . Kondenzátor bude mať pritom kapacitu

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a} = 4\pi\epsilon_0 b$$



Obr. R38

39. Intenzita elektrického poľa v koaxiálnom kábli je

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

a na povrchu vnútorného vodiča s polomerom  $a$

$$E(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

kde  $\lambda$  je náboj na jednotku dĺžky vodiča. Napätie na kábli možno vyjadriť ako

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \quad \text{z čoho} \quad \lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{\ln \frac{b}{a}}$$

takže

$$E(a) = \frac{U}{a \ln \frac{b}{a}}$$

Intenzita bude minimálna pre taký polomer vnútorného vodiča  $a_0$ , pre ktorý platí

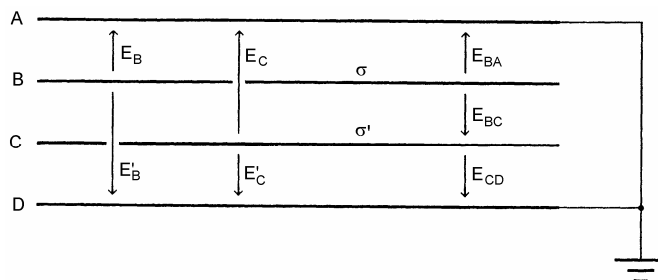
$$\left( \frac{\partial E(a)}{\partial a} \right)_{a=a_0} = U \frac{1 - \ln \frac{b}{a_0}}{a_0^2 \ln^2 \frac{b}{a_0}} = 0$$

z čoho pre polomer vnútorného vodiča plynie hodnota  $a_0 = b/e$ , kde  $e$  je základ prirodzených logaritmov.

40. Roviny  $B$  a  $C$  sú na potenciáloch

$$V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a \qquad V_C = \frac{\sigma}{\epsilon_0} b$$

oproti zemi.



Obr. R41

41. Úlohu možno riešiť napríklad s využitím zákona superpozície. Možno vybrať dosku  $C$  a počítať intenzitu elektrického poľa od náboja na doske  $B$ . Pre tento prípad platí (pozri obr. R41)

$$E_{BA} = E'_B 2a \qquad \text{a z Gaussovho zákona} \qquad E_B + E'_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

takže

$$E_B = \frac{2\sigma}{3\epsilon_0} \qquad E'_B = \frac{\sigma}{3\epsilon_0}$$

Podobne, ak sa odstráni doska  $B$ , potom intenzity elektrického poľa od nábojov na doske  $C$  sú

$$E_C = \frac{\sigma'}{3\epsilon_0} \qquad E'_C = \frac{2\sigma'}{3\epsilon_0}$$

Podľa obr. R41 sú výsledné intenzity

$$E_{BA} = E_B + E_C = \frac{1}{3\epsilon_0}(2\sigma + \sigma') \qquad E_{CD} = E'_B + E'_C = \frac{1}{3\epsilon_0}(\sigma + 2\sigma')$$

$$E_{BC} = E'_B - E_C = \frac{1}{3\epsilon_0}(\sigma - \sigma')$$

Potenciály rovín  $B$  a  $C$  oproti zemi sú

$$V_B = E_{BA}a = \frac{a}{3\epsilon_0}(2\sigma + \sigma') \qquad V_C = E_{CD}a = \frac{a}{3\epsilon_0}(\sigma + 2\sigma')$$

a napätie medzi rovinami  $B$  a  $C$

$$U_{BC} = V_B - V_C = \frac{a}{3\epsilon_0}(\sigma - \sigma')$$

42. Platí (pozri obr. R42)

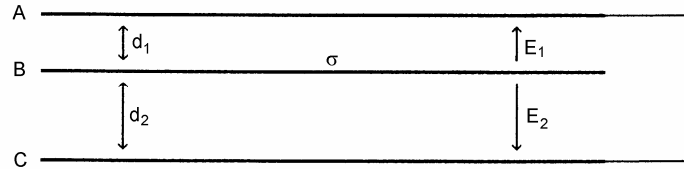
$$E_1 d_1 = E_2 d_2 \qquad E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

z čoho

$$E_1 = \frac{\sigma d_2}{\epsilon_0(d_1 + d_2)} = -\frac{\sigma_A}{\epsilon_0} \qquad E_2 = \frac{\sigma d_1}{\epsilon_0(d_1 + d_2)} = -\frac{\sigma_C}{\epsilon_0}$$

kde  $\sigma_A$  a  $\sigma_C$  sú plošné náboje na rovinách A a C, takže

$$\sigma_A = -\frac{\sigma d_2}{d_1 + d_2} \qquad \sigma_C = -\frac{\sigma d_1}{d_1 + d_2}$$



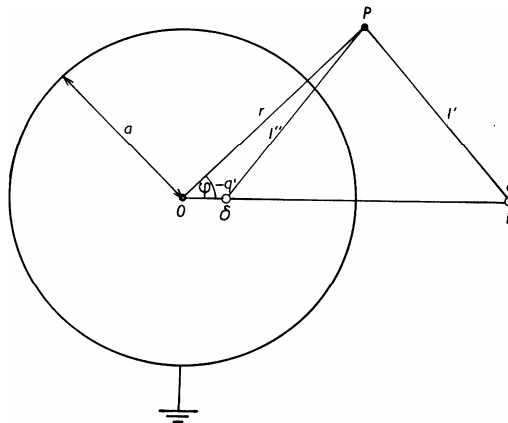
Obr. R42

43. Náboje na rovinách A a B sú

$$q_A = \left(\frac{x}{d} - 1\right)q \qquad q_B = -\frac{x}{d}q$$

44. Použitím podobného postupu ako v predchádzajúcej úlohe dostaneme

$$q_a = -q \frac{a}{r} \frac{b-r}{b-a}; \qquad q_b = -q \frac{b}{r} \frac{r-a}{b-a}$$



Obr. R45

45. Podľa úlohy 37 dva bodové náboje  $+Q_1$  a  $-Q_2$  budia vo svojom okolí elektrostatické pole s guľovou plochou nulového potenciálu. Polomer tejto plochy a poloha jej stredu je riešením spomínanej úlohy. Elektrostatické pole takejto dvojice z vonkajšej strany guľovej plochy sa nezmení, ak sa plocha nahradí guľovou vodivou uzemnenou plochou, pričom vnútorný náboj sa odstráni, pretože ho nahradí indukovaný náboj na ploche.

Potenciál guľovej uzemnenej plochy a bodového náboja podľa obr. R45 možno teda modelovať dvoma nábojmi – reálnym nábojom  $+q$  a "zrkadlovým" nábojom  $-q'$ , ktorého veľkosť

a uloženie možno určiť pomocou výsledkov úlohy 37 s uvážením označení na obr. R45. Pre polomer guľovej plochy platí

$$a = (l - \delta) \frac{qq'}{q^2 - q'^2}$$

a vzdialenosť  $\delta$  jej stredu od náboja  $-q'$

$$\delta = (l - \delta) \frac{q'^2}{q^2 - q'^2}$$

Riešením posledných dvoch rovníc pre  $q'$  a  $\delta$  dostaneme

$$q' = \frac{a}{l}q \quad \delta = \frac{a^2}{l}$$

a) Potenciál v oblasti  $r > a$  (mimo gule) bude superpozíciou potenciálu od nábojov  $q$  a  $-q'$ , teda vzhľadom na obr. R45

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{l'} - \frac{q'}{l''} \right)$$

kde

$$l' = \sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \cos \varphi} \quad l'' = \sqrt{r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos \varphi}$$

takže

$$V(r, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \cos \varphi}} - \frac{a}{l \sqrt{r^2 + \frac{a^4}{l^2} - 2r \frac{a^2}{l} \cos \varphi}} \right)$$

b) Ak je guľová plocha izolovaná nenabitá, potom k potenciálu vypočítanému v bode a) treba superponovať potenciál bodového náboja  $+q_0'$ , umiestneného v strede guľovej plochy.

c) Ak je guľová plocha izolovaná a nabitá nábojom  $q_0$ , treba k potenciálu z bodu b) superponovať potenciál bodového náboja  $q_0$  umiestneného v strede gule.

Vo vnútri guľovej plochy je potenciál v prípadoch a) nulový, b)

$$V = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} = \text{konšt.} \quad \text{a v prípade c)} \quad V = \frac{q' + q}{4\pi\epsilon_0 a} = \text{konšt.}$$

**46.** Podobne ako v úlohe 45 možno nájsť "zrkadlový" náboj  $q'$  (z vonkajšej strany guľovej plochy), ktorého veľkosť je  $q' = -(a/\delta)q$  a je umiestnený vo vzdialenosti  $d = a^2/\delta$  od stredu guľovej plochy. Náboj  $q$  bude priťahovaný ku guľovej ploche silou

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(d - \delta)^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a\delta}{(a^2 - \delta^2)^2}$$

ktorá nezávisí od elektrického stavu gule, t. j. či je guľa uzemnená, izolovaná, nabitá alebo nenabitá.

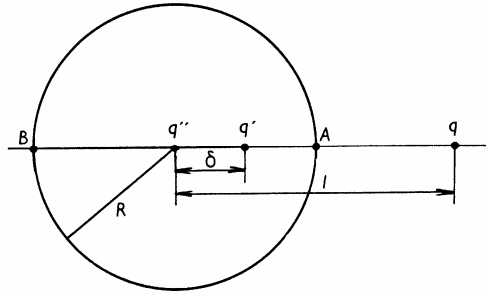
**47.** Nenabitú kovovú guľu možno podľa úlohy 45 modelovať dvoma nábojmi  $q' = -(R/l)q$  a  $q'' = -q'$ , pričom  $q''$  je umiestnený v strede gule a  $q'$  vo vzdialenosti  $\delta = R^2/l$  od stredu gule smerom k náboju  $q$  (pozri obr. R47). Intenzita týchto troch nábojov v bode A (najbližší k náboju  $q$ ) je

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(R-l)^2} - \frac{q'}{(R-\delta)^2} - \frac{q''}{R^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3l-R}{l(l-R)^2}$$

a v bode  $B$  (najvzdialenejší od náboja  $q$ )

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(R+l)^2} + \frac{q'}{(R+\delta)^2} + \frac{q''}{R^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3l+R}{l(l+R)^2}$$

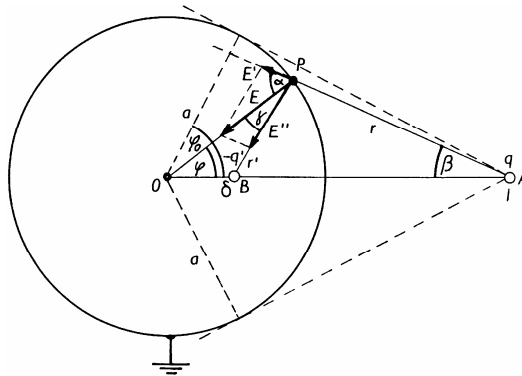
Po dosadení číselných hodnôt dostaneme  $E_A = 2\,246,9$  V/m,  $E_B = 349,5$  V/m. Intenzity v oboch bodoch smerujú na *obr. R47* doľava.



Obr. R47

48. Pri výpočte plošnej hustoty náboja na uzemnenej guli v prítomnosti bodového náboja  $q$  možno vychádzať zo skutočností, že

a) intenzita elektrického poľa na povrchu guľovej plochy má smer normály (smeruje do vnútra guľovej plochy),



Obr. R48

b) plošná hustota náboja na guli je viazaná s intenzitou poľa podľa Coulombovej vety.

Intenzitu elektrického poľa na povrchu gule možno vypočítať ako priemet intenzít elektrického poľa od náboja  $q$  a zrkadlového náboja  $-q' = -(a/l)q$  na polomer gule podľa *obr. R48*. Zavedme označenie  $p = a/l$ , takže zrkadlový náboj  $q' = pq$  a jeho vzdialenosť od stredu guľovej plochy  $\delta = pa$ . Z *obr. R48* ďalej plynie, že



$$r = \sqrt{l^2 + a^2 - 2al \cos \varphi} = l\sqrt{1 + p^2 - 2p \cos \varphi}$$

$$r' = \sqrt{a^2 + \delta^2 - 2a\delta \cos \varphi} = a\sqrt{1 + p^2 - 2p \cos \varphi} = pr$$

Intenzita poľa v bode  $P$  na obr. R48 je

$$E = E' \cos \alpha + E'' \cos \gamma$$

kde

$$E' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad E'' = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 pr^2}$$

Ak ďalej uvážime, že

$$\alpha = \beta + \varphi \quad \text{a tiež} \quad \gamma = \beta$$

čo plynie z podobnosti trojuholníkov  $OAP$  a  $OPB$ , možno dôjsť k výrazu pre intenzitu elektrického poľa na guľovej ploche v tvare

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 la} \frac{1 - p^2}{(1 + p^2 - 2p \cos \varphi)^{3/2}}$$

Podľa Coulombovej vety je na povrchu gule záporný plošný náboj s hustotou

$$\sigma(\varphi) = -\epsilon_0 E = \frac{-q}{4\pi la} \frac{1 - p^2}{(1 + p^2 - 2p \cos \varphi)^{3/2}}$$

Celkový náboj na guli dostaneme integráciou  $\sigma$  po celej guľovej ploche. Ako plošné elementy na guli zvolíme pásiky s plôškami  $dS = 2\pi a^2 \sin \varphi d\varphi$ . Celkový náboj na guli

$$Q = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sigma \sin \varphi d\varphi = -\frac{a}{l} q = -q'$$

Z bodu  $A$  vidieť časť guľovej plochy, ktorá je na obr. R48 vymedzená uhlom  $\varphi_0$ , pre ktorý platí

$$\cos \varphi_0 = \frac{a}{l} = p$$

takže náboj na tejto časti plochy je

$$Q = 2\pi a^2 \int_0^{\varphi_0} \sigma \sin \varphi d\varphi = -\frac{q'}{l} (1 + p - \sqrt{1 - p^2})$$

49. Intenzity a potenciály elektrického poľa sú

$$E = \frac{q + q'}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad V = \frac{q + q'}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{pre } r > r_3,$$

$$E = 0, \quad V = \frac{q + q'}{4\pi\epsilon_0 r_3}, \quad \text{pre } r_3 > r > r_2,$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{q + q'}{r_3} - \frac{q}{r_2} \right), \quad \text{pre } r_2 > r > r_1,$$

$$E = 0, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_1} + \frac{q + q'}{r_3} - \frac{q}{r_2} \right), \quad \text{pre } r < r_1$$

Intenzity elektrického poľa majú radiálny smer.

Z Coulombovej vety plynú pre plošné náboje na jednotlivých guľových plochách výrazy

$$\sigma(r_1) = \frac{q}{4\pi r_1^2} \quad \sigma(r_2) = -\frac{q}{4\pi r_2^2} \quad \sigma(r_3) = \frac{q+q'}{4\pi r_3^2}$$

50. a)  $10^3$  V, b)  $f = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2d^2} = \frac{1}{2} \frac{CU^2}{d} = 0,5$  N

c)  $2 \cdot 10^3$  V, d)  $5 \cdot 10^{-4}$  J

51.  $C_1 = \frac{q(k+1)^2}{U(k-1)}$   $C_2 = \frac{q(k+1)^2}{U(k^2-k)}$

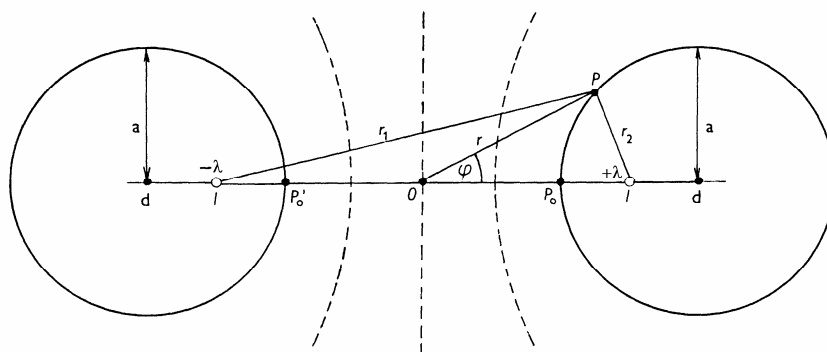
52.  $U' = \frac{Q}{C_1+C_2} = \frac{C_1-C_2}{C_1+C_2} U$

$$Q'_1 = C_1 \frac{C_1-C_2}{C_1+C_2} U \quad Q'_2 = C_2 \frac{C_1-C_2}{C_1+C_2} U$$

Po spojení svoriek A a B dochádza k úbytku energie kondenzátora o

$$\Delta W = -2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U^2$$

v dôsledku tepelných strát vo vodičoch a vyžiarenia elektromagnetického impulzu.



Obr. R53

53. Najprv ukážeme, že ekvipotenciálne plochy dvoch paralelných priamkových nábojov s hustotou  $\pm\lambda$  (C/m) umiestnených paralelne vo vzdialenosti  $2l$  (pozri obr. R53) sú valcové plochy. Pre potenciál v bode P platí

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} + \text{konšt.}$$

Na ploche konštantného potenciálu

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{konšt.} = k \quad \text{alebo} \quad r_1^2 = k^2 r_2^2$$

Ak do posledného vzťahu s využitím kosínusovej vety dosadíme

$$r_1^2 = r^2 + l^2 + 2rl \cos \varphi \quad \text{a} \quad r_2^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos \varphi$$

po úprave dostaneme rovnicu

$$r^2 + l^2 + 2rl \frac{1+k^2}{1-k^2} \cos \varphi = 0$$

Táto rovnica je rovnicou prierezovej krivky ekvipotenciálnych plôch v polárnych súradniciach – je to rovnica kružnice, ktorej polomer  $a$  a vzdialenosť  $d$  jej stredu od začiatku 0 na polárnej osi spĺňajú vzťahy

$$d^2 - a^2 = l^2 \quad d = l \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$$

z čoho

$$a = 2l \frac{k}{k^2 - 1} \quad d = l \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$$

Ekvipotenciálne plochy sú teda valcové plochy obopínajúce náboje  $\pm\lambda$ , pričom valcové plochy rovnakého polomeru sú na potenciáloch, ktoré sú v absolútnej hodnote rovnaké a líšia sa znamienkom. Ekvipotenciálne plochy možno nahradiť vodivými valcami a náboje  $\pm\lambda$  preniesť na ne – pole v okolí valcov bude také isté ako pole priamkových nábojov umiestnených vo vzájomnej vzdialenosti

$$l = \sqrt{d^2 - a^2}$$

K výpočtu kapacity valcov treba poznať rozdiel ich potenciálov (napätie). Pre ľubovoľný bod  $P$  na valci s nábojom  $+\lambda$  a symetricky na valci s nábojom  $-\lambda$  v bode  $P'$  sú potenciály

$$V_{1,2} = \frac{\pm\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} + \text{konšt.}$$

takže rozdiel potenciálov (napätie) valcov

$$U = V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

Tento výraz platí pre ľubovoľné dva body na valcoch, a preto tieto body možno zvoliť na priesečníkoch spojnice osí valcov s valcovými plochami (body  $P_0$  a  $P_0'$  na obr. R53). Tam platí

$$U = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a+l}{a-d+l} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a+\sqrt{d^2-a^2}}{a-d+\sqrt{d^2-a^2}} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{d}{a} + \sqrt{\frac{d^2}{a^2} - 1} \right)$$

takže kapacita na jednotku dĺžky dvojice valcov

$$C' = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left( \frac{d}{a} + \sqrt{\frac{d^2}{a^2} - 1} \right)} = \frac{\pi\epsilon_0}{\operatorname{argcosh} \frac{d}{a}} \quad [\text{F/m}]$$

V praxi sú polomery  $a$  valcov malé oproti vzdialenosti ich osí  $2d$ , t. j.  $d/a \gg 1$ . V takých prípadoch

$$\operatorname{argcosh} \frac{d}{a} \approx \ln \frac{2d}{a}$$

a kapacita

$$C' \approx \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{2d}{a}} \quad [\text{F/m}]$$

Posledný výraz udáva kapacitu na jednotku dĺžky technicky dôležitého dvojvodičového symetrického vedenia (známeho tiež pod názvom "dvojlinka"). Spolu s indukčnosťou na jednotku dĺžky udávajú tieto parametre dôležitú elektrotechnickú veličinu vedenia – vlnovú impedanciu (vlnový odpor) vedenia.

54. Potenciál plášťa voči zemi je

$$U_0 = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

55. Napätia na jednotlivých kondenzátoroch sú

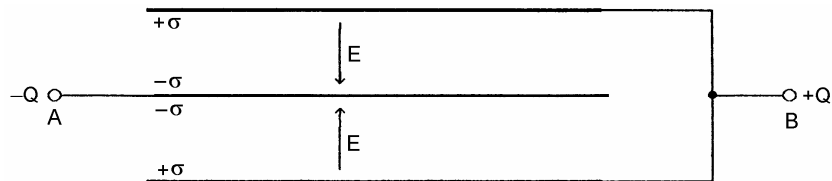
$$U'_1 = \frac{C}{C_1}(U_1 + U_2 + U_3) \quad U'_2 = \frac{C}{C_2}(U_1 + U_2 + U_3) \quad U'_3 = \frac{C}{C_3}(U_1 + U_2 + U_3)$$

kde

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

56. Ak privedieme na svorky  $A$  a  $B$  náboje  $\pm Q$ , rozložia sa tieto náboje na doskách tak, ako je to znázornené na obr. R56. Plošné náboje sú  $\sigma = Q/(2S)$  a intenzita elektrického poľa  $E = \sigma/\epsilon_0$ . Medzi svorkami  $A$  a  $B$  je napätie

$$U_{AB} = Eh = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{Qh}{2\epsilon_0 S} \quad \text{a kapacita} \quad C_{AB} = \frac{Q}{U_{AB}} = 2 \frac{\epsilon_0 S}{h} = 2C$$



Obr. R56

Uvažovaný systém dosiek predstavuje dva rovnaké kondenzátory s kapacitami  $C = \epsilon_0 S/h$  zapojené paralelne.

57. Náboje  $\pm Q$  privedené na svorky  $A$  a  $B$  sa rozložia na doskách tak ako na obr. R57a. Pre plošné hustoty a intenzity platia vzťahy

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma = \frac{Q}{S} \quad E' + E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad 2E'h - Eh = 0$$

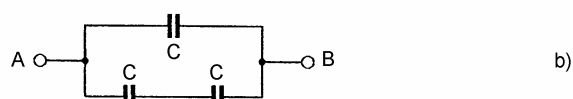
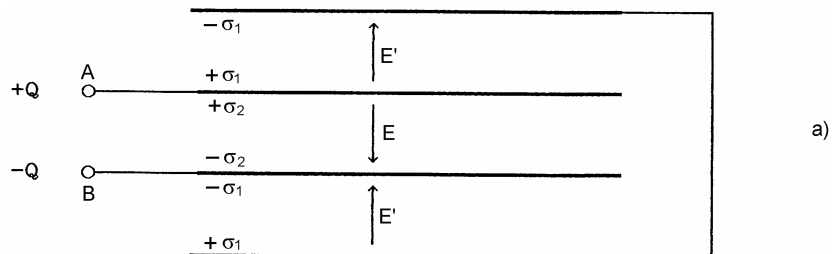
Z týchto rovníc dostaneme intenzitu

$$E = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{2}{3} \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad \text{a napätie medzi svorkami } A \text{ a } B \quad U_{AB} = Eh = \frac{2}{3} \frac{Qh}{\epsilon_0 S}$$

z čoho kapacita

$$C_{AB} = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{3 \epsilon_0 S}{2 h} = \frac{3}{2} C$$

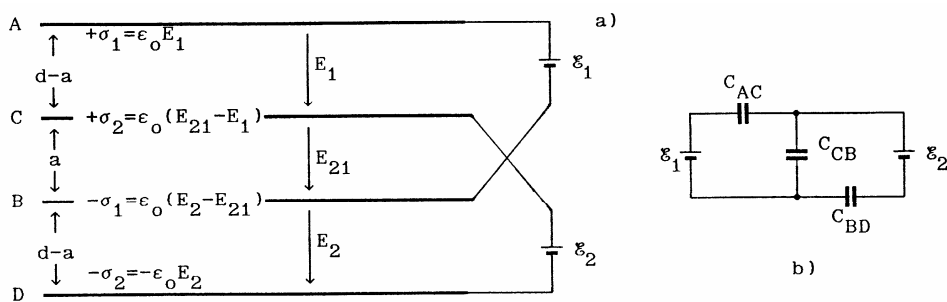
$C = \epsilon_0 S/h$  je kapacita susedných dvoch dosiek. Výsledok možno dostať priamo, ak si uvedomíme, že sústava dosiek predstavuje sériovo-paralelné spojenie troch rovnakých kondenzátorov podľa obr. R57b.



Obr. R57

58.  $C_{AB} = 3C$ , kde  $C = \epsilon_0 S/h$

59. Integráciou napätí po uzavretých dráhach na obr. R59a dostaneme dve rovnice



Obr. R59

$$E_1(d-a) + E_{21}a = \mathcal{E}_1 \quad E_{21}a + E_2(d-a) = \mathcal{E}_2$$

a z porovnania nábojových hustôt rovníc

$$E_{21} = E_1 + E_2$$

Riešením tohto systému rovníc pre  $E_{21}$  dostaneme

$$E_{21} = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{d+a}$$

Napätie medzi doskami C a B je

$$U_{CB} = E_{21}a = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \frac{a}{d+a}$$

Kladná je doska C.

Iný spôsob riešenia plynie zo zapojenia na obr. R59b, ktoré je elektrotechnickou obvodovou náhradou sústavy dosiek a zdrojov na obr. R59a. Hodnoty kapacít kondenzátorov sú

$$C_{AC} = C_{BD} = \frac{\epsilon_0 S}{d-a} \quad a \quad C_{CB} = \frac{\epsilon_0 S}{a}$$

a pre obvod na obr. R59b platia rovnice [pozri výrazy (3.20) a (3.21)]

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Q_{AC}}{C_{AC}} + \frac{Q_{CB}}{C_{CB}} \quad \mathcal{E}_2 = \frac{Q_{CB}}{C_{CB}} + \frac{Q_{BD}}{C_{BD}} \quad Q_{AC} - Q_{CB} + Q_{BD} = 0$$

kde  $Q_{AC}$ ,  $Q_{CB}$ ,  $Q_{BD}$  sú náboje na jednotlivých kondenzátoroch. Riešením týchto rovníc dostaneme napätie  $U_{CB}$  na kondenzátore  $C_{CB}$  v tvare

$$U_{CB} = \frac{Q_{CB}}{C_{CB}} = \frac{C_{AC}\mathcal{E}_1 + C_{BD}\mathcal{E}_2}{C_{AC} + C_{CB} + C_{BD}} = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \frac{a}{d+a}$$

**60.** Medzi kapacitami v trojuholníku a vo hviezde platia vzťahy

$$C_2 + \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = \frac{C'_1 C'_3}{C'_1 + C'_3} \quad C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{C'_2 C'_3}{C'_2 + C'_3}$$

$$C_3 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C'_1 C'_2}{C'_1 + C'_2}$$

Riešením týchto rovníc pre  $C'_1$ ,  $C'_2$ ,  $C'_3$  dostaneme

$$C'_1 = \frac{C^2}{C_1} \quad C'_2 = \frac{C^2}{C_2} \quad C'_3 = \frac{C^2}{C_3}$$

kde

$$C^2 = C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3$$

alebo pre  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$

$$C_1 = \frac{C'_2 C'_3}{C'} \quad C_2 = \frac{C'_1 C'_3}{C'} \quad C_3 = \frac{C'_1 C'_2}{C'}$$

kde

$$C' = C'_1 + C'_2 + C'_3$$

**61.** Úlohu možno riešiť dvoma spôsobmi:

a) použitím výrazu pre energiu v tvare [pozri výraz (3.32)]

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau$$

kde  $\tau$  je objem gule a  $d\tau$  je elementárny objem, ktorý v prípade sférickej symetrie rozloženia náboja možno voliť v tvare guľových vrstiev, teda  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ . Ak uvažíme, že hustota náboja v guli  $\rho = Q/\tau = 3Q/(4\pi a^3)$  a potenciál v guli

$$V(r) = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left( \frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right)$$

[možno ho vypočítať využitím výrazu (2.88)], potom dosadením do výrazu pre energiu dostaneme

$$W = 2\pi\rho \int_0^a V(r)r^2 dr = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$$

b) z výrazu pre energiu v tvare

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty} E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau} E_1^2 d\tau + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\infty-\tau} E_2^2 d\tau = W_1 + W_2$$

kde  $\infty - \tau$  je celý priestor mimo objemu gule. Intenzita elektrického poľa vo vnútri gule

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad \text{a mimo gule} \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

takže jednotlivé príspevky k energii sú

$$W_1 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^6} \int_0^a r^4 dr = \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0 a} \quad \text{a} \quad W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Celková energia je znovu 
$$W = W_1 + W_2 = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$$

## 62. Zmena energie jadier po rozpade

$$\Delta W = W - 2W' \quad \text{kde} \quad W = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$$

je energia jadra pred rozpadom (pozri úlohu 61) a

$$W' = \frac{3Q'^2}{20\pi\epsilon_0 a'}$$

je energia každého z jadier s polomerom  $a'$  s celkovým nábojom  $Q'$  po rozpade, pričom

$$Q' = Q/2 \quad \text{a} \quad a' = a/(2^{1/3})$$

takže

$$\Delta W = W(1 - 2^{-2/3}) = 6,8 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 425 \text{ MeV}$$

Pre hrubý odhad uvoľnenej jadrovej energie budeme predpokladať, že kilogram štiepneho materiálu obsahuje

$$n = \frac{1}{235m_p} = 2,55 \cdot 10^{24} \text{ kg}^{-1}$$

jadier  $U^{235}$ . Uvoľnená energia z jedného kilogramu štiepneho materiálu je

$$W_{\text{kg}} = \Delta W n = 1,73 \cdot 10^{14} \text{ J.kg}^{-1}$$

Explozívna energia výbušnín sa udáva v množstve uvoľnenej energie na jednu tonu trinitrotoluénu (1 t TNT), pričom 1 t TNT  $\sim 4,2 \cdot 10^9$  J. Uvoľnená jadrová energia na jeden kilogram štiepneho materiálu je

$$W = 41\,254 \text{ t TNT.kg}^{-1} \approx 41 \text{ kiloton TNT.kg}^{-1} !!!$$

Pre porovnanie, táto energia sa rovná tepelnej energii získanej spálením približne 6000 ton kvalitného čierneho uhlia.

63. Intenzita elektrického poľa náboja rovnomerne rozloženého na guli s polomerom  $a$  je pre  $r \geq a$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

a pre  $r \leq a$  sa rovná nule. Energiu takehoto nábojového rozloženia možno vypočítať použitím výrazu

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

integráciou cez celý objem okrem objemu gule, v ktorom je intenzita poľa nulová. Ak zvolíme objemové elementy  $d\tau = 4\pi r^2 dr$  potom

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

z čoho pre polomer gule plynie

$$a = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 W}$$

Dosadením číselných hodnôt dostaneme pre polomer  $\pi$ -mezónu hodnotu  $a = 1,56 \cdot 10^{-16}$  m.

64. Energia molekuly (na jeden ión) je

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -2\frac{e^2}{a} + 2\frac{e^2}{2a} - 2\frac{e^2}{3a} + \dots \right) = -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a} \ln 2$$

Energia je záporná, čo znamená, že na rozloženie molekuly na ióny treba vynaložiť prácu.

## Elektrostatické pole v dielektriku

65. Uhol  $\varphi$  sa nezmení, ak hustota kvapaliny bude

$$\rho = \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \rho_0$$

kde  $\rho_0 = 3m/(4\pi R^3)$  je hustota materiálu guľôčok.

66. Ak sa na guľové plochy privedú náboje  $\pm Q$ , potom napätie medzi nimi bude

$$U = \int_{R_1}^{R_1+h} E_1 dr + \int_{R_1+h}^{R_2} E_2 dr$$

kde  $E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}r^2}$  a  $E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}r^2}$

sú intenzity elektrického poľa v dielektrikách s permitivitami  $\epsilon_{r1}$  a  $\epsilon_{r2}$ . Integráciou dostaneme pre napätie výraz

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\epsilon_{r1}R_1} - \frac{1}{\epsilon_{r2}R_2} - \frac{1}{R_1+h} \left( \frac{1}{\epsilon_{r1}} - \frac{1}{\epsilon_{r2}} \right) \right]$$



a pre kapacitu

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}R_1R_2(R_1+h)}{\epsilon_{r1}(R_2-R_1)R_1 + (\epsilon_{r2}R_2 - \epsilon_{r1}R_1)h}$$

67. Ak sa na doskách nachádzajú náboje  $\pm Q$ , potom na kondenzátore je napätie

$$U = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \left( \frac{h}{\epsilon_{r1}} + \frac{d-h}{\epsilon_{r2}} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} S} [\epsilon_{r1}d + (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1})h]$$

a kapacita kondenzátora

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} S}{\epsilon_{r1}d + (\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1})h}$$

68. Ak je na kondenzátore náboj  $\pm Q$ , potom je na ňom napätie

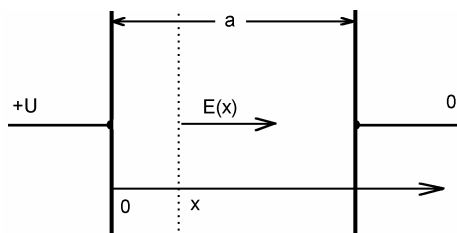
$$U = \frac{Q}{S} \int_0^a \frac{dx}{\epsilon(x)} = \frac{Qa}{\epsilon_0 S} \int_0^a \frac{dx}{x+a} = \frac{Qa}{\epsilon_0 S} \ln 2$$

z čoho kapacita

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{a \ln 2}$$

Intenzita elektrického poľa vo vzdialenosti  $x$  od kladnej elektródy (pozri obr. R68)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon(x)} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0(x+a)} \quad \text{a polarizácia} \quad P(x) = (\epsilon - \epsilon_0)E = \sigma \frac{x}{x+a}$$



Obr. R68

kde

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{CU}{S} = \frac{\epsilon_0 U}{a \ln 2}$$

(vektor polarizácie smeruje doprava). Pre hustoty plošných viazaných nábojov dostávame výrazy

$$\sigma_v(0) = P(0) = 0 \quad \sigma_v(a) = P(a) = \sigma/2$$

Priestorová hustota viazaného náboja v dielektriku je

$$\rho_v(x) = -\text{div } \mathbf{P} = -\frac{dP}{dx} = -\sigma \frac{a}{(x+a)^2}$$

Pri kladnej doske sa teda plošná hustota viazaného náboja rovná nule a pri zápornej je  $\sigma_v(a) = -\sigma/2 = -\epsilon_0 U / (2a \ln 2)$ . Priestorový viazaný náboj v dielektriku je záporný a jeho celková hodnota je

$$Q_v = S \int_0^a \rho_v dx = -\sigma S/2$$

Je to náboj, ktorý kompenzuje kladný viazaný plošný náboj  $\sigma S/2$  na povrchu dielektrika pri zápornej elektróde.

