

**ÚLOHY
Z ELEKTROMAGNETIZMU**

Andrej Tirpák

Bratislava 2009

Obsah

| | | |
|---|----|-----|
| Úvod | | 3 |
| Zoznam symbolov veličín a ich jednotky v SI-sústave | | 4 |
| Tabuľka fyzikálnych konštánt | | 7 |
| Elektrické vlastnosti vybraných dielektrík (tabuľka) | | 8 |
| Elektrické vlastnosti vybraných kovov (tabuľka) | | 8 |
| Stručný prehľad vektorovej analýzy | | 9 |
| Súradnicové systémy | | 12 |
| Diferenciálne operácie na skalárnych a vektorový poliach (tabuľka) | | 18 |
| Laplaceov operátor (tabuľka) | | 19 |
| Vektorové identity s nabra-operátorom (tabuľka) | | 19 |
| ÚLOHY A RIEŠENIA | | |
| Elektrostatické pole vo vákuu | 20 | 83 |
| Elektrostatické pole za prítomnosti vodičov | 25 | 101 |
| Elektrostatické pole v dielektriku | 29 | 114 |
| Elektrický prúd | 35 | 128 |
| Magnetické pole prúdov. Lorentzove transformácie elektromagnetických polí | 45 | 149 |
| Elektromagnetická indukcia | 53 | 170 |
| Magnetizmus látok | 59 | 183 |
| Striedavé elektrické prúdy | 61 | 185 |
| Pohyb nabitých častíc v elektrických a magnetických poliach | 73 | 201 |
| Elektromagnetické vlny | 77 | 208 |

Úvod

Predkladaná zbierka úloh ma slúžiť na cvičeniach k prednáške "Elektromagnetizmus (Elektrina a magnetizmus)". Pôvodne tvorí súčasťou učebnice "Elektromagnetizmus", existuje však názor, že riešené úlohy by mohli existovať aj samostatne, oddelene od učebnice, napr. aj pre to, že učebnica na knižnom trhu nie je, a nie je ani nádej na knižné vydanie. Náročnosť úloh je rôzna: niektoré sú veľmi jednoduché, ich riešenia sú udané iba numerickými výsledkami, iné, náročnejšie, vyžadujú hlbší analytický rozbor. Niekoľko úloh vyžaduje mimoriadne dobrú prípravu a patria skôr do prednáškovej časti. Takúto paletu úloh som zvolil na základe skúsenosti, že potenciálni riešitelia-študenti majú rôznu úroveň teoretickej prípravy, a teda aby aj menej erudovaní mali šancu úspešne riešiť primeraný počet úloh. Na druhej strane, aby sa tí ambicióznejší pri práci s úlohami nenudili.

Najväčší problém pre riešiteľa úlohy je obvykle odpoveď na otázku: "Ako začať?" Niet na ňu jednoznačnej odpovede. Úspech sa dostaví až po tvrdej a systematickej práci s úlohami a získaním dostatočnej skúsenosti. Ako pri skutočnom fyzikálnom výskume, ani pri riešení úlohy nie je vždy od začiatku jasné, aká je optimálna postupnosť krokov pre dosiahnutie výsledku. Ak možno niečo poradiť – tak potom popri špeciálnych zákonoch týkajúcich sa priamo zložitého problému, treba sa pri jeho riešení pokúsiť využiť fundamentálne fyzikálne zákony, ako sú napr. zákony zachovania a princíp superpozície. Ešte vyšší stupeň chápania problému predpokladá schopnosť využívania metodologických princípov fyziky, ako sú: princíp príčinnosti, symetrie, relativity a ekvivalencie. Niekedy sa treba tiež povzniesť nad priehradky, ktoré sme vo fyzike narobili. Fyzikálny svet je zložitý a mnohotvárný a často sa treba na problém vedieť pozrieť aj z inej, nielen "elektromagnetickej", ale napr. aj z mechanickej, či termodynamickej stránky.

Umenie riešenia úloh spočíva tiež v schopnosti odlíšiť podstatné stránky problému od menej podstatných, či nepodstatných. Takáto schopnosť sa pri riešení prejaví schopnosťou zanedbávať tak, že sa výpočty stanú matematicky jednoduchšie, pričom výsledok riešenia problému zostáva pre prax dostatočne presný. Dobrým príkladom je zanedbanie gravitačného pôsobenia pri elektromagnetickej interakcii elementárnych častíc.

U väčšiny predkladaných úloh sa vyžaduje numerický výsledok. Nie je mojím záujmom týrať študentov bezduchými numerickými cvičeniami, skôr mám úmysel poukázať na konkrétne kvantitatívne súvislosti, ktoré môžu byť pre budúceho profesionálneho fyzika veľmi poučné. Veď dozvedieť sa numerickým výpočtom napr. to, že vo vnútri vodíkového atómu je intenzita elektrického poľa väčšia ako 10^{12} V/m a rastie smerom do vnútra k neznámych hodnotám, že magnetická indukcia pritom tiež dosahuje extrémne vysokých hodnôt cca 12 T, je poznanie veľmi vzrušujúce a šokujúce zároveň. Atóm takto predstavuje singularitu hustoty elektromagnetickej energie.

Riešená zbierka úloh má svoje výhody, ale aj nevýhody. Výhodou je, že zbavuje študenta pochybností pri hodnotení svojho riešenia, nevýhodou je, že zvädza na "odpisovanie". Fyzikálne úlohy majú predovšetkým preveriť hĺbku a rozsah teoretickej prípravy študenta a jeho schopnosť samostatne riešiť úlohy fyzikálnej praxe. Mali by byť preto riešené samostatne, bez pomoci nejakých vzorových riešení, ak naviac uvážime, že úlohy môžu mať niekoľko správnych spôsobov riešenia obvykle iba s jedným správnym výsledkom. Študent by po riešení mal siahnuť iba pri konfrontácii vlastného postupu a dosiahnutého riešenia. Ak si musí nimi pomáhať pred dosiahnutím vlastného výsledku, znamená to, že jeho príprava nebola dostatočná, alebo nemá dost' tpezlivosti. V takom prípade riešenia sú tiež užitočné, ale iba ako dodatočná študijná literatúra (potom však treba siahnuť aj po inej dostupnej zbierke úloh).

Napriek argumentom pre a proti si myslím, že riešené úlohy môžu byť užitočnou pomôckou, ak sa riešenia budú používať v rozumnej miere. Domnievam sa, že ich treba zaradiť aj kvôli ucelenosti predkladaného učebného textu.

Júl 2009



Zoznam symbolov veličín a ich jednotky v SI-sústave

(Vektorové a komplexné veličiny sú tlačené tučnou kurzívou)

| Symbol | Veličina | Jednotka v SI-sústave |
|-------------------------------------|---|---------------------------------------|
| <i>A</i> | Vektorový potenciál | Wb/m = T.m |
| <i>A</i> | Práca | J |
| <i>B</i> | vektor magnetickej indukcie | T |
| <i>B</i> | Susceptancia, imaginárna časť admitancie | S |
| bei <i>u</i> | Besselova (funkcia) imaginárna argumentu <i>u</i> | — |
| ber <i>u</i> | Besselova (funkcia) reálna argumentu <i>u</i> | — |
| <i>C</i> | Kapacita | F |
| | kapacita na jednotku dĺžky | F/m |
| <i>c</i> | rýchlosť svetla vo voľnom priestore (vo vákuu) | m/s |
| <i>D</i> | vektor elektrickej indukcie | C/m ² = A.s/m ² |
| <i>d</i> | dĺžka vedenia | m |
| <i>E</i> | vektor intenzity elektrického poľa | V/m |
| <i>ℰ</i> | elektromotorické napätie zdroja | V |
| <i>e</i> | elementárny náboj | C = A.s |
| <i>e</i> | základ prirodzených logaritmov | — |
| <i>F</i> | vektor sily | N |
| <i>f</i> | frekvencia | Hz |
| <i>G</i> | vodivosť, reálna časť admitancie | S |
| | vodivosť na jednotku dĺžky dvojvodičového vedenia | S/m |
| <i>H</i> | vektor intenzity magnetického poľa | A/m |
| <i>I</i> | stály elektrický prúd, amplitúda prúdu | A |
| <i>I_{ef}</i> | efektívna hodnota prúdu | |
| <i>I⁺, I⁻</i> | amplitúda postupujúcej a odrazenej prúdovej vlny | A |
| <i>i</i> | okamžitá hodnota prúdu | A |
| <i>i, j, k</i> | jednotkové vektory pravouhlého súradnicového systému | |
| <i>J, j</i> | prúdová hustota, amplitúda objemovej prúdovej hustoty | A/m ² |
| <i>J_s</i> | amplitúda plošnej prúdovej hustoty | A/m |
| <i>j</i> | imaginárna jednotka | — |
| <i>K</i> | koeficient šírenia vlny | m ⁻¹ |
| <i>L</i> | indukčnosť | H |
| | indukčnosť na jednotku dĺžky dvojvodičového vedenia | H/m |
| <i>l</i> | dĺžka | m |
| ln | prírodný logaritmus | — |
| log | dekadický logaritmus | — |
| <i>M</i> | vektor magnetizácie | A/m |
| | moment dvojice síl | N.m |
| <i>M</i> | vzájomná indukčnosť | H |
| <i>ℳ</i> | magnetomotorické napätie | A, Az |
| <i>m</i> | magnetický moment | A.m ² |
| Np | neper* – jednotka útlmu | *Np nie je SI jednotkou |
| <i>n</i> | počet | — |
| | koncentrácia | m ⁻³ |
| <i>n₀</i> | jednotkový vektor normály | — |
| <i>P</i> | vektor elektrickej polarizácie | C.m ⁻² |

| Symbol | Veľičina | Jednotka v SI-sústave |
|-------------------------|--|--------------------------|
| p | elektrický dipólový moment | C.m |
| P | elektrický výkon | W |
| P_{kompl} | komplexný výkon | W |
| p | objemová hustota výkonu | W.m ⁻³ |
| | okamžitý výkon | W |
| PSV | pomer stojatej vlny | — |
| Q | integrálny elektrický náboj | C = A.s |
| | kvalita rezonančného obvodu (faktor kvality) | — |
| q | elektrický náboj | C = A.s |
| R | elektrický odpor (rezistencia), reálna časť impedancie | Ω |
| | odpor na jednotku dĺžky dvojvodičového vedenia | Ω/m |
| r | pomer stojatej vlny | — |
| | polomer | m |
| r, φ, z | cylindrické (valcové) súradnice | m, rad (°), m |
| r, ϑ, φ | sférické (guľové) súradnice | m, rad (°), rad (°) |
| S | Poyntingov vektor | W/m ² |
| S | plocha | m ² |
| T | perióda | s |
| | absolútna teplota | K |
| t | čas | s |
| $\text{tg } \delta$ | činiteľ strát, tangens stratového uhla dielektrika | — |
| U, U_0 | stále napätie, amplitúda napätia | V |
| U_{ef} | efektívna hodnota napätia | V |
| U^+, U^- | amplitúda postupujúcej a odrazenej napäťovej vlny | V |
| V_m | skalárny magnetický potenciál pre vektor \mathbf{B} | Wb/m = T.m |
| \mathbf{v} | vektor rýchlosti | m/s |
| v_f | fázová rýchlosť vln | m/s |
| v_g | grupová (skupinová) rýchlosť | m/s |
| W | elektromagnetická energia | J = W.s |
| w_{elmag} | hustota energie elektromagnetického poľa | J/m ³ |
| X | reaktancia, imaginárna časť impedancie | Ω |
| x, y, z | pravouhlé (kartézské) súradnice | m |
| \mathbf{Y} | komplexná admitancia | S |
| | komplexná admitancia na jednotku dĺžky | S/m |
| Y_v | charakteristická admitancia vedenia | S |
| y | komplexná konduktivita | S/m |
| Z | komplexná impedancia | Ω |
| | komplexná impedancia na jednotku dĺžky | Ω/m |
| Z_v, Z_0 | charakteristické (vlnové) impedancie TEM-vln | Ω |
| Z_0 | charakteristická impedancia neohraničeného bezstratového dielektrika | Ω |
| Z_{00} | charakteristická impedancia voľného priestoru | Ω |
| z_{min} | vzdialenosť (kladná alebo záporná) uvažovanej roviny od minima stojatej vlny | m |
| α | koeficient útlmu (tlmenia) | m ⁻¹ , dB/m |
| β | fázový koeficient (fázová konštanta) | rad/m, °/m |
| β_0 | fázový koeficient (fázová konštanta) v neohraničenom dielektriku | rad/m, °/m |

| Symbol | Veličina | Jednotka v SI-sústave |
|------------------|--|--|
| γ | koeficient šírenia konduktivita magnetomechanický (gyromagnetický) pomer | m^{-1} , dB/m S/m Hz/T = C/kg |
| δ | hĺbka vniku (skinová hĺbka) stratový uhol dielektrika | m rad, ° |
| ϵ_0 | elektrická konštanta | F/m |
| ϵ | permitivita | F/m |
| ϵ^* | komplexná permitivita | F/m |
| ϵ_r | relatívna permitivita | — |
| η | účinnosť | — |
| ϑ | uhol teplota v Celsiovej stupnici | rad, ° °C |
| κ | elektrická susceptibilita | — |
| λ | vlnová dĺžka | m |
| λ_{kr} | kritická (medzná) vlnová dĺžka | m |
| λ_v | dĺžka vlny vo vlnovode | m |
| λ_0 | dĺžka vlny vo voľnom priestore (vo vákuu) | m |
| μ | magnetický moment | A.m ² |
| μ | permeabilita | H/m |
| μ_0 | magnetická konštanta (permeabilita voľného priestoru) | H/m |
| μ_r | relatívna permeabilita | — |
| π | kruhová konštanta, Ludolfovo číslo | — |
| ρ | koeficient odrazu | — |
| ρ_U, ρ_I | koeficient odrazu napäťovej alebo prúdovej vlny | — |
| ρ | rezistivita | $\Omega.m$ |
| | objemová hustota náboja | $C/m^3 = A.s/m^3$ |
| σ | konduktivita | S/m |
| | plošná hustota náboja | $C/m^2 = A.s/m^2$ |
| τ | časová konštanta objem | s m ³ |
| Φ | magnetický indukčný tok | Wb |
| φ | uhol, fázový uhol | rad, ° |
| φ_m | skalárny magnetický potenciál pre vektor \mathbf{H} | A |
| χ | magnetická susceptibilita | —, m ³ /kg, m ³ /kmol |
| Ψ | tok vektora \mathbf{E} alebo \mathbf{D} | V.m, C |
| Ω | priestorový uhol | rad |
| ω | uhlová frekvencia | rad/s |

Tabuľka fyzikálnych konštánt¹

| Veličina | Hodnota v SI sústave |
|---|--|
| Rýchlosť svetla vo voľnom priestore (vo vákuu) c | 299 792 458 m.s ⁻¹ (presne) |
| Magnetická konštanta (permeabilita vákuu) μ_0 | $4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m ⁻¹ (z definície) |
| Elektrická konštanta (permitivita vákuu) $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$ | $8,854\ 187\ 817 \cdot 10^{-12}$ F.m ⁻¹ |
| Charakteristická impedancia voľného priestoru $Z_{00} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = \mu_0 c$ | 376,730 313 461 Ω |
| Elementárny náboj e | $1,602\ 176\ 487 \cdot 10^{-19}$ C (A.s) |
| Elektrónvolt eV | $1,602\ 176\ 487 \cdot 10^{-19}$ J |
| Pokožová hmotnosť elektrónu m_e | $9,109\ 382\ 15 \cdot 10^{-31}$ kg |
| Pokožová hmotnosť protónu m_p | $1,672\ 621\ 637 \cdot 10^{-27}$ kg |
| Pokožová energia elektrónu $m_e c^2$ | $8,187\ 104\ 38 \cdot 10^{-14}$ J = $0,511 \cdot 10^6$ eV |
| Pokožová energia protónu $m_p c^2$ | $1,503\ 277\ 359 \cdot 10^{-10}$ J = $0,938 \cdot 10^9$ eV |
| Planckova konštanta $h = 2\pi\hbar$ | $6,626\ 068\ 9 \cdot 10^{-34}$ J.s |
| Bohrov polomer $a_0 = \hbar^2/(\pi\mu_0 c^2 e^2 m_e)$ | $5,291\ 772\ 085 \cdot 10^{-11}$ m |
| Bohrov magnetón $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$ | $9,274\ 009\ 15 \cdot 10^{-24}$ A.m ² (J.T ⁻¹) |
| Jadrový magnetón $\mu_J = e\hbar/(2m_p)$ | $5,050\ 783\ 24 \cdot 10^{-27}$ A.m ² (J.T ⁻¹) |
| Kvantum elektrickej vodivosti $\mathcal{G}_0 = 2e^2/h$ | $7,748\ 091\ 7004 \cdot 10^{-5}$ S |
| von Klitzingova konštanta $R_0 = h/e^2$ | $2,581\ 280\ 755 \cdot 10^4$ Ω |
| Kvantum indukčného toku $\Phi_0 = h/(2e)$ | $2,067\ 833\ 667 \cdot 10^{-15}$ Wb |
| Josephsonova konštanta $K_J = 2e/h$ | $4,835\ 978\ 91 \cdot 10^{14}$ Hz.V ⁻¹ |
| Gravitačná konštanta κ | $6,674\ 28 \cdot 10^{-11}$ m ³ .kg ⁻¹ .s ⁻² |
| Avogadrova konštanta N_A | $6,022\ 141\ 7 \cdot 10^{26}$ kmol ⁻¹ |
| Faradayova konštanta F | $9,648\ 533\ 99 \cdot 10^7$ C.kmol ⁻¹ |
| Boltzmannova konštanta k | $1,380\ 650\ 4 \cdot 10^{-23}$ J.K ⁻¹ |