**69.** a) Pretože pole vektorov  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{E}$  v priestore ohraničenom guľovými plochami je radiálne, možno zvoliť guľovú Gaussovu plochu s polomerom  $a < r < b$ , na ktorej platí  $(D_1 + D_2)2\pi r^2 = Q$ , kde  $D_1$  je elektrická indukcia vo vákuovej časti objemu a  $D_2$  v časti s dielektrikom. Na rozhraní vákuum-dielektrikum platí hraničná podmienka  $D_1/\varepsilon_0 = D_2/\varepsilon$ . Z posledných dvoch výrazov plynie, že

$$D_1 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{Q}{2\pi r^2} \quad D_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{Q}{2\pi r^2}$$

b) Pre intenzity elektrického poľa platí

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0} \quad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon}$$

takže

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{Q}{2\pi r^2}$$

c) Na vnútornej guľovej ploche v časti kde je vákuum bude rozložený plošný náboj s hustotou

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 E_1 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{Q}{2\pi a^2} = D_1(a) \quad \text{a v časti s dielektrikom} \quad \sigma_2 = \varepsilon E_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{Q}{2\pi a^2} = D_2(a)$$

Na vonkajšej guľovej ploche budú náboje s hustotami  $\sigma_1' = -D_1(b)$  vo vákuu a  $\sigma_2' = -D_2(b)$  v dielektriku.

d) Na vnútornej ploche dielektrika bude viazaný náboj

$$\sigma_v = -P(a) = -(\varepsilon - \varepsilon_0)E(a) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2}$$

a na vonkajšej ploche

$$\sigma_v = P(b) = (\varepsilon - \varepsilon_0)E(b) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{Q}{2\pi b^2}$$

Priestorový viazaný náboj v dielektriku nie je.

e) Napätie medzi guľovými plochami

$$U = \int_a^b E dr = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_0 + \varepsilon)} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad \text{a kapacita} \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi(\varepsilon_0 + \varepsilon)ab}{b - a}$$

**70.** Pole v kondenzátore je radiálne, a tak možno zvoliť guľovú Gaussovu plochu s polomerom  $a < r < b$ , na ktorej platí

$$Q = \varepsilon_0 \Omega r^2 E + (4\pi - \Omega) \varepsilon_0 r^2 E$$

z čoho intenzita elektrického poľa je

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 + \Omega(\varepsilon - \varepsilon_0)} \frac{1}{r^2}$$

Napätie na kondenzátore

$$U = \int_a^b E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 + \Omega(\epsilon - \epsilon_0)} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

a jeho kapacita

$$C = \frac{Q}{U} = \left[ 4\pi\epsilon_0 + \Omega(\epsilon - \epsilon_0) \right] \frac{ab}{b-a}$$

71. Pole v kondenzátore je centrálné symetrické, takže pri výpočte elektrickej indukcie v kondenzátore možno zvolit' guľovú Gaussovu plochu, na ktorej elektrická indukcia

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Intenzita elektrického poľa v kondenzátore

$$E = \frac{D}{\epsilon(r)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \quad \text{a napätie} \quad U = \int_a^b E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} (a-b)$$

takže kapacita kondenzátora

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0 a^2}{a-b}$$

72. a) Na vnútornej ploche dielektrika je plošná hustota viazaného náboja

$$\sigma_v(R) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi R^2} \quad \text{a na vonkajšej ploche} \quad \sigma_v(R+h) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi(R+h)^2}$$

b) Priestorový viazaný náboj v dielektriku nie je.

c) Celkový viazaný náboj v dielektriku

$$Q_v(R+h) = \sigma_v(R+h) 4\pi(R+h)^2 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q = -Q_v(R)$$

d) Vo vnútri vodivej gule je  $D = 0$ ,  $E = 0$  aj  $P = 0$ . V dielektriku, t. j. pre  $R < r < R+h$  je

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \quad P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2}$$

a vo vonkajšom priestore ( $r > R+h$ )

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad P = 0$$

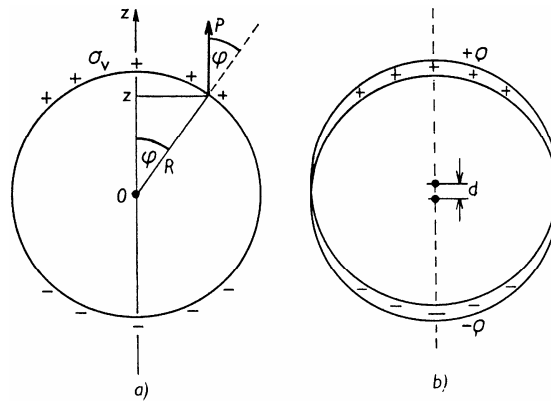
Všetky vektory poľa majú radiálny smer.

73. Homogénne polarizovaná guľa (pozri obr. R73a) má na svojom povrchu viazaný plošný náboj s hustotou, ktorá závisí od uhla  $\varphi$  podľa vzťahu

$$\sigma_v = P \cos\varphi$$

Takéto rozloženie náboja možno modelovať dvoma rovnomerne nabitými guľami, s konštantnými objemovými hustotami náboja  $\pm\rho$ . Gule sú preložené cez seba tak, že ich stredy sú posunuté o malú vzdialenosť  $d$  podľa obr. R73b. Keďže každá guľa vytvára v svojom okolí potenciál rovný

potenciálu celkového náboja gule koncentrovaného do jej stredu, možno gule (z hľadiska ich vonkajšieho potenciálu) nahraďiť bodovými nábojmi umiestnenými vo vzdialenosti  $d$ . Výsledné pole v okolí gule je teda poľom elektrického dipólu, ktorého moment treba určiť zo známej polarizácie gule. Ak koncentrácia elementárnych dipólov v guli je  $n$  a moment jedného dipólu je  $p_0 = q_0 d$ , potom polarizácia



Obr. R73

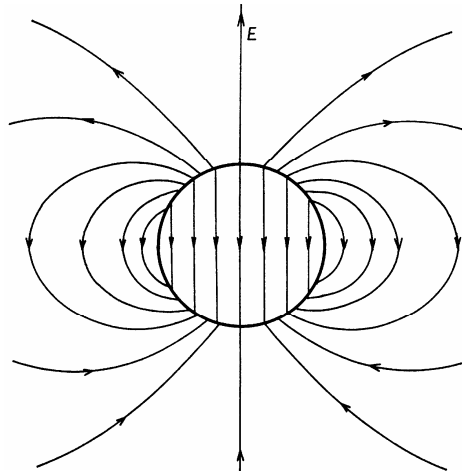
$$P = np_0 = nq_0 d = \rho d$$

kde  $\rho$  je objemová hustota nábojov v guli. Každá guľa má celkový náboj s absolútnou hodnotou

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{P}{d}$$

a celkový dipólový moment polarizovanej gule je

$$p = Qd = \frac{4}{3} \pi R^3 P$$



Obr. R73c

Potenciál v okolí takého dipólu (teda v okolí polarizovanej gule)

$$V = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{R^3}{3\epsilon_0 r^3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}$$

Na povrchu gule je potenciál

$$V = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}}{3\epsilon_0} = \frac{PR \cos \varphi}{3\epsilon_0} = \frac{Pz}{3\epsilon_0}$$

Vo vnútri gule  $V = Pz / (3\epsilon_0)$  a závisí iba od vzdialenosti  $z$  od stredu gule v smere jej polarizácie. Intenzita elektrického poľa vo vnútri gule je konštantná a antiparalelná s osou  $z$ . Je daná výrazom

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dz} \mathbf{e}_z = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

kde  $\mathbf{e}_z$  je jednotkový vektor v smere osi  $z$ . V okolí gule je intenzita elektrického poľa intenzitou elektrického dipólu s momentom  $4\pi R^3 \mathbf{P} / 3$ . Siločiarly elektrického poľa rovnomerne polarizovanej gule sú znázornené na obr. R73c.

74. a) Elektrické pole vo vnútri gule  $\mathbf{E}_v$  je superpozíciou poľa  $\mathbf{E}_0$  a poľa  $\mathbf{E}_p$ , ktoré je od polarizácie gule, teda

$$\mathbf{E}_v = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$$

Vektor polarizácie v guli je daný výrazom

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}_v \quad \text{a} \quad \mathbf{E}_p = \frac{-\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

čo plynie z predchádzajúcej úlohy. Z posledných troch rovníc plynie, že

$$\mathbf{E}_v = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0 \quad \text{a polarizácia} \quad \mathbf{P} = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0$$

Potenciál na povrchu gule a v jej vnútri

$$V = \frac{-3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} = \frac{-3}{\epsilon_r + 2} E_0 z$$

b) Vo vonkajšom priestore je potenciál superpozíciou potenciálu homogénneho elektrického poľa intenzity  $\mathbf{E}_0$ , teda  $V_0 = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$  a potenciálu od polarizovanej gule  $V_g$ . Potenciál od polarizovanej gule je potenciál dipólu, a teda podľa predchádzajúcej úlohy

$$V_g = \frac{R^3 \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{3\epsilon_0 r^3} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{R^3}{r^3} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$$

takže výsledný potenciál v okolí gule

$$V_{vonk} = V_0 + V_g = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{R^3}{r^3} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$$

Intenzita vonkajšieho elektrického poľa

$$\mathbf{E}_{vonk} = -\text{grad}V_0 - \text{grad}V_g = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_g$$

kde  $\mathbf{E}_g$  je intenzita poľa od polarizovanej gule. Ide o superpozíciu homogénneho poľa  $\mathbf{E}_0$  a poľa  $\mathbf{E}_g$ , ktoré má charakter poľa dipólu.

75. Limitným prechodom  $\epsilon_r \rightarrow \infty$  vo výraze pre potenciál v okolí dielektrickej gule v predchádzajúcej úlohe plynie

$$V_{vonk} = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{R^3}{r^3} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$$

Na povrchu gule ( $r = R$ ) a v jej vnútri je potenciál konštantný (nulový).

76. Pole je centrálné symetrické, možno teda zvoliť guľovú Gaussovu plochu s polomerom  $r$ , na ktorej platí

$$(D_1 + D_2)2\pi r^2 = Q$$

Na rozhraní platí  $D_1/\epsilon_1 = D_2/\epsilon_2$ , takže

$$D_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{Q}{2\pi r^2} \quad D_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{Q}{2\pi r^2}$$

Elektrické pole a potenciál

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{Q}{2\pi r^2} \quad V_1 = V_2 = \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{Q}{2\pi r}$$

77.  $\epsilon_r = 2,66$

$$78. W = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S U^2}{2d} (\epsilon_r - 1) = \frac{C U^2}{2} (\epsilon_r - 1)$$

79. Označme:  $r_1 = 1$  cm – polomer vnútorného vodiča,  $r_2 = 5$  cm – polomer plášťa,  $r_0$  – polomer rozhrania medzi dielektrikami. Pretože intenzita elektrického poľa v okolí valcového vodiča s dĺžkovým nábojom je

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon r}$$

bude elektrické pole maximálne na vnútorných plochách dielektrík.

a) Bude teda platiť

$$E_{max1} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} r_1} \quad E_{max2} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} r_0}$$

z čoho pre polomer rozhrania plynie

$$r_0 = \frac{E_{max1} \epsilon_{r1}}{E_{max2} \epsilon_{r2}} r_1 = 3 \text{ cm}$$

b) Maximálne povolené napätie na kábli je

$$U_{max} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2}} \ln \frac{r_2}{r_0} + \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1}} \ln \frac{r_0}{r_1} = r_0 E_{max2} \ln \frac{r_2}{r_0} + r_1 E_{max1} \ln \frac{r_0}{r_1} = 127,2 \text{ kV}$$

c) Kapacita kábla

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r2} \ln \frac{r_0}{r_1} + \epsilon_{r1} \ln \frac{r_2}{r_0}} = 157 \text{ pF/m}$$

d) Maximálna energia v kábli

$$W = \frac{C U_{max}^2}{2} = 1,27 \text{ J/m}$$

**80.** Maximálna hustota energie nahromadenej v dielektriku

$$w = \frac{\epsilon E_{max}^2}{2} = 10^3 \text{ J/m}^3$$

a množstvo energie na kilogram dielektrika

$$w' = \frac{w}{10^3} = 1 \text{ J/kg}$$

Pre olovené akumulátory je  $w' = (36 - 144) \cdot 10^3 \text{ J/kg}$  a pre Ni-Cd akumulátory  $w' = (108 \text{ až } 180) \cdot 10^3 \text{ J/kg}$  (Svět motorů, 21/75). Vidieť, že energia nahromadená v kilograme akumulátorov je oveľa (o päť rádov) väčšia ako energia, ktorú možno uskladniť v ekvivalentnej hmotnosti dielektrika. Kondenzátory s dielektrikom preto nemôžu slúžiť ako sekundárne zdroje energie.

**81.** a) Na dosky pôsobia príťažlivé sily

$$f = C_0 \frac{U^2}{2a} = f_0$$

$C_0$  je kapacita kondenzátora bez dielektrika.

b) Intenzita elektrického poľa v kondenzátore naplnenom dielektrikom je  $\epsilon_r$ -krát menšia ako v kondenzátore bez dielektrika, a preto aj sila bude  $\epsilon_r$ -krát menšia, teda  $f = f_0/\epsilon_r$ .

c) Intenzita elektrického poľa v štrbine medzi doskou a dielektrikom je taká istá ako v kondenzátore bez dielektrika, preto aj sila bude rovnaká ako v prípade a), teda  $f = f_0$ .

d) Na kondenzátor pritečie  $\epsilon_r$ -krát väčší náboj ako v prípade a) a sila bude  $f = \epsilon_r f_0$ .

e) Na kondenzátor pritečie  $\epsilon_r$ -krát väčší náboj ako v prípade a) a intenzita elektrického poľa v štrbine bude tiež  $\epsilon_r$ -krát väčšia, teda sila  $f = \epsilon_r^2 f_0$

**82.** a) Kapacita kondenzátora bez dielektrika

$$C_0 \approx \frac{2\pi\epsilon_0 Rl}{d} \quad \text{a s dielektrikom} \quad C \approx \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r Rl}{d} = \epsilon_r C_0$$

b)  $W_0 = \frac{1}{2} C_0 U^2$

c) Kapacita kondenzátora s rúrkou zasunutou do hĺbky  $x$

$$C(x) = C_0 \left[ \frac{x}{l} (\epsilon_r - 1) + 1 \right]$$

a jeho energia

$$W(x) = \frac{1}{2} C(x) U^2 = \frac{1}{2} C_0 \left[ \frac{x}{l} (\epsilon_r - 1) + 1 \right] U^2$$

Sila pôsobiaca na dielektrikum

$$f_x = -\frac{dW}{dx} = -\frac{1}{2} C_0 \frac{\epsilon_r - 1}{l} U^2$$

Sila smeruje do kondenzátora (kondenzátor "nasáva" dielektrikum). Celková práca

$$A_1 = f_x l = -\frac{1}{2} C_0 (\epsilon_r - 1) U^2 = -W_0 (\epsilon_r - 1)$$

Túto prácu vykonáva zdroj tým, že nabíja kondenzátor.

$$d) \quad W_1 = \varepsilon_r \frac{C_0 U^2}{2} = \varepsilon_r W_0 = W_0 + |A_1|$$

e) V tomto stave je na kondenzátore náboj  $Q = \varepsilon_r C_0 U$  a energia kondenzátora s povytiahnutým dielektrikom je

$$W_2(x) = \frac{Q^2}{2C(x)} = \frac{Q^2}{2} \frac{1}{C_0 \left[ \frac{x}{l} (\varepsilon_r - 1) + 1 \right]} = \varepsilon_r^2 W_0 \frac{l}{(\varepsilon_r - 1)x + l}$$

$$\text{Sila} \quad f_x = -\frac{dW_2}{dx} = -\varepsilon_r^2 W_0 \frac{(\varepsilon_r - 1)l}{(\varepsilon_r - 1)x + l} \quad \text{a práca} \quad A_2 = \int_l^0 f_x dx = \varepsilon_r (\varepsilon_r - 1) W_0 = \varepsilon_r |A_1|$$

Túto prácu konajú vonkajšie neelektrické sily.

f) Energia kondenzátora bez dielektrika

$$W_2 = \frac{Q^2}{2C_0} = \varepsilon_r^2 W_0 = \varepsilon_r W_1 = \varepsilon_r (W_0 + |A_1|) = W_1 + A_2$$

V celom cykle b) až f) sa energia kondenzátora zvýši  $\varepsilon_r^2$ -krát.

**83.** Kapacita valcového kondenzátora bez dielektrika

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}} \quad \text{a jeho energia} \quad W = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}} U^2$$

Ak kvapalina medzi valcami vystúpi o  $dl$ , vzrastie energia kondenzátora o

$$dW = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} (\varepsilon_r - 1) U^2 dl$$

a sila, ktorou je dielektrikum (kvapalina) vťahované do kondenzátora

$$f_e = \frac{dW}{dl} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} (\varepsilon_r - 1) U^2$$

Na stĺpec kvapaliny výšky  $h$  pôsobí gravitačná sila

$$f_g = mg = \pi\rho(b^2 - a^2)hg$$

Kvapalina v kondenzátore vystúpi do výšky  $h$ , pri ktorej  $f_g = f_e$ , z čoho pre  $h$  plynie

$$h = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) U^2}{\rho g (b^2 - a^2) \ln \frac{b}{a}}$$

$$\mathbf{84.} \quad h = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) U^2}{2d^2 \rho g}$$

**85.** Pri vsunutí dielektrika medzi dosky kondenzátora o  $dl$  zvýši sa jeho energia o

$$dW = \frac{\varepsilon_0 a U^2 dl}{2d} (\varepsilon_r - 1)$$



Sila, ktorou je dielektrikum vťahované medzi dosky má veľkosť

$$f = \frac{dW}{dl} = \frac{\epsilon_0 a U^2}{2d} (\epsilon_r - 1)$$

86. a)  $C = 177 \text{ pF}$ ,

b)  $Q = CU = 1,06 \cdot 10^{-7} \text{ C} = Q_1 + Q_2$ , kde  $Q_1 = 2,66 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  v časti so vzduchovým dielektrikom a  $Q_2 = 7,96 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  v časti so sklenným dielektrikom,

c)  $W = 3,17 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ .

87. Podobným postupom ako pri riešení úlohy 73 dostaneme pre potenciál v okolí valca výraz

$$V(r) = \frac{R^2}{2\epsilon_0 r^2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}$$

kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor so začiatkom na osi valca a kolmý na ňu. Vo vnútri valca

$$V = \frac{Pz}{2\epsilon_0}$$

Intenzita elektrického poľa vo vnútri valca

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{2\epsilon_0}$$

V okolí valca je intenzita elektrického poľa intenzitou priamkového dipólu (pozri úlohu 25) s momentom

$$\mathbf{p}' = \pi R^2 \mathbf{P}$$

88. Analogicky ako v úlohe 74 intenzita elektrického poľa  $\mathbf{E}_v$  vo vnútri valca je vektorovým súčtom intenzity  $\mathbf{E}$  a intenzity  $\mathbf{E}_p$  od polarizácie valca  $\mathbf{P}$ , teda  $\mathbf{E}_v = \mathbf{E} + \mathbf{E}_p$ , kde

$$\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{2\epsilon_0} \quad \text{a} \quad \mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}_v$$

Z týchto výrazov dostaneme

$$\mathbf{E}_v = \frac{2}{\epsilon_r + 1} \mathbf{E} \quad \text{a} \quad \mathbf{P} = \frac{2\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 1} \mathbf{E}$$

Potenciál na povrchu valca a v jeho vnútri

$$V = -\frac{2}{\epsilon_r + 1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = -\frac{2}{\epsilon_r + 1} Ez$$

Vo vonkajšom priestore ( $r > R$ ) je potenciál superpozíciou potenciálu intenzity poľa  $\mathbf{E}$ , teda potenciálu  $V_0 = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$  a potenciálu  $V_v$  polarizovaného valca s polarizáciou  $\mathbf{P}$ . Podľa predchádzajúcej úlohy

$$V_v = \frac{R^2}{2\epsilon_0 r^2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{R^2}{r^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

Výsledný potenciál v okolí valca

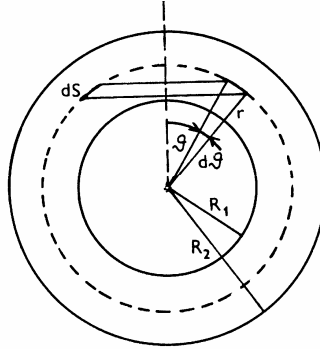
$$V_{vonk} = V_0 + V_v = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{R^2}{r^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$$

Intenzita vonkajšieho elektrického poľa je gradientom uvedeného potenciálu.

89. Limitným prechodom  $\varepsilon_r \rightarrow \infty$  vo výraze pre potenciál v okolí dielektrického valca z predchádzajúcej úlohy dostaneme

$$V_{\text{vonk}} = -E r + \frac{R^2}{r^2} E r = -\frac{r^2 - R^2}{r^2} E r$$

Na povrchu valca ( $r = R$ ) a v jeho vnútri  $V = 0$ .



Obr. R90

90. Zvolíme si guľovú plochu s polomerom  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) a na nej pásik podľa obr. R90, ktorého plocha  $dS = 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta$ . Vypočítame tok vektora  $\mathbf{D}$  zvolenou guľovou plochou, ak je na kondenzátore náboj  $Q$ :

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q &= E \oint_S \varepsilon d\mathbf{S} = 2\pi r^2 E \int_0^\pi (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= -2\pi r^2 E \int_{+1}^{-1} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos^2 \vartheta) d(\cos \vartheta) = \frac{4\pi(3\varepsilon_0 + \varepsilon_1)r^2 E}{3} \end{aligned}$$

z čoho intenzita poľa

$$E = \frac{3Q}{4\pi(3\varepsilon_0 + \varepsilon_1)r^2}$$

Napätie na kondenzátore

$$U = -\int_{R_2}^{R_1} E dr = \frac{3Q}{4\pi(3\varepsilon_0 + \varepsilon_1)} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad \text{a jeho kapacita} \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi(3\varepsilon_0 + \varepsilon_1)R_1 R_2}{3(R_2 - R_1)}$$

91. Predovšetkým vypočítame kapacitu kondenzátora ako funkciu uhla  $\alpha$  podľa obr. 91. Táto kapacita je

$$C(\alpha) = [\varepsilon_0 \alpha + \varepsilon(\pi - \alpha)] \frac{R^2}{2h}$$

Ak je na kondenzátore napätie  $U$ , potom jeho energia je

$$W(\alpha) = \frac{1}{2} C(\alpha) U^2 = [\varepsilon_0 \alpha + \varepsilon(\pi - \alpha)] \frac{R^2 U^2}{4h}$$

Moment sily pôsobiacej na dielektrickú platňu je

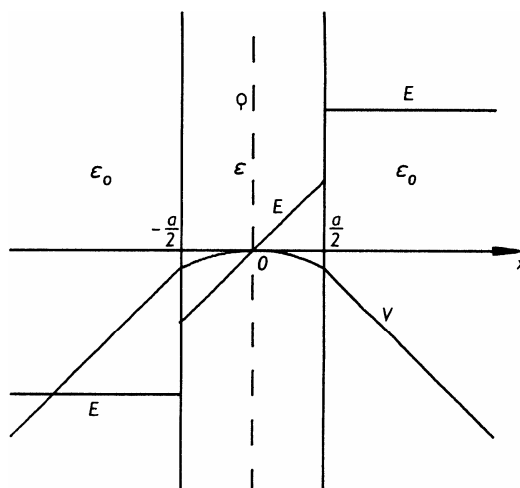
$$M = \frac{dW}{d\alpha} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{R^2 U^2}{4h}$$

Moment má taký smer, že sa snaží vtiahnuť dielektrikum do kondenzátora a nezávisí od uhla  $\alpha$ . Avšak pre  $\alpha = 0$ , je  $M = 0$ , pretože v tomto prípade posledný výraz neplatí (pozri tiež úvahy v odseku 4.7)

$$92. \quad D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad E = \frac{q}{4\pi \alpha r} \quad P = \frac{q}{4\pi r^2} - \frac{\varepsilon_0 q}{4\pi \alpha r}$$

$$\rho_v = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P) = \frac{\varepsilon_0 q}{4\pi \alpha r^2}$$

Všetky vektory majú radiálny smer.



Obr. R93

93. a) Nech os  $x$  smeruje kolmo na vrstvu, pričom  $x = 0$  v strede vrstvy. Potom:

$$\begin{aligned} \text{– pre } |x| < a/2 \quad \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} x \mathbf{i} & V &= -\frac{\rho}{2\varepsilon} x^2 \\ \text{– pre } |x| > a/2 \quad \mathbf{E} &= \frac{\rho a}{2\varepsilon_0} \frac{x}{|x|} \mathbf{i} & V &= -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0} |x| + \frac{\rho a^2}{8} \left( \frac{2}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{i}$  je jednotkový vektor v smere osi  $x$ . Grafické závislosti  $E$  a  $V$  od  $x$  sú znázornené na obr. R93.

b) Vektor polarizácie pre  $|x| < a/2$

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\rho}{\varepsilon} x \mathbf{i}$$

a pre  $|x| > a/2$  je  $\mathbf{P} = 0$ . Na povrchu vrstvy sú viazané plošné náboje

$$\sigma_v = |\mathbf{P}(a/2)| = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \rho \frac{a}{2}$$

a vo vnútri vrstvy je konštantný viazaný objemový náboj

$$\rho_v = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \rho$$

94. a) Ak je náboj rozložený na vnútornej ploche dielektrickej guľovej vrstvy, potom – pre  $r < a$

$$E = 0 \quad V = \frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\varepsilon a} + \left( \frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{1}{b} \right]$$

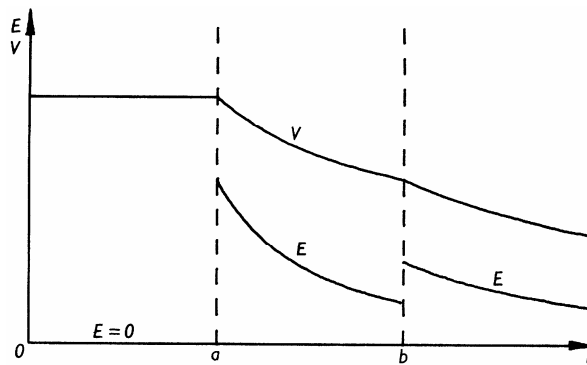
– pre  $a < r < b$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \quad V = \frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\varepsilon r} + \left( \frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{1}{b} \right]$$

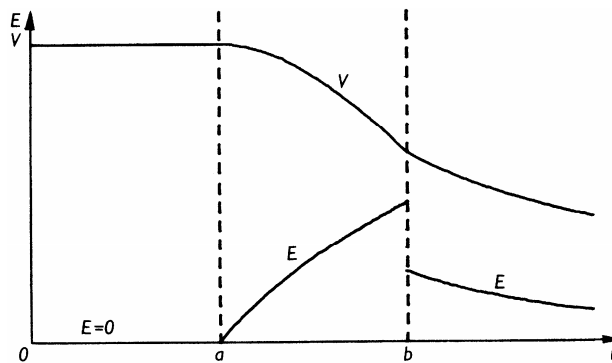
– pre  $r > b$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Grafy závislostí  $E$  a  $V$  od  $r$  sú znázornené na obr. R94a.



Obr. R94a



Obr. R94b

b) Ak je náboj rozložený rovnomerne v objeme dielektrika, potom  
– pre  $r < a$

$$E = 0 \quad V = \frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{2\epsilon(b^3 - a^3)} \left( \frac{b^3 + 2a^3}{b} - 3a^2 \right) \right]$$

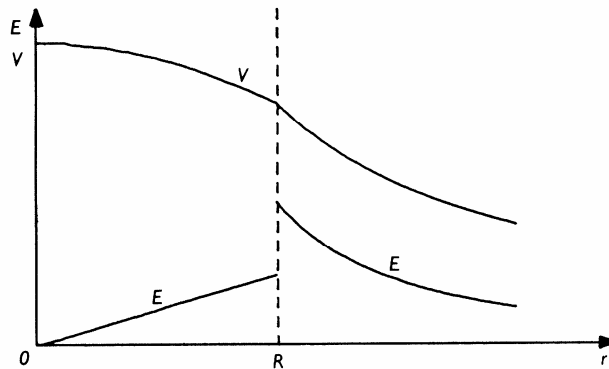
– pre  $a < r < b$

$$E = \frac{Q(r^3 - a^3)}{4\pi\epsilon(b^3 - a^3)r^2} \quad V = \frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{2\epsilon(b^3 - a^3)} \left( \frac{b^3 + 2a^3}{b} - \frac{r^3 + 2a^3}{r} \right) \right]$$

– pre  $r > b$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Grafy závislostí  $E$  a  $V$  od  $r$  sú znázornené na obr. R94b.



Obr. R95

95. Intenzita elektrického poľa  $E$  a potenciál  $V$  pre  $r < R$  sú

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \quad V = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_0 R} + \frac{1}{2\epsilon R} - \frac{r^2}{2\epsilon R^3} \right)$$

Pre  $r > R$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Grafické závislosti  $E$  a  $V$  od  $r$  sú na obr. R95. Na povrchu gule je viazaný plošný náboj  $\sigma_v = Q/(4\pi R^2)$ , objemový viazaný náboj je nulový ( $\rho_v = -\text{div}\mathbf{P} = 0$ ).

96. Na rozhraní platí pre normálovú zložku vektora elektrickej indukcie (pozri obr. R96)  $D_{n1} = D_{n2}$ , alebo  $\epsilon_{r1}E_{n1} = \epsilon_{r2}E_{n2}$ . Normálové zložky elektrických polí  $E_{n1}$  a  $E_{n2}$  sú superpozíciami normálových zložiek poľa bodového náboja a poľa  $\sigma_v/2\epsilon_0$  od viazaných nábojov na rozhraní. Platí teda

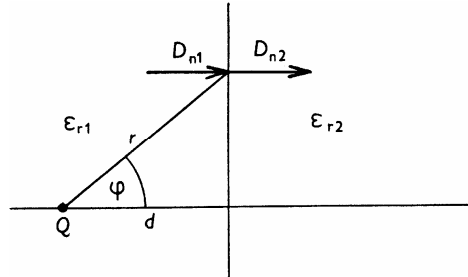
$$\epsilon_{r1} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \frac{Q}{r^2} \cos\varphi - \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} \right) = \epsilon_{r2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}} \frac{Q}{r^2} \cos\varphi + \frac{\sigma_v}{2\epsilon_0} \right)$$

Ak uvážime, že  $\cos \varphi = d/r$ , dostaneme výraz pre plošný viazaný náboj

$$\sigma_v = \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}} \frac{Qd}{2\pi r^3}$$

Ak  $d = 0$ , potom  $\sigma_v = 0$ . Ak sa náboj  $Q$  nachádza na rozhraní, potom viazané náboje na rozhraní nie sú. Integráciou  $\sigma_v$  po celom nekonečnom rozhraní dostaneme celkový viazaný náboj

$$Q_v = \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}} Q$$



Obr. R96

## Elektrický prúd

97. a)  $J = 1,27 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$ ,  $v = 9,36 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$ ; b)  $E = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$ ;

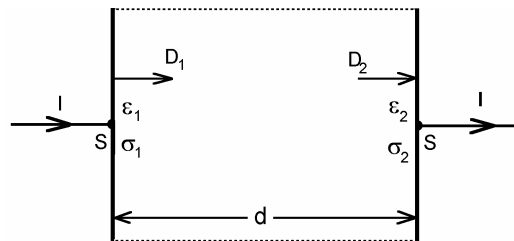
c)  $Q = 20 \text{ C}$ ,  $n = 1,25 \cdot 10^{20}$  elektrónov; d)  $U = 2,2 \text{ V}$

98.  $I = 20 \text{ mA}$

99. a)  $I = 0,90 \text{ A}$ ; b)  $n = 1,35 \cdot 10^{20}$  iónov,  $m = 5,19 \text{ mg}$

100. Ak kondenzátorom tečie prúd  $I$ , potom intenzita elektrického poľa v dielektriku kondenzátora je  $E = I/(\sigma S)$  a elektrická indukcia  $D = \varepsilon I/(\sigma S)$ , kde

$$\sigma(x) = \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{d} x \quad \varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x$$



Obr. R100

Celkový náboj v objeme dielektrika kondenzátora vypočítame integráciou vektora  $D$  po povrchu dielektrika (obr. R100)

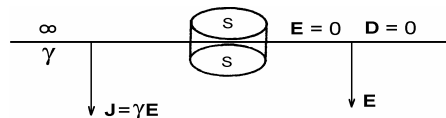
$$Q = \oint D dS = (D_2 - D_1)S = \left( \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) I = \epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_{r2}}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_{r1}}{\sigma_1} \right) I = -19,5 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

Ak sa zmení smer prúdu, zmení sa aj znamienko náboja. Odpor kondenzátora

$$R = \int_0^d \frac{dx}{\sigma S} = \frac{d}{S(\sigma_2 - \sigma_1)} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 8 \cdot 10^6 \Omega$$

Výkon spotrebovaný v kondenzátore

$$P = RI^2 = 8 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$



Obr. R101

101. Ak zvolíme na rozhraní Gaussovu plochu v tvare valca podľa obr. R101, potom tok intenzity elektrického poľa touto plochou je

$$ES = \frac{\sigma S}{\epsilon}$$

kde  $S$  je plocha základne valca,  $\epsilon$  je permitivita prostredia s konečnou vodivosťou  $\gamma$ ,  $\sigma$  je plošná hustota náboja na rozhraní. Podľa Ohmovho zákona  $E = J/\gamma$  takže pre plošnú hustotu náboja na rozhraní plyní

$$\sigma = \frac{\epsilon J}{\gamma}$$

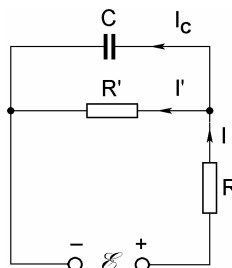
102. Kondenzátorom tečie prúd  $I_C = ne\tau$ , kde  $n$  je počet iónov (alebo elektrónov) vznikajúcich v jednotkovom objeme za jednotku času,  $e$  je elementárny náboj,  $\tau$  je objem kondenzátora. Pre obvod na obr. R102 platí

$$\mathcal{E} = RI + R'I'$$

$$I = I' + I_C$$

z čoho

$$I = \frac{\mathcal{E} + ne\tau R'}{R + R'} = 8,1 \cdot 10^{-8} \text{ A}$$



Obr. R102

**103.** Z princípu kontinuity prúdu a z geometrie kondenzátora plynie, že prúdové hustoty v obidvoch prostrediach sú rovnaké, teda  $J_1 = J_2$ , alebo využitím Ohmovho zákona platí  $\gamma E_1 = \gamma_2 E_2$ . Napätia na jednotlivých vrstvách dielektrík sú

$$U_1 = E_1 h_1 \qquad U_2 = E_2 h_2$$

kde  $E_1$  a  $E_2$  sú intenzity elektrických polí v jednotlivých vrstvách dielektrík. Napätie na kondenzátore

$$U = U_1 + U_2 = E_1 h_1 + E_2 h_2$$

Z uvedených rovníc dostaneme pre intenzity elektrických polí výrazy

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1} \qquad E_2 = \frac{\gamma_1 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

Prúdové hustoty v dielektrikách

$$J_1 = J_2 = \frac{\gamma_1 \gamma_2 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

a elektrické indukcie

$$D_1 = \frac{\epsilon_1 \gamma_2 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1} \qquad D_2 = \frac{\epsilon_2 \gamma_1 U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

Všetky vektory poľa smerujú od kladnej elektródy k zápornej. Na rozhraní dielektrík je voľný plošný náboj s hustotou

$$\sigma = D_2 - D_1 = (\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2) \frac{U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

a viazaný plošný náboj s hustotou

$$\sigma_v = P_2 - P_1 = [(\epsilon_2 - \epsilon_0) \gamma_1 - (\epsilon_1 - \epsilon_0) \gamma_2] \frac{U}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

Na rozhraní dielektrika s kladnou elektródou je

$$\sigma_v = -(\epsilon_1 - \epsilon_0) E_1 \qquad \text{a} \qquad \sigma = D_1$$

a na rozhraní dielektrika so zápornou elektródou je

$$\sigma_v = (\epsilon_2 - \epsilon_0) E_2 \qquad \text{a} \qquad \sigma = -D_2$$

Voľné a viazané náboje s priestorovou hustotou v dielektriku nie sú.

**104.** Intenzita elektrického poľa vo vodiči súvisí s prúdovou hustotou podľa Ohmovho zákona  $E = J/\gamma$  kde  $\gamma$  je konduktivita. Z Gaussovho zákona ďalej plynie, že

$$\operatorname{div} E = \operatorname{div} \frac{\mathbf{J}}{\gamma} = \frac{\rho(t)}{\epsilon} \qquad \text{alebo} \qquad \operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{\gamma \rho(t)}{\epsilon}$$

Porovnaním posledného výrazu s rovnicou kontinuity (pri zachovaní homogénneho rozloženia náboja)

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{d\rho(t)}{dt}$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu



$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho(t) \quad \text{ktorej riešením je} \quad \rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}t\right)$$

Hustota náboja vo vodiči s časom exponenciálne klesá. Časová konštanta procesu je  $\tau = \varepsilon/\gamma$ .

**105.**  $R_x = 220 \Omega$

**106.**  $U_{ab} = 0,22 \text{ V}, I = 0,46 \text{ A}$

**107.** Ak označíme napätia na kondenzátoroch  $2C$  a  $C$  postupne  $U_1$  a  $U_2$ , potom:

a)  $U_1 = 45 \text{ V}, U_2 = 15 \text{ V};$       b)  $U_1 = 20 \text{ V}, U_2 = 40 \text{ V};$       c)  $U_1 = 60 \text{ V}, U_2 = 0 \text{ V}$

**108.**  $R_x = R/4$

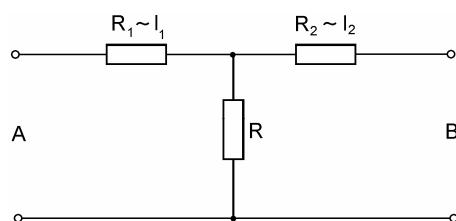
**109.**  $U_1 = 55,1 \text{ V}, U_2 = 44,9 \text{ V}$

**110.** Náhradná schéma kábla so zvodom je na obr. R110, kde  $R_1 \sim l_1$  je odpor kábla od stanice A po miesto zvodu (vzdialenosť  $l_1$ ). Podobne  $R_2 \sim l_2$  je odpor druhej časti kábla, úmerný vzdialenosti stanice B od miesta zvodu.  $R$  je odpor zvodu. Ak sa v stanici A pripojí kábel na napätie  $\mathcal{E}_1$ , potom v stanici B sa bezprúdovo meria napätie

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}_1 R}{R_1 + R}$$

a pri meraní v opačnom smere (zdroj  $\mathcal{E}_2$  v stanici B) je v stanici A napätie

$$U_2 = \frac{\mathcal{E}_2 R}{R_2 + R}$$



Obr. R110

Tieto výrazy možno upraviť na tvar

$$U_1 R_1 = (\mathcal{E}_1 - U_1) R \qquad U_2 R_2 = (\mathcal{E}_2 - U_2) R$$

Vzájomným delením oboch rovníc a ďalšou úpravou s uvažovaním, že  $R_1/R_2 = l_1/l_2$  dostaneme

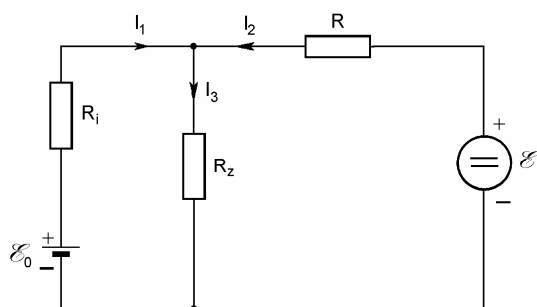
$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{U_2}{U_1} \frac{\mathcal{E}_1 - U_1}{\mathcal{E}_2 - U_2}$$

Keďže dĺžka celého kábla je  $l = l_1 + l_2$ , pre  $l_1$  dostaneme

$$l_1 = \frac{U_2 (\mathcal{E}_1 - U_1) l}{U_2 \mathcal{E}_1 + U_1 \mathcal{E}_2 - 2U_1 U_2}$$

Ak dosadíme číselné hodnoty, potom pre vzdialenosť miesta zvodu od stanice A dostaneme hodnotu  $l_1 = 19,047 \text{ km}$ .