¹ Konštanty boli aktualizované podľa CODATA Internationally recommended values of the Fundamental Physical Constants (2007) – www.physics.nist.gov/constants

Elektrické vlastnosti vybraných dielektrik

| Materiál | ϵ_r | $10^4 \times \text{tg } \delta$ | Frekvencia f (GHz) |
|------------------------------------|--------------|---------------------------------|-------------------------|
| Vzduch | 1,0006 | zanedbatelný | 3 |
| Sklo | 4 až 7 | 10 až 60 | 3 |
| Voda (dest.) | 77 | 1570 | 3 |
| Drevo (balza) | 1,22 | 1000 | 3 |
| Bakelit | 3,52 až 3,68 | 366 až 410 | 10 |
| Ebonit | 4,02 | 240 | 10 |
| Pertinax | 3,6 | 800 | 3 |
| Textgumoid | 3,6 | 75 | 10 |
| Kremeň tavený | 3,8 | 1 | 10 |
| Slída | 7 | 2 | 3 |
| Polyetylén | 2,25 | 4 | 10 |
| Polystyrén | 2,54 | 3 | 10 |
| Polystyrén penový | 1,03 | 1 | 10 |
| PMMA | 2,57 | 43 | 10 |
| Teflon | 2,1 | 1,5 | 10 |
| Korund (Al_2O_3) | 9,6 | 1 | 3 |
| Kremík Si | 11,8 | 10 až 100 | 10 |
| Zafír | 9,3 – 11,7 | 1 | 10 |

Elektrické vlastnosti vybraných kovov

| Materiál | Vodivosť $\sigma \times 10^{-7}$ (S/m) |
|------------------------|---|
| Striebro | 6,12 |
| Meď | 5,80 |
| Zlato | 4,10 |
| Hliník | 3,53 |
| Mosadz | 1,6 |
| Nikel | 1,15 |
| Železo | 1,04 |
| Bronz | 1,00 |
| Platina | 0,95 |
| Cín | 0,87 |
| Olovo | 0,50 |
| Nehrdzavejúca ocel' | 0,11 |
| Nichróm | 0,092 |
| Tantal | 0,080 |
| Chróm | 0,078 |

STRUČNÝ PREHĽAD VEKTOROVEJ ANALÝZY

1 Sčítavanie vektorov a násobenie vektora skalárom

Vektor \mathbf{A} je fyzikálna veličina, ktorá má udanú veľkosť (modul, absolútnu hodnotu) A a smer. Možno ho vyjadriť napríklad v zložkách pozdĺž osí kartézskeho súradnicového systému x, y, z

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

kde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sú jednotkové vektory s modulom 1 v smere súradnicových. Vektory možno sčítavať. Súčet dvoch vektorov \mathbf{A} a \mathbf{B} je vektor

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$

Pre sčítavanie vektorov platí komutatívny zákon

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

a asociatívny zákon

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

Vždy platí

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq A + B$$

Rozdiel dvoch vektorov

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

je vektor, ktorý sa rovná súčtu vektora \mathbf{A} s vektorom $-\mathbf{B}$ (vektor s rovnakým modulom ako \mathbf{B} , ale opačného smeru).

Súčin skalára α s vektorom \mathbf{A} je vektor, ktorého modul je $|\alpha|A$ a smer je súhlasný so smerom vektora \mathbf{A} ak $\alpha > 0$, alebo opačný smeru \mathbf{A} , ak $\alpha < 0$.

2 Násobenie vektorov

Sú definované dva súčiny vektorov:

a) **Skalárny súčin dvoch vektorov** $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ – je skalár s hodnotou $AB \cos \varphi$, kde φ je uhol, ktorý vektory \mathbf{A} a \mathbf{B} zvierajú, teda

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \varphi$$

Skalárny súčin dvoch navzájom kolmých vektorov ($\varphi = \pi/2$) sa rovná nule. Skalárny súčin dvoch paralelných, resp. antiparalelných vektorov ($\varphi = 0, \pi$)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \pm AB$$

Pre skalárny súčin vektorov platí komutatívny zákon a distributívny zákon, t. j.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

avšak neplatí asociatívny zákon, pretože

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

Pre jednotkové vektory pravouhlého súradnicového systému platia výrazy

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

Skalárny súčin vektorov v zložkách pravouhlých súradníc

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Ak $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, potom

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

b) **Vektorový súčin dvoch vektorov** $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ je vektor, ktorého modul je

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \varphi$$

(φ je uhol medzi vektormi \mathbf{A} a \mathbf{B}) a smer vektora $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ je taký, že vektory \mathbf{A} , \mathbf{B} a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ tvoria pravotočivý súradnicový systém. Vektorový súčin dvoch paralelných vektorov ($\varphi = 0, \pi$) sa rovná nule. Vektorový súčin dvoch navzájom kolmých vektorov ($\varphi = \pi/2$) je vektor s modulom AB .

Pre vektorový súčin dvoch vektorov platí distributívny zákon, t. j.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}$$

avšak neplatí komutatívny zákon. Platí antikomutatívny zákon, t. j.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

a neplatí ani asociatívny zákon, pretože

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$$

Vektorové súčiny jednotkových vektorov $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sú

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Vektorový súčin dvoch vektorov v zložkách pravouhlého súradnicového systému

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}$$

Dvojnásobný vektorový súčin $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ je vektor koplánárny s vektormi \mathbf{B} a \mathbf{C} , a je daný výrazom

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

Zmiešaný vektorový súčin

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

je skalár, ktorého veľkosť sa rovná objemu rovnobežnostena určeného vektormi \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{C} . V zložkách pravouhlého súradnicového systému

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Ďalej platia vzťahy

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})]\mathbf{C} - [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]\mathbf{D} = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]\mathbf{B} - [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]\mathbf{A} \end{aligned}$$

SÚRADNICOVÉ SYSTÉMY

1 Dvojrzmerné súradnicové systémy

Na určenie polohy bodu v rovine treba zadať dve čísla (súradnice), pričom spôsob zadania polohy (súradníc) závisí od povahy problému, v ktorom bod vystupuje. Na tento účel slúžia súradnicové systémy, ktoré musia mať zadaný **začiatok**, **smer** (+/-) súradnicových osí a **mierku** (škálu). Najčastejšie používané súradnicové systémy v rovine sú:

- **pravouhlý (kartézsky) systém** x, y
- **polárny systém súradníc** ρ, φ .

1.1 Pravouhlý (kartézsky) dvojrzmerný systém súradníc

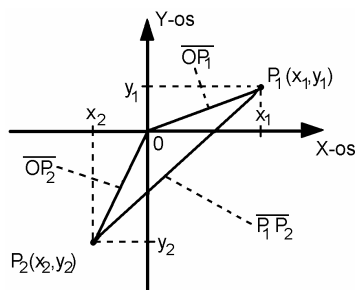
Pravouhlý systém súradníc v rovine je sústava dvoch navzájom pravouhlých (ortogonálnych) osí podľa *obr. 1*. Začiatkom (pólom alebo nulovým bodom) O je priesečník osí. Vzdialenosti na horizontálnej osi sa zadávajú hodnotami $\pm x$ vzhľadom na začiatok, na vertikálnej osi $\pm y$ od začiatku. Poloha bodu P v rovine je potom určená dvojicou čísel x, y , čo označujeme $P(x, y)$.