111. a) Schéma zapojenia je na obr. R111.



Obr. R111

b) Ak zvolíme prúdy podľa obr. R111, potom riešením zodpovedajúcich Kirchhoffových rovníc pre prúd  $I_1$  dostaneme

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_0(R + R_z) - \mathcal{E}R_z}{R_i R + R_i R_z + R R_z}$$

Ak  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ , potom  $I_1 = 0$ , z čoho plynie, že  $R$  musí spĺňať podmienku

$$R = \left( \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_0} - 1 \right) R_z$$

Dosadením za  $R$  vo výraze pre  $I_1$  dostaneme

$$I_1 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E})\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_1(R_i + R_z) - \mathcal{E}_0 R_z}$$

Ak  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$ , potom

$$I_1 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_1(R_i + R_z) - \mathcal{E}_0 R_z}$$

c) Riešením Kirchhoffových rovníc pre prúd spotrebičom  $R_z$  dostaneme

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_0[\mathcal{E}R_i + (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0)R_z]}{\mathcal{E}_1 R_i R_z + R_z^2(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0)}$$

d) Numericky: Prúd odoberaný z batérie pri  $\mathcal{E}_2 = 100$  V má hodnotu  $I_1 = 104,17$  mA.

Prúd tečúci spotrebičom pri  $\mathcal{E}_2 = 100$  V má hodnotu  $I_3 = 598,96$  mA a pri  $\mathcal{E}_1 = 120$  V hodnotu  $I_3 = 600$  mA. Prúdy spotrebičom sa teda pri krajných hodnotách napätia  $\mathcal{E}$  líšia veľmi málo.

112. Zapojenie na obr. 112 v zadaní úlohy sa pre účely riešenia dá prekresliť na tvar podľa obr. R112, kde zdroj napätia  $U$  predstavuje postupne zdroje  $0, +\mathcal{E}_2, -\mathcal{E}_3$ . Pre prúd  $I$  riešením príslušných Kirchhoffových rovníc dostaneme

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - U R_1}{R^2}$$

kde  $R^2 = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$ . Označme postupne prúdy pri jednotlivých polohách prepínača  $I_1 = 60$  mA,  $I_2 = 40$  mA a  $I_3$  neznámy prúd. V jednotlivých polohách prepínača bude postupne platiť

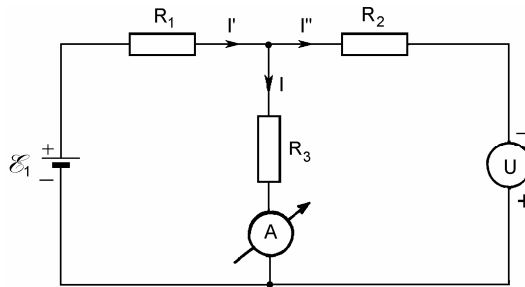
$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2}{R^2} \quad (U = 0)$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R^2} \quad (U = \mathcal{E}_2)$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_3 R_1}{R^2} \quad (U = -\mathcal{E}_3)$$

Riešením uvedeného systému rovníc pre prúd  $I_3$  dostaneme

$$I_3 = I_1 + \frac{\mathcal{E}_3}{\mathcal{E}_2} (I_1 - I_2) = 90 \text{ mA}$$

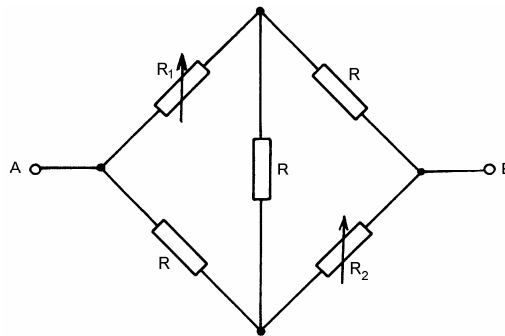


Obr. R112

113. Zapojenie na obr. 113 v zadaní úlohy sa dá prekresliť na tvar podľa obr. R113. Odpor medzi svorkami A-B tohoto zapojenia vypočítaný napr. pomocou transformácie hviezda – trojuholník (pozri úlohu 250) alebo pomocou Kirchhoffových zákonov je

$$R_{AB} = \frac{3RR_1R_2 + 2R^2(R_1 + R_2) + R^3}{R_1R_2 + 2R(R_1 + R_2) + 3R^2}$$

pričom musí platiť  $R_{AB} = R$ , čo je splnené, ak  $R_1R_2 = R^2$



Obr. R113

114. Najprv vypočítame odpor uzemnenia integráciou odporov pologuľových vrstiev v pôde od  $r_0 = 30 \text{ cm}$  do nekonečna, teda

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{2\pi r^2} = \frac{1}{2\pi\sigma r_0} = 55 \Omega$$

Celkový prúd tečúci do uzemnenia je

$$I = \frac{U}{R} = 2\pi\sigma r_0 U = 7\,547 \text{ A}$$

Tento prúd sa radiálne rozteká do "nekonečného polopriestoru Zeme", a teda aj po povrchu Zeme. Vo vzdialenosti  $r$  od stožiaru bude prúdová hustota

$$J = \frac{I}{2\pi r^2} = \frac{\sigma_0 U}{r^2}$$

a intenzita elektrického poľa na povrchu Zeme

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{r_0 U}{r^2}$$

Krokové napätie vo vzdialenosti  $r$  od stožiaru bude

$$U_k = \int_r^{r+l} E dr = r_0 U \int_r^{r+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{r_0 l U}{r(r+l)}$$

kde  $l = 80 \text{ cm}$  je dĺžka kroku.

a) Pre  $r = 100 \text{ m}$  je  $U_k = 9,5 \text{ V}$ .

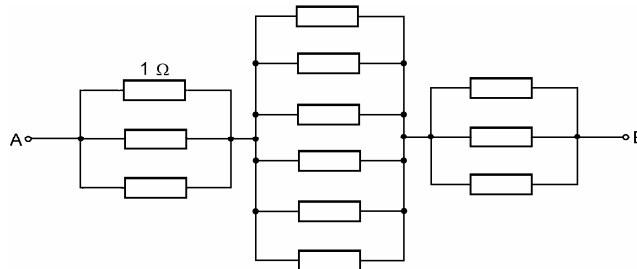
b) Pre  $r = 25 \text{ m}$  je  $U_k = 149 \text{ V}$ . Takéto napätie by mohlo vážne ohroziť život človeka idúceho priamu ku stožiaru.

**115.** Integráciou elementárnych odporov guľových vrstiev s hrúbkou  $dr$  dostaneme pre odpor guľového kondenzátora

$$R = \frac{\rho(R_2 - R_1)}{4\pi R_1 R_2}$$

**116.**  $R = \frac{1}{2\pi\sigma_1} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2\pi\sigma_2 b}$

**117.** Ak medzi vrcholmi  $A$  a  $B$  kocky prechádza prúd, potom vrcholy  $a$ - $b$ - $c$  priľahlé k vrcholu  $A$  sú na rovnakom potenciáli a vrcholy  $d$ - $e$ - $f$  priľahlé k  $B$  sú tiež na rovnakom potenciáli. Pre účely určenia celkového odporu možno vrcholy s rovnakým potenciálom bezodporovo spojiť, čím vznikne zapojenie podľa obr. R117. Výsledný odpor takého zapojenia je  $R_{AB} = 5/6 \Omega$ .



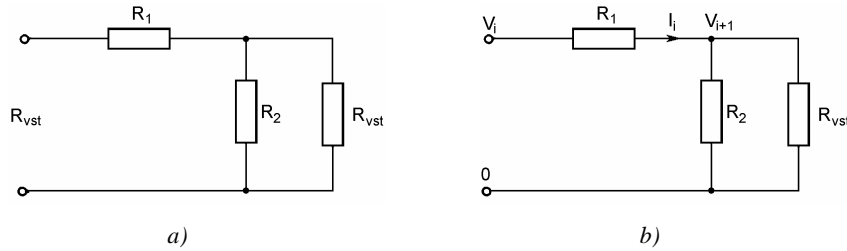
Obr. R117

118. a) Keďže odpor reťazca na obr. 118 v zadaní úlohy sa pridaním jednej dvojice  $R_1 - R_2$  nezmení, potom pre reťazec možno nakresliť náhradné zapojenie podľa obr. R118a. Pre vstupný odpor tohoto zapojenia platí

$$R_{vst} = \frac{R_2 R_{vst}}{R_2 + R_{vst}} + R_1 \quad \text{z čoho} \quad R_{vst} = R_1 \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{R_2}{R_1}}}{2} = \frac{V_i}{I_i}$$

kde  $V_i$  je potenciál  $i$ -tého uzla a  $I_i$  je prúd tečúci medzi uzlami s potenciálmi  $V_i$  a  $V_{i+1}$  (pozri obr. R118b). Pre vetvu s prúdom  $I_i$  platí

$$V_i - V_{i+1} = R_1 I_i \quad \text{alebo} \quad \frac{V_{i+1}}{V_i} = 1 - R_1 \frac{I_i}{V_i} = 1 - \frac{R_1}{R_{vst}} = q$$



Obr. R118

Postupnosť potenciálov  $V_0, V_1, V_2, \dots$  je skutočne geometrická, klesajúca s kvocientom

$$q = 1 - \frac{R_1}{R_{vst}} < 1$$

pretože  $R_{vst} > R_1$ . Ak má postupnosť klesať s kvocientom  $q = 1/2$ , potom musí platiť

$$\frac{R_1}{R_{vst}} = \frac{1}{2} \quad \text{čo bude splnené vtedy, ak} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

Z riešenia úlohy vidíme, že každý nekonečný reťazec podľa obr. 118 možno nahradiť reálnym konečným reťazcom zakončeným odporom, ktorého hodnota sa rovná vstupnému odporu  $R_{vst}$  nekonečného reťazca. Elektrické vlastnosti konečného a nekonečného reťazca zo strany vstupných svoriek budú rovnaké. Podobne sa uvažuje aj pri analýze dlhých prenosových vedení elektromagnetických signálov, kde ekvivalentom vstupného odporu  $R_{vst}$  nekonečného reťazca je vlnový odpor (vlnová impedancia) vedenia.

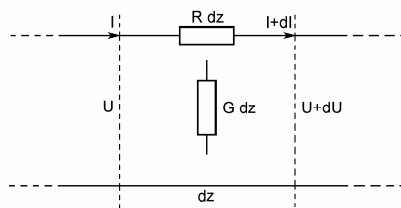
119. Obvody na obr. 119a,b v zadaní úlohy majú rovnaké vstupné odpory  $R_{vst} = 2R$ . Napätia  $U_1 = U_0/2, U_2 = U_0/4, U_3 = U_0/8$ . Vstupný odpor reťazca na obr. 119c v zadaní úlohy je tiež  $2R$  a napätie v  $i$ -tom uzle je  $U_i = U_0/2^i$ . Výsledky sú v súhlase s výsledkami úlohy 118.

120. Na obr. R120 je znázornený elementárny úsek kábla dĺžky  $dz$  s pozdĺžnym odporom  $Rdz$  a priechnou vodivosťou  $Gdz$ . Pre zmeny napätia a prúdu v danom úseku platia vzťahy

$$-dU = RIdz \quad -dI = G Udz$$

alebo

$$\frac{dU}{dz} = -RI \quad \frac{dI}{dz} = -GU$$



Obr. R120

Derivovaním druhej rovnice a dosadením do prvej dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd v tvare

$$\frac{d^2 I}{dz^2} = RGI$$

ktorej všeobecné riešenie je

$$I(z) = A_1 \exp(-\sqrt{RG}z) + A_2 \exp(+\sqrt{RG}z)$$

a napätie na kábli je dané funkciou

$$U(z) = -\frac{1}{G} \frac{dI}{dz} = \sqrt{\frac{R}{G}} \left[ A_1 \exp(-\sqrt{RG}z) - A_2 \exp(+\sqrt{RG}z) \right]$$

$A_1$  a  $A_2$  sú integračné konštanty, ktoré možno určiť z okrajových podmienok (napr. zadaním prúdu a napätia na vstupe kábla pre  $z = 0$ ).

#### 121. Odpor kondenzátora

$$R = \frac{d}{\sigma S} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\sigma C} = 3,54 \cdot 10^8 \Omega \quad \text{a prúd} \quad I = U/R = 2,82 \mu\text{A}$$

#### 122. Odpory kondenzátorov

$$R_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}{\sigma_1 C_1} \qquad R_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}{\sigma_2 C_2}$$

sú spojené v sérii a pripojené na zdroj. Napätia na jednotlivých kondenzátoroch sú

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U \frac{\sigma_2 \epsilon_{r1} C_2}{\sigma_2 \epsilon_{r1} C_2 + \sigma_1 \epsilon_{r2} C_1} = 1169 \text{ V}$$

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U \frac{\sigma_1 \epsilon_{r2} C_1}{\sigma_1 \epsilon_{r2} C_1 + \sigma_2 \epsilon_{r1} C_2} = 31 \text{ V}$$

#### 123. Elektrické odpory jednotlivých guľí vo vodnom prostredí sú

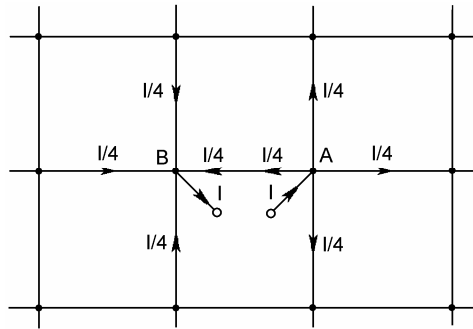
$$R_1 = \frac{1}{\sigma} \int_{a_1}^{\infty} \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi \sigma a_1} \qquad \text{podobne} \qquad R_2 = \frac{1}{4\pi \sigma a_2}$$

Odpor medzi guľami je

$$R = R_1 + R_2 = \frac{a_1 + a_2}{4\pi \sigma a_1 a_2} = \frac{U}{I}$$

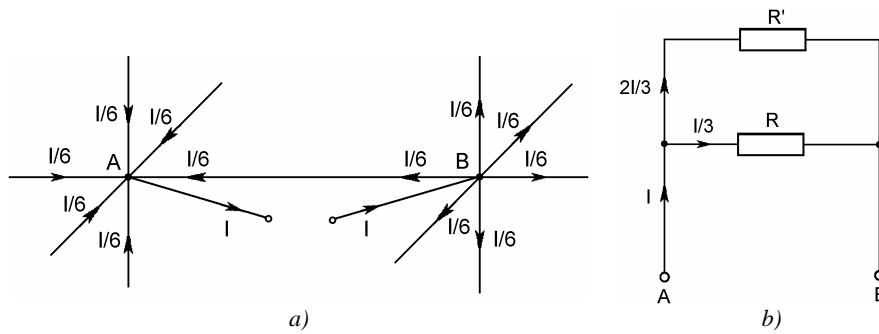
z čoho vodivosť vody

$$\sigma = \frac{(a_1 + a_2)I}{4\pi a_1 a_2 U}$$



Obr. R124

**124.** Predpokladajme, že k nekonečnej sieti na obr. R124 sú pripojené dva rovnaké prúdové zdroje  $I$ , a to tak, že k uzlu  $A$  je pripojený kladný pól jedného zdroja a k uzlu  $B$  je pripojený záporný pól druhého zdroja. Zostávajúce dva póly oboch zdrojov sú k sieti pripojené formálne v nekonečne. Prvý zdroj dodáva do siete prúd  $I$ , ktorý sa symetricky rozteká do štyroch vetiev okolo uzla  $A$ . Do uzla  $B$  sa podobným spôsobom stekajú také isté prúdy. Z hľadiska uzlov  $A$  a  $B$  pôsobí v sieti prúdový zdroj  $I$ , ktorého polovica prúdu tečie vetvou medzi uzlami  $A$  a  $B$  a druhá polovica celou nekonečnou sieťou. Odpor vetvy  $R$  a odpor zvyšku siete sú teda rovnaké a sú zapojené paralelne. Z toho plynie, že odpor celej siete medzi uzlami  $A$  a  $B$  je  $R_{AB} = R/2$ .



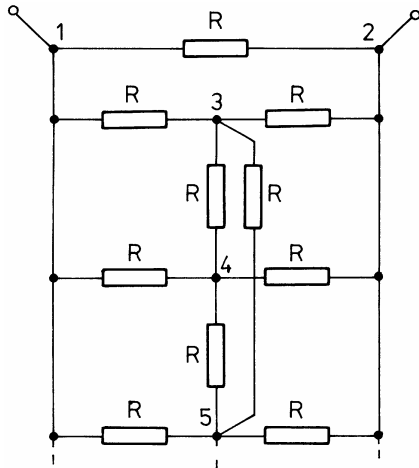
Obr. R125

**125.** Dva prúdové zdroje s prúdmi  $I$  pripojené k sieti podobným spôsobom ako v úlohe 124 dodávajú do siete rovnaké prúdy opačných smerov, ktoré sa vetvia do šiestich príľahlých vetiev podľa obr. R125a. Z hľadiska uzlov  $A - B$  je k sieti pripojený prúdový zdroj  $I$ , ktorý do vetvy medzi uzlami  $A$  a  $B$  dodáva prúd  $I/6 + I/6 = I/3$  a zvyškom siete tečie prúd  $2I/3$ . Celú sieť možno teda nahradiť zapojením podľa obr. R125b, kde  $R'$  je odpor siete bez odporu vetvy  $A - B$ . Z obr. R125b je zřejmé, že

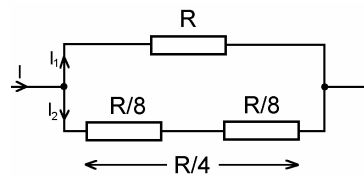
$$\frac{R'}{R} = \frac{I/3}{2I/3} = \frac{1}{2} \quad \text{z čoho } R' = R/2 \text{ a odpor celej siete} \quad R_{AB} = \frac{RR'}{R+R'} = \frac{R}{3}$$

126. Body treba usporiadať tak, ako na obr. R126. Ak sa k bodom 1 – 2 pripojí zdroj EMN, potom body 3 až  $n$  sú v dôsledku symetrie zapojenia na rovnakom potenciáli a možno ich bezodporovo spojiť. Výsledný odpor medzi bodmi 1 a 2 je teda

$$R_c = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{n-2}{2R}} = \frac{2R}{n}$$



Obr. R126



Obr. R127

127. Desať bodov je navzájom prepojených 45 odporami  $R$ . Ak k dvom bodom pripojíme zdroj EMN  $\mathcal{E}$ , celkový prúd dodávaný zdrojom bude

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R_c}$$

kde  $R_c$  je celkový odpor siete medzi uvažovanými bodmi. Podľa predchádzajúcej úlohy

$$R_c = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{4}{R}} = \frac{R}{5}$$

Odpor  $R_c$  je teda výsledkom paralelného radenia odporu  $R$  medzi uvažovanými bodmi a odporu  $R/4$ , ktorý je dvojnásobkom odporu vzniknutého paralelným spojením ôsmich odporov  $R$  (obr. R127). Pre prúdy na obrázku platí

$$I = I_1 + I_2 \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{4}$$

z čoho  $I_1 = \frac{1}{5}I$  a  $I_2 = \frac{4}{5}I$

Prúd  $I_1$  tečie odporom  $R$ , ktorý je paralelný k svorkám zdroja. Jeho veľkosť je

$$I_1 = \frac{1}{5}I = \frac{\mathcal{E}}{5R_i + R} = 0,2 \text{ A}$$



Prúd  $I_2$  sa rovnakým dielom rozteká do ôsmich odporov, ktoré sú jedným koncom pripojené ku kladnej svorke zdroja EMN a steká ôsmimi odpormi, ktoré sú pripojené jedným koncom k zápornej svorke zdroja. Teda prúd  $I'_2$  každým z týchto šestnástich odporov je

$$I'_2 = \frac{I_2}{8} = \frac{1}{10} I = \frac{\mathcal{E}}{10R_i + 2R} = 0,1 \text{ A}$$

Ostatnými odpormi prúd netečie.

128.  $I = \frac{dQ}{dt} = \mathcal{E}C_t = 10^{-8} \text{ A}$

129. Zmena energie kondenzátora po dobe  $t$  je

$$\Delta W_C = \frac{1}{2} \Delta Q \mathcal{E} = \frac{1}{2} \mathcal{E} I t$$

a energia dodaná zdrojom  $W = \mathcal{E} I t$ . Zdroj dodáva dvojnásobnú energiu ako je energia kondenzátora. Rozdiel energie sa spotrebuje na mechanickú prácu spojenú so zmenou kapacity kondenzátora.

130. Výkon v odpore  $R_3$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = \frac{\mathcal{E}^2 R_2^2 R_3}{[R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)]^2}$$

nezávisí od malých zmien  $R_3$  v maxime funkcie  $P_3(R_3)$ . Derivovaním tejto funkcie podľa  $R_3$  a z podmienky pre jej maximum  $\partial P_3 / \partial R_3 = 0$  dostaneme hľadaný vzťah medzi odpormi

$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

131. a)  $R = 48,4 \Omega$ ;    b)  $l = 38 \text{ cm}$ ;    c)  $P = 1 \text{ kW}$

132. Zvodový prúd v kábli tečie radiálne medzi vnútorným vodičom a plášťom. Pričný odpor kábla je

$$R = \frac{1}{\sigma l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi \sigma l} \ln \frac{r_2}{r_1} = 11\,031,78 \Omega$$

kde  $r_1$  je polomer vnútorného vodiča,  $r_2$  je polomer plášťa a  $l$  je dĺžka kábla.

a) Zvodový prúd kábla je

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2\pi \sigma U}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 54,39 \text{ mA}$$

b) Hustota prúdu v dielektriku kábla

$$J = \frac{I}{2\pi r l} = \frac{\sigma U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{8,656 \cdot 10^{-7}}{r} \quad \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}^2}; \text{ m} \right]$$

c) Hustota tepelného výkonu v dielektriku

$$p = JE = \frac{J^2}{\sigma} = \frac{\sigma U^2}{r^2 \ln^2 \frac{r_2}{r_1}} = \frac{7,493 \cdot 10^{-4}}{r^2} \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3}; \text{ m} \right]$$

d) Celkové tepelné straty v kábli

$$P = 2\pi l \int_{r_1}^{r_2} p r dr = \frac{2\pi \sigma l U^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 32,6 \text{ W}$$

133. Celkový odpor zapojenia zo svoriek zdroja  $\mathcal{E}_1$  (pri skratovanom  $\mathcal{E}_2$ ) je  $R' = 11R/5$  a zo svoriek zdroja  $\mathcal{E}_2$  (pri skratovanom  $\mathcal{E}_1$ )  $R'' = 11R/4$ , takže hodnoty elektromotorických napätí možno vyjadriť vzťahmi

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{R'P_1} = \sqrt{\frac{11RP_1}{5}} = 11\sqrt{R}, \quad [\text{V}; \Omega] \quad \mathcal{E}_2 = \sqrt{R''P_2} = \sqrt{\frac{11RP_2}{4}} = 22\sqrt{R}, \quad [\text{V}; \Omega]$$

kde  $P_1$  a  $P_2$  sú výkony, ktoré dodávajú zdroje  $\mathcal{E}_1$  a  $\mathcal{E}_2$  samostatne. Pre výpočet výkonu dodávaného do odporov zapojenia obidvoma zdrojmi súčasne treba nájsť prúdy v jednotlivých odporoch. Pomocou Kirchhoffových zákonov dostaneme pre prúdy v jednotlivých odporoch výrazy

$$I_R = \frac{3\mathcal{E}_2 - 5\mathcal{E}_1}{11R} = \frac{1}{\sqrt{11R}} \left( 3\sqrt{\frac{P_2}{2}} - 5\sqrt{\frac{P_1}{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad [\text{A}; \Omega]$$

$$I_{2R} = \frac{4\mathcal{E}_2 - 3\mathcal{E}_1}{11R} = \frac{1}{\sqrt{11R}} \left( 2\sqrt{P_2} - 3\sqrt{\frac{P_1}{5}} \right) = \frac{5}{\sqrt{R}}, \quad [\text{A}; \Omega]$$

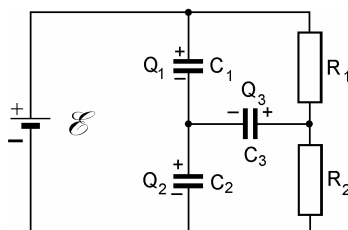
$$I_{3R} = \frac{2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{11R} = \frac{1}{\sqrt{11R}} \left( 2\sqrt{\frac{P_1}{5}} + \sqrt{\frac{P_2}{2}} \right) = \frac{4}{\sqrt{R}}. \quad [\text{A}; \Omega]$$

Celkový výkon dodávaný do zapojenia obidvoma zdrojmi je

$$P = RI_R^2 + 2RI_{2R}^2 + 3RI_{3R}^2 = 99 \text{ W}$$

alebo

$$P = P_1 + P_2 - 6\sqrt{\frac{P_1P_2}{20}} = 99 \text{ W}$$



Obr. R134

134. Ak označíme náboje na kondenzátoroch tak, ako na obr. R134, potom platia rovnice

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \mathcal{E} \quad -Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0 \quad \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Riešením týchto rovníc pre náboje dostaneme

$$Q_1 = \mathcal{E} \frac{C_1(C_2R_1 + C_2R_2 + C_3R_1)}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2 + C_3)} \quad Q_2 = \mathcal{E} \frac{C_2(C_1R_1 + C_1R_2 + C_3R_1)}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2 + C_3)}$$

$$Q_3 = Q_2 - Q_1 = \mathcal{E} \frac{C_3(C_2R_2 - C_1R_1)}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2 + C_3)}$$

Náboj a napätie na kondenzátore  $C_3$  budú nulové, keď bude splnená podmienka

$$C_2R_2 - C_1R_1 = 0$$

**135.** Prúdová hustota vo vodiči je

$$J = \frac{E}{\rho} = \frac{r^2 E}{\alpha}$$

a celkový prúd vodičom

$$I = \int_0^a J 2\pi r dr = \frac{2\pi E}{\alpha} \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi E a^4}{2\alpha} \quad \text{z čoho} \quad E = \frac{2\alpha I}{\pi a^4}$$

Elementárna vodivosť  $dG'$  nekonečne tenkej valcovej vrstvy s plochou  $dS = 2\pi r dr$  jednotkovej dĺžky je

$$dG' = \frac{dS}{\rho} = \frac{2\pi r^3 dr}{\alpha}$$

a celková vodivosť na jednotku dĺžky

$$G' = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2\alpha}$$

Odpor na jednotku dĺžky valca

$$R' = \frac{1}{G'} = \frac{2\alpha}{\pi a^4}$$

Vidíme, že intenzita elektrického poľa vo vodiči je daná súčinom prúdu a odporu na jednotku dĺžky vodiča, teda  $E = IR'$ .

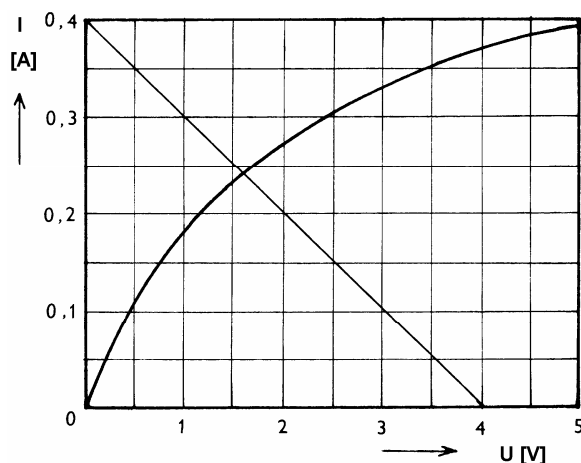
**136.** V grafe voltampérovej charakteristiky žiarovky zostrojíme zaťažovaciu charakteristiku odporu  $R$  (obr. R136), t. j. závislosť

$$U = \mathcal{E} - RI$$

Je to priamka prechádzajúca bodmi  $I = 0,4$  A,  $U = 0$  V a  $I = 0$  A,  $U = 4$  V. Priesečník tejto priamky s charakteristikou žiarovky dáva prúd v obvode s odporom  $R$  a žiarovkou  $I = 0,24$  A a napätie na žiarovke  $U_z = 1,6$  V. Napätie na odpore  $R$  je teda  $U_R = RI = \mathcal{E} - U_z = 2,4$  V. Zapojenie predstavuje mostík, v ktorom, ak má byť vyvážený, t. j. ak napätie medzi svorkami  $A$  a  $B$  má byť nulové, musí byť odpor potenciometra  $R' = R_1 + R_2$  delený v pomere

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2,4}{1,6} = 1,5$$

Časti potenciometra nad a pod bežcom majú hodnoty odporov  $R_1 = 24 \Omega$  a  $R_2 = 16 \Omega$ .



Obr. R136

**137.** Energia uvoľnená pri jednom blesku je  $W_0 = UIt = 2 \cdot 10^{10} \text{ J}$  a celková ročná energia bleskov  $W \approx 6 \cdot 10^{19} \text{ J}$ . Ak sú vstupné údaje úlohy vierohodné (sú prebrané z Feynmanovej učebnice), potom ročná energia bleskov je porovnateľná s ročnou celosvetovou produkciou elektrickej energie.

**138.** Pre obvod platí rovnica

$$\mathcal{E} = RI + \sqrt{\frac{I}{k}}$$

ktovej vyhovuje prúd  $I = 0,0979 \text{ A}$ . Výkon v odpore  $R$

$$P = RI^2 = 0,958 \text{ W}$$

Napätie a výkon na nelineárnom prvku sú

$$U = \sqrt{\frac{I}{k}} = 2,2 \text{ V} \qquad P = UI = 0,215 \text{ W}$$

Treba pripomenúť, že pre nelineárny prvok neexistuje pojem odporu v obyčajnom zmysle, teda ako pomer  $U/I$ , preto výrazy pre výkon tvaru  $P = RI^2 = U^2/R$  sú pre neho nepoužiteľné.

**139.** Pre prúdy v obvode na obr. 139 v zadaní úlohy platí

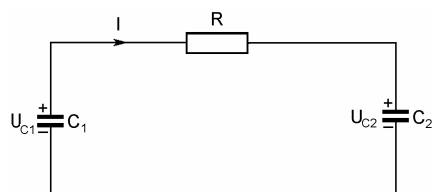
$$I_1 = \frac{P_z}{U_z} = 36 \text{ mA} \qquad I_2 = \frac{U_z}{R_0} = 39 \text{ mA}$$

Napätie na odpore  $R$  je  $U_R = (I_1 + I_2)R = U - U_z = 4,2 \text{ V}$ , z čoho  $R = 56 \Omega$ .

**140.**  $P = 6,4 \text{ W}$

141. Pre obvod na obr. R141a platí rovnica

$$-U_{C1} + U_{C2} + RI = 0 \quad \text{alebo} \quad \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int Idt + RI = 0$$



Obr. R141a

Deriváciou poslednej rovnice podľa času a s označením

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C}$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd v obvode

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

ktorej riešenie so začiatočnou podmienkou  $I_0 = U_0/R$  v čase  $t_0 = 0$  je

$$I = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{U_0}{R} \exp\left[-\frac{(C_1 + C_2)t}{RC_1C_2}\right]$$

Napätie na kondenzátore C

$$U_{C2} = \frac{1}{C_2} \int Idt = \frac{U_0}{RC_2} \int \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) dt = -\frac{U_0C}{C_2} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + \text{konšt.}$$

Hodnota integračnej konštanty plynie zo začiatočnej podmienky. V čase  $t = 0$  je  $U_{C2} = 0$ , a tak z posledného výrazu plynie, že

$$\text{konšt.} = \frac{U_0C}{C_2}$$

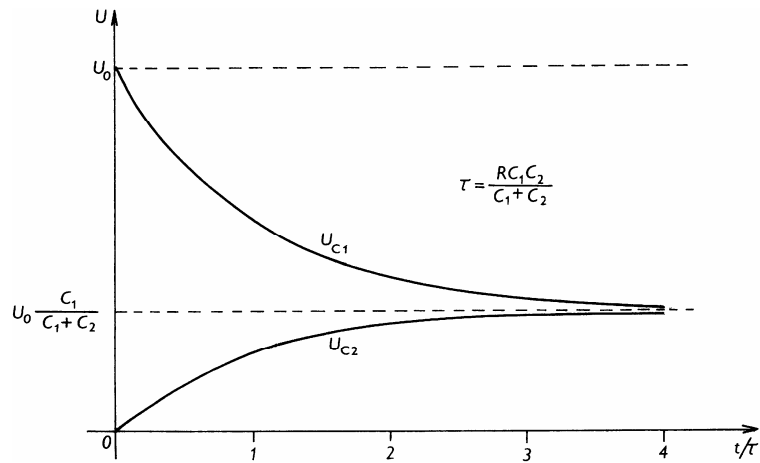
Napätie na kondenzátore  $C_2$  je teda

$$U_{C2} = \frac{U_0C}{C_2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right] = \frac{U_0C_1}{C_1 + C_2} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(C_1 + C_2)t}{RC_1C_2}\right] \right\}$$

Napätie na kondenzátore  $C_1$  je

$$U_{C1} = RI + U_{C2} = \frac{U_0}{C_1 + C_2} \left\{ C_1 + C_2 \exp\left[-\frac{(C_1 + C_2)t}{RC_1C_2}\right] \right\}$$

Priebehy napätí na kondenzátoroch sú znázornené na obr. R141b.



Obr. R141b

142. Pre prúdy v obvode na obr. R142 platí

$$I_C + I_R = I \quad \text{alebo} \quad C \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{R} = I$$

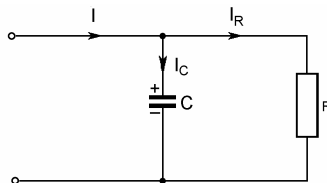
Riešenie tejto rovnice pre napätie na kondenzátore  $U_C$  so začiatočnou podmienkou  $U_C = 0$  v čase  $t = 0$  je

$$U_C = IR \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]$$

Na kondenzátore bude napätie  $U_{C0} = 500$  V v čase  $t_0$ , pre ktorý z posledného výrazu plynie

$$t_0 = RC \ln \frac{IR}{IR - U_{C0}}$$

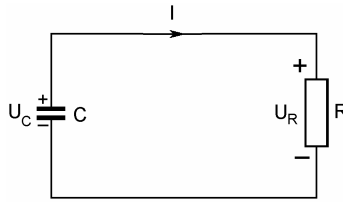
Dosadením číselných hodnôt  $R = 200$  M $\Omega$ ,  $C = 5$   $\mu$ F,  $I = 3$   $\mu$ A a  $U_{C0} = 500$  V dostaneme pre čas hodnotu  $t_0 = 1$  792 s.



Obr. R142

143. Kondenzátor s kapacitou  $C$  nabitý na potenciálový rozdiel  $U$  má energiu

$$W = \frac{CU^2}{2}$$



Obr. R143

Po pripojení kondenzátora na odpor  $R$  v každom okamihu platí rovnica (obr. R143)  $U_C + U_R = 0$ , alebo

$$\frac{1}{C} \int I dt + RI = 0$$

Derivovaním tejto rovnice dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd v obvode

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0$$

ktorej riešenie s počiatočnou podmienkou  $I_0 = U/R$  pre  $t = 0$  je

$$I = \frac{U}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Pri vybíjaní kondenzátora sa odporom vyžiarí tepelná energia

$$W = \int_0^{\infty} RI^2 dt = \frac{U^2}{R} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) dt = \frac{CU^2}{2}$$

ktorá sa rovná energii kondenzátora pred začiatkom vybíjania. Pri vybíjaní kondenzátora sa v skutočnosti vždy vyžiarí nejaká časť energie vo forme elektromagnetického impulzu do okolia (v okamihu zopnutia obvodu), čo v riešení nebolo vzaté do úvahy.

**144.** Časová konštanta  $\tau = RC = \epsilon/\sigma$  závisí iba od vlastnosti dielektrika a nezávisí od geometrie kondenzátora

**145.** a)  $I(t) = 0,003 e^{-3 \cdot 000t}$  A;    b)  $U_{C1} = 2$  V,  $U_{C2} = U_{C3} = 1$  V;    c)  $Q = 1 \mu\text{C}$

**146.** 1.  $C' = 2\,000$  pF

2. Ak sa nemá v časovom intervale  $\Delta t$  náboj na kondenzátore podstatne zmeniť, musí byť časová konštanta obvodu oveľa väčšia ako  $\Delta t$ , t. j. musí platiť  $RC \gg \Delta t$ , teda  $R \gg 10^7 \Omega$ .

3. Po zmene kapacity na hodnotu  $C' = 2C$  je prúd v obvode

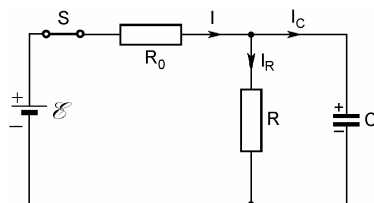
$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right) = \frac{\mathcal{E}}{2R} \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right)$$

a energia spotrebovaná v odpore

$$W = R \int_0^{\infty} I^2(t) dt = \frac{1}{4} C \mathcal{E}^2$$

147. Pre prúdy  $I$ ,  $I_C$  a  $I_R$  v obvode podľa obr. 147a po zopnutí spínača  $S$  platia rovnice

$$R_0 I + R I_R = \mathcal{E} \quad R I_R - \frac{1}{C} \int I_C dt = 0 \quad I = I_C + I_R$$



Obr. R147a

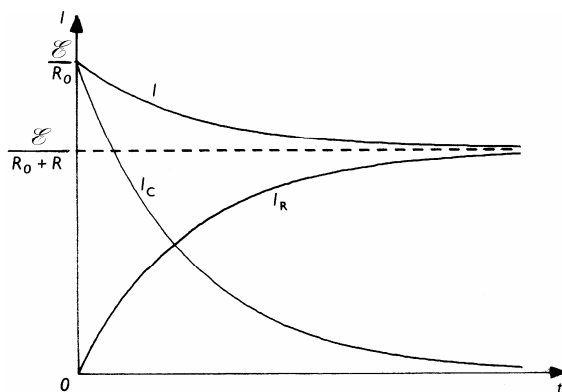
Riešením tohoto systému rovníc so začiatočnou podmienkou  $t = 0$ ,  $I_R = 0$ ,  $I = I_C = \mathcal{E}/R_0$ , dostaneme pre prúdy výrazy

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R} \left[ 1 + \frac{R}{R_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad I_C = \frac{\mathcal{E}}{R_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad I_R = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

kde

$$\tau = \frac{R_0 R}{R_0 + R} C$$

je časová konštanta obvodu. Grafy závislostí prúdov od času sú znázornené na obr. R147b.



Obr. R147b

148. Graf závislosti na obr. 148 v zadaní úlohy je daný výrazmi

$$U_C = \frac{U_0}{T} t \quad \text{pre } 0 < t < T$$

$$U_C = U_0 \left( 2 - \frac{t}{T} \right) \quad \text{pre } T < t < 2T$$

Pre  $0 < t < T$  musí platiť

$$U = R I + \frac{1}{C} \int I dt \quad \text{kde} \quad \frac{1}{C} \int I dt = U_C$$



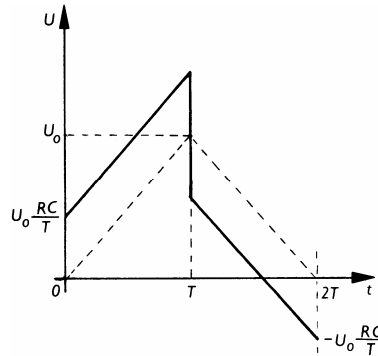
a 
$$I = C \frac{dU_C}{dt} = \frac{U_0 C}{T} \quad \text{teda} \quad U = U_0 \left( \frac{t}{T} - \frac{RC}{T} \right)$$

Pre  $T < t < 2T$  podobne musí platiť

$$U = RI + \frac{1}{C} \int Idt \quad \text{kde} \quad I = C \frac{dU_C}{dt} = -\frac{U_0 C}{T}$$

takže 
$$U = U_0 \left( 2 - \frac{RC}{T} - \frac{t}{T} \right)$$

Graf závislosti vstupného napätia od času je na obr. R148.



Obr. R148

**149.** Podľa obr. 149a v zadaní úlohy v okamihu nástupu čela impulzu ( $t = 0$ ) je kondenzátor  $C$  nenabitý a správa sa ako skrat. Prúd dodávaný do obvodu je limitovaný paralelnou dvojicou  $R_1 - R_2$  a má maximálnu hodnotu

$$I_{max} = U_0 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

kde  $U_0$  je amplitúda impulzu generátora. V tom istom okamihu v obvode na obr. 149b je

$$I_{max} = \frac{U_0}{R_1}$$

pretože kondenzátor  $C$  predstavuje skrat. V čase  $t = \Delta t$  je na kondenzátore  $C$  náboj  $I_C \Delta t$ , kde  $I_C = U_0 / R_1$  je nabíjací prúd kondenzátora. Napätie na kondenzátore

$$U_C = \frac{I_C \Delta t}{C} = \frac{U_0 \Delta t}{C R_1}$$

V čase  $t = \Delta t$  sa kondenzátor cez skratovaný generátor začne vybíjať so začiatočným prúdom

$$I_{min} = \frac{U_C}{R_1} = \frac{U_0 \Delta t}{C R_1^2}$$

V obvode na obr. 149b je v čase  $t = \Delta t$  kondenzátor  $C$  nabitý na napätie

$$U'_C = \frac{U_0 \Delta t}{C R'_1}$$

a začne sa cez generátor vybíjať so začiatočným prúdom

$$I_{min} = \frac{U'_C}{R'_1} = \frac{U_0 \Delta t}{C' R_1'^2}$$

Časová konštanta vybíjania kondenzátora  $C$  cez skratovaný generátor je  $\tau = CR_1$  a kondenzátora  $C'$

$$\tau' = \frac{R'_1 R'_2}{R'_1 + R'_2} C'$$

Porovnaním výrazov pre  $I_{max}$ ,  $I_{min}$  a  $\tau$  obidvoch obvodov dostaneme rovnice

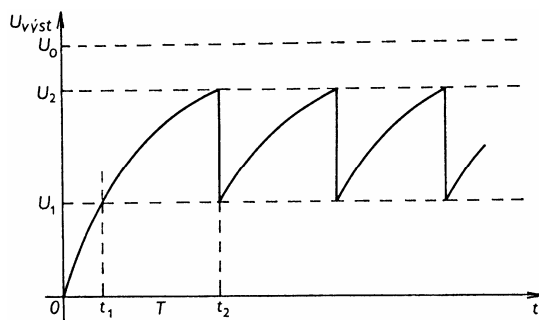
$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R'_1 \quad CR_1^2 = C' R_1'^2 \quad CR = \frac{R'_1 R'_2}{R'_1 + R'_2} C'$$

z ktorých plynie, že obvody budú identické, ak

$$C' = C \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right)^2 \quad R'_1 = R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad R'_2 = \frac{R_2^2}{R_1 + R_2}$$

alebo

$$C = C' \left( \frac{R'_2}{R'_1 + R'_2} \right)^2 \quad R_1 = R'_1 \frac{R'_1 + R'_2}{R'_2} \quad R_2 = R'_1 + R'_2$$



Obr. R150

150. Napätie na kondenzátore má časový priebeh

$$U = U_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]$$

a v čase  $t_1$  dosiahne hodnotu

$$U_1 = U_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{RC}\right) \right]$$

čo je minimálna úroveň napätia generátora. Maximálna hodnota napätia na kondenzátore je v čase  $t_2$ , kedy

$$U_2 = U_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_2}{RC}\right) \right]$$

Z posledných dvoch výrazov možno vyjadriť časy  $t_1$  a  $t_2$

$$t_1 = -RC \ln\left(1 - \frac{U_1}{U_0}\right) \quad t_2 = -RC \ln\left(1 - \frac{U_2}{U_0}\right)$$

Periódou kmitov relaxačného generátora

$$T = t_2 - t_1 = RC \ln \frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2}$$

Časový priebeh napätia relaxačného generátora je znázornený na obr. R150.

151. Ak označíme  $C' = 10^{-2} \text{ F/m}^2$  kapacitu bunečnej membrány na jednotku plochy, tak hrúbku bunečnej membrány možno určiť zo vzťahu

$$d = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{C'} = 2,65 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

časová konštanta bunečného kondenzátora

$$\tau = R'C' = \rho \epsilon = 1 \text{ ms}$$

kde  $R'$  je priečný odpor jednotkovej plochy bunečnej membrány (v jednotkách  $\Omega \cdot \text{m}^2$ ),  $\rho$  je rezistivita bunečnej membrány a  $\epsilon$  je jej permitivita. Rezistivitu možno určiť zo vzťahu

$$\rho = \frac{R'}{d} = 3,76 \cdot 10^7 \Omega \cdot \text{m}$$

čo je veľká hodnota v porovnaní s rezistivitou dobrých izolantov.

## Magnetizmus elektrických prúdov. Lorentzove transformácie elektromagnetických polí

152. Priame časti vodiča s prúdom k magnetickej indukcii v strede polkružnice neprispievajú, pretože smer prúdu je paralelný, resp. antiparalelný so sprievodičom k stredu polkružnice. K magnetickej indukcii prispieva iba časť prúdu tečúceho polkruhovým vodičom. Hodnota tohto príspevku je

$$B = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

153. Magnetická indukcia v bode  $P$  je superpozíciou indukcie  $B'$  od prúdu v polkružnici a  $B''$  od prúdu v dvojici paralelných nekonečných vodičov (obr. R153). Magnetická indukcia od elementu prúdu na polkružnici je

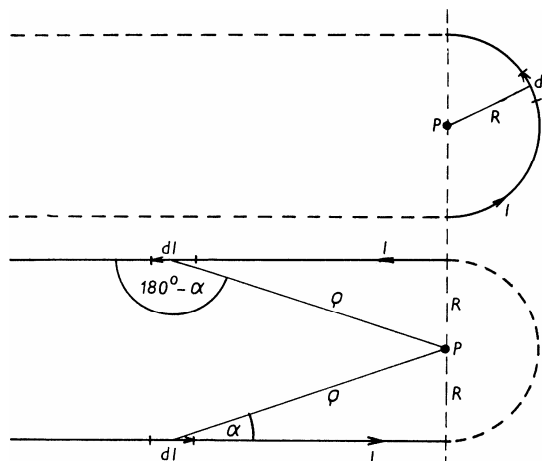
$$dB' = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}$$

a celkový príspevok od prúdu v polkruhovej časti je

$$B' = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

Pri danom smere prúdu vektor  $B'$  smeruje pred nákresňu. Od dvoch symetrických elementov  $dl$  na paralelných častiach vodiča magnetická indukcia je

$$dB'' = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{2\pi \rho^2} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha d\alpha}{2\pi R} \quad \text{a} \quad B'' = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Obr. R153

Vektor  $B''$  smeruje tiež pred náčrtom. Výsledná absolútna magnetická indukcia v bode  $P$  je daná súčtom príspevkov  $B'$  a  $B''$  a teda je

$$B = B' + B'' = \frac{\mu_0 I (2 + \pi)}{4\pi R}$$

$$154. B = \frac{4\mu_0 I a^2}{\pi(a^2 + 4d^2)(2a^2 + 4d^2)^{1/2}}$$

155. a) Pole v bode  $x$  bude superpozíciou polí dvoch kruhových prúdov  $nI$ , teda

$$B = \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{[a^2 + (b/2 + x)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[a^2 + (b/2 - x)^2]^{3/2}} \right\}$$

b) Rozvinieme výraz pre  $B$  do mocninného radu podľa mocnín  $x$ . Pretože  $x \ll a, b$  obmedzíme sa na prvé tri členy rozvoja, takže

$$B(x) = B(0) + \left( \frac{dB}{dx} \right)_{x=0} x + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2B}{dx^2} \right)_{x=0} x^2$$

Funkcia  $B(x)$  takto nadobudne tvar

$$B(x) = \frac{\mu_0 n I a^2}{r_0^3} \left[ 1 + \left( \frac{15 b^2}{4 r_0^4} - \frac{3}{r_0^2} \right) \frac{x^2}{2} \right] \quad \text{kde} \quad r_0 = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

c) Pri danej presnosti nebude  $B$  závisieť od  $x$ , ak

$$\frac{15 b^2}{4 r_0^4} - \frac{3}{r_0^2} = 0$$

čo je splnené pri  $a = b$ , pritom  $r_0 = \sqrt{5/4} a$ .

d) V bode 0 má magnetická indukcia hodnotu

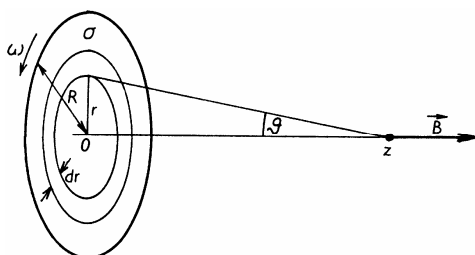
$$B(0) = \frac{\mu_0 n I a^2}{r_0^3} = 0,715541 \frac{\mu_0 n I}{a} = 8,9917610^{-7} \frac{n I}{a} \quad [\text{T}; \text{A.m}]$$

156. Disk možno rozložiť na medzikružia s polomerom  $r$  a šírkou  $dr$ , pričom príspevok k magnetickej indukcii od jedného medzikružia podľa obr. R156 je

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} \sin^3 \vartheta = \frac{\mu_0 dI}{2} \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

kde  $dI = \omega \sigma r dr$ . Celková magnetická indukcia v bode  $z$  je

$$B = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \int_0^R \frac{r^3 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left( \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 2|z| \right)$$

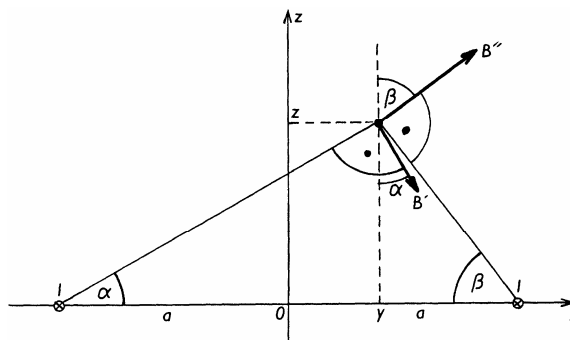


Obr. R156

alebo vo vektorovom tvare

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \sigma}{2} \left( \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 2|z| \right) \vec{\omega}$$

157. a) Magnetická indukcia bude mať zložky iba v rovine kolmej na vodiče (rovina  $yz$  podľa obr. R157). Prúdy  $I$  tečú za náčrtu obr. R157 a magnetické indukcie od jednotlivých prúdov v bode  $(y, z)$  sú



Obr. R157

$$B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(a+y)^2 + z^2}} \quad B'' = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(a-y)^2 + z^2}}$$

Zložky magnetickej indukcie v smere súradných osí sú

$$B'_y = B' \sin \alpha = \frac{\mu_0 I z}{2\pi\left[(a+y)^2 + z^2\right]} \quad B''_y = B'' \sin \beta = \frac{\mu_0 I z}{2\pi\left[(a-y)^2 + z^2\right]}$$

$$B'_z = -B' \cos \alpha = \frac{-\mu_0 I(a+y)}{2\pi\left[(a+y)^2 + z^2\right]} \quad B''_z = B'' \cos \beta = \frac{\mu_0 I(a-y)}{2\pi\left[(a-y)^2 + z^2\right]}$$

a výsledné zložky magnetickej indukcie od oboch prúdov

$$B_y = B'_y + B''_y = \frac{\mu_0 I z}{2} \left[ \frac{1}{(a-y)^2 + z^2} + \frac{1}{(a+y)^2 + z^2} \right]$$

$$B_z = B'_z + B''_z = \frac{\mu_0 I}{2} \left[ \frac{a-y}{(a-y)^2 + z^2} + \frac{a+y}{(a+y)^2 + z^2} \right]$$

b) V prípade, ak prúd vľavo od osi  $z$  na obr. R157 tečie pred nákresňu, zložky magnetickej indukcie budú

$$B_y = -B'_y + B''_y \quad B_z = -B'_z + B''_z$$

**158.** Použitím zákona celkového prúdu dostávame pre magneticú indukciu výrazy:

– pre  $r < a$

$$B = \frac{\mu I r}{2\pi a^2}$$

– pre  $a < r < b$

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

– pre  $b < r < b + d$

$$B = \frac{\mu I \left[ (b+d)^2 - r^2 \right]}{2\pi r (2bd + d^2)}$$

– pre  $r > b + d$

$$B = 0$$

**159.** Podľa obr. R159 platí pre pomer priečnej zložky prúdu  $I_p$  k pozdĺžnej  $I_z$

$$\frac{I_p}{I_z} = \frac{2a}{\delta}$$

Magneticá indukcia vo vnútri solenoidu je

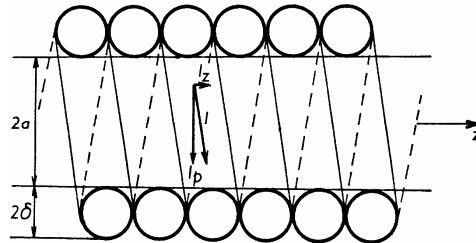
$$B_{int} = \mu_0 I_p n = \frac{\mu_0 I_p}{2\delta}$$

kde  $n = 1/(2\delta)$  je počet závitov na jednotku dĺžky solenoidu. Na povrchu solenoidu

$$B_{ext} = \frac{\mu_0 I_z}{2\pi a}$$

Pre pomer týchto indukcií platí

$$\frac{B_{int}}{B_{ext}} = 2\pi \frac{a^2}{\delta^2}$$



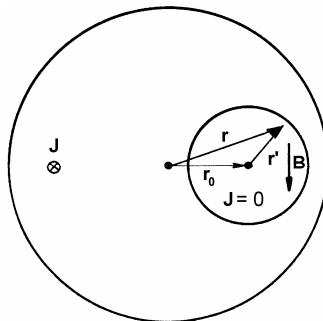
Obr. R159

160. Odpor vinutia solenoidu  $R = 184 \Omega$ . Tepelný výkon

$$P = \frac{U^2}{R} = 3,13 \text{ W} \quad \text{a prúd v solenoidu} \quad I = \frac{P}{U} = 131 \text{ mA}$$

Magnetická indukcia v strede solenoidu s dĺžkou  $d$ , polomerom  $r$  a s počtom závitov  $n$  na jednotku dĺžky pri prúde  $I$  je

$$B = \frac{\mu_0 I n d}{2\sqrt{\frac{d^2}{4} + r^2}} = 8,05 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$



Obr. R161

161. Dané prúdové rozloženie možno považovať za superpozíciu prúdovej hustoty  $J$  v celom valci a prúdovej hustoty  $-J$  v dutine valca. Podľa obr. R161 magnetická indukcia v bode danom polohovým vektorom  $r$ , spôsobená prúdovou hustotou  $J$  bude

$$B' = \mu_0 \frac{Jr}{2} \quad \text{alebo vo vektorovom vyjadrení} \quad B' = \mu_0 \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{2}$$

Magnetická indukcia od prúdu s hustotou  $-\mathbf{J}$  v tom istom bode je

$$B'' = \mu_0 \frac{-\mathbf{J} \times \mathbf{r}'}{2}$$

Výsledné pole v dutine je

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mathbf{B}'' = \mu_0 \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2} = \mu_0 \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}_0}{2}$$

kde  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  je polohový vektor stredu dutiny vzhľadom na stred valca. Pole v dutine je homogénne.

**162.** Podľa obr. R162 priestorový uhol, v ktorom vidno prúdovú slučku  $l$  z bodu  $P$  je  $\Omega$ . Pri zmene polohy bodu  $P$  o  $d\mathbf{u}$  sa zmení priestorový uhol o  $d\Omega$ . Posunutie bodu  $P$  o  $d\mathbf{u}$  je ekvivalentné posunutiu slučky o  $-\mathbf{du}$ . Zmena priestorového uhla  $d\Omega$  je rovná súčtu elementárnych priestorových uhlov malých rovnobežníkov tvorených vektormi  $d\mathbf{l}$  a  $-\mathbf{du}$ . Plocha takého rovnobežníka je

$$dS = |d\mathbf{u} \times d\mathbf{l}|$$

a plošný vektor rovnobežníka

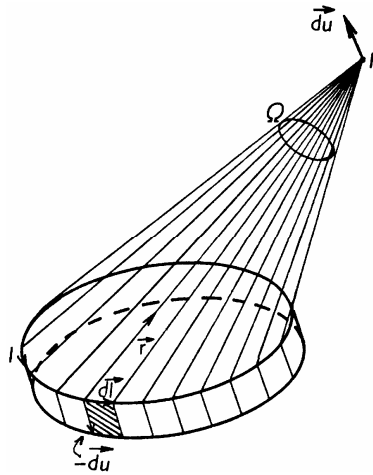
$$d\mathbf{S} = -d\mathbf{u} \times d\mathbf{l}$$

ktorého priemet do smeru vektora  $\mathbf{r}$  delený s  $r^2$  dáva elementárny priestorový uhol

$$-\left(\frac{d\mathbf{u} \times d\mathbf{l}}{r^3}\right) \cdot \mathbf{r} = -\left(\frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}\right) \cdot d\mathbf{u}$$

Integráciou posledného výrazu pozdĺž celej slučky  $l$  dostaneme zmenu  $d\Omega$  v tvare

$$d\Omega = -d\mathbf{u} \cdot \oint_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$



Obr. R162



avšak  $d\Omega = \text{grad } \Omega \cdot d\mathbf{u}$ , takže

$$-\text{grad}\Omega = \oint \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Magnetická indukcia prúdovej slučky sa teda v bode  $P$  dá vyjadriť výrazom

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{grad}\Omega = -\text{grad} \frac{\mu_0 I \Omega}{4\pi} = -\text{grad} V_m$$

kde

$$V_m = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega$$

je skalárny magnetický potenciál.

**163.** Valcovo symetrické pole od priameho vodiča

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

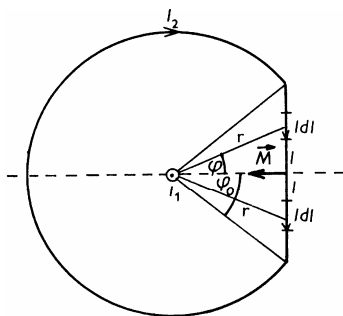
bude pôsobiť iba na priamy úsek uzavretého okruhu, pretože na jeho kruhovej časti je magnetická indukcia paralelná s prúdovými elementmi. Podľa obr. R163 elementárny moment dvojice síl pôsobiaci na dva symetrické prúdové elementy  $I_2 dl$  je

$$dM = 2dlF = 2I_2 B \sin \varphi dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l^2 dl}{\pi r^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos \varphi_0}{\pi} \text{tg}^2 \varphi d\varphi$$

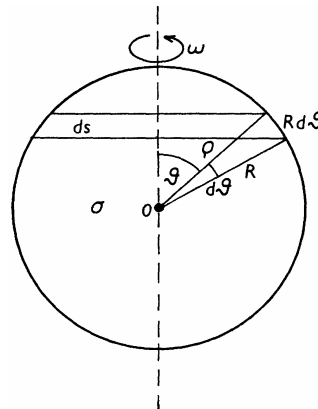
Celkový moment

$$M = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos \varphi_0}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \text{tg}^2 \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi} (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0)$$

smeruje na obr. R163 doľava.



Obr. R163



Obr. R164

**164.** Magnetický moment dutej gule možno vypočítať integráciou elementárnych magnetických momentov prúžkov na guľovej ploche podľa obr. R164. Označme:  $\sigma = Q/(4\pi R^2)$  plošnú hustotu náboja na guľovej ploche,  $ds = 2\pi R d\vartheta$  plochu prúžka,  $dI = \omega dQ/(2\pi) = \sigma \omega ds/(2\pi)$  prúd

vzniklý otáčaním prúžka s nábojom  $dQ$  uhlovou rýchlosťou  $\omega$ ,  $S = \pi \rho^2$  plochu obopnutú prúdom  $dI$ . Pre magnetický moment prúžka platí

$$dm = SdI = \frac{Q}{4} \omega R^2 \sin^3 \vartheta d\vartheta$$

Celkový magnetický moment dutej gule dostaneme integráciou príspevkov  $dm$  v intervale uhlov od  $\vartheta = 0$  po  $\vartheta = \pi$ , teda

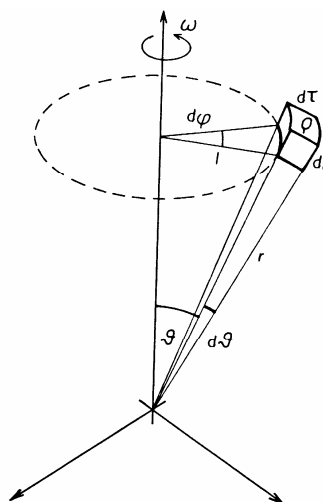
$$m = \frac{Q}{4} \omega R^2 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{Q}{3} \omega R^2$$

Moment hybnosti otáčajúcej sa dutej gule s hmotnosťou  $M$  je  $L = (2/3)\omega MR^2$ , takže gyromagnetický (magnetomechanický) pomer

$$\gamma = \frac{m}{L} = \frac{Q}{2M}$$

**165.** Guľu možno rozložiť na objemové elementy  $d\tau = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$  vo sférických súradniciach podľa obr. R165. Objemová hustota náboja v guli je  $\rho = 3Q/(4\pi R^3)$  a náboj v objemovom elemente  $d\tau$

$$dQ = \rho d\tau = \frac{3Q}{4\pi R^3} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$$



Obr. R165

Tento náboj sa otáča okolo osi rotácie gule uhlovou rýchlosťou  $\omega$  a vytvára tak kruhový prúd  $\delta I = \omega dQ / (2\pi)$  s polomerom  $l = r \sin \vartheta$ . Elementárny magnetický moment tohto prúdu je

$$dm = \pi l^2 dI = \frac{3\omega Q}{8\pi R^3} r^4 \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

Celkový magnetický moment gule dostaneme integráciou týchto príspevkov cez  $\varphi$  od 0 po  $2\pi$ , cez  $\vartheta$  od 0 po  $\pi$  a cez  $r$  od 0 po  $R$ , teda

$$m = \frac{3\omega Q}{8\pi R^3} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3 \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \frac{\omega Q R^2}{5}$$

Moment hybnosti plnej gule s polomerom  $R$  a hmotnosťou  $M$  je  $L = 2\omega MR^2/5$  a gyromagnetický pomer

$$\gamma = \frac{m}{L} = \frac{Q}{2M}$$

Vektor magnetického momentu má smer vektora uhlovej rýchlosti.

**166.** Magnetická indukcia na osi dipólu vo vzdialenosti  $R$  je daná výrazom

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3} \quad \text{z čoho magnetický moment} \quad m = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0}$$

Dosadením hodnôt  $R = 6 \cdot 10^6$  m a  $B = 6,2 \cdot 10^{-5}$  T dostaneme pre magnetický moment zemského dipólu hodnotu  $m = 6,7 \cdot 10^{22}$  A.m<sup>2</sup>.

Ekvivalentný prúd na rovníku by bol obrovský a mal by hodnotu

$$I = \frac{m}{\pi R^2} = 5,92 \cdot 10^8 \text{ A}$$

**167.** Podľa výsledku úlohy 165 magnetický moment plnej gule s nábojom  $Q$  a polomerom  $R$  rotujúcej uhlovou rýchlosťou  $\omega$  je rovný  $m = \omega Q R^2/5$ , pričom magnetická indukcia vo vzdialenosti  $R$  v smere magnetického momentu je

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3} = \frac{\mu_0 \omega Q}{10\pi R} \quad \text{z čoho} \quad Q = \frac{10\pi R B}{\mu_0 \omega}$$

a objemová hustota náboja

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} = \frac{15B}{2\mu_0 \omega R^2}$$

Dosadením hodnôt  $B = 6,2 \cdot 10^{-5}$  T,  $R = 6 \cdot 10^6$  m a  $\omega = 2/(24 \cdot 60 \cdot 60) = 7,3 \cdot 10^{-5}$  rad/s, dostaneme objemovú hustotu náboja v Zemi  $\rho = 1,41 \cdot 10^{-7}$  C/m<sup>3</sup>, čo zodpovedá koncentrácii  $n = \rho/e = 8,8 \cdot 10^{11}$  elementárnych nábojov na 1 m<sup>3</sup>. Na povrchu Zeme by bola intenzita elektrického poľa

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} = 3,18 \cdot 10^{10} \text{ V/m}$$

$Q$  je celkový náboj a  $R$  je polomer Zeme. Je to obrovská nereálna intenzita elektrického poľa, a preto uvažovaná hypotéza je neprijateľná.

**168.** Intenzita magnetického poľa vo vnútri kábla je

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

Zvoľme objemový element  $d\tau$  s jednotkovou dĺžkou v dutine kábla  $d\tau = 2\pi r dr$ , potom energia nahromadená vo ferite na jednotku dĺžky kábla je

$$W_1 = \frac{\mu_0 \mu_r}{2} \int_{\tau} H^2 d\tau = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{4\pi} \int_1^2 \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{4\pi} \ln 2 = 3,465 \cdot 10^{-6} \text{ J/m}$$

a energia vo zvyšku dutiny kábla na jednotku dĺžky

$$W_2 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_2^5 \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln 2,5 = 9,110 \cdot 10^{-8} \text{ J/m}$$

Celková energia na jednotku dĺžky kábla

$$W = W_1 + W_2 = 3,556 \cdot 10^{-6} \text{ J/m}$$

Percentuálny podiel energie vo ferite

$$\eta = \frac{W_1}{W_1 + W_2} 100 \% = 97,6 \%$$

**169.** Celková magnetická indukcia dipólu je daná výrazom

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_{\vartheta}^2} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta} = B_0 \frac{R^3}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}$$

kde

$$B_0 = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} = 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

je magnetická indukcia na rovníku. Energiu magnetického poľa Zeme dostaneme integráciou

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int_{\infty} \left( \frac{B}{\mu_0} \right)^2 d\tau$$

cez celý nekonečný priestor mimo objemu Zeme. Integrovať je najvýhodnejšie v sférických súradniciach s objemovými elementmi  $d\tau = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$  takže

$$W = \frac{B_0^2 R^6}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_R^{\infty} \frac{1 + 3 \cos^2 \vartheta}{r^4} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = \frac{4\pi B_0^2 R^3}{3\mu_0} = 6,9 \cdot 10^{17} \text{ J} \approx 165 \text{ megaton TNT}$$

1 tona TNT =  $4,2 \cdot 10^9$  J. Z výsledku je zrejmé, že výbuch atómovej bomby s energiou jednej megatony TNT nemôže podstatne ovplyvniť magnetické pole Zeme. Aj odpovede na takéto otázky trápili konštruktéry prvej atómovej bomby v Los Alamos National Laboratory, New Mexico, USA, na jar v roku 1945.

**170.** a)  $I = \frac{ev}{2\pi a} = 1,0510^{-3} \text{ A}$

b) Magnetická indukcia v strede atómu

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} = 12,5168 \text{ T}$$

Je to obrovská indukcia, ktorú nemožno dosiahnuť bežnými prostriedkami experimentálnej fyziky, ale iba v solenoidoch v impulznom režime prípadne v supravodivých magnetoch.

c) Magnetický moment (Bohrov magnetón)

$$m = \frac{e}{2} av = \frac{eh}{4\pi m_e} = \mu_B \approx 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$$

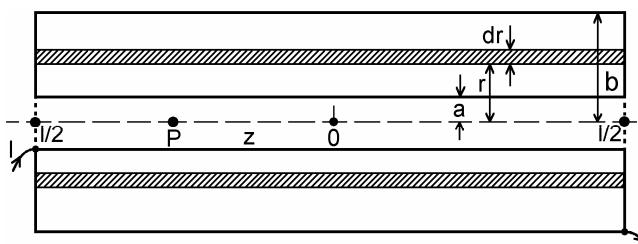
je jedna z dôležitých fyzikálnych konštánt.

**171.** Hrubú cievku možno rozložiť na nekonečne tenké valcové prúdy (solenoidy) podľa obr. R171, pričom magnetická indukcia od takého solenoidu vo vzdialenosti  $z$  od stredu cievky je

$$dB = \frac{\mu_0 n dI}{2l} \left[ \frac{l/2 - z}{\sqrt{r^2 + (l/2 - z)^2}} + \frac{l/2 + z}{\sqrt{r^2 + (l/2 + z)^2}} \right]$$

kde

$$dI = \frac{\rho I dr}{b - a}$$

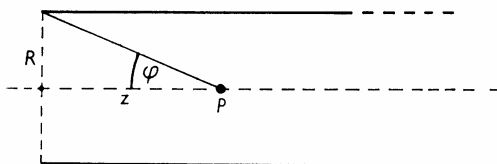


Obr. R171

je prúd v elementárnom solenoidu s hrúbkou  $dr$ . Integráciou  $dB$  cez  $r$  od  $a$  po  $b$  dostaneme celkovú magnetickú indukciu

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 n \rho I}{2l(b-a)} \left[ (l/2 - z) \int_a^b \frac{dr}{\sqrt{(l/2 - z)^2 + r^2}} + (l/2 + z) \int_a^b \frac{dr}{\sqrt{(l/2 + z)^2 + r^2}} \right] = \\ &= \frac{\mu_0 n \rho I}{2l(b-a)} \left[ f \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + f^2}}{a + \sqrt{a^2 + f^2}} + g \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + g^2}}{a + \sqrt{a^2 + g^2}} \right] \end{aligned}$$

kde  $f = l/2 - z$  a  $g = l/2 + z$ .



Obr. R172

**172.** Veľmi dlhý solenoid možno považovať za "polonekonečný" s jedným koncom v nekonečne (obr. R172). Magnetická indukcia v bode  $P$  vo vzdialenosti  $z$  od čela solenoidu je daná výrazom

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \varphi - \cos \pi) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left( \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} + 1 \right)$$

Sila pôsobiaca na paramagnetickú vzorku bude maximálna v tom mieste, kde

$$\frac{d}{dz} \left( B \frac{dB}{dz} \right) = 0$$

čo je splnené vo vzdialenosti  $z = R/\sqrt{15}$  od čela solenoidu.

**173.** Využitím vektorovej identity (pozri tabuľku na str. 19)

$$\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \text{ div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{ div } \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$$

dostaneme

$$\text{rot } \mathbf{B} = k \mathbf{J}_z \text{ div } \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -k \frac{\mathbf{J}_z}{r^3}$$

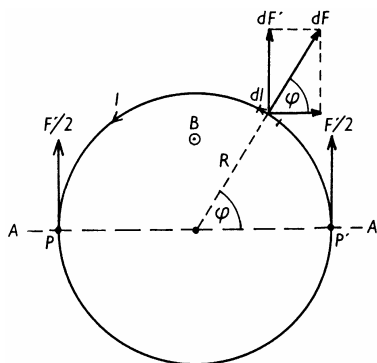
Príklad možno riešiť aj inak. Vektor  $\mathbf{B}$  má iba azimutálnu zložku

$$B_\varphi = \frac{k J_z}{r^2}$$

takže v cylindrických súradniciach (pozri tabuľku na str. 18)

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_\varphi)}{\partial r} \mathbf{e}_z = -k \frac{\mathbf{J}_z}{r^3}$$

**174.**  $\text{rot } \mathbf{B} = k \mathbf{J}_z \text{ div } \mathbf{r} - k r \text{ div } \mathbf{J}_z = 2k \mathbf{J}_z$



Obr. R175

**175.** Na každý element závitů pôsobí sila (obr. R175)

$$dF = \frac{1}{2} IB dl$$

ktorej zložka kolmá na rovinu  $AA'$  je

$$dF' = \frac{1}{2} IB dl \sin \varphi = \frac{1}{2} IB R \sin \varphi d\varphi$$

Integráciou cez  $\varphi$  od 0 po  $\pi$  dostaneme celkovú silu

$$F' = \frac{1}{2} I B R \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = I B R$$

ktorá napína závit v miestach  $P$  a  $P'$ . Závit sa začne trhať, keď sila  $F'$  dosiahne hodnotu  $F' = 2\eta\pi a^2$ , kde  $\eta$  je pevnosť v ťahu materiálu závitú a  $a$  je polomer drôtu. Porovnaním posledných výrazov a uvážením, že

$$I = \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{2Ba}{\mu_0}$$

dostaneme výraz pre kritickú magnetickú indukciu v tvare

$$B_{krit} = \sqrt{\frac{\pi\mu_0\eta a}{R}}$$

Dosadením numerických hodnôt  $a = 0,15$  mm,  $\eta = 2 \cdot 10^8$  N/m<sup>2</sup> a  $R = 3$  cm dostaneme  $B_{krit} = 1,98$  T.