Vzdialenosť \overline{OP} bodu $P(x, y)$ od začiatku O je daná Pytagorovou vetou:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vzdialenosť d medzi dvoma bodmi $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

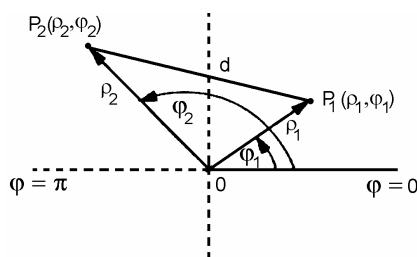


Obr. 1

1.2 Systém polárných súradníc

Polárne súradnice sa používajú pri analýze problémov so stredovou symetriou v rovine. Poloha bodu P sa zadáva (pozri *obr. II*):

- 1) **vzdialenosťou** (polomerom alebo dĺžkou polohového vektora) $\rho = \overline{OP}$,
- 2) **smerovým uhlom** (polárny uhol, uhlová súradnica alebo argument) φ medzi spojnicou OP a polárnou osou. Polárny uhol φ je kladný pri otáčaní proti smeru hodinových ručičiek a záporný pri otáčaní v smere pohybových ručičiek. Pretože uhol sa v rovine v oblúkovej miere opakuje po hodnotách 2π , najčastejšie sa pri jeho zadávaní obmedzujeme na interval hodnôt $0 \leq \varphi < 2\pi$ alebo v stupňovej miere $0 \leq \varphi < 360^\circ$. Nazývame ich hlavné hodnoty.



Obr. II

Vzdialenosť d dvoch bodov $P_1(\rho_1, \varphi_1)$ a $P_2(\rho_2, \varphi_2)$ v polárnych súradniciach

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

je daná kosínusovou vetou.

1.3 Konverzie v dvojrozmerných súradnicových systémoch

Prechod od polárnych súradníc (ρ, φ) k pravouhlým súradniciam (x, y) sa vykoná pomocou vzťahov

$$x = r \cos \varphi \qquad y = r \sin \varphi$$

a prechod od pravouhlých súradníc (x, y) k polárnym (ρ, φ) je daný vzťahmi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

2 Trojrozmerné súradnicové systémy

Trojrozmerné súradnicové systémy sa používajú na určenie polohy bodu v priestore. Podľa povahy problému možno použiť niektorý z nasledovných najčastejšie používaných súradnicových systémov:

- **pravouhlý (kartézsky) systém** x, y, z
- **cylindrický (valcový) systém** ρ, φ, z
- **sférický (guľový) systém** r, ϑ, φ .

Každý zo systémov musí mať určený **začiatok** 0 (pre cylindrický systém je začiatkom bod na osi z), **smer** (+/-) a **mierka**.

2.1 Pravouhlý trojrozmerný systém súradníc

Tento systém predstavuje tri navzájom ortogonálne (pravouhlé) súradnice, ktoré nazývame os x , os y a os z (pozri *obr. III*).

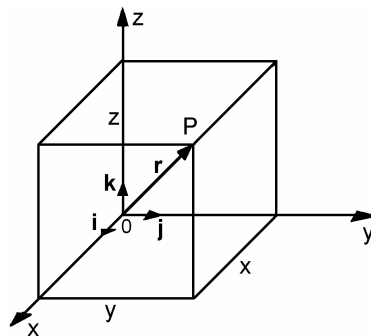
Vzdialenosť bodu $P(x, y, z)$ od začiatku 0

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Najkratšia **vzdialenosť** d medzi dvoma bodmi $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Jednotkové vektory v poradí $i \rightarrow j \rightarrow k$ tvoria pravotočivý systém.



Obr. III

2.2 Cylindrický systém súradníc

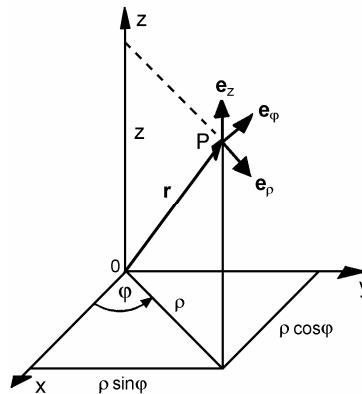
Cylindrické súradnice sa používajú v problémoch s osovou (cylindrickou) symetriou a rotačnou symetriou.

Poloha bodu v cylindrickom systéme je daná súradnicami (ρ, φ, z) , kde z je cylindrická os, ρ je kolmá vzdialenosť bodu P od osi z (pozor – nie od začiatku na osi z) a φ je azimutálny uhol medzi referenčnou rovinou prechádzajúcou osou z a rovinou v ktorej leží bod P (pozri obr. IV). Definičné oblasti:

pre ρ je $\rho \geq 0$

pre φ je $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

pre z je $-\infty \leq z \leq +\infty$



Obr. IV

Pre $z = 0$ prechádza cylindrický systém na systém polárnych súradníc. Jednotkové vektory v poradí $e_\rho \rightarrow e_\varphi \rightarrow e_z$ tvoria pravotočivý systém.

2.3 Sférický systém súradníc

Sférické súradnice sa používajú pri problémoch so stredovou symetriou, napr. v geografii, pri opise dipólových polí, v kvantovej mechanike pri opise energetických stavov atómov a p.

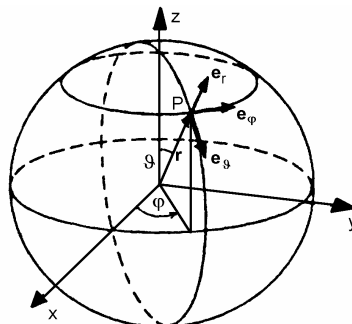
Bod P v sférických súradniciach je daný trojicou čísel (r, ϑ, φ) na obr. V, kde

r je **vzdialenosť** bodu P od začiatku 0 a má hodnoty $r \geq 0$,

ϑ je **polárny uhol** (geografická dĺžková súradnica) medzi polárnou osou (napr. osou z) a smerom vektora r . Nadobúda hodnoty z intervalu $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

φ je **azimutálny uhol** (geografická šírková súradnica v rovníkovej rovine) medzi priemetom vektora r do roviny kolmej na polárnu os (na obr. V os z) a zvolenou osou v tejto rovine (napr. os x). Uhol φ nadobúda hodnoty z intervalu $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Jednotkové vektory v poradí $e_r \rightarrow e_\vartheta \rightarrow e_\varphi$ tvoria pravotočivý systém.



Obr. V

2.4 Konverzie medzi trojrozmernými súradnicovými systémami

Prechod cylindrických súradníc (ρ, φ, z') na kartézske súradnice (x, y, z) umožňujú vzťahy

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi \quad z = z'$$

Prechod kartézskych súradníc (x, y, z) na cylindrické súradnice (ρ, φ, z') umožňujú vzťahy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctg \frac{y}{x} \quad z' = z$$

Prechod sférických súradníc (r, ϑ, φ) na kartézske súradnice (x, y, z) umožňujú vzťahy

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi & 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

Prechod kartézskych súradníc (x, y, z) na sférické súradnice (r, ϑ, φ) umožňujú vzťahy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{rovnica guľovej plochy})$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Prechod sférických súradníc (r, ϑ, φ) na cylindrické súradnice (ρ, φ', z) umožňujú vzťahy

$$\begin{aligned} \rho &= r \sin \vartheta \\ \varphi' &= \varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ z &= r \cos \vartheta & 0 \leq \vartheta \leq \pi \end{aligned}$$

Prechod cylindrických súradníc (ρ, φ', z) na sférické súradnice (r, ϑ, φ) umožňujú vzťahy

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\rho}{z} \quad \varphi = \varphi'$$