**176.** Pohybová rovnica pre vektor momentu hybnosti gule je tvaru

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad \text{alebo} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \gamma \mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

Zaveďme súradnicový systém  $xyz$  tak, že  $\mathbf{B}$  má iba  $z$ -ovú zložku  $B_z$ . V tom prípade možno poslednú rovnicu napísať v zložkovom tvare

$$\frac{dL_x}{dt} = \gamma L_y B \quad \frac{dL_y}{dt} = -\gamma L_x B \quad \frac{dL_z}{dt} = 0$$

Riešenie tohto systému možno hľadať tak, že si zavedieme komplexnú veličinu

$$\mathbf{L}_{kompl} = L_x - jL_y$$

a od prvej rovnice odpočítame druhú, násobenú imaginárnou jednotkou  $j$ . Tak dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{d\mathbf{L}_{kompl}}{dt} = j\gamma B \mathbf{L}_{kompl}$$

ktorej riešenie je tvaru

$$\mathbf{L}_{kompl} = A e^{j\gamma B t} = A(\cos \gamma B t + j \sin \gamma B t)$$

Z čoho

$$L_x = A \cos \gamma B t \quad L_y = -A \sin \gamma B t$$

Riešenie tretej rovnice je

$$L_z = \text{konšt.}$$

Z týchto riešení vidieť, že vektor  $\mathbf{L}$  (viazaný s osou otáčania gule) skutočne vykonáva precesný pohyb okolo smeru magnetickej indukcie  $\mathbf{B}$  s uhlovou rýchlosťou

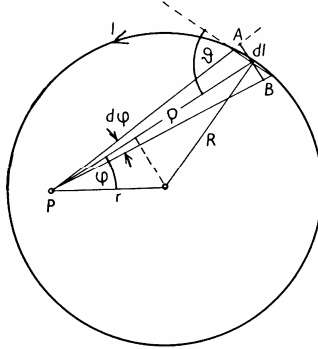
$$\omega_L = \gamma B = \frac{Q}{2m} B$$

**177.** Magnetická indukcia v rovine kruhového závitú má iba zložku  $B_z$  kolmú na rovinu závitú. V bode  $P$  (obr. R177) vo vzdialenosti  $r$  od stredu závitú príspevok k magnetickej indukcii od prúdového elementu  $Idl$  je

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \vartheta}{\rho^2}$$

a indukcia od celého závitu s proudem  $I$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl \sin \vartheta}{\rho^2}$$



Obr. R177

pričom integrujeme po dĺžke celého závitu  $2\pi R$ . Z obrázka vidieť, že  $dl \sin \vartheta = \overline{AB} = \rho d\varphi$  a

$$\rho = \sqrt{R^2 - (r \sin \varphi)^2} + r \cos \varphi = R \left( \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + k \cos \varphi \right)$$

kde  $k = r/R < 1$ . Dosadením za  $dl \sin \vartheta$  a  $\rho$  vo výraze pre  $B_z$  dostávame

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi(1-k^2)R} \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - k \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right)$$

Druhý integrál sa rovná nule. Hodnota  $\sin^2 \varphi$  sa opakuje v každom zo štyroch kvadrantov závitu, takže

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{\pi(1-k^2)R} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi(1-k^2)R} E(k)$$

kde

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

je úplný eliptický integrál druhého druhu. Niekoľko jeho hodnôt je uvedených v nasledujúcej tabuľke:

$k$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$E(k)$	1,571	1,567	1,554	1,534	1,504	1,467	1,416	1,351	1,277	1,165	1,000

Hodnoty magnetickej indukcie mimo stredu závitu sú vyššie ako v strede. Tak napr. vo vzdialenosti  $r = R/2$  ( $k = 0,5$ )



$$B_z = \frac{2.1467}{\pi(1-0,5^2)} \frac{\mu_0 I}{2R} = 1,245 \frac{\mu_0 I}{2R}$$

čo je hodnota o 24,5 % väčšia ako hodnota  $B_0 = \mu_0 I / (2R)$  v strede závitú.

**178.** Uvažujme integrálnu identitu

$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$$

kde  $S$  je ľubovoľná plocha ohraničená krivkou  $l$  a  $\Phi$  je indukčný tok plochou  $S$ . Platí teda

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi$$

t. j. integrál z vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$  po uzavretej krivke  $l$  sa rovná celkovému indukčnému toku  $\Phi$  plochou  $S$ . Môžeme teda vedľa seba napísať dva integrálne výrazy

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I \quad \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$$

Analogickými veličinami sú teda  $\mu_0 I$  a  $\Phi$ , alebo  $\mu_0 \mathbf{J}$  a  $\mathbf{B}$ . Zvoľme cylindrický súradnicový systém  $r, \varphi, z$ , v ktorom pozdĺž osi  $z$  môže byť uložený valcový vodič alebo solenoid rovnakého polomeru  $R$ . Vo vodiči existuje  $z$ -ová zložka prúdovej hustoty a  $z$ -ová zložka vektorového potenciálu (pozri odsek 6.1.8), zatiaľ čo magnetická indukcia má azimutálny smer. V solenoide existuje  $z$ -ová zložka magnetickej indukcie a teda indukčného toku, zatiaľ čo vektorový potenciál má iba azimutálnu zložku (pozri odsek 6.1.9.1). Analogickými veličinami sú teda  $\mu_0 I$  a  $\Phi$ , kde  $I$  je prúd tečúci pozdĺž osi vodiča (v smere osi  $z$ ) a  $\Phi$  je indukčný tok priečnym prierezom solenoidu, alebo zložky vektorov  $\mu_0 \mathbf{J}_z$  a  $B_z$ .

Pre magnetickú indukciu vo vnútri valcového vodiča s polomerom  $R$  (pre  $r < R$ ) platí

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 J_z}{2} r$$

a analogicky pre vektorový potenciál v solenoide polomeru  $R$  pre  $r < R$

$$A_\varphi = \frac{\Phi r}{2\pi R^2} = \frac{B_z}{2} r$$

Pre  $r > R$  v okolí valcového vodiča

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 J_z R^2}{2r} \quad \text{a v okolí solenoidu} \quad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi r} = \frac{B_z R^2}{2r}$$

Ak vypočítame rotáciu vektorového potenciálu, dostaneme pre  $r < R$

$$\text{rot} (A_\varphi \mathbf{e}_\varphi) = B_z \mathbf{e}_z \quad \text{a pre } r > R \quad \text{rot} (A_\varphi \mathbf{e}_\varphi) = \mathbf{0}$$

$\mathbf{e}_\varphi$  a  $\mathbf{e}_z$  sú jednotkové vektory v smeroch súradníc  $\varphi$  a  $z$ .

**179.** Ak je vedenie pod napätím  $U$ , potom na vodičoch vznikajú náboje s dĺžkovou hustotou  $\pm\lambda$ . Jeden vodič pôsobí na druhý príťažlivou silou

$$F_e = \lambda E = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

na jednotku dĺžky vedenia. Podľa úlohy 53 možno  $\lambda$  vyjadriť ako

$$\lambda = C'U = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}} U$$

kde  $C'$  je kapacita na jednotku dĺžky vedenia. Po dosadení za  $\lambda$  vo výraze pre  $F_e$  dostaneme

$$F_e = \frac{\pi\epsilon_0}{2d \ln^2 \frac{d}{a}} U^2$$

Magnetická sila medzi vodičmi je odpudivá a vyplýva z Ampérovho zákona:

$$F_m = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$$

na jednotku dĺžky vedenia. Pre pomer týchto síl platí

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\ln^2 \frac{d}{a}}{\pi^2 R^2}$$

kde  $R = U/I$  je odpor záťaže vedenia. Výsledná sila pôsobiaca medzi vodičmi vedenia môže byť príťažlivá (ak  $F_e > F_m$ ) alebo odpudivá (ak  $F_e < F_m$ ). Tvrdenie, že dva vodiče, ktorými tečie ten istý elektrický prúd v opačných smeroch sa odpudzujú, platí iba vtedy, ak elektrické pôsobenie je zanedbateľné, t. j. ak odpor  $R$  je dostatočne malý. Sily sa kompenzujú vtedy, ak  $F_e/F_m = 1$ , t. j. pri hodnote odporu

$$R = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln \frac{d}{a} \approx 120 \ln \frac{d}{a} \quad [\Omega]$$

Je zaujímavé, že je to hodnota, ktorá sa rovná vlnovému odporu  $\sqrt{L'/C'}$  vedenia, kde  $L'$  a  $C'$  sú indukčnosť a kapacita na jednotku dĺžky vedenia (pozri úlohy 53 a 207).

**180.**  $M = \frac{\mu_0 I_0}{\pi} (b-a) \sin \varphi$ . Pri danom smere prúdov vektor  $\mathbf{M}$  smeruje na obrázku doprava.

**181.** Čiara, po ktorej sa má počítať cirkulácia vektora  $\mathbf{H}$ , je kružnica so stredom na osi pohybu náboja  $q$  a prechádzajúca bodom  $P$  (pozri obr. R181a). Označme polomer kružnice  $R$ . Teda

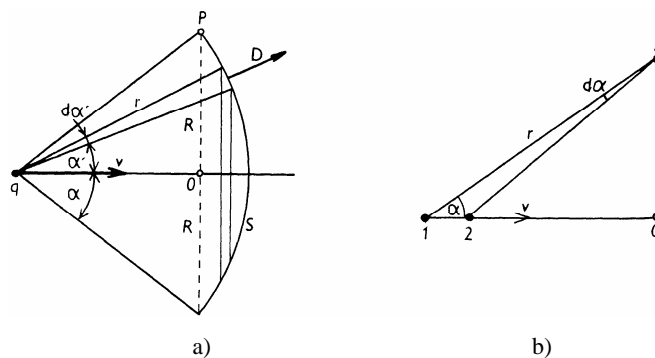
$$2\pi R \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Plocha  $S$  je ľubovoľná plocha napnutá na zvolenej kružnici. Pre výpočet toku vektora elektrickej indukcie  $\mathbf{D}$  je najvýhodnejšie vziať guľovú plochu s polomerom  $r$ . Na tejto ploche zvolíme elementárne kruhové prúžky s plochou  $dS = 2\pi r^2 \sin \alpha' d\alpha'$ . Elementárny tok

$$D dS = \frac{q}{4\pi r^2} 2\pi r^2 \sin \alpha' d\alpha' = \frac{q}{2} \sin \alpha' d\alpha'$$

a tok celou plochou

$$\int_S D dS = \frac{q}{2} \int_{\alpha}^{\pi/2} \sin \alpha' d\alpha' = \frac{q}{2} (1 - \cos \alpha)$$



Obr. R181

Derivujme tento výraz podľa času:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S D dS = \frac{q}{2} \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

Pri premiestnení náboja z bodu 1 do bodu 2 (obr. R181b) na vzdialenosť  $v dt$  je  $v dt \sin \alpha = r d\alpha$ , z čoho

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v \sin \alpha}{r}$$

Dosadením výsledku do predchádzajúceho a potom do prvého vzťahu dostaneme

$$H = \frac{qv}{4\pi r^2} \sin \alpha$$

pričom sme využili skutočnosť, že  $R = r \sin \alpha$ . Vo vektorovom tvare

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad \text{alebo} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

čo je rovnaký výsledok ako udáva výraz (6.5) získaný z experimentálnej skúsenosti.

**182.** a) Napätie na kondenzátore

$$U_C = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

kde  $C = \epsilon_0 \pi b^2 / l$ .

b) Intenzita elektrického poľa medzi doskami kondenzátora

$$E_C = \frac{U_C}{l} = \frac{U_0}{l} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

c) Pri osovej symetrii kondenzátora má posuvný prúd medzi doskami kondenzátora hustotu

$$J_{pos} = \frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \frac{dE_C}{dt} = -\epsilon_0 \frac{E_C}{RC}$$

paralelnú s osou symetrie kondenzátora. Siločiarly magnetického poľa budú sústredné kružnice so stredmi na osi symetrie. Zo zákona celkového prúdu aplikovaného na kružnicu s polomerom  $r$  plynie pre intenzitu magnetického poľa  $H$

$$2\pi rH = \pi r^2 J_{pos} = -\frac{\pi \epsilon_0 r^2 E_C}{RC} \quad \text{z čoho} \quad H = -\frac{\epsilon_0 r E_C}{2RC} = -\frac{lr}{2RS} E_C$$

**183.** Označme začiatočnú plošnú hustotu náboja na doske kondenzátora  $\sigma_0 = Q_0/S$ , kde  $S = \pi a^2$  je plocha dosky kondenzátora a  $C = \epsilon_0 S/d$  je kapacita kondenzátora. Potom:

$$\text{a) } \sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad \text{b) } Q = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad \text{c) } I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma_0 S}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

d) Hustota posuvného prúdu v kondenzátore

$$J_{pos} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma_0}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

a celkový posuvný prúd ako funkcia vzdialenosti  $d$  od osi kondenzátora a od času

$$I_{pos} = J_{pos} \pi r^2 = -\frac{\sigma_0 \pi r^2}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

e) Magnetická indukcia má v kondenzátore iba azimutálnu zložku  $B_\varphi$ , pre ktorú platí

$$2\pi r B_\varphi = \mu_0 (I + I_{pos})$$

z čoho

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 Q_0}{2\pi RC} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

**184.** a)  $n = 3,32 \cdot 10^{11}$ ;

b)  $16 \times 20 \text{ cm}^2$ , vzdialenosť dosiek  $d = 2 \text{ mm}$ ,  $n = 3,32 \cdot 10^{11}$ ,  $E = 1,875 \cdot 10^5 \text{ V/m}$ ;

c)  $20 \times 20 \text{ cm}^2$ ,  $d = 1,6 \text{ mm}$ ,  $n = 3,32 \cdot 10^{11}$ ,  $E = 1,5 \cdot 10^5 \text{ V/m}$ .

**185.** V pohybujúcej sa (čiarkovanej) sústave polia sú dané výrazmi

$$\begin{aligned} E_{\parallel}' &= E_{\parallel} & B_{\parallel}' &= B_{\parallel} \\ E_{\perp}' &= \frac{E_{\perp}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & B_{\perp}' &= \frac{-\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}} \end{aligned}$$

kde zložky s označením  $\parallel$  sú paralelné so smerom rýchlosti sústavy a zložky s označením  $\perp$  sú kolmé na jej rýchlosť. Pre zložky polí v smere súradných osí z týchto výrazov plynie

$$E_x' = \frac{E_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{E_0 \cos \varphi}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad E_y' = E_y = E_0 \sin \varphi$$

$$E_z' = B_x' = B_y' = 0$$

$$B_z' = \frac{v E_x}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{v E_0 \cos \varphi}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Číselne:  $E_x' = 35,72 \text{ V/m}$ ,  $E_y' = 16,5 \text{ V/m}$ ,  $E_z' = B_x' = B_y' = 0$ ,  $B_z' = 7,15 \cdot 10^{-8} \text{ T}$ .

**186.** a) V sústave, v ktorej sú elektróny v pokoji, pôsobia na seba iba elektrostatickou odpudivou silou

$$\mathbf{F}_{\perp} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r = e\mathbf{E}_{\perp} \quad \text{kde} \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

je intenzita elektrického poľa vytvorená prvým elektrónom v mieste druhého elektrónu a  $\mathbf{e}_r$  je jednotkový vektor v smere od prvého ku druhému elektrónu.

b) V laboratórnej sústave, v ktorej sa elektróny pohybujú rýchlosťou  $v$ , odpudivá sila medzi elektrónmi je

$$\mathbf{F}'_{\perp} = e(\mathbf{E}'_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_{\perp})$$

kde

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'_{\perp}}{c^2}$$

sú elektrické a magnetické polia elektrónu v laboratórnej sústave. Sila  $\mathbf{F}'_{\perp}$  je potom

$$\mathbf{F}'_{\perp} = e \left( \mathbf{E}'_{\perp} + \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'_{\perp}}{c^2} \right) = e\mathbf{E}'_{\perp} [1 - (v/c)^2] = e\mathbf{E}_{\perp} \sqrt{1 - (v/c)^2} = \mathbf{F}_{\perp} \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

Pre malé rýchlosti  $\mathbf{F}'_{\perp} \approx \mathbf{F}_{\perp}$ . Ak  $v \rightarrow c$ , potom  $\mathbf{F}'_{\perp} \rightarrow 0$ .

**187.** Ak  $|\epsilon| \ll 1$ , potom

$$\sin \vartheta = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \epsilon \right) \approx \cos \epsilon \quad \text{a keďže} \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$$

možno výraz pre intenzitu elektrického poľa elektrónu napísať v tvare

$$E' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{\gamma}{\left( \gamma^2 \sin^2 \epsilon + \cos^2 \epsilon \right)^{3/2}}$$

Ak dosadíme  $\sin^2 \epsilon \approx \epsilon^2$ ,  $\cos^2 \epsilon \approx 1$ , potom

$$E' \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{\gamma}{\left( \gamma^2 \epsilon^2 + 1 \right)^{3/2}}$$

**188.** Polovica toku intenzity elektrického poľa elektrónu je  $e/(2\epsilon_0)$  a je daná výrazom

$$\frac{e}{2\epsilon_0} = \int E' dS = \frac{e\gamma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \frac{2\pi r'^2 \cos \alpha d\epsilon}{\left( \gamma^2 \epsilon^2 + 1 \right)^{3/2}} = \frac{e}{2\epsilon_0} \frac{2\gamma\alpha}{\sqrt{4 + \gamma^2 \alpha^2}}$$

z čoho

$$\alpha = \alpha_{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}\gamma}$$

**189.** Z transformačných vzťahov pre polia

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \mathbf{B}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{B}_{\perp} - (\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp} / c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{aligned}$$

plynie, že sústavy, v ktorých je elektrické alebo magnetické pole nulové, sa musia pohybovať kolmo na  $E_y$  a  $B_z$ , teda pozdĺž súradnice  $x$ . V takýchto sústavách má elektrické a magnetické pole zložky

$$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad B'_z = \frac{c^2 B_z - vE_y}{c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

a) Elektrické pole  $E'_y$  bude nulové v sústave, ktorá sa pohybuje v smere osi  $x$  rýchlosťou  $v = E_y/B_z$  pričom musí platiť  $cB_z > E_y$ . Magnetické pole má v tomto prípade zložku

$$B'_z = \sqrt{B_z^2 - \frac{E_y^2}{c^2}}$$

V prípade ak  $cB_z < E_y$ , potom neexistuje sústava s nulovým elektrickým poľom.

b) Magnetické pole  $B'_z$  bude nulové v sústave, ktorá sa pohybuje v smere osi  $x$  rýchlosťou

$$v = c^2 \frac{B_z}{E_y}$$

za predpokladu, že  $cB_z < E_y$ . Elektrické pole má pritom zložku

$$E'_y = \sqrt{E_y^2 - c^2 B_z^2}$$

V prípade ak  $cB_z > E_y$ , potom neexistuje sústava s nulovým magnetickým poľom.

**190.** V sústave, v ktorej je náboj a priamka v pokoji, pôsobí na náboj odpudivá sila

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a} \mathbf{e}_r = q\mathbf{E}$$

kde  $\mathbf{e}_r$  je jednotkový vektor kolmý na priamku a smerujúci k náboju  $q$ . V pohybujúcej sa sústave pôsobí na náboj elektrické pole dané výrazom

$$\mathbf{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 a} \mathbf{e}_r \quad \text{kde} \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

je dĺžkový náboj pohybujúcej sa priamky, u ktorej dochádza k relativistickej kontrakcii, takže

$$\mathbf{E}' = \frac{\lambda' \mathbf{e}_r}{2\pi\epsilon_0 a \sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Okrem elektrického poľa pôsobí na náboj magnetické pole

$$\mathbf{B}' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 \lambda' v}{2\pi a} \mathbf{e}_\varphi = \frac{v}{c^2} \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 a} \mathbf{e}_\varphi = \frac{v}{c^2} \frac{E}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \mathbf{e}_\varphi$$

kde  $\mathbf{e}_\varphi$  je jednotkový vektor. V pohybujúcej sa sústave pôsobí na náboj  $q$  celková sila

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}') = \frac{q\mathbf{E}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - \frac{v^2}{c^2} \frac{q\mathbf{E}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = q\mathbf{E} \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

**191.** a) Vektory elektrického a magnetického poľa možno rozložiť na zložky paralelné a kolmé na smer pohybu sústavy, teda

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_{\parallel}' + \mathbf{E}_{\perp}' \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B}_{\parallel}' + \mathbf{B}_{\perp}'$$

Skalárny súčin je

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E}_{\parallel}' \cdot \mathbf{B}_{\parallel}' + \mathbf{E}_{\perp}' \cdot \mathbf{B}_{\perp}'$$

Z transformačných vzťahov pre polia plynie, že

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E}_{\parallel}' \cdot \mathbf{B}_{\parallel}'$$

Pre kolmé zložky platí

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp}' \cdot \mathbf{B}_{\perp}' &= \frac{[\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}] \cdot [\mathbf{B}_{\perp} - (\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp} / c^2]}{1 - (v/c)^2} = \\ &= \frac{1}{1 - (v/c)^2} \left[ \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{E}_{\perp} \cdot \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp}}{c^2} - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp}}{c^2} \right] \end{aligned}$$

Druhý člen v hranatej zátvorke sa rovná nule pretože vektor  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}$  je kolmý na  $\mathbf{B}_{\perp}$ , takisto tretí člen sa rovná nule, lebo  $(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp}$  je kolmé na  $\mathbf{E}_{\perp}$ . Štvrtý člen možno napísať v tvare

$$-\frac{v^2}{c^2} \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp}$$

takže  $\mathbf{E}_{\perp}' \cdot \mathbf{B}_{\perp}' = \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp}$ , z čoho plynie, že

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E}_{\parallel}' \cdot \mathbf{B}_{\parallel}' + \mathbf{E}_{\perp}' \cdot \mathbf{B}_{\perp}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

Súčin  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  je teda relativistický invariant.

b) Pri dôkaze možno postupovať podobným spôsobom.

**192.** a) Na každý elektrón pôsobí prítlačlivá sila od roviny

$$F_{\sigma} = \frac{e\sigma}{2\epsilon_0}$$

a v laboratórnej sústave tiež odpudivá sila medzi elektrónmi (pozri úlohu 186)

$$F_e = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

Tieto sily budú v rovnováhe ( $F_{\sigma} = F_e$ ), ak

$$\sigma = \frac{e}{8\pi a^2} \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

b) Plošný náboj, ktorý bude kompenzovať odpudivú silu medzi elektrónmi v pokoji, je

$$\sigma_0 = \frac{e}{8\pi a^2} \qquad \text{takže} \qquad \frac{\sigma}{\sigma_0} = \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

Pokojová energia elektrónu je  $W_0 = m_0 c^2$  a energia pohybujúceho sa elektrónu

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \qquad \text{a teda} \qquad \frac{W_0}{W} = \sqrt{1 - (v/c)^2} = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

Pre číselné hodnoty  $W_0 = 0,5 \text{ MeV}$  a  $W = 500 \text{ MeV}$  je

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 10^{-3}$$

193. a) V sústave spojenej s tyčami pôsobí na tyče príťažlivá sila elektrického pôvodu

$$F_e = \tau E = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

kde  $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 d)$  je intenzita elektrického poľa v kolmej vzdialenosti  $d$  od tyče.

b) V pohybujúcej sa sústave existuje elektrické pole  $E'$  a magnetické pole

$$\mathbf{B}' = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'}{c^2}$$

takže výsledná sila pôsobiaca medzi tyčami je

$$\mathbf{F}' = \lambda'(\mathbf{E}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}') = \lambda' \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{E}'$$

Avšak  $E' = \lambda'/(2\pi\epsilon_0 d)$  a  $\lambda' = \lambda \sqrt{1 - (v/c)^2}$ , takže  $F' = F_e$ .

## Elektromagnetická indukcia

194. Intenzita indukovaného elektrického poľa v tyči je

$$E = vB = r\omega B$$

a napätie medzi koncami tyče

$$U = B \left( \int_0^{2l/3} \omega r dr - \int_0^{l/3} \omega r dr \right) = \frac{\omega B l^2}{6} = 66,7 \text{ mV}$$

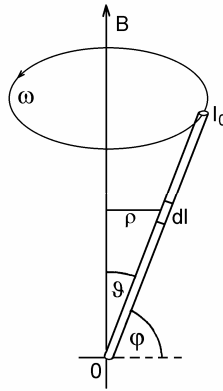
195. Z obr. R195 je zrejmé, že indukované napätie  $d\mathcal{E}$  v elemente  $dl$  precesujúcej tyče je

$$d\mathcal{E} = vBdl \cos\vartheta = vBdl \sin\vartheta$$

kde  $v = \omega r = \omega l \sin\vartheta$  je obvodová rýchlosť elementu  $dl$ . Teda

$$d\mathcal{E} = \omega B \sin^2\vartheta dl \quad \text{a} \quad \mathcal{E} = \omega B \sin^2\vartheta \int_0^{l_0} dl = \frac{\omega B l_0^2}{2} \sin^2\vartheta$$





Obr. R195

196. a) Pri pohybe tyče vzniká v nej elektromotorické napätie  $\mathcal{E}_{ind} = vbB$  a v obvode tečie prúd

$$I = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{vbB}{R}$$

Na tyč bude pôsobiť sila

$$F = bIB = \frac{vb^2B^2}{R}$$

smerujúca proti smeru pohybu tyče. Táto sila je zviazaná s rýchlosťou tyče pohybovou rovnicou

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{vb^2B^2}{R} = -F$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice so začiatočnou podmienkou  $v = v_0$  v čase  $t = 0$  dostaneme pre rýchlosť tyče výraz

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{b^2B^2t}{mR}\right)$$

Tyč sa bude pohybovať nekonečne dlho s exponenciálne klesajúcou rýchlosťou v čase.

b) Dráha, ktorú tyč prejde, je

$$s = \int_0^{\infty} v(t) dt = \frac{v_0 m R}{b^2 B^2}$$

c) Pohybujúca sa tyč vykonáva prácu proti pôsobiacej sile od magnetického poľa. Táto práca sa vznikom elektrického prúdu v obvode mení na Joulovo teplo v odpore  $R$ . Energia premenená na teplo

$$W_T = R \int_0^{\infty} I^2 dt = \frac{b^2 B^2}{R} \int_0^{\infty} v^2(t) dt = \frac{mv_0^2}{2}$$

je rovná začiatočnej kinetickej energii tyče. Číselne:  $W_T = 5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ ,  $s = 1 \text{ m}$ .

197. V čase, keď sa rámček pohybuje, tečie ním prúd  $I = \mathcal{E}_{ind}/R$ , kde  $\mathcal{E}_{ind} = -d\Phi/dt$ . Náboj, ktorý pretečie rámčekom, je

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} Idt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

Veľkosť pretečeného náboja závisí teda iba od začiatočného a konečného indukčného toku. Tieto toky sú

$$\Phi_1 = \int_{b-a}^b \frac{\mu_0 Ia}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \ln \frac{b}{b-a} \quad \Phi_2 = -\frac{\mu_0 Ia}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}$$

takže

$$Q = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi R} \ln \frac{b+a}{b-a}$$

198. Indukované EMN v prstenci v dôsledku jeho otáčania v magnetickom poli je

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

kde  $\Phi = BS \cos\omega t = \pi a^2 B \cos\omega t$  je magnetický indukčný tok plochou ohraničenou prstencom. Po dosadení dostaneme

$$\mathcal{E}_{ind} = \pi\omega B a^2 \sin\omega t = U_m \sin\omega t$$

Stredný tepelný výkon v prstenci je

$$P = \frac{U_m^2}{2R} = \frac{\pi^2 \omega^2 B^2 a^4}{2R}$$

kde  $R$  je celkový elektrický odpor prstenca. Jediným zdrojom tohoto tepelného výkonu je kinetická energia prstenca  $W = \omega^2 J/2$ , kde  $J = ma^2/2$  je moment zotrvačnosti prstenca vzhľadom na os otáčania ( $m$  je hmotnosť prstenca). Podľa zákona zachovania energie

$$\frac{dW}{dt} = -P \quad \text{teda} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{ma^2 \omega^2}{4} \right) = -\frac{\pi^2 \omega^2 B^2 a^4}{2R}$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je

$$\omega = \omega_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

kde  $\tau$  je hľadaný charakteristický čas, za ktorý kruhová frekvencia poklesne na 1/e-tinu začiatočnej hodnoty  $\omega_0$ . Tento čas je daný výrazom

$$\tau = \frac{mR}{\pi^2 B^2 a^2}$$

Ak si uvedomíme, že hmotnosť prstenca  $m = 2\pi a \rho S$ , odpor  $R = 2\pi a / (\sigma S)$  ( $S$  je prierezová plocha prstenca), potom

$$\tau = \frac{4\rho}{\sigma B^2} = 1,5 \text{ s}$$

199. V padajúcom rámečku sa indukuje prúd

$$I = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{aBv}{R}$$

kde  $v$  je rýchlosť rámečka a  $R$  jeho elektrický odpor. Sila pôsobiaca na rámeček je

$$F = mg - aIB = mg - v \frac{a^2 b^2}{R}$$

kde  $m$  je hmotnosť rámečka a  $g$  je gravitačné zrýchlenie. Pohybová rovnica pre rámeček je

$$m \frac{dv}{dt} = F = mg - v \frac{a^2 B^2}{R} \quad \text{ktorej riešenie je} \quad v(t) = v_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

kde

$$v_0 = \frac{gRm}{a^2 B^2} = \frac{16g\rho}{\sigma B^2} = 12 \text{ mm/s} \quad \tau = \frac{Rm}{a^2 B^2} = \frac{16\rho}{\sigma B^2} = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

200. Intenzita elektrického poľa vo vode  $E = vB$  a prúdová hustota

$$J = \sigma E = \sigma vB = 0,14 \cdot 10^{-4} \text{ A/m}^2$$

201. Magnetická indukcia v okolí priameho vodiča

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

je kolmá na rovinu slučky. Indukované napätie v slučke

$$\mathcal{E} = av_0 [B(r) - B(r+b)] = \frac{\mu_0 I a b v_0}{2\pi r(r+b)}$$

202. V obvode sa indukuje elektromotorické napätie

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(-\mathcal{E}) = \mathcal{E}$$

Toto napätie spôsobí prúd v slučke  $I = \mathcal{E}/R$ . Označme  $R_1$  odpor kratšieho oblúka  $AB$ , dlhší oblúk  $BA$  má odpor  $R - R_1$ . Výsledok merania napätia závisí od spôsobu pripojenia voltmetra. Ak sa voltmeter pripojí vodičmi pozdĺž kratšieho oblúka  $AB$ , nameria sa napätie  $U_{AB} = IR_1 = \mathcal{E}R_1/R$ , ak sa pripojí pozdĺž dlhšieho oblúka  $BA$ , nameria sa napätie  $U_{BA} = I(R - R_1) = \mathcal{E}(R - R_1)/R$ . Predpokladá sa, že spojovacie vodiče nepretínajú indukčný tok. Medzi dvoma bodmi  $A$  a  $B$  nameria teda voltmeter dve rôzne hodnoty napätia.

Tento na prvý pohľad paradoxný výsledok súvisí so skutočnosťou, že elektrické pole v závite je vírovým poľom a dráhový integrál jeho intenzity je nenulový, na rozdiel od elektrostatických prípadov. Súčet napätí v obvode je teda tiež nenulový a v danom prípade

$$U_{AB} + U_{BA} = \mathcal{E} \neq 0$$

203. Vo veľkej vzdialenosti od závitu je magnetické pole poľom dipólu a magnetická indukcia na jeho osi je

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}$$

kde  $m = \pi a^2 I$  je magnetický moment závitů. Magnetický tok protínající druhý závit je

$$\Phi_2 = \pi a^2 B(b) = \frac{\pi \mu_0 I a^4}{2b^3} \quad \text{takže vzájemná indukčnost} \quad M = \frac{\Phi_2}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^4}{2b^3}$$

$$204. Q = \frac{SB}{R_i}$$

205. Ak je prúd vo valcovom vodiči rozložený homogénne, potom vo zvolenej valcovej časti vodiča o polomere  $r < R$  tečie časť prúdu  $I' = r^2 I / R^2$  ktorý vytvára vo vzdialenosti  $r$  od osi valca magnetickú indukciu

$$B = \frac{\mu_0 I' r}{2\pi R^2}$$

Elementárny indukčný tok v dutine vymedzenej valcami s polomerami  $r$  a  $r + dr$  a s jednotkovou dĺžkou viazaný s prúdom  $I'$  je

$$d\Phi = B \frac{r^2}{R^2} dr = \frac{\mu_0 I r^3}{2\pi R^4} dr \quad \text{a celkový tok} \quad \Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

z čoho indukčnosť na jednotku dĺžky

$$L' = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

Výraz platí iba pre jednosmerné a nízkofrekvenčné prúdy, keď možno zanedbať skinefekt.

206. Ak páskovým vedením tečie prúd  $I$  v navzájom opačných smeroch, potom magnetická indukcia medzi páskami je

$$B = \mu_0 J = \frac{\mu_0 I}{w}$$

a indukčný tok medzi páskami na jednotku dĺžky vedenia je

$$\Phi = Bd = \frac{\mu_0 Id}{w}$$

takže indukčnosť na jednotku dĺžky vedenia je

$$L' = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 d}{w}$$

207. Ak vodičmi tečie prúd  $I$  v navzájom opačných smeroch, potom každý z vodičov budí vo svojom okolí magnetickú indukciu

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

a celkový tok medzi vodičmi na jednotku dĺžky vedenia je

$$\Phi = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{d-a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

Indukčnosť na jednotku dĺžky vedenia

$$L' = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \quad \text{a ak } d \gg a, \text{ potom} \quad L' \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a}$$

**208.** Systém valcový vodič – rovina sa dá pre potreby výpočtu indukčnosti nahradiť dvojicou paralelných valcových vodičov uložených vo vzdialenosti  $2d$ , ktorými tečú prúdy  $I$  v navzájom opačných smeroch. Indukčný tok medzi vodičom a rovinou je rovný polovici indukčného toku medzi vodičmi, teda indukčnosť systému valcový vodič – rovina bude rovná polovici indukčnosti dvojlinky. Využívajúc výsledok predchádzajúcej úlohy dostaneme

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2d-R}{R} \quad \text{alebo približne} \quad L' \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2d}{R}$$

**209.** Ak vonkajším solenoidom tečie prúd  $I_1$ , potom magnetická indukcia v jeho vnútri je

$$B = \frac{\mu_0 I_1 N_2}{b^2}$$

a pretína  $N_1$  závitov vnútorného solenoidu s celkovou plochou  $N_1 \pi a_1^2$ . Indukčný tok vnútorným solenoidom je teda

$$\Phi_2 = \pi \mu_0 I_1 N_1 N_2 \frac{a_1^2}{b^2} \quad \text{a vzájomná indukčnosť} \quad M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \pi \mu_0 N_1 N_2 \frac{a_1^2}{b^2}$$

**210.** Magnetická indukcia v okolí priameho vodiča s prúdom  $I_1$  je

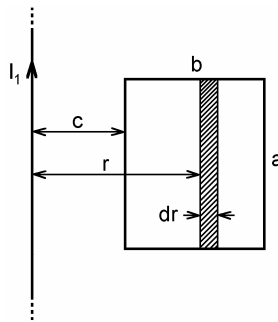
$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

a tok štvoruholníkovou slučkou podľa obr. R210

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \int_c^{c+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c}$$

z čoho vzájomná indukčnosť

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c}$$



Obr. R210

$$211. M = \mu_0 p \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{p^2}} \right)$$

212. Pole závitů 1 ve velké vzdálenosti  $d$  je pólem magnetického dipólu. Na osi dipólu je magnetická indukce

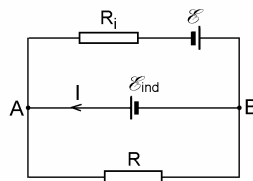
$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi d^3}$$

Indukované elektromotorické napětí v závitě 2 je

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{dS}{dt}$$

kde  $S = \pi a^2 \cos \alpha t$ , takže

$$\mathcal{E} = \frac{\omega \mu_0 I a^4}{2d^3} \sin \alpha t$$



Obr. R213

213. Především třeba vypočítat proud, který teče pohybujícím se vodičem  $AB$ . Tento proud je daný zdrojem EMN  $\mathcal{E}$  a indukovaným EMN  $\mathcal{E}_{ind} = lvB$ , závislým od rychlosti  $v$  vodiče. Pro soustavu možno nakreslit náhradný obvod podľa obr. R213, v ktorom proud vodičem  $AB$  je

$$I = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R'} + \frac{\mathcal{E}}{R_i} = \frac{lvB}{R'} + \frac{\mathcal{E}}{R_i}$$

kde  $R' = R_i R / (R_i + R)$ . Síla pôsobiaca na vodič v gravitačnom a magnetickom poli  $B$  je výslednicou gravitačnej síly  $mg$  smerujúcej nadol a magnetickej síly  $lIB$  smerujúcej nahor, teda

$$F = mg - lIB = mg - \frac{lB\mathcal{E}}{R_i} - v \frac{l^2 B^2}{R'}$$

Pre pohyb vodiča  $AB$  platí pohybová rovnica

$$m \frac{dv}{dt} = F = mg - \frac{lB\mathcal{E}}{R_i} - v \frac{l^2 B^2}{R'}$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice pre  $v$  je tvaru

$$v(t) = v_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad \text{kde} \quad v_0 = \frac{(mgR_i - \mathcal{E}lB)R}{(R_i + R)l^2 B^2} = 0,31 \text{ m/s}$$

je hľadaná ustálená rýchlosť vodiča. Časová konštanta pohybu

$$\tau = \frac{mR_i R}{(R_i + R)l^2 B^2} = 1 \text{ s}$$

Doba, po ktorej možno rýchlosť považovať za ustálenú, je väčšia ako  $5\tau$ .

**214.** Vodičom  $AB$  pri jeho pohybe rýchlosťou  $v$  nadol tečie prúd

$$I = \frac{2\mathcal{E}_{ind}}{3R} = \frac{2vlB}{3R}$$

Na vodič pôsobí výsledná sila smerom nadol

$$F = mg - \frac{2vl^2 B^2}{3R}$$

Riešením pohybovej rovnice pre rýchlosť vodiča

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{2vl^2 B^2}{3R}$$

dostaneme riešenie v tvare  $v(t) = v_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$

kde

$$v_0 = \frac{3mgR}{2l^2 B^2} = 1,47 \text{ cm/s}$$

je hľadaná rýchlosť (bez započítania odporu vzduchu).

**215.** Na oboch stranách pásy budú plošné náboje veľkosti  $\sigma = \epsilon_0 v B = 10^{-6} \text{ C/m}^2$ . Kladné náboje na páske sa posunú v smere vektora  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  a záporné v opačnom smere.

**216.** V otáčajúcom sa valci pôsobí na viazané náboje Lorentzova sila, ktorej je ekvivalentná intenzita elektrického poľa

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega} B \mathbf{r}$$

ak vektory  $\boldsymbol{\omega}$  a  $\mathbf{B}$  majú rovnaký smer. Vzniknuté viazané náboje znížia túto intenzitu  $\epsilon_r$ -krát, takže výsledná intenzita  $\mathbf{E}$  v objeme valca bude daná výrazom

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r} = \frac{1}{\epsilon_r} \boldsymbol{\omega} B \mathbf{r}$$

Vektor polarizácie  $\mathbf{P}$  v objeme valca (pre  $r_1 < r < r_2$ ) je daný výrazom

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \boldsymbol{\omega} B \mathbf{r}$$

$$\text{a) } \rho_v = -\text{div } \mathbf{P} = -2\epsilon_0 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \boldsymbol{\omega} B$$

$$\text{b) } Q_v = \pi(r_2^2 - r_1^2) \rho = 2\pi(r_2^2 - r_1^2) \epsilon_0 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \boldsymbol{\omega} B$$

$$\text{c) } \sigma_v(r_1) = -P(r_1) = -\epsilon_0 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \boldsymbol{\omega} B r_1 \quad \sigma_v(r_2) = -P(r_2) = -\epsilon_0 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \boldsymbol{\omega} B r_2$$

$$d) Q'_v = 2\pi r_2 \sigma_v(r_2) - 2\pi r_1 \sigma_v(r_1) = 2\pi(r_2^2 - r_1^1) \epsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \omega B$$

$$e) Q_v + Q'_v = 0$$

217. V súhlase s výsledkom úlohy 209 vzájomná indukčnosť cievočky a solenoidu je

$$M = \mu_0 n N S = 10^{-2} \text{ H}$$

a napätie indukované v solenoide

$$\mathcal{E} = \pm M \frac{di}{dt} = \pm \omega M I \cos \omega t = \pm 2,5 \cos \omega t \quad [\text{V}]$$

Znamienko závisí od vzájomného smeru vinutí.

218. a) Časová zmena indukčného toku na kruhu s polomerom  $R$  je

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

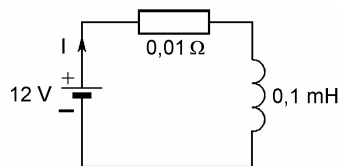
pričom indukované elektrické pole na kružnici s polomerom  $R$  je dané výrazom

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R E = \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{z čoho plynie, že} \quad E = \frac{R}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$$

b) Zmena hybnosti elektrónu spôsobená zmenou magnetickej indukcie na polomere  $R$  je  $mdv = eR dB_R$  a musí byť rovná zmene hybnosti od účinku intenzity elektrického poľa  $E$ , teda

$$mdv = eEdt = \frac{eR}{2} d\bar{B}$$

Z posledných dvoch výrazov plynie, že  $dB_R = d\bar{B}/2$ .



Obr. R219

219. a) Náhradný obvod cievky a zdroja je na obr. R219. Pre prúd  $I$  v obvode platí diferenciálna rovnica

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}$$

ktorej riešenie so začiatočnou podmienkou  $I = 0$  pre  $t = 0$  je

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) \right]$$



Prúd dosiahne maximálnu hodnotu  $I_{max} = \mathcal{E}/R$  po nekonečnej dobe. Pre čas  $t_0$ , v ktorom prúd dosiahne 90 % maximálnej hodnoty, t. j.  $I = 0,9I_{max}$ , z posledného výrazu plynie

$$t_0 = \frac{L}{R} \ln \frac{I_{max}}{I_{max} - 0,9I_{max}} = \frac{L}{R} \ln 10 = 0,115 \text{ s}$$

b) Energia magnetického poľa v čase  $t = t_0$  je

$$W_{mag} = \frac{L}{2} (0,9I_{max})^2 = 291,5 \text{ J}$$

c) Celková energia odobratá zo zdroja v čase  $t = t_0$  je

$$W_{zdroj} = \int_0^{t_0} \mathcal{E} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{t_0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right] dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left\{ t_0 - \frac{L}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right] \right\} = 1010 \text{ J}$$

220. Pre prúdy v zapojení na obr. R220 platia rovnice

$$I_1 + I_2 = I \quad L \frac{dI_2}{dt} + R_i I = \mathcal{E} \quad RI_1 - L \frac{dI_2}{dt} = 0$$

Postupnými substitúciami v druhej rovnici a jej úpravou dostaneme rovnicu

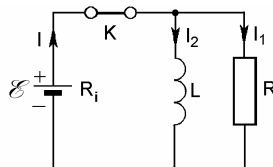
$$\frac{dI_2}{dt} + \frac{R_i}{kL} I_2 = \frac{\mathcal{E}}{kL}$$

kde  $k = (1 + R_i/R)$ . V čase  $t = 0$  je  $I_2 = 0$ , a v čase  $t = \infty$  je  $I_2 = \mathcal{E}/R_i$ . Riešenie poslednej rovnice je potom tvaru

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_i} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{R_i}{kL}t\right) \right] \quad \text{a prúd odporom } R \quad I_1 = \frac{L}{R} \frac{dI_2}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{kR} \exp\left(-\frac{R_i}{kL}t\right)$$

Celkový náboj  $Q_R$ , ktorý pretečie odporom  $R$  dostaneme integráciou tohto prúdu v časovom intervale  $t = 0$  až po  $t = \infty$ , teda

$$Q_R = \int_0^{\infty} I_1 dt = \frac{\mathcal{E}L}{RR_i}$$



Obr. R220

Úlohu však možno riešiť oveľa jednoduchšie. Pre prúdy  $I_1$  a  $I_2$  v zapojení podľa obr. R220 platí

$$RI_1 = L \frac{dI_2}{dt}$$

Prúd  $I_1 = dQ_R/dt$ , kde  $Q_R$  je náboj tečúci odporom  $R$ . Po dosadení do poslednej rovnice dostaneme rovnicu

$$R \frac{dQ_R}{dt} = L \frac{dI_2}{dt} \quad \text{a jej integráciou dostaneme} \quad Q_R = \frac{L}{R} \int_0^{I_\infty} dI_2 = \frac{L}{R} I_\infty$$

Prúd indukčnosťou v okamihu zopnutia kľúča sa rovná nule. Prúd  $I_\infty = \mathcal{E}/R_i$  je prúd po nekonečne dlhom čase (ustálený prúd v indukčnosti). Teda

$$Q_R = \frac{\mathcal{E}L}{RR_i}$$

**221.** Uvažujme najprv elektromagnet s nulovým odporom, premostený kapacitou  $C$  a napájaný konštantným prúdom  $I_0$  podľa obr. R221a. Po prerušení prúdu bude pre obvod v každom okamihu platiť rovnica

$$U_L + U_C = 0 \quad \text{alebo} \quad L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int Idt = 0$$

Derivovaním tejto rovnice podľa času dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd v obvode

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} = 0$$

ktorej riešenie so začiatočnou podmienkou  $I = I_0$  v čase  $t = 0$  (v okamihu prerušenia prúdu dodávaného do elektromagnetu) je

$$I = I_0 \cos \omega t$$

kde  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Napätie na indukčnosti reprezentovanej elektromagnetom je

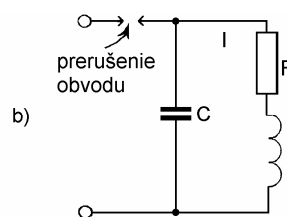
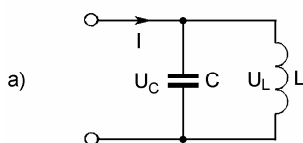
$$U_L = -L \frac{dI}{dt} = \omega L I_0 \sin \omega t$$

Z tohoto výrazu vidieť, že napätie na indukčnosti má periodický priebeh s amplitúdou

$$U_m = \omega L I_0 = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Pri požiadavke  $U_m = 10\,000$  V plynie pre kapacitu hodnota

$$C = \frac{L I_0^2}{U_m^2} = 10^{-6} \text{ F} = 1 \mu\text{F}$$



Obr. R221

Ak odpor vinutia elektromagnetu je  $R = 1 \Omega$ , možno indukované napätie odhadnúť nasledovným spôsobom: Stacionárny prúd v indukčnosti je 10 A a pri prerušení obvodu sa skokom nezmení. Na odpore je v začiatočnom okamihu napätie  $I_0 R = 10 \text{ V}$ , ktoré sa odčíta od indukovaného napätia 10 000 V. Teda na vinutí elektromagnetu bude napätie asi 9 990 V.

Pri presnejšom výpočte možno postupovať nasledovne: Náhradný obvod pre elektromagnet s nenulovým odporom a paralelným kondenzátorom je na obr. R221b. Pre tento obvod platí rovnica

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

ktorej všeobecné riešenie je

$$I = Ke^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$$

kde  $K$  a  $\varphi$  sú konštanty, ktoré sa určia zo začiatočných podmienok.  $\alpha$  a  $\omega$  sú dané výrazmi

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Napätie na kondenzátore (a teda aj na svorkách elektromagnetu) je

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt = -\frac{K}{C} \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} [\alpha \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)] =$$

$$= -KLe^{-\alpha t} [\alpha \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)]$$

Z výrazu vidno, že napätie na svorkách elektromagnetu má po prerušení prúdového obvodu periodický priebeh, ktorého amplitúda exponenciálne klesá s faktorom  $e^{-\alpha t}$ .

V ďalšom treba určiť extrémny napätia na svorkách elektromagnetu. Časy  $t_n$ , v ktorých napätie na svorkách elektromagnetu dosahuje extrémne hodnoty, sa určia z podmienky

$$\frac{dU_C}{dt} = KLe^{-\alpha t} (\alpha + \omega) \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

čo je splnené, ak  $\omega t_n + \varphi = n\pi$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Pretože faktor  $e^{-\alpha t}$  so zvyšovaním času klesá, napätie bude najväčšie pre najmenší čas  $t_0$ , pre ktorý platí

$$\omega t_0 + \varphi = 0 \qquad \text{z čoho} \qquad t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$$

Maximálne napätie na svorkách elektromagnetu sa určí z výrazu pre  $U_C$  v čase  $t = t_0$ . Jeho hodnota je

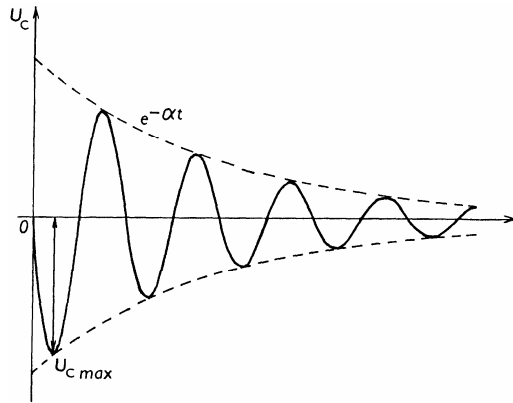
$$U_{Cmax} = -KL\alpha e^{-\alpha t_0}$$

Na výpočet tohto napätia ešte treba určiť konštanty  $K$  a  $\varphi$ . V čase  $t = 0$  prúd v obvode má hodnotu  $I_0 = 10 \text{ A}$  a napätie na kondenzátore sa rovná napätiovému spádu na odpore elektromagnetu, teda  $U_{C0} = RI_0 = 10 \text{ V}$ . Z výrazov pre  $I$  a  $U_C$  v čase  $t = 0$  plynie

$$I_0 = K \sin \varphi \qquad U_{C0} = -KL(\alpha \sin \varphi + \omega \cos \varphi)$$

Riešením týchto rovníc pre  $K$  a  $\varphi$  dostaneme

$$K = \pm I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{U_{C0}}{\omega LI_0} + \frac{\alpha}{\omega}\right)^2} \qquad \text{a} \qquad \varphi = \arcsin \frac{I_0}{K} = \pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{U_{C0}}{\omega LI_0} + \frac{\alpha}{\omega}\right)^2}}$$



Obr. R221c

Dosadením číselných hodnôt dostaneme  $K = \pm 10 \sqrt{1 + 2,225 \cdot 10^{-6}} \text{ A} \approx \pm 10 \text{ A}$  a  $\varphi \approx \pm \pi/2$ . Pretože  $t_0$  musí byť kladné (čas po prerušení obvodu), treba voliť

$$\varphi = -\pi/2 \qquad K = +10 \text{ A}$$

takže

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$$

Dosadením číselných hodnôt do výrazu pre  $U_{Cmax}$  dostaneme

$$U_{Cmax} = -K\omega L \exp\left(-\frac{\alpha\pi}{2\omega}\right) = -9992 \text{ V}$$

Znamienko "-" vo výsledku vyjadruje skutočnosť, že polarita prvého maxima napätia na kondenzátore je opačná ako polarita napätia v ustálenom stave (pred rozopnutím obvodu). Priebeh napätia na svorkách elektromagnetu je znázornený na obr. R221c.

**222.** V ustálenom stave tečie indukčnosťou prúd  $I = U_0/R_L$  za predpokladu, že vnútorný odpor zdroja je zanedbateľný. V okamihu odpojenia zdroja prúd v indukčnosti má hodnotu  $I$ , ale uzatvára sa cez odpor  $R$ . Napätie na odpore  $R$  (teda na svorkách indukčnosti) je vtedy maximálne a má hodnotu

$$U_{max} = RI = U_0 \frac{R}{R_L}$$

teda napätie na svorkách indukčnosti po odopnutí zdroja je  $R/R_L$ -krát väčšie ako napätie zdroja.

**223.** Pre obvod na obr. 223 v zadaní úlohy platia rovnice podľa II. Kirchhoffovho zákona

$$RI_1 + L \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = \mathcal{E} \qquad L \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} = 0$$

Substitúciou  $dI_2/dt$  v prvej rovnici z druhej dostaneme rovnicu

$$L' \frac{dI_1}{dt} - RI_1 = \mathcal{E} \qquad \text{kde} \qquad L' = L \left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right) = 0,64L$$

Riešením rovnice pre  $I_1$  so začiatočnou podmienkou  $I_1 = 0$  v čase  $t = 0$  dostaneme výrazy pre prúdy v primárnom obvode

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[ 1 - \exp\left(-1,56 \frac{R}{L} t\right) \right]$$

a v sekundárnom obvode

$$I_2 = \frac{M}{L} \int \frac{dI_1}{dt} dt = 0,6I_1 + \text{konšt.}$$

Hodnotu integračnej konštanty určíme zo začiatočnej podmienky. V čase  $t = 0$  je  $I_2 = 0$ , z čoho plynie, že konšt. = 0, teda

$$I_2 = 0,6I_1 = 0,6 \frac{\mathcal{E}}{R} \left[ 1 - \exp\left(-1,56 \frac{R}{L} t\right) \right]$$

Výsledok riešenia je na prvý pohľad prekvapivý, pretože po ustálení prechodového javu (po čase väčšom ako  $5\tau = 5L/1,56R$ ) tečie v sekundárnom obvode prakticky stály prúd s asymptotickou hodnotou

$$I_{02} = 0,6 \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \text{a v primárnom obvode prúd} \quad I_{01} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Tento stav sa zachová dovtedy, dokiaľ sa nerozopne spínač v primárnom obvode. Samozrejme takáto situácia je možná iba vtedy, ak sekundárny obvod je supravodivý, teda ak jeho odpor je nulový. V opačnom prípade by prúd v sekundárnom obvode exponenciálne klesal k nule. Takýto princíp sa využíva pre počiatočné vzbudenie prúdu v cievkach supravodivých magnetov.

## Magnetizmus látok

224. Ak vo výraze pre diamagnetickú susceptibilitu dosadíme  $n = N_A$  (Avogadrovo číslo) dostaneme výraz pre susceptibilitu vztiahnutú na kilomol, teda

$$\chi_M = -5,9 \cdot 10^{-15} N_A \sum_Z \langle r^2 \rangle = -3,553 \cdot 10^{12} \sum_Z \langle r^2 \rangle$$

Keďže susceptibilita jedného kilomolu hélia je  $\chi_M = -2,4 \cdot 10^{-8}$ , z posledného výrazu vyplýva, že

$$\sum_{Z=2} \langle r^2 \rangle = 6,755 \cdot 10^{-21} = 2,423 a_0^2 \quad [\text{m}^2]$$

z čoho na jednu elektrónovú dráhu (dva elektróny hélia) pripadá hodnota stredného kvadratického polomeru  $1,21 a_0^2$ .

225. Ak vo výraze pre paramagnetickú susceptibilitu urobíme zámenu  $n \rightarrow N_A$  (Avogadrovo číslo) dostaneme výraz pre susceptibilitu na kilomol v tvare

$$\chi = \frac{\mu_0 N_A m^2}{3kT} = 1,827 \cdot 10^{43} \frac{\text{m}^2}{T}$$

Porovnaním tejto hodnoty s hodnotou uvedenou v zadaní úlohy dostávame pre permanentný dipólový moment pripadajúci na jeden ión  $\text{Ni}^{2+}$  za uvedených predpokladov hodnotu

$$m = 2,96 \cdot 10^{-23} \text{ A.m}^2$$

226. Označme magnetické pole v prstenci  $B$ ,  $H$  a pole v štrbine  $B_0$ ,  $H_0$ . Potom platí

$$Hl + H_0l_0 = NI$$

$$B = B_0 \quad \text{alebo} \quad \mu H = \mu_0 H_0$$

Riešením týchto rovníc pre  $H$  a  $H_0$  a dosadením numerických hodnôt dostaneme

$$H = \frac{\mu_0 NI}{\mu_0 l + \mu l_0} = 49,2 \text{ A/m} \quad H_0 = \frac{\mu}{\mu_0} H = 1,475 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$

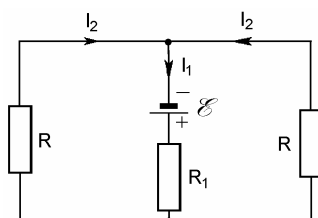
$$B = B_0 = \mu_0 H_0 = \mu H = 0,185 \text{ T}$$

227. Magnetické odpory (reluktancie) jednotlivých častí magnetického obvodu na obr. 227 v zadaní úlohy sú: od bodu 0 po bod  $P$  doprava

$$R_m = \frac{2l_1 + l_2}{\mu S}$$

a rovnaká reluktancia je od bodu 0 k  $P$  smerom doľava. Od 0 po  $P$  cez štrbinu je reluktancia

$$R_{m1} = \frac{l_2 - l_3}{\mu S} + \frac{l_3}{\mu_0 S}$$



Obr. R227

Uvažovaný magnetický obvod možno modelovať elektrickým obvodom podľa obr. R227, v ktorom prúd

$$I_1 = \frac{2\mathcal{E}}{R + 2R_1}$$

Pre magnetický obvod treba urobiť náhradu  $I_1 \rightarrow \Phi$  (magnetický indukčný tok v štrbine),  $\mathcal{E} \rightarrow NI$  (magnetomotorické napätie pôsobiace v obvode),  $R \rightarrow R_m$  a  $R_1 \rightarrow R_{m1}$ . Potom dostaneme

$$\Phi = \frac{2NI}{R_m + 2R_{m1}}$$

Magnetická indukcia v štrbine

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{2\mu NI}{2l_1 + 3l_2 + 2l_3 \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)} = 1,87 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

a intenzita magnetického poľa v štrbine

$$H = \frac{B}{\mu_0} = 14\,880 \text{ A/m}$$

228. Pre magnetický obvod prstenca platí  $2\pi RH = NI$ , kde  $R = (R_1 + R_2)/2 = 11$  cm je stredný polomer prstenca. Prúd vo vinutí

$$I = \frac{2\pi R}{N} H = 0,0346 H \quad [\text{A}; \text{A/m}]$$

Z magnetizačnej krivky na obr. 228 v zadaní úlohy zistíme, že na vytvorenie magnetickej indukcie  $B = 1,2$  T je potrebná intenzita magnetického poľa  $H = 130$  A/m. Dosadením tejto hodnoty do posledného výrazu dostaneme magnetizačný prúd  $I = 4,5$  A.

229. Hysterézne straty na jednotku objemu a počas jedného magnetizačného cyklu sú dané výrazom

$$W = \oint_{-B_0 \leftrightarrow +B_0} H dB$$

a graficky predstavujú plochu ohraničenú hysteréznou slučkou. Táto plocha sa rovná integrálu z rozdielu funkcií  $B^+$  a  $B^-$  v hraniciach od  $-H_0$ , po  $+H_0$ , teda

$$W = \int_{-H_0}^{+H_0} (B^+ - B^-) dH = a \int_{-H_0}^{+H_0} (H_0^2 - H^2) dH = \frac{4}{3} a H_0^3$$

230. Z výrazu pre intenzitu Hallovhého elektrického poľa

$$E_H = \frac{JB}{ne}$$

dostaneme počet vodivostných elektrónov na jednotku objemu

$$n = \frac{JB}{eE_H} = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

Počet atómov sodíka na jednotku objemu

$$n_{at} = \frac{\rho N_A}{M} = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

kde  $N_A$  je Avogadrovo číslo. Na jeden atóm sodíka pripadá jeden vodivostný elektrón.

## Striedavé elektrické prúdy

231. Stredné hodnoty priebehov na obr. 231 v zadaní úlohy sú:

a) 0, b)  $U_m/\pi$ , c)  $U_m/2$ , d)  $2U_m/\pi$ , e) 0, f)  $U_m/2$ , g) 0, h)  $U_m/2$ .

Efektívne hodnoty:

a)  $U_m/\sqrt{2}$ , b)  $U_m/2$ , c)  $U_m/\sqrt{3}$ , d)  $U_m/\sqrt{2}$ , e)  $U_m$ , f)  $U_m/\sqrt{3}$ , g)  $U_m/\sqrt{3}$ , h)  $U_m/\sqrt{2}$ .

232. Prúd zaostáva za napätím vo fáze o  $\varphi = 63,4^\circ$ , teda obvod pozostáva z odporu a indukčnosti. Kruhová frekvencia  $\omega = 500$  rad/s. Pre pomer amplitúd napätia a prúdu platí

$$\frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{a pre fázu} \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

z čoho  $R = \frac{U_m}{I_m \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$  a  $L = \frac{R}{\omega} \operatorname{tg} \varphi$

Dosadením číselných hodnôt  $U_m = 150 \text{ V}$ ,  $I_m = 13,42 \text{ A}$ ,  $\varphi = 63,4^\circ$  dostaneme

$$R = 5 \Omega \qquad L = 20 \text{ mH}$$

233.  $R = 20 \Omega$ ,  $C = 33,3 \mu\text{F}$

234.  $R = 16 \Omega$ ,  $L = 16 \text{ mH}$ ,  $C = 250 \mu\text{F}$

235. a) Napätie na vstupných svorkách  $U_{ef} = R_2 I_{3ef} = 120 \text{ V}$ .

b) Ďalej platí

$$\frac{I_{2ef}}{U_{ef}} = \sqrt{\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2} \qquad \text{z čoho} \qquad X_L = \frac{U_{ef} R_2}{\sqrt{I_{2ef}^2 R_2^2 - U_{ef}^2}} = 5,76 \Omega$$

Odpor  $R_1$  možno určiť zo vzťahu

$$\frac{I_{1ef}^2}{U_{ef}^2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 + \frac{1}{X_L^2} \qquad \text{teda} \qquad R_1 = \frac{U_{ef}}{\sqrt{I_{1ef}^2 - I_{2ef}^2 + I_{3ef}^2 - I_{3ef}^2}} = 8,82 \Omega$$

c) Aktívny výkon v obvode je súčtom výkonov v jednotlivých odporoch, teda

$$P = P_1 + P_2 = \frac{U_{ef}^2}{R_1} + I_{3ef}^2 R_2 = 2592 \text{ W}$$

d) Pre komplexnú impedanciu obvodu platí

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jX_L} = 0,18 - j0,17 \text{ S} \qquad \text{alebo} \qquad Z = 2,88 + j2,77 \Omega.$$

Absolútna hodnota impedancie  $|Z| = Z = 4 \Omega$ .

236. Obvod má impedanciu  $Z$ , ktorej absolútna hodnota spĺňa vzťah

$$\left|\frac{1}{Z}\right| = \left|\frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C\right| \qquad \text{z čoho} \qquad |Z| = Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 C^2 R^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}} = 282,8 \Omega$$

Amplitúda prúdu je

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = 0,5 \text{ A}$$

237. a) Impedancia obvodu

$$Z = R_1 + jX_L - \frac{jR_2 X_C}{R_2 - jX_C} = 70 + j10 \Omega$$

má absolútnu hodnotu  $Z = 70,71 \Omega$ , takže efektívna hodnota prúdu v obvode

$$I_{ef} = \frac{U_{ef}}{Z} = 3,39 \text{ A}$$



b) Absolútna hodnota impedancie paralelnej RC dvojice

$$Z_{RC} = \frac{R_2 X_C}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}} = 70,71 \Omega$$

a amplitúda napätia na kondenzátore  $U_m = \sqrt{2} I_{ef} Z_{RC} = 339,4$  V. Náboj na kondenzátore má amplitúdu

$$Q_m = C U_m = \frac{U_m}{\omega X_C} = 10^{-2} \text{ C}$$

c) Celkový činný výkon v obvode

$$P = I_{ef}^2 R_1 + \frac{U_{ef}^2}{R_2} = 805,8 \text{ W}$$

238. Pre sériovú RC dvojicu je:

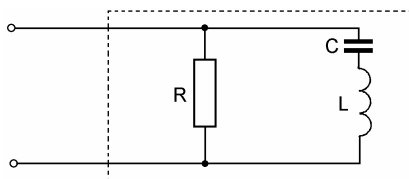
- a)  $Z = 10^4 (1 - j1,59) \Omega$ ,
- b)  $I_{ef} = 11,7$  mA,
- c)  $P = 1,37$  W,
- d)  $U_{efR} = 117$  V,  $U_{efC} = 186$  V

Pre paralelnú RC dvojicu je:

- a)  $Z = 10^3 (7,17 - j4,50) \Omega$ ,
- b)  $I_{ef} = 26$  mA,
- c)  $P = 4,84$  W,
- d)  $I_{efR} = 22$  mA,  $I_{efC} = 13,82$  mA

239. Rezonančné maximum prúdu napovedá, že v skrinke je sériovo spojená indukčnosť  $L$  a kapacita  $C$ . Obvod je vodivý pre jednosmerný prúd, teda k sériovej  $LC$  dvojici je paralelne pripojený odpor  $R$ . Skrinka obsahuje obvod podľa obr. R239. Treba vypočítať hodnoty  $R$ ,  $L$ ,  $C$ . Označme  $U_0 = 100$  V,  $I_0 = 0,01$  A,  $U_{ef} = 220$  V,  $I_{ef} = 2$  A,  $f = \omega/2\pi = 50$  Hz a  $f_0 = \omega_0/2\pi = 1$  kHz. Hodnota odporu je

$$R = \frac{U_0}{I_0} = 10\,000 \Omega$$



Obr. R239

Absolútna hodnota impedancie obvodu je daná výrazom

$$Z = \frac{|R(\omega^2 LC - 1)|}{\sqrt{(\omega^2 LC - 1)^2 + (\omega RC)^2}} = \frac{U_{ef}}{I_{ef}} = 110 \Omega$$

Ak uvážime, že  $LC = 1/\omega_0^2$ , potom pre  $C$  z posledného výrazu dostaneme

$$C = \frac{\sqrt{\left(\frac{R^2 I_{ef}^2}{U_{ef}^2} - 1\right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2}}{\omega R} = 28,86 \mu\text{F}$$

Hodnota indukčnosti je daná výrazom

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = 0,878 \text{ mH}$$

240. Na kružnici s polomerom  $r$  a so stredom na osi kondenzátora podľa zákona celkového prúdu platí

$$2\pi r H = \left( i + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) \pi r^2$$

kde  $i = \sigma E$  je prúdová hustota v dielektriku kondenzátora. Z posledného výrazu dostaneme

$$H = \frac{r}{2} \left( \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{E_m}{2} r \left( \sigma \cos \omega t - \omega \varepsilon \sin \omega t \right) = \frac{E_m}{2} r \sigma \sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi} \cos(\omega t + \varphi)$$

kde  $\text{tg } \varphi = \omega \varepsilon / \sigma$ .

241. Admitancia kondenzátora s daným dielektrikom je

$$Y_C = j\omega \varepsilon_r C_0 = j\omega C_0 + \frac{1}{\frac{\gamma}{\omega_p^2 C_0} + j \frac{\omega}{\omega_p^2 C_0}}$$

Admitancia obvodu podľa obr. 241 v zadaní úlohy je

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

Porovnaním  $Y$  s  $Y_C$  dostaneme

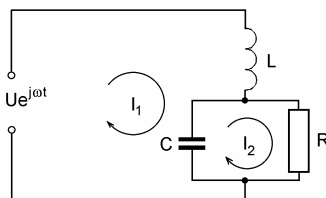
$$C = C_0 \quad L = \frac{1}{\omega_p^2 C_0} \quad R = \frac{\gamma}{\omega_p^2 C_0}$$

242. Označme  $X_L = \omega L$  a  $X_C = 1/\omega C$ . Pre komplexné amplitúdy prúdov na obr. R242 platí

$$j(X_L - X_C)I_1 + jX_C I_2 = U \quad (R - jX_C)I_2 + jX_C I_1 = 0$$

Ak  $X_L = X_C = X$ , potom z prvej rovnice plyní pre prúd odporom

$$I_R = I_2 = -j \frac{U}{X_C} = -j\omega C U = -j \frac{U}{\omega L}$$



Obr. R242

Prúd tečúci cez odpor zaostáva vo fáze o  $\pi/2$  za napätím a nezávisí od veľkosti odporu  $R$ . Výsledok je platný iba v prípade ideálnych prvkov  $L$ ,  $C$  a napäťového zdroja s nulovou vnútornou impedanciou.

243.  $I_R = j\omega CU = jU/\omega L$ . Prúd predbieha vo fáze napätie zdroja o  $\pi/2$  a nezávisí od veľkosti odporu  $R$ .

244. a) Zapojenie podľa obr. 244 v zadaní úlohy možno znázorniť náhradnou schémou na obr. R244a, kde  $X_L = \omega L$  a  $X_C = 1/\omega C$ . Impedancia zapojenia na vstupných svorkách je

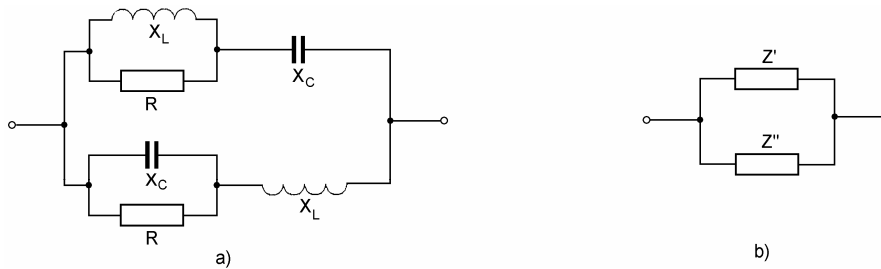
$$Z = \frac{X_L X_C + jR(X_L - X_C)}{2R + j(X_L - X_C)}$$

Táto impedancia bude reálna, ak  $X_L = X_C$ , čo bude splnené pri frekvencii

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b) Pri frekvencii  $\omega_0$  je

$$Z = \frac{X_L X_C}{2R} = \frac{L}{2RC}$$



Obr. R244

Impedancia  $Z$  sa bude rovnat'  $R$  vtedy, ak

$$\frac{L}{C} = 2R^2$$

c) Ak sú splnené body a) a b), potom pre daný obvod možno nakresliť náhradnú schému obr. R244b, kde

$$Z' = \frac{2R}{3}(1 - j\sqrt{2}) \quad \text{a} \quad Z'' = \frac{2R}{3}(1 + j\sqrt{2})$$

takže

$$|Z'| = |Z''| = \frac{2}{\sqrt{3}} R$$

čo znamená, že výkon vo vetvách sa bude deliť na polovice.

245. Komplexná amplitúda prúdu, ktorý tečie vetvou  $OAO'$  je

$$I_A = \frac{j\omega CU_{vsf}}{1 + j\omega CR'} \quad \text{a prúdu vetvou } OBO' \quad I_B = \frac{U_{vsf}}{2R}$$

Komplexné amplitúdy napätí uzlov  $A$  a  $B$  vzhľadom k uzlu  $O'$  sú

$$U_A = \frac{U_{vsf}}{1 + j\omega CR'} \quad U_B = \frac{U_{vsf}}{2}$$

Napätie na výstupe fázového posúvača je

$$U_{\varphi} = U_A - U_B = \frac{U_{\text{vst}}}{2} \frac{1 - j\omega CR'}{1 + j\omega CR'} = \frac{U_{\text{vst}}}{2} e^{-j2\varphi}$$

kde  $\varphi = \arctg(\omega CR')$ . Z posledných dvoch výrazov vidno, že amplitúda napätia fázového posúvača je konštantná a rovná  $U_0/2$  a fáza napätia sa pri zmene  $R'$  od 0 do nekonečna mení v intervale od 0 po  $-\pi$ .

246. Impedancie jednotlivých vetiev Owenovho mostu sú:

$$Z_1 = 1/j\omega C_1 \quad Z_2 = R_2 \quad Z_3 = (1 + j\omega C_3 R_3)/(j\omega C_3) \quad Z_x = R_x + j\omega L_x$$

Podmienka rovnováhy mostu je

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_x}$$

čo je splnené, ak

$$R_x = \frac{C_1 R_2}{C_3} \quad \text{a} \quad L_x = C_1 R_2 R_3$$

247. Podmienky rovnováhy Wienovho mostu sú:

$$\omega^2 C_1 C_3 R_1 R_3 = 1 \quad \text{a} \quad \frac{C_1}{C_3} = \frac{R_4}{R_2} - \frac{R_3}{R_1}$$

Ak  $R_1 = R_3 = R$ ,  $C_1 = C_3 = C$  a  $R_2 = R_4/2 = R_0$ , potom druhá podmienka je splnená automaticky a prvá nadobudne tvar

$$\omega RC = 1$$

248. Podmienky rovnováhy Scheringovho mostu sú:

$$\frac{R_1}{C_4} = \frac{R_2}{C_3} \quad \text{a} \quad \frac{C_1}{R_4} = \frac{C_3}{R_2}$$

Most je frekvenčne nezávislý.

249. Podmienky rovnováhy Maxwellovho mostu:

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad \text{a} \quad L_4 = C_1 R_2 R_3$$

Most je frekvenčne nezávislý.