Diferenciálne operácie na skalárnych a vektorových poliach

| | |
|---|--|
| Gradient (grad) V: | |
| <i>Pravouhlé súradnice</i> (x, y, z) | <i>Cylindrické súradnice</i> (ρ, φ, z) |
| $\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}$ | $\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z$ |
| <i>Sférické súradnice</i> (r, ϑ, φ) | |
| $\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$ | |
| Divergencia (div) \mathbf{E}: | |
| <i>Pravouhlé súradnice</i> (x, y, z) | <i>Cylindrické súradnice</i> (ρ, φ, z) |
| $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ | $\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ |
| <i>Sférické súradnice</i> (r, ϑ, φ) | |
| $\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta E_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$ | |
| Rotácia (rot) \mathbf{E}: | |
| <i>Pravouhlé súradnice</i> (x, y, z) | |
| $\text{rot } \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$ | |
| <i>Cylindrické súradnice</i> (ρ, φ, z) | |
| $\text{rot } \mathbf{E} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho E_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & \rho E_\varphi & E_z \end{vmatrix}$ | |
| <i>Sférické súradnice</i> (r, ϑ, φ) | |
| $\text{rot } \mathbf{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial \sin \vartheta E_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r E_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\varphi =$ | |
| $= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\vartheta & r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ E_r & r E_\vartheta & r \sin \vartheta E_\varphi \end{vmatrix}$ | |

Laplaceov operátor

| |
|--|
| <p><i>Pravouhlé súradnice (x, y, z)</i></p> $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ |
| <p><i>Cylindrické súradnice (ρ, φ, z)</i></p> $\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ |
| <p><i>Sférické súradnice (r, θ, φ)</i></p> $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ |

Vektorové identity s nabla-operátorom

(*T, V* – skalárne funkcie, *A, B* – vektorové funkcie)

| | | |
|-----------------------------------|---|--|
| $\nabla(TV)$ | = | $T\nabla V + V\nabla T = T\text{grad } V + V\text{grad } T = \text{grad}(TV)$ |
| $\nabla \cdot (VA)$ | = | $V(\nabla \cdot A) + A \cdot (\nabla V) = V\text{div } A + A \cdot \text{grad } V = \text{div}(VA)$ |
| $\nabla \times (VA)$ | = | $V(\nabla \times A) - A \times (\nabla V) = V\text{rot } A - A \times \text{grad } V = \text{rot}(VA)$ |
| $\nabla \cdot (A \times B)$ | = | $B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B) = B \cdot \text{rot } A - A \cdot \text{rot } B = \text{div}(A \times B)$ |
| $\nabla \times (A \times B)$ | = | $A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B =$ $A\text{div } B - B\text{div } A + (B \cdot \text{grad})A - (A \cdot \text{grad})B = \text{rot}(A \times B)$ |
| $\nabla(A \cdot B)$ | = | $A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B =$ $A \times \text{rot } B + B \times \text{rot } A + (B \cdot \text{grad})A + (A \cdot \text{grad})B =$ $\text{grad}(A \cdot B)$ |
| $\nabla \cdot (\nabla V)$ | = | $(\nabla \cdot \nabla)V = (\text{grad} \cdot \text{grad})V = \text{div}(\text{grad } V) = \nabla^2 V = \Delta V$ |
| $\nabla \times (\nabla \times A)$ | = | $\nabla(\nabla \cdot A) - (\nabla \cdot \nabla)A = \nabla(\nabla \cdot A) - \Delta A = \text{grad}(\text{div } A) - \nabla^2 A$ $\text{rot}(\text{rot } A)$ |

Úlohy

Elektrostatické pole vo vákuu

1. Dva bodové náboje q_1 a q_2 sú umiestnené vo vzájomnej vzdialenosti d . Nájdite miesto na priamke prechádzajúcej nábojmi, v ktorom sila pôsobiaca na tretí nabož q_0 je nulová.

2. Vypočítajte príťažlivú silu medzi jadrom a elektrónom v atóme vodíka! Za polomer atómu považujte hodnotu $5 \cdot 10^{-11}$ m! Náboj protónu a elektrónu v absolútnej hodnote je $1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

3. Vypočítajte klasickú obežnú rýchlosť elektrónu okolo jadra v atóme vodíka! Hmotnosť elektrónu je $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

4. Thomsonov model atómu predstavuje rovnomerne rozložený kladný náboj v guľovom objeme s bodovými elektrónmi rozloženými vo vnútri gule. Ukážte, že elektrón vo vnútri takejto gule vykonáva jednoduchý harmonický kmitavý pohyb okolo stredu atómu! Vypočítajte číselne frekvenciu oscilácií elektrónu vo vodíkovom atóme a porovnajte ju s frekvenciami spektrálnych čiar vodíka! Za polomer Thomsonovho vodíkového atómu považujte hodnotu $R = 5 \cdot 10^{-11}$ m.

5. Považujte atómové jadro za rovnomerne nabitú guľu a nájdite maximálnu hodnotu intenzity elektrického poľa! Polomer jadra $R = 1,5 \cdot 10^{-15} A^{1/3}$ m, náboj $Q = Ze$ (A – atómová hmotnosť, Z – atómové číslo, e – elementárny náboj).

6. Daná je vektorová funkcia so zložkami v pravouhlých súradniciach $E_x = Ky$, $E_y = Kx$, $E_z = 0$, $K = \text{konšt.}$

a) Vypočítajte divergenciu a rotáciu tejto funkcie a rozhodnite, či môže predstavovať elektrostatické pole.

b) Vypočítajte dráhový integrál $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ medzi bodmi $(0; 0)$ a $(1; 1)$ po niekoľkých jednoduchých dráhach! Závisí hodnota integrálu od voľby dráhy?

c) Nájdite potenciálovú funkciu k danému vektorovému poľu.

7. Priestor medzi dvoma koncentrickými guľovými plochami s polormi R_1 a R_2 ($R_1 > R_2$) je nabitý priestorovým nábojom

$$\rho(r) = \frac{Q}{4\pi(R_1 - R_2)r^2}$$

kde Q je konštanta. Vypočítajte:

- celkový náboj medzi guľovými plochami,
- intenzitu elektrického poľa ako funkciu vzdialenosti r od stredu symetrie,
- potenciál ako funkciu r .

8. Isté guľovo symetrické rozloženie náboja vytvára potenciál

$$V(r) = \frac{q e^{-ar}}{4\pi\epsilon_0 r}$$

kde q a a sú konštanty. Nájdite rozloženie náboja, ktorému zodpovedá tento potenciál – dôležitý vo fyzike elementárnych častíc a v jadrovej fyzike nazývaný Yukawov potenciál! Hľadané priestorové rozloženie náboja zodpovedá rozloženiu náboja v atóme.

9. Podľa kvantovej mechaniky atóm vodíka v základnom stave má záporný náboj rozložený guľovo symetricky okolo kladného jadra s hustotou

$$\rho(r) = -\frac{e e^{-\frac{2r}{a_0}}}{\pi a_0^3}$$

kde e je elementárny náboj, $a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11}$ m je Bohrov polomer a e je základ prirodzených logaritmov. (V skutočnosti $\rho(r)$ predstavuje hustotu pravdepodobnosti výskytu elektrónu vo vzdialenosti r od jadra).

- Dokážte, že celkový záporný náboj v celom priestore je $-e$.
- Vypočítajte intenzitu elektrického poľa budenu atómom ako funkciu vzdialenosti r od stredu symetrie za predpokladu, že protón predstavuje bodový náboj v strede symetrie.
- Vypočítajte potenciál ako funkciu r .
- Znázornite priebehy intenzity a potenciálu graficky.

10. Molekulu vody možno považovať za elektrický dipól s momentom $p = 6,14 \cdot 10^{-30}$ C.m:

- Za predpokladu, že takýto dipól je tvorený bodovými nábojmi $\pm e$, nájdite jeho dĺžku.
- Nájdite intenzitu elektrického poľa takého dipólu vo vzdialenosti $3 \cdot 10^{-9}$ m na osi dipólu a kolmo na jeho os.
- Nájdite maximálnu silu, ktorou dipól pôsobí na vodíkový ión vo vzdialenosti $3 \cdot 10^{-8}$ m.
- Nájdite elektrickú silu medzi dvoma molekulami vody, ktorých elektrické dipólové momenty ležia na priamke spájajúcej stredy molekúl. Vzdialenosť dipólov je $5 \cdot 10^{-10}$ m.

11. Tri náboje $-q$ sú umiestnené vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka s dĺžkami strán a a náboj Q je v jeho ťažisku.

- Odvoďte výraz pre silu, ktorá pôsobí na jeden z nábojov $-q$. Určte smer tejto sily.
- Odvoďte výraz pre interakčnú energiu tejto sústavy nábojov.
- Aký musí byť vzťah medzi hodnotami q a Q , aby sila pôsobiaca na náboj $-q$ bola nulová? Je tento systém elektrických nábojov stabilný?