250. Impedancia trojuholníkového zapojenia zo strany 1 – 2 musí byť rovná impedancii hviezdy z tej istej strany, teda musí platiť

$$\frac{Z_B(Z_A + Z_C)}{Z} = Z_1 + Z_2 \quad \text{kde} \quad Z = Z_A + Z_B + Z_C$$

Podobne z ostatných strán

$$\frac{Z_C(Z_A + Z_B)}{Z} = Z_2 + Z_3 \quad \frac{Z_A(Z_B + Z_C)}{Z} = Z_1 + Z_3$$

Riešením týchto rovníc pre  $Z_1$ ,  $Z_2$  a  $Z_3$  dostaneme pre ekvivalentné impedancie trojuholníka výrazy

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z} \quad Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z} \quad Z_3 = \frac{Z_A Z_C}{Z}$$

Pre rovnosť admittancií z každej strany trojuholníka a hviezdy podobne platí

$$Y_B + Y_C = \frac{Y_2(Y_3 + Y_1)}{Y} \quad Y_A + Y_B = \frac{Y_1(Y_2 + Y_3)}{Y} \quad Y_C + Y_A = \frac{Y_3(Y_1 + Y_2)}{Y}$$

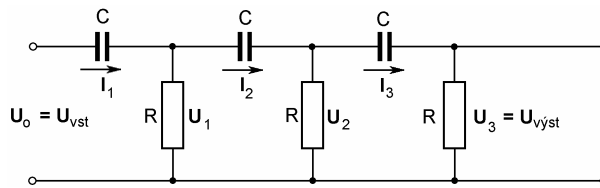
kde  $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ .

Riešením týchto rovníc pre admittancie trojuholníka dostaneme

$$Y_A = \frac{Y_1 Y_3}{Y} \quad Y_B = \frac{Y_1 Y_2}{Y} \quad Y_C = \frac{Y_2 Y_3}{Y}$$

alebo pre impedancie

$$Z_A = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \quad Z_B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} \quad Z_C = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1}$$



Obr. R251

251. Podľa obr. R251 pre komplexnú impedanciu napätia  $U_3 = U_{vyst}$  platí

$$U_3 = I_3 R \quad \text{a pre amplitúdu } U_2 \quad U_2 = U_3 + \frac{I_3}{j\omega C} = U_3 \left( 1 + \frac{1}{j\omega RC} \right)$$

Ďalej

$$I_2 = \frac{U_2}{R} + I_3 = U_3 \left( \frac{2}{R} + \frac{1}{j\omega R^2 C} \right)$$

a

$$U_1 = U_2 + \frac{I_2}{j\omega C} = U_3 \left( 1 + \frac{1}{j\omega RC} + \frac{2}{j\omega RC} - \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2} \right)$$

Nakoniec

$$I_1 = \frac{U_1}{R} + I_2$$

a

$$U_0 = U_1 + \frac{I_1}{j\omega C} = U_3 \left( 1 + \frac{6}{j\omega RC} - \frac{5}{\omega^2 R^2 C^2} - \frac{1}{j\omega^3 R^3 C^3} \right)$$

Ak v poslednom výraze dosadíme  $\omega = 1/\sqrt{6RC}$ , dostaneme  $U_0 = U_{vst} = -29U_3 = -29U_{vyst}$ , alebo

$$U_{vyst} = -\frac{1}{29}U_{vst}$$

252. Ak efektívna hodnota prúdu v obvode je rovnaká pri zopnutom aj rozopnutom kľúči, potom absolútna hodnota impedancie obvodu je v oboch prípadoch rovnaká, teda platí

$$\sqrt{r_L^2 + X_L^2} = \sqrt{r_L^2 + (X_L - X_C)^2}$$

z čoho pre hodnotu indukčnej reaktancie plynie

$$X_L = \frac{X_C}{2} = 24 \Omega$$

Z rovnosti

$$U_{ef} = I_{ef} \sqrt{r_L^2 + X_L^2}$$

vyplýva pre odpor indukčnosti hodnota

$$r_L = \sqrt{\left(\frac{U_{ef}}{I_{ef}}\right)^2 - X_L^2} = 31,1 \Omega$$

253. Pre dve vhodne zvolené slučky možno napísať rovnice pre komplexné obvodové amplitúdy prúdov v tvare

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) &= U_0 \\ R_2 (I_2 - I_1) + (R_3 - j \frac{1}{\omega C}) I_2 &= 0 \end{aligned}$$

Po úprave a dosadením numerických hodnôt dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 2I_1 - I_2 &= 10 \\ -I_1 + (2 - j)I_2 &= 0 \end{aligned}$$

Riešením týchto rovníc dostaneme komplexné amplitúdy obvodových prúdov v tvare

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{10}{3 - j2} = 2,77 e^{j33^\circ 41'} \text{ A} \\ I_1 &= (2 - j)I_2 = 6,20 e^{j77'} \text{ A} \end{aligned}$$

Komplexné amplitúdy prúdov jednotlivými odpormi

$$\begin{aligned} I_{R1} = I_1 &= (2 - j)I_2 = 6,20 e^{j77'} \text{ A} \\ I_{R2} = I_2 - I_1 &= 3,92 e^{-j11^\circ 19'} \text{ A} \\ I_{R3} = I_2 &= \frac{10}{3 - j2} = 2,77 e^{j33^\circ 41'} \text{ A} \end{aligned}$$

Fázové uhly prúdov sa vzťahujú k nulovému fázovému uhlu napätia. Fázový posuv prúdu v odpore  $R_2$  oproti prúdu v odpore  $R_3$  je

$$\Delta\varphi = \varphi_{R3} - \varphi_{R2} = 33^\circ 41' + 11^\circ 19' = 45^\circ$$

Posledný výsledok možno získať aj ako rozdiel fáz impedancií vetvy  $R_2$  ( $\varphi = 0$ ) a vetvy  $R_3 - j/(\omega C) = 1 - j \Omega = \sqrt{2} e^{-j45^\circ} \Omega$ .

254. Podľa II. Kirchhoffovho zákona platí v prípade:

$$a) \quad u_{vst} = \frac{1}{C} \int idt + iR \quad \text{kde} \quad iR = u_{vy\dot{s}t}$$

teda

$$u_{vst} = u_{vy\dot{s}t} + \frac{1}{RC} \int u_{vy\dot{s}t} dt$$

Po derivovaní tejto rovnice podľa času dostaneme rovnicu

$$\frac{d}{dt} u_{vst} = \frac{d}{dt} u_{vy\dot{s}t} + \frac{u_{vy\dot{s}t}}{RC}$$

z ktorej vidieť, že ak

$$\left| \frac{d}{dt} u_{vy\dot{s}t} \right| \ll \left| \frac{u_{vy\dot{s}t}}{RC} \right| \quad \text{potom} \quad u_{vy\dot{s}t} \approx RC \frac{d}{dt} u_{vst}$$

$$b) \quad u_{vst} = \frac{1}{C} \int idt + iR \quad \text{kde} \quad \frac{1}{C} \int idt = u_{vy\dot{s}t}$$

takže

$$u_{vst} = RC \frac{d}{dt} u_{vy\dot{s}t} + u_{vy\dot{s}t}$$

Ak

$$RC \left| \frac{d}{dt} u_{vy\dot{s}t} \right| \ll \left| \int u_{vy\dot{s}t} dt \right| \quad \text{potom} \quad u_{vy\dot{s}t} \approx \frac{1}{RC} \int u_{vst} dt$$

Nech  $u_{vst} = U_0 \cos \omega t$  alebo v komplexnej forme  $u_0 = U_0 e^{j\omega t}$ . Výstupné napätie bude

$$u_{vy\dot{s}t} = U e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{pričom} \quad \left| \frac{d}{dt} u_{vy\dot{s}t} \right| = \omega |u_{vy\dot{s}t}|$$

takže z podmienky a) pre derivačný obvod plynie

$$\omega \ll \frac{1}{RC}$$

Obvod na obr. 254a v zadaní úlohy bude teda derivačným pre signály, ktorých frekvencie sú oveľa menšie ako  $1/(RC)$ .

V prípade b)

$$\frac{1}{\omega} |u_{vy\dot{s}t}| = \left| \int u_{vy\dot{s}t} dt \right|$$

a z podmienky pre integračný obvod plynie, že

$$\omega \gg \frac{1}{RC}$$

Obvod na obr. 254b bude integračným pre signály, ktorých frekvencie sú oveľa väčšie ako  $1/(RC)$ .

255. Rezonančná frekvencia obvodu tlmeného sériovým odporom  $R_L$  je

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_L^2}{4L^2}}$$

a kvalita obvodu

$$Q_0 = \frac{\omega L}{R} \quad \text{takže} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q_0^2}}$$

z čoho

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}} \approx \left(1 - \frac{1}{8Q_0^2}\right) \omega_0 = (1 - 3,125 \cdot 10^{-6}) \omega_0$$

Zmena rezonančnej frekvencie (pokles)

$$|\delta\omega| = |\omega - \omega_0| = \frac{1}{8Q_0^2} \omega_0 = 3,125 \cdot 10^{-6} \omega_0$$

čo predstavuje  $3,125 \cdot 10^{-4} \%$  rezonančnej frekvencie  $\omega_0$  obvodu bez tlmenia.

**256.** V obvode na obr. 256b môžu vzniknúť tlmené kmity s frekvenciou  $f = 3\,082$  Hz.

**257.** Vstupná impedancia obvodu na obr. 257a je

$$Z_a \approx \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

a impedancia obvodu na obr. 257b

$$Z_b = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\frac{\omega L}{R'}}$$

Impedancie  $Z_a$  a  $Z_b$  budú rovnaké, ak imaginárne časti menovateľov budú rovnaké, t. j. ak

$$\omega RC = \frac{\omega L}{R'} \quad \text{alebo} \quad R' = \frac{L}{RC}$$

**258.** Kapacita  $m$  sériovo zapojených kondenzátorov je  $C_m = C/m$

a) Impedancia sériovo zapojeného odporu, indukčnosti a  $m$  kondenzátorov je

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{m}{\omega C}\right)$$

a) Činný výkon na odpore  $R$

$$P = \frac{RU_0^2}{2Z^2} = \frac{RU_0^2}{2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{m}{\omega C}\right)^2\right]}$$

b) Výkon v odpore bude maximálny, keď je obvod v rezonancii, t. j. ak

$$\omega L - \frac{m}{\omega C} = 0$$

Pre dané číselné hodnoty je obvod v rezonancii pri  $m = 2$ . Vtedy

$$P = P_{max} = \frac{U_0^2}{2R}$$



c) Amplitúda prúdu v obvode, keď je obvod v rezonancii, je  $I = U_0/R$ . Amplitúda napätia na sériovej  $RL$ -dvojici  $U_{RL} = I_0\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 141,4 \text{ V}$  a amplitúda napätia na odpore  $U_R = I_0 R = U_0 = 100 \text{ V}$ .

**259.** Magnetická indukcia  $B$  v toroidálnej dutine rezonátora je daná výrazom

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

a indukčný tok priecnym rezom  $S$  dutiny

$$\Phi = \int_S B dS = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = I \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = LI$$

z čoho indukčnosť toroidu

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Kapacita vyšrafovej časti rezonančnej dutiny na obr. 259 v zadaní úlohy je

$$C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d} \quad \text{a rezonančná frekvencia dutiny} \quad f_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{c}{2\pi a} \sqrt{\frac{2d}{h \ln \frac{b}{a}}}$$

kde  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  je rýchlosť svetla vo vákuu. Dosadením číselných hodnôt dostaneme pre rezonančnú frekvenciu dutiny hodnotu  $f_{rez} = 2\,565 \text{ MHz} = 2,565 \text{ GHz}$ . Je to oblasť decimetrových elektromagnetických vln.

**260.** a) Ak po povrchu veľmi dlhého valca tečie, vzhľadom k jeho osi priečne, prúd s plošnou prúdovou hustotou  $J_s$ , potom vo vnútri valca je osové magnetické pole s indukciou  $B = \mu_0 J_s$  a indukčný tok prierezom valca

$$\Phi = \mu_0 J_s \pi a^2 = \frac{\mu_0 \pi I a^2}{b}$$

kde  $I = bJ_s$  je celkový prúd tečúci po povrchu valca. Indukčnosť valca

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{b} \quad \text{a kapacita rovinných plôch} \quad C = \frac{\epsilon_0 w b}{s}$$

takže rezonančná frekvencia

$$f_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{c}{2\pi a} \sqrt{\frac{s}{w}}$$

kde  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

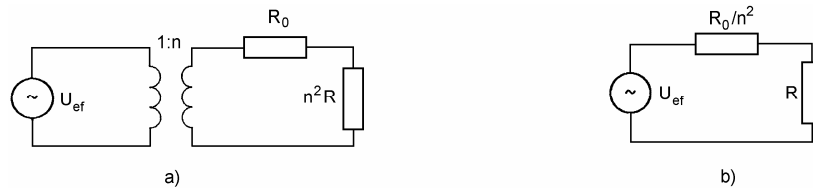
b)  $f_{rez} = 8\,979 \text{ MHz} = 8,979 \text{ GHz}$ . Je to mikrovlnová oblasť elektromagnetického spektra

**261.** Výkon v spotrebiči v prvom obvode

$$P_s = \frac{U_{ef}^2 R}{(R_0 + R)^2} \quad \text{a vo vedení} \quad P_v = \frac{U_{ef}^2 R_0}{(R_0 + R)^2}$$

takže

$$\frac{P_s}{P_v} = \frac{R}{R_0}$$



Obr. R261

V druhom prípade možno pretransformovať záťažový odpor na vstup druhého transformátora, čím vznikne náhradný obvod podľa obr. R261a. Ďalšou transformáciou odporov  $R_0$  a  $n^2 R$  na vstup prvého transformátora dostaneme náhradný obvod podľa obr. R261b. Výkon v záťažovom odpore tohoto obvodu je

$$P'_s = \frac{U_{ef}^2 R}{\left(\frac{R_0}{n^2} + R\right)^2} \quad \text{a stratový výkon vo vedení} \quad P'_v = \frac{U_{ef}^2 R_0}{n^2 \left(\frac{R_0}{n^2} + R\right)^2}$$

Pomer výkonov v spotrebiči a vo vedení

$$\frac{P'_s}{P'_v} = n^2 \frac{R}{R_0}$$

Vidíme, že v druhom prípade je účinnosť prenosu energie do spotrebiča  $n^2$ -krát väčšia.

**262.** Absolútna hodnota impedancie medzi bodmi A a B je

$$Z_{AB} = \sqrt{R_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C_1^2}} = 50 \, \Omega$$

a efektívna hodnota prúdu v obvode

$$I_{ef} = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}} = 0,48 \, \text{A}$$

Absolútna hodnota celkovej impedancie obvodu je

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^2} = 250 \, \Omega$$

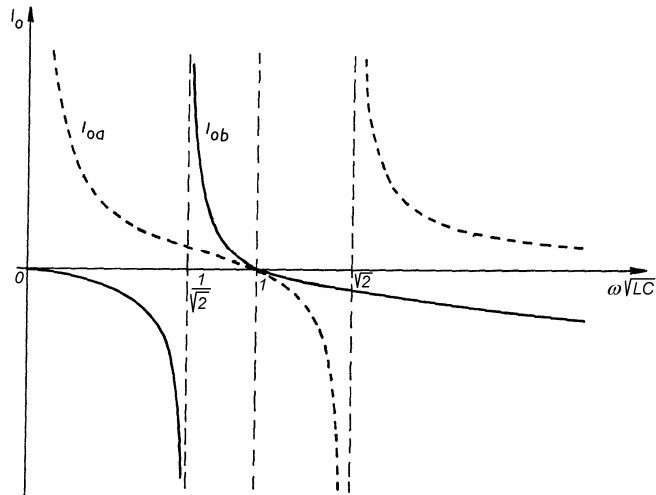
a efektívna hodnota napätie zdroja  $U_{ef} = I_{ef} Z = 120 \, \text{V}$ .

**263.** Vstupné impedancie obvodov na obr. 263a,b v zadaní úlohy sú

$$Z_a = j\omega L \frac{2 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC} \quad Z_b = -j \frac{1}{\omega C} \frac{1 - 2\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}$$

a komplexné amplitúdy prúdov v obvodoch

$$I_a = \frac{U_0}{Z_a} = -j \frac{U_0}{\omega L} \frac{1 - \omega^2 LC}{2 - \omega^2 LC} \quad I_b = -j \omega C U_0 \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - 2\omega^2 LC}$$



Obr. R263

Zodpovedajúce časové závislosti prúdov v obvodoch sú

$$i_a(t) = \frac{U_0}{\omega L} \frac{1 - \omega^2 LC}{2 - \omega^2 LC} \sin \omega t = I_{0a}(\omega) \sin \omega t$$

$$i_b(t) = \omega C U_0 \frac{\omega^2 LC - 1}{1 - 2\omega^2 LC} \sin \omega t = I_{0b}(\omega) \sin \omega t$$

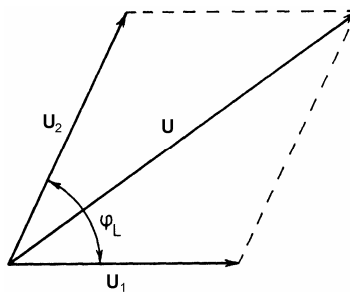
Amplitúdy  $I_{0a}(\omega)$  a  $I_{0b}(\omega)$  v závislosti od  $\omega\sqrt{LC}$  sú grafmi znázornené na obr. R263.

264. Pre efektívne hodnoty napätí v obvode možno nakresliť vektorový diagram podľa obr. R264, z ktorého plynie

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2 \cos(\pi - \varphi_L) = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \varphi_L$$

Výkon v indukčnosti je daný výrazom

$$P = IU_2 \cos \varphi_L = \frac{U_1 U_2}{R} \cos \varphi_L$$



Obr. R264

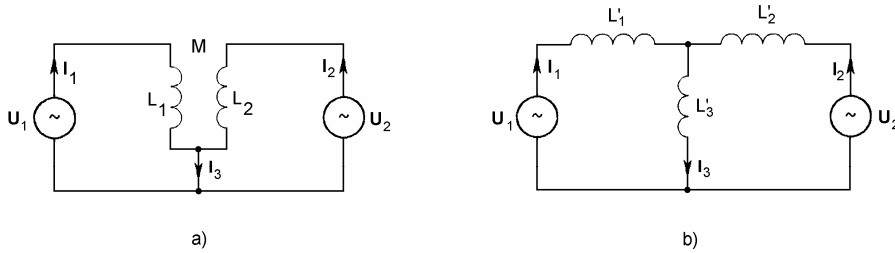
Dosadením za  $U_1 U_2 \cos \varphi$  z prvého výrazu dostaneme

$$P = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R}$$

**265.** Pripojme k obidvom obvodom dva zdroje s komplexnými amplitúdami  $U_1$  a  $U_2$  a spodné konce indukčností  $L_1$  a  $L_2$  spojíme. Vzniknú obvody podľa obr. R265a,b. Pre prúdy v obvode na obr. R265a platia Kirchhoffove rovnice

$$U_1 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2$$

$$U_2 = j\omega L_2 I_2 \pm j\omega M I_1$$



Obr. R265

Ak uvážime, že  $I_1 + I_2 = I_3$ , možno rovnice prepísať do tvaru

$$U_1 = j\omega(L_1 \mp M)I_1 \pm j\omega M I_3 \quad U_2 = j\omega(L_2 \mp M)I_2 \pm j\omega M I_3$$

Pre obvod na obr. R265b platia rovnice

$$U_1 = j\omega L'_1 I_1 + j\omega L'_3 I_3 \quad U_2 = j\omega L'_2 I_2 + j\omega L'_3 I_3$$

Ak majú byť obvody elektricky ekvivalentné, potom aj sústavy rovníc musia byť ekvivalentné, teda musí platiť

$$L'_1 = L_1 \mp M \quad L'_2 = L_2 \mp M \quad L'_3 = \pm M$$

Znamienka závisia od magnetickej väzby medzi indukčnosťami.

**266.** a) Sériové spojenie indukčností dáva výslednú indukčnosť

$$L_s = L_1 + L_2 \pm 2M$$

Číselne: 16 H a 4 H.

b) Paralelné spojenie indukčností dáva výslednú indukčnosť

$$L_p = \frac{L_1 L_2 - M}{L_1 + L_2 \pm 2M}$$

Číselne: 0,9375 H a 3,75 H.

c) Ak sa jedna cievka skratuje, potom indukčnosť na svorkách druhej cievky je daná výrazom

$$L_c = L_{1,2} - \frac{M^2}{L_{2,1}}$$

Číselne: 3,75 H a 2,5 H.

267. Pre zapojenie na obr. 267 možno písať rovnice

$$(R_1 + jX_{L1})I_1 - jX_M I_2 = U_1 \quad (R_2 + jX_{L2})I_2 - jX_M I_1 = 0$$

kde  $I_1$  a  $I_2$  sú komplexné amplitúdy prúdy v primárnom a sekundárnom obvode. Riešením tejto sústavy pre prúd  $I_2$  dostaneme

$$I_2 = \frac{jX_M}{(R_1 + jX_{L1})(R_2 + jX_{L2}) + X_M^2} U_1$$

Komplexná amplitúda výstupného napätia je

$$U_2 = R_2 I_2 = R_2 \frac{jX_M}{(R_1 + jX_{L1})(R_2 + jX_{L2}) + X_M^2} U_1$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$U_2 = 3,922 e^{-j11,3^\circ} \text{ V}$$

Výstupné napätie má teda amplitúdu 3,922 V a zaostáva za vstupným napätím vo fáze o 11,3°.

268.  $U_{\text{vst}} = 8,22 e^{-j99,5^\circ} \text{ V}$

269. Vstupná impedancia obvodu na obr. 269a v zadaní úlohy je

$$Z_{\text{vst}} = j\omega L_1 + Z - \frac{(Z + j\omega M)^2}{Z + j\omega L_2} \quad \text{a na obr. 269b} \quad Z_{\text{vst}} = \frac{j\omega L_1 Z + \omega^2 (M^2 - L_1 L_2)}{j\omega (L_1 + L_2 - 2M) + Z}$$

270. a)  $U_{ab} = 14,14 e^{+j45^\circ} \text{ V}$ , b)  $I_{ab} = 1,67 e^{j0^\circ} \text{ A}$ .

271. Podľa obr. 271 v zadaní úlohy možno pre zapojenie napísať rovnice podľa II. Kirchhoffovho zákona

$$[R + j(X_L - X_C)]I_1 - jX_M I_2 = U_1 \quad [R + j(X_L - X_C)]I_2 - jX_M I_1 = 0$$

kde  $I_1$  a  $I_2$  sú komplexné amplitúdy prúdov v obvode a  $U_1$  je komplexná amplitúda vstupného napätia. Riešením tejto sústavy pre prúd  $I_2$  dostaneme

$$I_2 = \frac{-jX_M U_1}{(X_L - X_C)^2 - X_M^2 - R^2 - j2R(X_L - X_C)}$$

Komplexná amplitúda výstupného napätia je

$$U_2 = -jX_C I_2 = \frac{-X_C X_M U_1}{(X_L - X_C)^2 - X_M^2 - R^2 - j2R(X_L - X_C)} = 19,23 e^{j0^\circ} \text{ V}$$

Výstupné napätie je vo fáze so vstupným napätím.

272. a)  $C = \frac{1}{\omega X_{L1}} = 50 \mu\text{F}$

b) Pri sériovej rezonancii tečie v primárnom obvode prúd s amplitúdou

$$I_1 = \frac{U_1}{R} = 10 \text{ A}$$

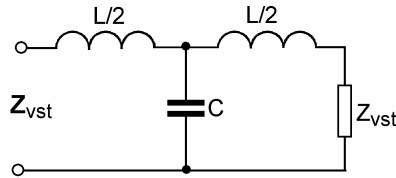
a v sekundárnom obvode sa indukuje napätie s komplexnou amplitúdou

$$U_2 = jX_M I_1 = 100e^{j90^\circ} \text{ V}$$

Výstupné napätie má amplitúdu 100 V a predbieha vstupné napätie vo fáze o  $90^\circ$ .

**273.** Impedancia nekonečného reťazca podľa obr. 273 v zadaní úlohy sa nezmení, ak ku vstupu reťazca reprezentovaného vstupnou impedanciou  $Z_{vst}$  sa pripojí jeden článok  $L/2$ - $C$  podľa obr. R273. Pre zapojenie na obr. R273 platí

$$Z_{vst} = \frac{j\omega L}{2} + Z'$$



Obr. R273

kde  $Z'$  je impedancia paralelnej dvojice  $1/j\omega C$  a  $Z_{vst} + j\omega L/2$ , teda

$$Z' = \frac{2Z_{vst} + j\omega L}{2 - \omega^2 LC + j2\omega CZ_{vst}}$$

takže

$$Z_{vst} = \frac{j\omega L}{2} + \frac{2Z_{vst} + j\omega L}{2 - \omega^2 LC + j2\omega CZ_{vst}}$$

z čoho vstupná impedancia reťazca

$$Z_{vst} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}$$

Táto impedancia je reálna pre všetky frekvencie, ktoré spĺňajú podmienku

$$\omega < \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

Reťazec je dolnofrekvenčný priepust.

**274.** Vstupná impedancia reťazca na obr. 274 v zadaní úlohy je

$$Z_{vst} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}}$$

ktorá je reálna pre všetky frekvencie, ktoré spĺňajú podmienku

$$\omega > \frac{1}{2\sqrt{LC}}$$

Reťazec je hornofrekvenčný priepust.

**275.** Výkon v odpore po zopnutí spínača stúpne štyrikrát. Aby sa kondenzátor počas jednej periódy nestačil znateľne vybiť, treba jeho hodnotu voľiť tak, že časová konštanta  $RC \gg 1/f$ .

276. Výkon v obvode na obr. 276a v zadaní úlohy je

$$P = \frac{7 U_{ef}^2}{4 R} \quad \text{a v obvode na obr. 276b} \quad P = \frac{5 U_{ef}^2}{3 R}$$

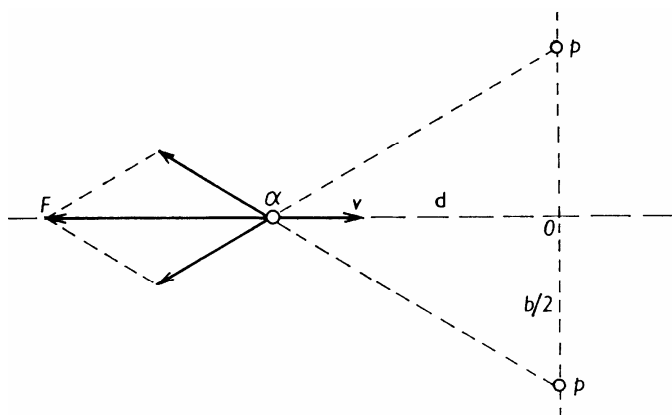
## Pohyb nabitých častíc v elektrických a magnetických poliach

277. Podľa obr. R277 na  $\alpha$ -časticu pôsobí odpudivá sila

$$F = \frac{e^2 d}{\pi \epsilon_0 \left( d^2 + \frac{b^2}{4} \right)^{3/2}}$$

ktorá je maximálna vo vzdialenosti

$$d_0 = \pm \frac{b}{\sqrt{8}}$$



Obr. R277

278.  $m = 2,39 \cdot 10^{-25}$  kg.

279. Elektróny urýchlené napätím  $U$  na rýchlosť (obr. R279)

$$v_x = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

sa budú medzi doskami pohybovať pod vplyvom sily kolmej na  $v_x$

$$F = eE = e \frac{U'}{D}$$

Pohybová rovnica pre elektrón medzi doskami je

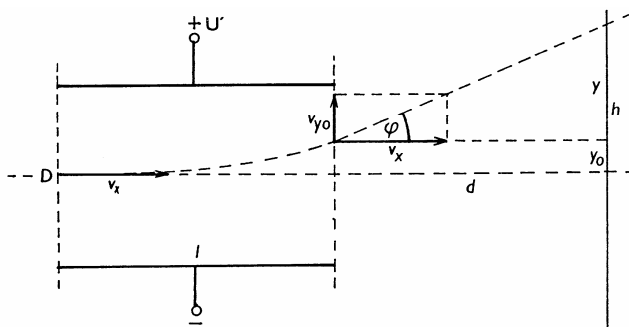
$$m_e \frac{dv_y}{dt} = e \frac{U'}{D} \quad \text{a jej riešenie je} \quad v_y = \frac{eU'}{m_e D} t$$

pretože v čase vstupu elektrónov medzi dosky je ich priečna rýchlosť nulová. Medzi doskami sa budú elektróny pohybovať po dobu  $t_0 = l/v_x$ , takže pri výstupe z priestoru dosiek ich priečna rýchlosť bude

$$v_{y0} = \frac{eU'}{m_e D} t_0 = \frac{eU'l}{m_e D v_x}$$

V smere  $y$  prejdú elektróny dráhu

$$y_0 = \frac{eU'l^2}{2m_e D v_x^2} = \frac{l^2 U'}{4DU}$$



Obr. R279

Po výstupe z priestoru medzi doskami sa budú elektróny pohybovať pod uhlom  $\varphi$ , pre ktorý platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{y0}}{v_x} = \frac{y}{d} \quad \text{z čoho} \quad y = \frac{v_{y0}}{v_x} d = \frac{lU'd}{2DU}$$

Odchýlka elektrónového lúča na tienidle

$$h = y_0 + y = \frac{lU'}{2DU} \left( \frac{l}{2} + d \right)$$

Číselne:  $h = 3,6$  cm.

280. a) Elektrón opustí kondenzátor 2 rýchlosťou

$$v = \sqrt{v_0^2 + \left( \frac{e l \mathcal{E}}{v_0 m_e d} \right)^2 \left( \frac{R}{R_0 + R} \right)^2} \quad \text{pod uhlom} \quad \varphi = \arctg \left( \frac{e l \mathcal{E}}{v_0^2 m_e d} \frac{R}{R_0 + R} \right)$$

b) Elektrón opustí kondenzátor 2 vo vzdialenosti

$$y_0 = \frac{e l^2 \mathcal{E}}{2 v_0^2 m_e d} \frac{R - 2R_0}{R_0 + R}$$

od osi  $Ox$  v rovine  $AA'$ .

c) Elektrón opustí kondenzátor 2 rýchlosťou rovnobežnou s osou  $Ox$ , ak  $R = 0$ . Rýchlosť elektrónu je  $v_x = v_0$ , a vystúpi z kondenzátora 2 vo vzdialenosti

$$y_0 = - \frac{e l^2 \mathcal{E}}{v_0^2 m_e d}$$

od osi  $Ox$  v rovine  $AA'$ .



$$d) \mathcal{E} = \frac{W_k d^2}{el^2} = 400 \text{ V}$$

e) Energia elektrónu je najväčšia pri jeho prechode z kondenzátora 1 do kondenzátora 2. Jej hodnota

$$W = W_k + \frac{1}{W_k} \left( \frac{el\mathcal{E}}{2d} \right)^2 = 10,1 \text{ keV}$$

**281.** Ak sa elektrón s nábojom  $-e$  nachádza vo vzdialenosti  $x$  od jednej z rovin, potom na druhej rovine podľa úlohy 43 je indukovaný náboj  $q = ex/d$ . Ak sa v čase  $dt$  elektrón premiestni o  $dx$ , potom sa na druhej rovine zvýši náboj o

$$dq = e \frac{dx}{d}$$

Vytvorením časových zmien a s uvažovaním, že  $dq/dt = I$  je prúd v skrate a  $dx/dt = v$  je rýchlosť elektrónu, dostaneme jednoduchý výraz

$$I = e \frac{v}{d}$$

čo je špeciálny tvar vety o indukovaných prúdoch (Shockleyho – Ramova veta z oblasti fyzikálnej a katódovej elektroniky). Indukovaný prúd v skrate tečie iba v čase pohybu elektrónu medzi rovinami. Smer prúdu v skrate je totožný so smerom pohybu elektrónu. Dosadením číselných hodnôt dostaneme:  $I = 8 \cdot 10^{-11}$  A, dĺžka prúdového impulzu  $t = d/v = 2 \cdot 10^{-9}$  s.

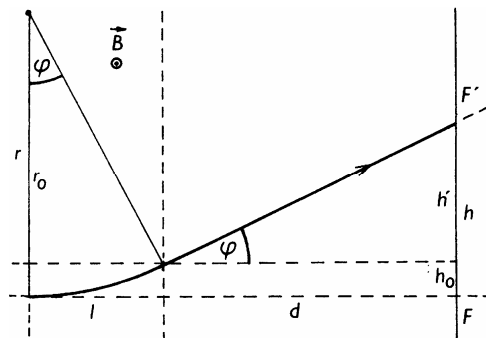
**282.** Ak je horná doska kondenzátora záporná, elektrón vnikne do kondenzátora do hĺbky  $h = 5$  mm. Ak je polarita opačná, elektrón dopadne na hornú dosku vo vzdialenosti  $l = 4,23$  mm od kolmice.

**283.** Pod účinkom napätia  $U$  nadobudnú elektróny rýchlosť

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

a v priestore magnetického poľa sa budú pohybovať po kružnici s polomerom  $r$  (obr. R283), pre ktorý platí

$$r = \frac{m_e v}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$



Obr. R283

Vo vertikálnom smere prejdú elektróny v magnetickom poli dráhu

$$h_0 = r - r_0 = r - \sqrt{r^2 - l^2}$$

Po výstupe z priestoru magnetického poľa sa elektróny pohybujú pod uhlom  $\varphi$ , pre ktorý platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h'}{d} = \frac{l}{\sqrt{r^2 - l^2}} \quad \text{z čoho} \quad h' = \frac{l}{\sqrt{r^2 - l^2}} d$$

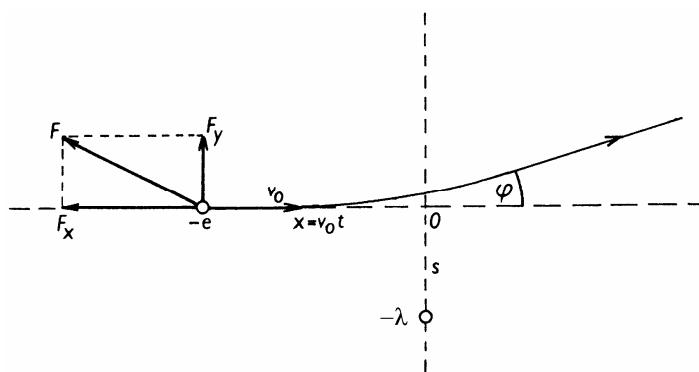
Odchýlka lúča na tienidle

$$h = FF' = h_0 + h' = r - \sqrt{r^2 - l^2} + \frac{l}{\sqrt{r^2 - l^2}} d$$

Číselne:  $h = 9,2 \text{ mm}$ .

284.  $W_k = 8 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 500 \text{ eV}$ ,  $\omega_c = 1,2 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$ .

285.  $E_y = v_x B_z$ .



Obr. R286

286. Na pohybujúci sa elektrón pôsobí sila (obr. R286)

$$F = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{s^2 + x^2}}$$

ktorej zložka kolmá na smer pohybu je

$$F_y = \frac{e\lambda s}{2\pi\epsilon_0 (s^2 + x^2)}$$

Zložka hybnosti v pozdĺžnom smere  $p_x = mv_0$  sa nemení a zložku hybnosti v priečnom smere možno vypočítať z rovnice

$$\frac{dp_y}{dt} = F_y \quad \text{teda} \quad p_y = \int_{-\infty}^0 F_y dt = \frac{e\lambda s}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{s^2 + v_0^2 t^2} = \frac{e\lambda}{4\epsilon_0 v_0}$$

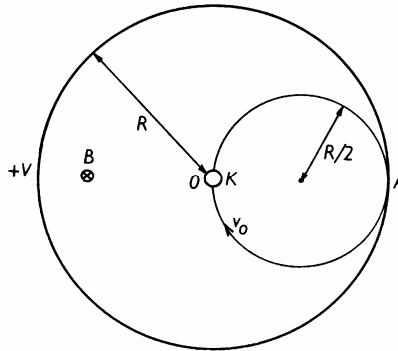
Pre uhol odchýlky lúča platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{e\lambda}{4\varepsilon_0 m v_0} \approx \varphi = \text{konšt.}$$

Uhol odchýlky teda nezávisí od  $s$ .

**287.** Ak je polomer katódy zanedbateľne malý oproti polomeru anódy (*obr. R287*), potom intenzita elektrického poľa v blízkosti katódy je veľmi veľká a potenciál narastá so vzdialenosťou od katódy veľmi rýchlo, takže nadobúda už v malých vzdialenostiach od katódy hodnotu prakticky rovnú potenciálu anódy. Elektróny nadobúdajú rýchlosť

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}$$



*Obr. R287*

už vo veľmi malej vzdialenosti od katódy a vo zvyšnom priestore medzi anódou a katódou sa pohybujú prakticky konštantnou rýchlosťou. Pod účinkom magnetického poľa indukcie  $B$  sa pohybujú po kružniciach s polomerom

$$r = \frac{m_e v_0}{eB}$$

Prúd diódou prestane tiecť vtedy, keď elektróny pri svojom kruhovom pohybe už nedosiahnu anódu (*obr. R287*), t. j. vtedy, keď polomer dráhy elektrónu bude  $r = R/2$ . Tomuto polomeru zodpovedá hodnota kritickej magnetickej indukcie

$$B_{krit} = \frac{m_e v_0}{eR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{8m_e V}{e}}$$

**288. a)** Pohybová rovnica elektrónu v danom elektrickom a magnetickom poli je

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

alebo v zložkách pravouhlého súradnicového systému (bodkami sú vyznačené časové derivácie)

$$m_e \ddot{x} = eB\dot{y} \quad m_e \ddot{y} = eE - eB\dot{x} \quad m_e \ddot{z} = 0$$

V čase  $t = 0$  je  $x = y = z = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ . Z rovnice  $m_e \ddot{z} = 0$  plynie, že  $z = \text{konšt.} = 0$ , takže elektrón sa pohybuje v rovine  $xy$ . Deriváciou druhej rovnice podľa času dostaneme

$$m_e \ddot{y} = -eB\dot{x}$$

a dosadením za  $\ddot{x}$  z prvej rovnice prejde posledná rovnica na tvar

$$\ddot{y} = -\omega_c^2 \dot{y}$$

kde  $\omega_c = eB/m_e$  je cyklotrónová frekvencia. Všeobecné riešenie tejto rovnice má tvar

$$y = -\frac{A}{\omega_c} \cos \omega_c t + C$$

kde  $A$  a  $C$  sú konštanty, ktoré sa určia zo začiatočných podmienok. V čase  $t = 0$  je  $y = 0$ ,  $\dot{y} = eE/m_e$ . Uvážením týchto podmienok dostaneme pre integračné konštanty hodnoty

$$A = C = \frac{eE}{m_e \omega_c^2} \quad \text{takže} \quad y = \frac{eE}{m_e \omega_c^2} (1 - \cos \omega_c t)$$

Derivovaním riešenia pre  $y$  a dosadením do prvej zložkovej rovnice dostaneme rovnicu

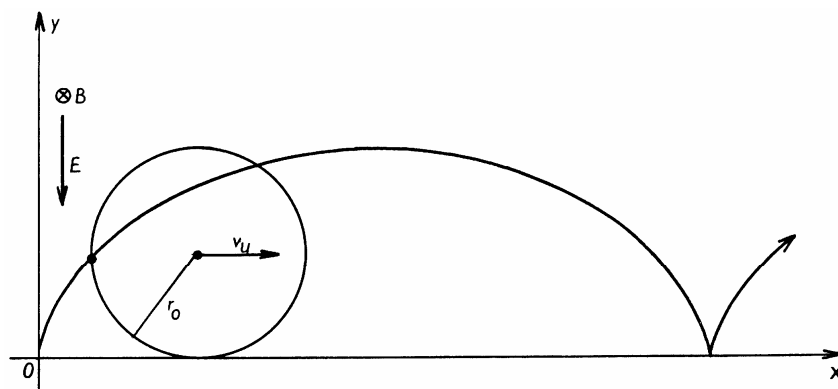
$$\ddot{x} = \frac{eE}{m_e} \sin \omega_c t$$

ktorej dvojnásobnou integráciou dostaneme všeobecné riešenie v tvare

$$x = -\frac{eE}{m_e \omega_c^2} \sin \omega_c t + Dt + F$$

$D$  a  $F$  sú integračné konštanty. V čase  $t = 0$  je  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ , z čoho plynú pre integračné konštanty hodnoty

$$D = \frac{eE}{m_e \omega_c} \quad F = 0$$



Obr. R288

Riešenie pre  $x$  je teda

$$x = \frac{eE}{m_e \omega_c^2} (\omega_c t - \sin \omega_c t)$$

Elektrón sa bude pohybovať po dráhe danej výrazmi

$$x = \frac{eE}{m_e \omega_c^2} (\omega_c t - \sin \omega_c t) \quad y = \frac{eE}{m_e \omega_c^2} (1 - \cos \omega_c t)$$

Z týchto výrazov vidno, že dráha je cykloida (obr. R288) s vytvárajúcou kružnicou s polomerom

$$r_0 = \frac{eE}{m_e \omega_c^2}$$

b) Zložky rýchlosti elektrónu sú

$$\dot{x} = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega_c t) \quad \dot{y} = \frac{E}{B} \sin \omega_c t$$

c) Elektrón sa pohybuje unášavou (driftovou) rýchlosťou

$$v_u = \frac{E}{B}$$

pozdĺž osi  $x$ .

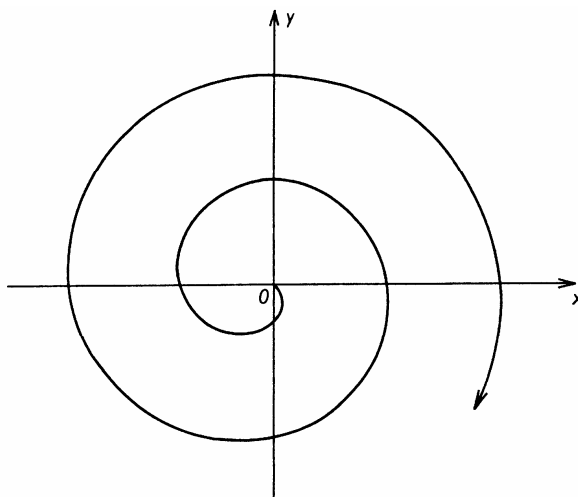
289. a)  $5 \cdot 10^6$  rad/s, b)  $2,5 \cdot 10^6$  rad/s, c)  $5 \cdot 10^6$  rad/s.

290. a) 0,9 T, b)  $7,6 \cdot 10^{-13}$  J = 4,7 MeV.

291.  $\omega_{ce} = 1,76 \cdot 10^{11}$  rad/s,  $\omega_{cp} = 9,59 \cdot 10^7$  rad/s,  $R_c = 0,184$  mm,  $R_p = 7,91$  mm.

292. Pohybová rovnica častice v cyklotróne je tvaru

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$



Obr. R292

alebo v zložkovom tvare

$$m\ddot{x} = qE \cos \omega_c t + q\dot{y}B \quad m\ddot{y} = -qE \sin \omega_c t - q\dot{x}B \quad m\ddot{z} = 0$$

V čase  $t = 0$  je  $x = y = z = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ . Z rovnice  $m\ddot{z} = 0$  plynie, že  $z = \dot{z} = 0$  takže častica sa pohybuje v rovine  $xy$ . Deriváciou prvej zložkovej rovnice a dosadením za  $\ddot{y}$  z druhej rovnice dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\ddot{x} + \omega_c^2 \dot{x} = -\frac{2qE\omega_c}{m} \sin \omega_c t$$

a podobne deriváciou druhej zložkovej rovnice s dosadením za  $\ddot{x}$  z prvej rovnice dostaneme

$$\ddot{y} + \omega_c^2 \dot{y} = -\frac{2qE\omega_c}{m} \cos \omega_c t$$

Riešenia týchto diferenciálnych rovníc pri zadaných začiatočných podmienkach sú

$$x = \frac{qE}{m\omega_c^2} (\omega_c t \sin \omega_c t + \cos \omega_c t - 1) \quad y = \frac{qE}{m\omega_c^2} (\omega_c t \cos \omega_c t - \sin \omega_c t)$$

Pohyb častice opísaný týmito výrazmi je pohybom po špirále podľa obr. R292.

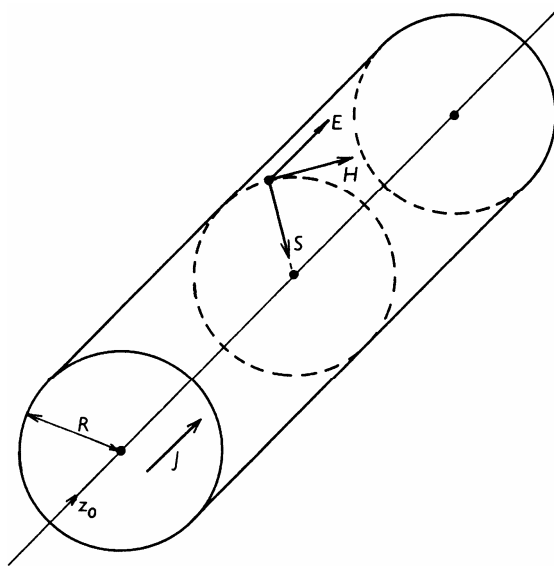
## Elektromagnetické vlny

297. Vo vodiči tečie prúd s hustotou (obr. R297)

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi R^2} \mathbf{e}_z$$

kde  $\mathbf{e}_z$  je jednotkový vektor v smere osi vodiča. Elektrické pole vo vodiči a na jeho povrchu je

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{I}{\pi \sigma R^2} \mathbf{e}_z$$



Obr. R297

Intenzita magnetického poľa na povrchu vodiča je

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi R} \mathbf{e}_\varphi$$

kde  $\mathbf{e}_\varphi$  je jednotkový vektor na valci kolmý na os  $z$ . Pretože elektrické a magnetické polia sú navzájom kolmé, Poyntingov vektor  $\mathbf{S}$  smeruje od povrchu vodiča k jeho osi a jeho veľkosť je

$$S = EH = \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma R^3}$$

Výkon vstupujúci do valca na jednotku jeho dĺžky je

$$P' = 2\pi RS = \frac{I^2}{\pi \sigma R^2} = R_0 I^2$$

kde  $R_0 = 1/(\pi \sigma R^2)$  je odpor jednotkovej dĺžky valca.

**298.** Elektrické a magnetické polia v dutine koaxiálneho kábla sú dané výrazmi

$$E = \frac{\mathcal{E}}{r \ln \frac{b}{a}} \qquad H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r R}$$

pričom vektory polí sú na seba kolmé, a to tak, že vektorový súčin  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  smeruje pozdĺž osi kábla od zdroja k záťaži. Poyntingov vektor má veľkosť

$$S = EH = \frac{\mathcal{E}^2}{2\pi r^2 R \ln \frac{b}{a}}$$

a výkon postupujúci pozdĺž osi kábla

$$P = \int_a^b 2\pi r S dr = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

**299.** Podľa výsledkov predchádzajúcej úlohy je veľkosť Poyntingovho vektora v koaxiálnom kábli

$$S = EH = \frac{\mathcal{E}^2}{2\pi r^2 R \ln \frac{b}{a}}$$

a hustota energie elektromagnetického poľa

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \frac{\mathcal{E}^2}{2r^2} \frac{4\pi^2 \epsilon_0 R^2 + \mu_0 \ln^2 \frac{b}{a}}{4\pi^2 R^2 \ln^2 \frac{b}{a}}$$

takže

$$v_p = \frac{S}{w} = \frac{2R}{R^2 \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}}$$

Ak uvážime, že kapacita jednotky dĺžky kábla je

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad \text{a jeho indukčnosť na jednotku dĺžky je} \quad L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

potom výraz pre  $v_p$  možno písať v tvare

$$v_p = \frac{2R}{R^2 C' + L'}$$

Ak vezmeme do úvahy tiež, že  $L'C' = 1/c^2$ , potom

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 + \delta^2}} \quad \text{kde} \quad \delta = \frac{1}{2} \left( R \sqrt{\frac{C'}{L'}} - \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L'}{C'}} \right)$$

Z týchto výrazov vidno, že rýchlosť prenosu energie káblom je vždy menšia ako rýchlosť svetla, s výnimkou keď  $\delta = 0$ , kedy

$$R = Z_v = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

V tom prípade  $v_p = c$ . Hodnota  $Z_v$  je charakteristická veličina pre kábel a nazýva sa vlnová impedancia (vlnový odpor) kábla.

**300.** a)  $v_f = c$

b) Z prvej Maxwellovej rovnice plynie, že

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{j} = -\frac{\omega}{c} E_x \mathbf{j} = -j\mu_0 \omega \mathbf{H}$$

kde  $\mathbf{j}$  je jednotkový vektor v smere osi  $y$ . Z rovnice vyplýva, že magnetické pole má iba  $y$ -ovú zložku s veľkosťou

$$H = H_y = \frac{E_x}{\mu_0 c} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_x = \frac{1}{Z_0} E_x$$

c) Pre pomer elektrickej a magnetickej zložky vlny z posledného výrazu plynie

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,73 \, \Omega = Z_0$$

Veličina  $Z_0$  je jednou z univerzálnych konštánt a nazýva sa charakteristická impedancia vákuu.

$$\text{d) } \bar{\mathbf{S}} = \text{Re}\{\mathbf{S}_k\} = \frac{E_{x0}^2}{2Z_0} \mathbf{k} = \frac{H_{x0}^2 Z_0}{2} \mathbf{k}$$

kde  $H_{y0}$  je amplitúda magnetického poľa a  $\mathbf{k}$  je jednotkový vektor v smere osi  $z$ .

**301.**  $Z = 376,73 \, \text{d/w} \, [\Omega]$ .

**302.** Fázová rýchlosť vlny  $v_f = f\lambda = 2 \cdot 10^8 \, \text{m/s}$ .

Relatívna permitivita prostredia  $\epsilon_r = c^2/v_f^2 = 2,25$ .

Index lomu prostredia  $n = c/v_f = 1,5$ .

Dĺžka vlny vo vákuu  $\lambda_0 = c/f = 7,5 \cdot 10^{-7} \, \text{m}$ .



303.  $P = E^2/(2Z_0) \approx 1,2 \cdot 10^{10} \text{ W/m}^2$ , kde  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376,73 \ \Omega$  je charakteristická impedancia vákua (približne aj vzduchu).

$$304. \mathcal{E}_{ind} = \sqrt{2\bar{P}\mu_0(\epsilon_0\mu_0)^{1/4}} \omega S = 9,15 \cdot 10^{-4} \text{ V}.$$

305. Intenzita elektrického poľa medzi vodičmi na obr. 305 v zadaní úlohy smeruje dolu a intenzita magnetického poľa smeruje za rovinu nákreсу. Poyntingov vektor smeruje doprava, teda zdroj je vľavo.

306. V rovine impedancie  $Z$  je koeficient odrazu

$$\rho = \frac{U^-}{U^+} = \frac{Z' - Z_1}{Z' + Z_1} = \frac{Z(Z_2 - Z_1) - Z_1 Z_2}{Z(Z_2 + Z_1) + Z_1 Z_2}$$

kde  $Z' = ZZ_2/(Z + Z_2)$ . Amplitúda napätia odrazenej vlny

$$U^- = \rho U^+ = \frac{Z(Z_2 - Z_1) - Z_1 Z_2}{Z(Z_2 + Z_1) + Z_1 Z_2} U^+$$

a amplitúda napätia postupujúcej vlny

$$U^{+'} = (1 + \rho)U^+ = \frac{2ZZ_2}{Z(Z_2 + Z_1) + Z_1 Z_2} U^+$$

Amplitúda prúdu v impedancii  $Z$

$$I_Z = \frac{U^{+'}}{Z} = \frac{2Z_2}{Z(Z_2 + Z_1) + Z_1 Z_2} U^+$$

a v impedancii  $Z_2$

$$I_{Z_2} = \frac{U^{+'}}{Z_2} = \frac{2Z}{Z(Z_2 + Z_1) + Z_1 Z_2} U^+$$

307. Ak  $Z_1 = Z_2 = Z = R$ , potom podľa predchádzajúcej úlohy

$$U^- = -\frac{1}{3}U^+ \quad U^{+'} = -\frac{2}{3}U^+$$

a amplitúdy prúdov

$$I_Z = I_{Z_2} = \frac{2U^+}{3R}$$

Označme výkon postupujúcej napät'ovej vlny ako

$$P^+ = \frac{(U^+)^2}{2R}$$

Výkon spotrebovaný v impedancii  $Z$  a výkon postupujúci po vedení s vlnovým odporom  $Z_2$  je rovnaký a je daný výrazom

$$P_Z = P_{Z_2} = \frac{(U^+)^2}{2R} = \frac{2(U^+)^2}{9R} = \frac{4}{9}P^+$$

Výkon odrazenej vlny

$$P^- = \frac{(U^-)^2}{2R} = \frac{(U^+)^2}{18R} = \frac{1}{9}P^+$$

Teda 4/9-tiny výkonu zdroja vlny  $U^+$  sa spotrebujú v impedancii  $Z = R$ , 4/9-tiny výkonu postupujú po vedení s vlnovým odporom  $Z_2 = R$  a 1/9-tina výkonu sa odrazí a postupuje späť k zdroju.

**308.** Ak  $Z_1 = R$ ,  $Z_2 = Z = 2R$ , potom podľa úlohy 306

$$U^- = 0 \qquad U^{++} = U^+$$

Amplitúdy prúdov v  $Z_1$  a  $Z_2$

$$I_Z = I_{Z_2} = \frac{U^+}{2R}$$

Výkon sa delí rovnakým dielom do impedancie  $Z$  a  $Z_2$  s hodnotou

$$P_Z = P_{Z_2} = \frac{(U^+)^2}{4R}$$

Odrazený výkon je nulový. Zdroj pracuje do prispôsobenej záťaže.

**309.** Ak  $Z = 0$ , potom v rovine skratu

$$U^- = -U^+$$

a ak  $Z = \infty$ , potom v rovine otvoreného konca vedenia

$$U^- = U^+$$

V prvom prípade je v rovine skratu výsledná amplitúda napät'ovej stojatej vlny

$$U = U^+ + U^- = 0$$

V rovine skratu je uzol napät'ovej stojatej vlny. V druhom prípade v rovine otvoreného konca vedenia je amplitúda napät'ovej stojatej vlny

$$U = U^+ + U^- = 2U^+$$

t. j. v rovine otvoreného konca vedenia je kmitňa stojatej vlny. Stojaté vlny v skratovanom a otvorenom vedení sú posunuté o  $\lambda/4$ .

**310.** Pri frekvencii  $f = 1\,000$  Hz vlnová impedancia kábla

$$Z_v = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}} = 461,9 - j141,4 \, \Omega$$

Konštanta šírenia

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)j\omega C} = \alpha + j\beta = 7,8 \cdot 10^{-6} + j2,3 \cdot 10^{-5} \, \text{m}^{-1}$$

z čoho konštanta útlmu je

$$\alpha = 20\alpha \log e = 8,686 \, \alpha = 6,77 \cdot 10^{-5} \, \text{dB/m}$$

fázová rýchlosť

$$v_f = \omega/\beta = 2,732 \cdot 10^8 \, \text{m/s} \qquad \text{a vlnová dĺžka} \qquad \lambda = 2\pi/\beta = 273\,182 \, \text{m}$$

Straty na vlnovú dĺžku sú

$$\alpha' = \alpha \lambda = 18,5 \text{ dB}$$

Pri frekvencii  $f = 100 \text{ MHz}$  je  $Z_v = 377,5 - j0,14 \ \Omega$ ,  $\alpha = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} = 6,97 \cdot 10^{-3} \text{ dB/m}$ ,  
 $\beta = 2,096966 \text{ rad/m}$ ,  $v_f = 2,99632 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ,  $\lambda = 2,9963 \text{ m}$ ,  $\alpha' = 2,08 \cdot 10^{-1} \text{ dB}$ .

$$311. \text{ a) } Z_v = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a} = 73,65 \ \Omega \quad \text{b) } L = Z_v^2 C = 3,63 \cdot 10^{-7} \text{ H/m.}$$

$$312. R_1 = 150 \ \Omega, R_2 = 100 \ \Omega.$$

$$313. Z_{v1} = 80 \ \Omega, Z_{v2} = 120 \ \Omega, Z_{v3} = 240 \ \Omega.$$

314. Riešenie úlohy je dané výrazmi (11.70 a,b) pre  $z = l$ , teda

$$U(l) = U_{vyst} = U_{vst} \cosh \gamma l - Z_v I_{vst} \sinh \gamma l \quad I(l) = I_{vyst} = I_{vst} \cosh \gamma l - (U_{vst}/Z_v) \sinh \gamma l$$

Výstupná impedancia

$$Z_{vyst} = \frac{U_{vyst}}{I_{vyst}} = Z_v \frac{Z_{vst} - Z_v \tanh \gamma l}{Z_v - Z_{vst} \tanh \gamma l}$$

kde  $Z_{vst} = U_{vst}/I_{vst}$ .

315. Vedenie je bezstratové, takže konštanta šírenia  $\gamma = j\beta$ , kde  $\beta = \omega/c$  je fázová konštanta. Využitím výrazov pre amplitúdy napätia a prúdu získaných v predchádzajúcom príklade dostaneme vzťahy

$$U_{vyst} = U_{vst} \cos \beta l - j Z_v I_{vst} \sin \beta l \quad 0 = I_{vst} \cos \beta l - j (U_{vst}/Z_v) \sin \beta l$$

Riešením týchto rovníc dostaneme pre výstupné napätie výraz a hodnotu

$$U_{vyst} = \frac{U_{vst}}{\cos \beta l} = 64,72 \text{ V}$$

316. Riešením telegrafných rovníc s uvážením, že  $I_{vyst} = 0$  dostaneme pre amplitúdy napätia a prúdu hodnoty

$$U_m(l) = U_{vst} \cos \beta l = 401,5 \text{ V} \quad I_m(l) = j (U_{vst}/Z_v) \sin \beta l = j1,486 \text{ A}$$

kde  $\beta = 2\pi/\lambda = 0,0209 \text{ rad/m}$ .

317. Vedenie je na konci otvorené, teda  $I_{vyst} = 0$ . Amplitúda prúdu vo vzdialenosti  $z$  od konca vedenia je

$$I_m(z) = j \frac{U_{vyst}}{Z_v} \sin \beta z$$

kde  $\beta = 2\pi/\lambda = 0,314 \text{ rad/m}$ . Pre  $z = l = 2 \text{ m}$  je  $I_m(l) = 0,5 \text{ A}$ , teda

$$Z_v = \frac{U_{vyst}}{I_m(l)} \sin \beta l = 235 \ \Omega$$

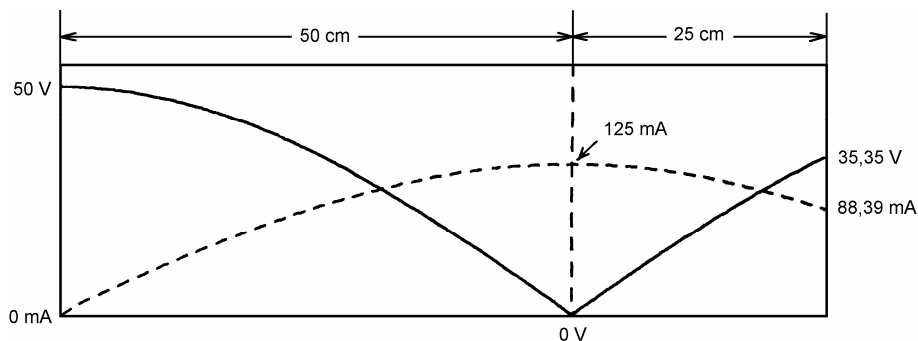
Amplitúda prúdu v maxime prúdovej stojatej vlny je

$$I_{mmax} = \frac{U_{vyst}}{Z_v} = 0,85 \text{ A}$$

318. a) Vlnová dĺžka  $\lambda = c/f = 2$  m,  $\beta l = 2\pi l/\lambda = 0,75\pi$  rad. Vstupná impedancia

$$Z_{vst} = Z_v \frac{Z_{vyšt} + jZ_v \operatorname{tg}\beta l}{Z_v + jZ_{vyšt} \operatorname{tg}\beta l} = \infty$$

b) Napät'ová a prúdová stojatá vlna sú znázornené na obr. R318.



Obr. R318

c) Na vstupe vedenia je kmitňa napät'ovej stojatej vlny a uzol prúdovej stojatej vlny ( $I_{vst} = 0$ ). Amplitúda napätia na výstupe

$$U_{vyšt} = U_{vst} \cos\beta l = -35,35 \text{ V}$$

a amplitúda prúdu na výstupe

$$I_{vyšt} = -j(U_{vst}/Z_v) \sin\beta l = -j88,39 \text{ mA}$$

Amplitúda prúdu v maxime prúdovej stojatej vlny

$$I_{max} = -jU_{vst}/Z_v = -j125 \text{ mA}$$

319. Vlnová dĺžka na vedení je  $\lambda = v_f/f = 1,9$  m a počet vlnových dĺžok pozdĺž vedenia  $l/\lambda = 1,184$ . Fázová konštanta  $\beta = 2\pi/\lambda = 3,307$  rad/m, fázový uhol vstupných veličín  $\beta l = 7,44$  rad. Vstupná impedancia vedenia

$$Z_{vst} = Z_v \frac{Z_{vyšt} + jZ_v \operatorname{tg}\beta l}{Z_v + jZ_{vyšt} \operatorname{tg}\beta l} = 26,23 - j35,73 \Omega = 44,32 e^{-j53,72^\circ} \Omega$$

Koeficient odrazu na výstupe

$$\rho_{vyšt} = \frac{Z_{vyšt} - Z_v}{Z_{vyšt} + Z_v} = 0,459 + j0,237 = 0,517 e^{j27,31^\circ}$$

a na vstupe

$$\rho_{vst} = \frac{Z_{vst} - Z_v}{Z_{vst} + Z_v} = -0,134 - j0,499 = 0,517 e^{-j105,03^\circ}$$

Pomer stojatej vlny (PSV) na vedení

$$r = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = 3,14$$

Komplexná amplitúda vstupného prúdu

$$\mathbf{I}_{vst} = \frac{\mathbf{U}_g}{\mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_{vst}} = 1,17 + j0,631 \text{ A} = 1,329e^{j28,34^\circ} \text{ A}$$

a vstupného napätia

$$\mathbf{U}_{vst} = \mathbf{I}_{vst} \mathbf{Z}_{vst} = 53,2 - j25,2 \text{ V} = 58,90e^{-j25,35^\circ} \text{ V}$$

Komplexná amplitúda výstupného prúdu

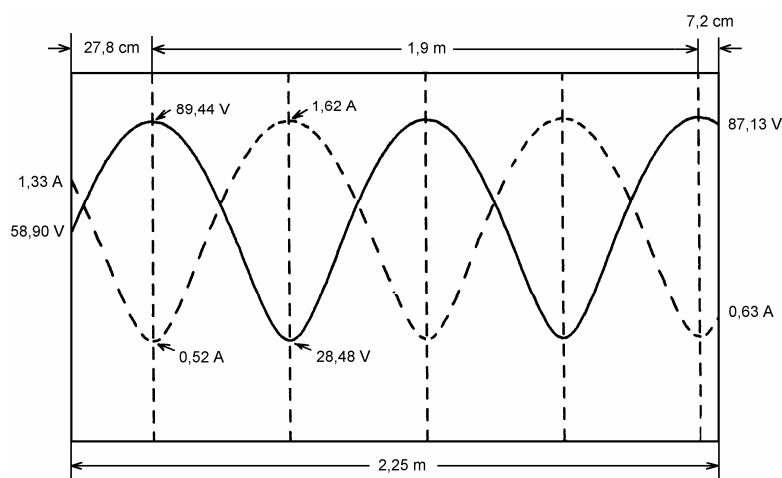
$$\mathbf{I}_{výst} = \mathbf{I}_{vst} \cos \beta l - j(\mathbf{U}_{vst}/Z_v) \sin \beta l = 0,052 - j0,631 \text{ A} = 0,635e^{-j87,29^\circ} \text{ A}$$

a výstupného napätia

$$\mathbf{U}_{výst} = \mathbf{U}_{vst} \cos \beta l - jZ_v \mathbf{I}_{vst} \sin \beta l = 53,20 - j69,05 \text{ V} = 87,13e^{-j52,39^\circ} \text{ V} = Z_{výst} \mathbf{I}_{výst}$$

Vstupný a výstupný výkon

$$P = P_{vst} = P_{výst} = \frac{1}{2} |\mathbf{I}_{vst}|^2 R_{vst} = \frac{1}{2} |\mathbf{I}_{výst}|^2 R_{výst} = 23,16 \text{ W}$$



Obr. R319

V minimách a maximách stojatých vln pre prenášaný výkon platí

$$P = \frac{1}{2} U_{max} I_{min} = \frac{1}{2} U_{min} I_{max}$$

Ak uvážime, že

$$\frac{U_{max}}{I_{min}} = rZ_v \quad \text{a} \quad \frac{U_{min}}{I_{max}} = \frac{Z_v}{r}$$

potom možno napísať

$$I_{max} = \sqrt{\frac{2P}{Z_v}} r = 1,62 \text{ A} \quad I_{min} = \sqrt{\frac{2P}{rZ_v}} = 0,52 \text{ A}$$

$$U_{max} = rZ_v I_{min} = 89,44 \text{ V} \quad U_{min} = \frac{Z_v I_{max}}{r} = 28,48 \text{ V}$$

Prvé napäťové maximum (prúdové minimum) sa od konca vedenia nachádza vo vzdialenosti  $x_0$ , pre ktorú platí

$$\frac{Z_{v\dot{y}st} + jZ_v \operatorname{tg} \beta x_0}{Z_v + jZ_{v\dot{y}st} \operatorname{tg} \beta x_0} = \frac{Z_{max}}{Z_v} = r$$

pretože  $Z_{max} = rZ_v$ . Riešením tejto rovnice pre  $x_0$  dostaneme

$$x_0 = 7,2 \text{ cm}$$

Využitím tejto hodnoty a skutočnosti, že  $\lambda = 1,9 \text{ m}$  možno graficky znázorniť prúdovú a napäťovú stojatú vlnu pozdĺž vedenia (pozri obr. R319).

**320.** Konštanta šírenia na danom vedení  $\gamma = \alpha = \sqrt{RG} = 9,11 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}$  a charakteristický odpor vedenia  $Z_v = \sqrt{R/G} = 5 \text{ k}\Omega$ . Útlm celého vedenia  $\alpha l = 1,09$ , kde  $l = 120 \text{ km}$  je dĺžka vedenia. Medzi vstupnými a výstupnými veličinami platia vzťahy

$$U_{v\dot{y}st} = U_{vst} \cosh \alpha l - I_{vst} Z_v \sinh \alpha l = 0 \quad I_{v\dot{y}st} = I_{vst} \cosh \alpha l - (U_{vst}/Z_v) \sinh \alpha l$$

Riešením rovníc pre  $I_{vst}$  a  $I_{v\dot{y}st}$  dostaneme

$$I_{vst} = \frac{U_{vst}}{Z_v \operatorname{tgh} \alpha l} = 5,13 \text{ mA} \quad I_{v\dot{y}st} = \frac{U_{vst}}{Z_v \sinh \alpha l} = 3,10 \text{ mA}$$

Vstupný odpor vedenia

$$Z_{vst} = \frac{U_{vst}}{I_{vst}} = Z_v \operatorname{tgh} \alpha l = 4674 \Omega$$

**321.** a) Fázová rýchlosť vlny na vedení  $v_f = \omega/\beta = 288 \text{ 219 km/s}$  ( $\beta = 2,18 \cdot 10^{-2} \text{ rad/km}$ ) a vlnová dĺžka  $\lambda = v_f/f = 288,219 \text{ km}$ .

b) Vzhľadom na to, že záťaž tvorí impedancia rovná vlnovej impedancii vedenia, platí

$$Z_{vst} = Z_{v\dot{y}st} = Z_v = 615 - j78 \Omega$$

takže amplitúda vstupného prúdu

$$I_{vst} = \frac{U_{vst}}{Z_{vst}} = 8,00 + j1,015 \text{ mA} = 8,064 e^{j7,228^\circ} \text{ mA}$$

a vstupný výkon

$$P_{vst} = \frac{1}{2} |I_{vst}|^2 R_{vst} = 20 \text{ W}$$

Amplitúda prúdu na výstupe vedenia

$$I_{v\dot{y}st} = I_{vst} e^{-\gamma l} = 3,878 e^{j67,46^\circ} \text{ mA} = 1,487 + j3,582 \text{ mA}$$

a napätie na výstupe vedenia

$$U_{v\dot{y}st} = Z_{v\dot{y}st} I_{v\dot{y}st} = 2,404 e^{j60,23^\circ} \text{ V} = 1,194 + j2,087 \text{ V}$$

Výstupný výkon

$$P_{v\dot{y}st} = \frac{1}{2} |I_{v\dot{y}st}|^2 R_{v\dot{y}st} = P_{vst} e^{-2\alpha l} = 4,62 \text{ mW}$$

322. Vlnový odpor vedenia

$$Z_v = 120 \ln \frac{2l - D}{D} = 504 \Omega$$

Vstupná reaktancia 35-metrového vedenia:

a) na konci skratovaného

$$Z_{vst} = jZ_v \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} d = j1551 \Omega = jX_L$$

b) na konci otvoreného

$$Z_{vst} = -jZ_v \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} d = -j163 \Omega$$

Vstupná reaktancia 16-metrového vedenia

c) na konci skratovaného  $Z_{vst} = -j1071 \Omega$ ,

d) na konci otvoreného  $Z_{vst} = j237 \Omega$ .

V prípade a) vedenie predstavuje ekvivalentnú indukčnosť

$$L = \frac{\lambda X_L}{2\pi c} = 41 \mu\text{H}$$

v prípade b) ekvivalentnú kapacitu

$$C = \frac{\lambda}{2\pi c X_C} = 163 \text{ pF}$$

v prípade c)  $C = 25 \text{ pF}$ ,

v prípade d)  $L = 6,3 \mu\text{H}$ .

323. Paralelné spojenie bezstratového, na konci skratovaného vedenia so vstupnou susceptanciou  $Y_{ved}$  a kondenzátora so susceptanciou  $Y_C = j\omega C$  bude predstavovať paralelný rezonančný obvod (rezonátor), ak:

a) vstupná susceptancia vedenia  $Y_{ved}$  bude mať indukčný charakter, teda

$$Y_{ved} = -j \frac{1}{Z_v} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{c} l$$

b) celková výsledná susceptancia bude nulová, teda

$$Y_C + Y_{ved} = 0$$

Musí teda platiť

$$j\omega C - j \frac{1}{Z_v} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{c} l = 0$$

z čoho hľadaná dĺžka vedenia je

$$l = \frac{c}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega C Z_v} = 55,2 \text{ cm}$$

324. V LC-obvode hodnota kapacity kondenzátora je  $C = 1/(\omega_0^2 L) = 50 \text{ pF}$ . Fázová konštanta kábla pri frekvencii  $\omega$  je daná výrazom

$$\beta = \frac{\omega}{v_f} = \omega \sqrt{L_v C_v} = \omega Z_v C_v$$

Vstupná susceptancia kábla (na druhom konci otvoreného) je

$$Y_{vst} = j \frac{\operatorname{tg} \beta d}{Z_v} = j \frac{\operatorname{tg}(\omega Z_v C_v d)}{Z_v}$$

Po pripojení kábla k rezonančnému obvodu bude mať celý systém novú rezonančnú frekvenciu  $\omega_0'$ , ktorú možno získať z podmienky nulovej výslednej susceptancie systému

$$j \frac{\operatorname{tg}(\omega_0' Z_v C_v d)}{Z_v} + j \omega_0' C + \frac{1}{j \omega_0' L} = 0 \quad \text{alebo} \quad \frac{\operatorname{tg}(\omega_0' Z_v C_v d)}{Z_v} + \omega_0' C - \frac{1}{\omega_0' L} = 0$$

Posledná rovnica pre  $\omega_0'$  je transcendentná a možno ju riešiť graficky. Ak uvážime, že v danom prípade možno očakávať  $\omega_0' Z_v C_v d \ll 1$ , potom približne platí  $\operatorname{tg}(\omega_0' Z_v C_v d) \approx \omega_0' Z_v C_v d$ , a teda rovnicu možno prepísať do tvaru

$$\omega_0' C_v d + \omega_0' C - \frac{1}{\omega_0' L} = 0$$

z čoho

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L(C + C_v d)}} = 8,129 \cdot 10^6 \text{ rad/s} \quad \text{alebo} \quad f_0' = \frac{\omega_0'}{2\pi} = 1,294 \text{ MHz}$$

**325.** Označme  $Z_{vst} = 70 \Omega$  impedanciu dipólu,  $Z_{vyst} = 300 \Omega$  vlnovú impedanciu zvodu. Vlnová impedancia štvrtvlnového vedenia

$$Z_v = \sqrt{Z_{vst} Z_{vyst}} = 145 \Omega \quad \text{a jeho dĺžka} \quad d = \frac{\lambda}{4} = 1,21 \text{ m}$$

**326.** a)  $Z_1 = Z_v$ ,  $Z_2 = \infty$ ,  $Z_3 = Z_v$ . Celý výkon postupuje do záťaže  $Z_R'$ .

b)  $Z_1 = \infty$ ,  $Z_2 = Z_v$ ,  $Z_3 = Z_v$ . Celý výkon postupuje do záťaže  $Z_R''$ .

c) Ak sú obidva spínače zapnuté, potom  $Z_1 = Z_v$ ,  $Z_2 = Z_v$ ,  $Z_3 = Z_v/2$ .

Koeficient odrazu v rovine  $AA'$  je  $\rho = -1/3$ , 1/9-ina výkonu sa v danej rovine odráža späť ku zdroju a do každej jednotlivej záťaže postupujú 4/9-iny výkonu.

Ak sú obidva spínače rozopnuté, potom  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \infty$ . Výkon do záťaží nepostupuje, medzi rovinami spínačov je napäťová stojatá vlna s uzlami v rovinách spínačov.