12. Náboj $q = -5 \cdot 10^{-9}$ C je rovnomerne rozložený na kružnici s polomerom $R = 10$ cm. Vypočítajte vzdialenosť na osi kružnice, v ktorej je intenzita elektrického poľa maximálna. Aká je intenzita v tejto vzdialenosti?

13. Dva bodové náboje Q a $-Q$ sú umiestnené vo vzájomnej vzdialenosti $2a$. Vypočítajte tok intenzity elektrického poľa kruhovou plochou polomeru R , ktorej stred leží na polovičnej vzdialenosti nábojov a plocha je kolmá na spojnicu nábojov.

14. Vypočítajte potenciál v strede štvorcovej dosky so stranou a , nabitej plošným nábojom $\sigma = \text{konšt.}$

15. Potenciál vo sférických súradniciach je daný výrazom

$$V(\rho, \varphi, \vartheta) = \frac{a \cos \vartheta}{r^2} + \frac{b}{r}$$

nezávisí od súradnice φ , a a b sú konštanty. Nájdite zložky intenzity elektrického poľa.

16. Nekonečná rovinná vrstva hrúbky a je nabitá objemovým nábojom $\rho = \text{konšt.}$ Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a potenciál v ľubovoľnom bode priestoru. Znázornite priebehy potenciálu a intenzity graficky.

17. Na nekonečnej rovinatej ploche nabitaj plošným nábojom $\sigma = \text{konšt.}$ je nekonečná vrstva hrúbky a nabitá objemovým nábojom $\rho = \text{konšt.}$ Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a potenciál v ľubovoľnom bode. Znázornite priebehy potenciálu a intenzity graficky.

18. Plošná hustota náboja na tenkom kruhovom disku s polomerom R je daná funkciou $\sigma = Ar$, kde A je konštanta a r je vzdialenosť od stredu disku. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a potenciál na osi disku.

19. Nájdite potenciál na okraji tenkého dielektrického disku nabitého plošným nábojom $\sigma = \text{konšt.}$ Polomer disku je R .

20. Dané je sféricky symetrické rozloženie objemového náboja s hustotou

$$\begin{array}{lll} \rho = Ar & \text{pre} & 0 \leq r \leq R \\ \rho = 0 & \text{pre} & r > R \end{array}$$

Nájdite potenciál a intenzitu elektrického poľa ako funkciu vzdialenosti od stredu symetrie.

21. Daná je potenciálová funkcia

$$V = \frac{A}{4\pi\epsilon_0} e^{-\alpha r}$$

kde A a α sú konštanty, r je vzdialenosť od stredu symetrie. Nájdite objemové rozloženie náboja, ktoré budí takýto potenciál.

22. Potenciál elektrického poľa vo vnútri nabitaj gule je daný výrazom $V = ar^2 + b$, kde r je vzdialenosť od stredu gule, a, b sú konštanty. Nájdite objemovú hustotu náboja v guli.

23. Potenciál nejakého elektrického poľa je daný výrazom

$$V = \alpha(xy - z^2)$$

Nájdite priemet vektora intenzity elektrického poľa \mathbf{E} do smeru vektora $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ v bode $M(2; 1; -3)$.

24. Dva náboje $-q_1$ a $+q_2$ ($|q_1| < |q_2|$) sú rovnomerne rozložené na koncentrických guľových plochách s polomerami r_1 a r_2 ($r_1 < r_2$). Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a potenciál ako funkcie vzdialenosti od stredu symetrie. Aký bude potenciál vo veľkej vzdialenosti $r \gg r_1, r_2$, ak sa guľa s polomerom r_2 posunie o malú vzdialenosť δx v smere osi x ?

25. Dva nekonečne dlhé priamkové náboje sú uložené paralelne vo vzájomnej vzdialenosti d . Hustoty nábojov na priamkach sú $\pm\lambda$. Nájdite potenciál v kolmej vzdialenosti r od osi priamkových nábojov pre $r \gg d$. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa vo vzdialenosti r . Uvedené rozloženie nábojov sa nazýva priamkový dipól.

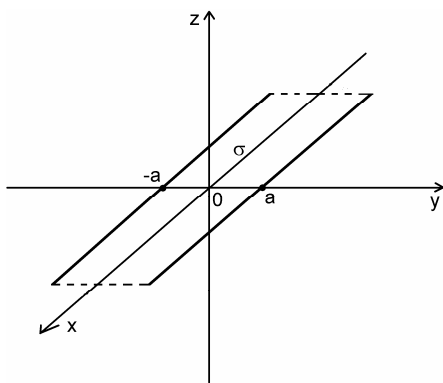
26. V cylindrických súradniciach je daná priestorová hustota náboja

$$\begin{array}{lll} \rho = 0 & \text{pre} & r < a \\ \rho(r) = k/r & \text{pre} & r > a \end{array}$$

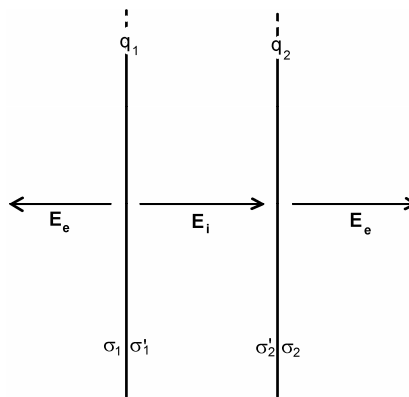
kde k a a sú konštanty. Hustota náboja nezávisí od súradníc φ a z . Riešením Poissonovej rovnice určite potenciál ako funkciu r .

27. Nekonečne dlhý pásik šírky $2a$ je nabitý plošným nábojom tak, že veľkosť náboja závisí iba od súradnice paralelnej so šírkou pásika (obr. 27), teda $\sigma = \sigma(y)$. Nájďte výrazy pre zložky vektora intenzity elektrického poľa v ľubovoľnom bode. Uvažujte dva prípady:

- $\sigma = \sigma_0 = \text{konšt.}$,
- $\sigma = \sigma_0 \sin(2\pi/\lambda)y$, kde σ_0 a λ sú konštanty a $a \rightarrow \infty$.



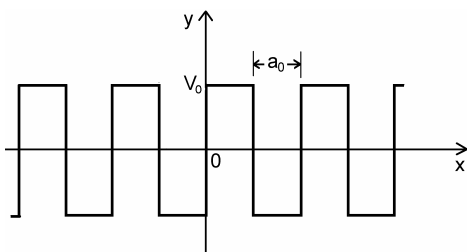
Obr. 27



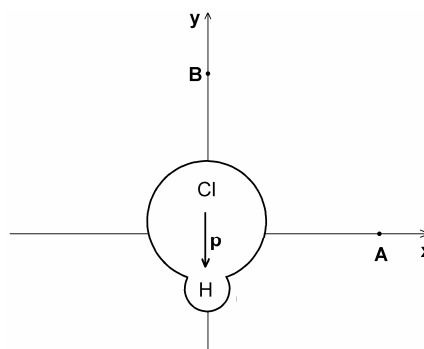
Obr. 28

28. Dve nekonečné kovové roviny sú umiestnené planparalelne. Na rovinách sú náboje q_1 a q_2 na jednotku plochy (obr. 28). Nájďte plošné hustoty nábojov a intenzity elektrického poľa.

29. V rovine xy ($z = 0$) je daný potenciál ako periodická obdĺžniková funkcia podľa obr. 29. Riešením Laplaceovej rovnice nájďte potenciál ako funkciu súradníc. Hľadaný potenciál nezávisí od z a pre $y \rightarrow \infty$ klesá k nule.



Obr. 29



Obr. 30

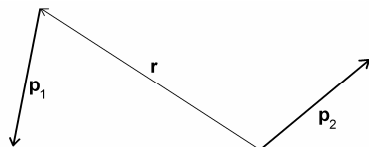
30. Molekula kyseliny soľnej je umiestnená v začiatku súradníc tak, že os H-Cl je totožná s osou y (obr. 30). Aký je smer a veľkosť intenzity elektrického poľa v bode A na osi x vo vzdialenosti 10^{-9} m a v bode B na osi y v tej istej vzdialenosti od začiatku súradníc? Dipólový moment molekuly HCl je $3,44 \cdot 10^{-30}$ C.m a smeruje od Cl k H.

31. Elektrický dipól s momentom p_1 sa nachádza vo vzdialenosti r od dipólu s momentom p_2 (obr. 31). Vypočítajte vzájomnú (interakčnú) energiu oboch dipólov.

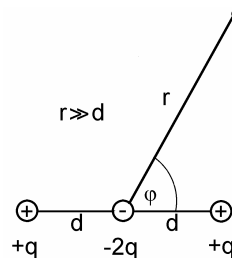
32. Molekula s dipólovým momentom p je vo vzdialenosti r od nekonečne dlhkej priamky nabitaj dĺžkovým nábojom λ . Vypočítajte silu a moment sily pôsobiace na dipól, ak:

- vektor p je kolmý na priamku,
- vektor p je s priamkou paralelný.

33. Daná je konfigurácia nábojov na obr. 33, nazvaná lineárny kvadrupól. Nájdite potenciál vo vzdialenosti r od centrálného náboja v ľubovoľnom smere. Platí: $r \gg d$.



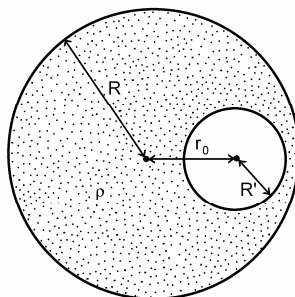
Obr. 31



Obr. 33

34. Dvojvrstva v tvare kruhu s polomerom R má dipólový moment $p' = \text{konšt.}$ vektor v smere rotačnej osi kruhu. Vypočítajte potenciál a intenzitu elektrického poľa na osi kruhu.

35. Polpriamka je nabitá nábojom λ na jednotku dĺžky. Nájdite veľkosť a smer intenzity elektrického poľa v kolmej vzdialenosti d od konca priamky.



Obr. 36

36. V guľovom objeme s polomerom R je rovnomerne rozložený náboj s hustotou ρ , až na guľovú dutinu s polomerom R' , v ktorej je $\rho = 0$. Stred dutiny je vo vzdialenosti r od stredu gule (obr. 36).

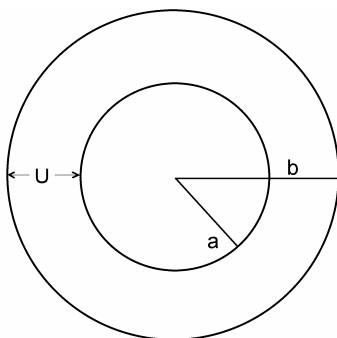
a) Použitím zákona superpozície vypočítajte intenzitu elektrického poľa v dutine. Všimnite si, že pole v dutine je homogénne.

b) Ako treba zvolit' pomer polomerov R'/R , aby pri danom R bol súčin intenzity elektrického poľa v dutine a objemu dutiny maximálny?

37. Dva bodové náboje Q_1 a $-Q_2$ sú umiestnené vo vzájomnej vzdialenosti $2d$. Nájdite plochu nulového potenciálu.

Elektrostatické pole za prítomnosti vodičov

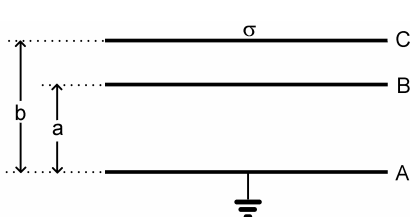
38. Ako zvoliť polomer a vnútornej gule v guľovom kondenzátore s vonkajším polomerom b , aby pri danom potenciálovom rozdiel U bola intenzita elektrického poľa na povrchu vnútornej gule minimálna? Vypočítajte kapacitu takého kondenzátora.



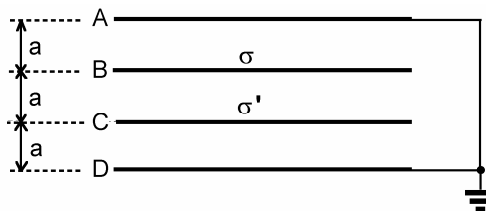
Obr. 39

39. Pri prenose veľkých elektrických výkonov koaxiálnym káblom treba voliť polomery valcových vodičov kábla tak, aby pri danom potenciálovom rozdiel U na kábli bola intenzita elektrického poľa na povrchu vnútornej vodiča minimálna. Aký bude v takom prípade polomer vnútornej vodiča v koaxiálnom kábli na obr. 39?

40. Dané sú tri paralelné roviny A, B, C na obr. 40. Rovina A je uzemnená, rovina B vo vzdialenosti a od roviny A je nenabitá a rovina C vo vzdialenosti b od roviny A je nabitá plošným nábojom σ . Roviny sú vodivé a ich rozmery sú oveľa väčšie ako vzájomné vzdialenosti. Vypočítajte potenciály rovín B a C .



Obr. 40



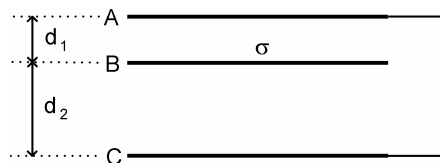
Obr. 41

41. Štyri rovnaké vodivé roviny A, B, C, D , sú umiestnené paralelne v rovnakej vzdialenosti a (obr. 41). Roviny A a D sú udržiavané na nulovom potenciáli, rovina B je nabitá plošným nábojom σ a rovina C má plošný náboj σ' . Určite potenciály rovín B a C a intenzity elektrického poľa medzi rovinami. Okrajové efekty možno zanedbať.

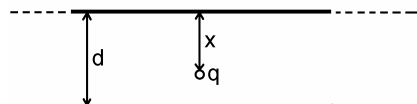
42. Tri paralelné vodivé roviny A, B, C , sú umiestnené podľa obr. 42. Na rovine B je plošný náboj σ . Roviny A a C sú vodivo spojené a nenabité. Určite plošné náboje na vnútorných plochách rovín A a C .

43. Dve veľmi veľké paralelné vodivé roviny sú umiestnené blízko seba vo vzdialenosti d . Roviny sú vodivo spojené. Medzi rovinami vo vzdialenosti $x < d$ od jednej z nich je umiestnený náboj q (obr. 43). Vypočítajte celkové indukované náboje na vnútorných stranách oboch rovín.

Poznámka: Pri riešení možno využiť fakt, že ak v myslenej paralelnej rovine náboja q umiestnime n bodových nábojov, zvýši sa celkový indukovaný náboj na oboch rovinách n -krát, a jeho celková hodnota bude $-nq$. Myslenú rovinu teda možno nabiť plošným nábojom nq a pri riešení postupovať ako v úlohe 42, pričom sa využije zákon superpozície. Úlohu možno riešiť aj pomocou nekonečných zrkadlových zobrazení náboja, čo je však oveľa zložitejšie.



Obr. 42



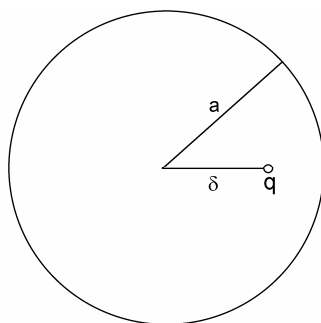
Obr. 43

44. Bodový náboj q sa nachádza medzi dvoma koncentrickými plochami s polormi a a b vo vzdialenosti r od stredu, pričom je splnená podmienka: $a < r < b$. Vypočítajte indukované náboje q_a a q_b na guľových plochách.

45. Bodový náboj q je umiestnený vo vzdialenosti l od stredu vodivej guľovej plochy s polomerom a ($a < l$). Vypočítajte:

- potenciál v okolí guľovej plochy, ak je táto uzemnená,
- potenciál, ak guľová plocha je nenabitá a izolovaná,
- potenciál, ak guľová plocha je izolovaná a má náboj q_0 .

46. V kovovej dutej guli, ktorá je izolovaná a nenabitá, je umiestnený bodový náboj q vo vzdialenosti δ od jej stredu (obr. 46). Vypočítajte silu, ktorou guľa pôsobí na náboj. Aká bude táto sila, ak sa guľa uzemní?



Obr. 46

47. Bodový náboj $q = 10^{-9}$ C je umiestnený vo vzdialenosti $l = 20$ cm od stredu vodivej nenabitej guľe polomeru $R = 10$ cm. Nájdiť intenzitu elektrického poľa na guľi v bode najbližšom k náboju a v bode najvzdialenejšom od náboja.

48. Náboj q je umiestnený vo vzdialenosti l od stredu uzemnenej vodivej guľe s polomerom a . Nájdiť plošnú hustotu indukovaného náboja na guľi ako funkciu uhlu φ , ktorý zvierajú spojnice

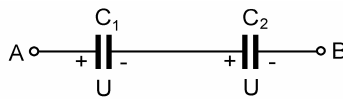
náboja a stredu gule s ľubovoľným polomerom gule. Aký je celkový náboj na guli? Aký je náboj na časti guľovej plochy, ktorú vidieť z miesta náboja q ?

49. Vodivá guľa s polomerom r_1 je umiestnená v strede vodivej guľovej vrstvy s vnútorným polomerom r_2 a vonkajším polomerom r_3 ($r_1 < r_2 < r_3$). Na guli je náboj q a na guľovej vrstve náboj q' . Nájdiť intenzitu elektrického poľa a potenciál v celom priestore a rozloženie elektrického náboja.

50. Doskový kondenzátor s vákuom má kapacitu 1 000 pF. Na každej doske je náboj s absolútnou hodnotou 10^{-6} C. Dosky sú vzdialené o $d = 1$ mm.

- Aké je napätie medzi doskami?
- Aká sila pôsobí medzi doskami?
- Aké bude napätie, ak sa vzdialenosť dosiek zdvojnásobí?
- Akú prácu treba vykonať pri oddialení dosiek na dvojnásobnú vzdialenosť?

51. Dva kondenzátory, ktorých kapacity sú v pomere $C_1/C_2 = k$, boli spojené do série a nabité na potenciálový rozdiel U . Potom boli spojené paralelne a bolo zistené, že na kondenzátor C_1 prešiel náboj q . Určte hodnoty C_1 a C_2 .

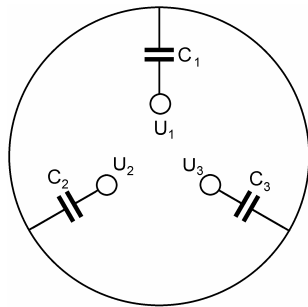


Obr. 52

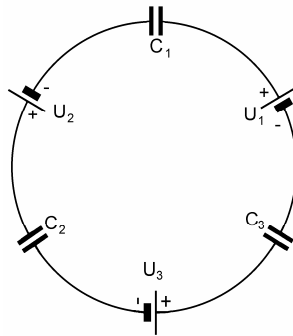
52. Dva kondenzátory C_1 a C_2 sú spojené do série a každý je nabitý na potenciálový rozdiel U (obr. 52). Aké napätie bude na paralelnej dvojici, ktorá vznikne spojením svoriek A a B. Aké náboje budú na jednotlivých kondenzátoroch? Ako sa zmení energia kondenzátorov?

53. Dva paralelné valcové vodiče s polermi a majú osovú vzdialenosť $2d$. Vypočítajte kapacitu na jednotku dĺžky týchto vodičov. Nájdiť približný výraz pre kapacitu, ak $a \ll d$.

Poznámka: Najprv dokážte, že ekvipotenciálne plochy dvoch paralelných priamok s dĺžkovými hustotami nábojov $\pm\lambda$ sú valcové plochy a potom použite metódu elektrických zrkadiel.



Obr. 54

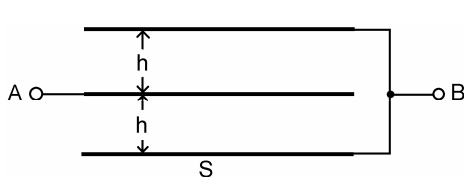


Obr. 55

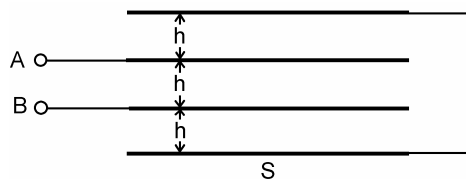
54. Trojvodičový kábel na obr. 54 má kapacity jednotlivých vodičov oproti plášťu C_1, C_2, C_3 . Kapacity medzi vodičmi aj plášť'a voči zemi možno zanedbať. Napätia jednotlivých vodičov oproti zemi sú U_1, U_2, U_3 (uzemňovací vodič nie je na obrázku zobrazený). Plášť je neuzemnený. Stanovte potenciál plášť'a voči zemi.

55. Stanovte napätia na kondenzátoroch v schéme na obr. 55. U_1, U_2, U_3 predstavujú zdroje pevných napätí.

56. Tri rovnaké kovové dosky s plochou S sú uložené planparalelne vo vzájomnej vzdialenosti h . Dosky sú vodivo spojené na svorky A a B podľa obr. 56. Vypočítajte kapacitu medzi svorkami A a B.

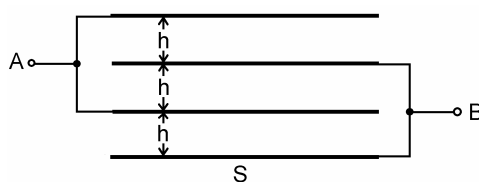


Obr. 56

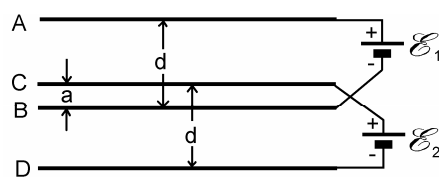


Obr. 57

58. Štyri rovnaké kovové dosky s plochou S sú uložené planparalelne vo vzájomnej vzdialenosti h , ktorá je malá vzhľadom na rozmery dosiek. Dosky sú vodivo prepojené podľa obr. 58. Nájdite kapacitu sústavy medzi svorkami A a B.



Obr. 58



Obr. 59

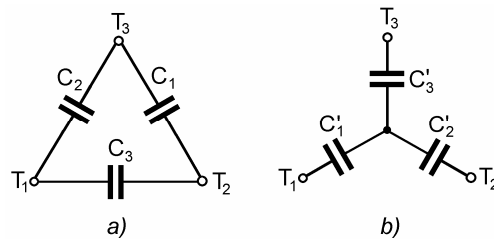
59. Dve dvojice planparalelných vodivých dosiek AB a CD, každá dvojica vo vzdialenosti d , sú zasunuté medzi seba a pripojené na zdroje pevných napätí \mathcal{E}_1 a \mathcal{E}_2 , podľa obr. 59. Nájdite napätie medzi doskami B a C a jeho polaritu. Elektrické pole medzi doskami je homogénne, okrajové efekty možno zanedbať.

60. Tri kondenzátory C_1, C_2 a C_3 zapojené do trojuholníka podľa obr. 60a. Nájdite kapacity kondenzátorov C_1', C_2' a C_3' zapojených do hviezdy podľa obr. 60b tak, aby výsledné kapacity medzi uzlami T_1, T_2 a T_3 boli v oboch prípadoch rovnaké.

61. Vypočítajte elektrostatickú energiu náboja Q rovnomerne rozloženého v objeme gule s polomerom R .

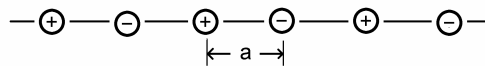
62. Jadrá ťažkých atómov majú náboj rozložený približne rovnomerne v guľovom objeme s polomerom a (a je polomer jadra) a s objemovou hustotou náboja $\rho = 1,33 \cdot 10^{25} \text{ C/m}^3$. Čomu sa rovná zmena energie jadra uránu s celkovým nábojom $92e$ (e – náboj protónu), ak sa pôvodné

jadro rozpadne na dve jadrá s rovnakými polomerami a s rovnakými nábojmi? Po rozpade sa jadrá vzdialia na veľmi veľkú (nekonečnú) vzdialenosť. Toto je energia, ktorá sa uvoľní z jadra U^{235} pri výbuchu atómovej bomby. Odhadnite energiu uvoľnenú na jeden kilogram štiepneho materiálu.



Obr.60

63. Vypočítajte polomer π -mezónu využívajúc informáciu, že rozdiel energií nabitého a neutrálneho π -mezónu je $\Delta mc^2 = 4,6$ MeV. Tento rozdiel energií predstavuje elektrostatickú energiu nabitého π -mezónu. Predpokladajte, že náboj π -mezónu je rozložený na jeho povrchu a jeho celková hodnota je $1,6 \cdot 10^{-19}$ C.



Obr. 64

64. Lineárna iónová molekula pozostáva z iónov $\pm e$ uložených v rovnakej vzdialenosti a podľa obr. 64. Vypočítajte energiu na jeden ión molekuly.

Elektrostatické pole v dielektriku

65. Dve rovnaké guľôčky s hmotnosťou m a polomerom R sú nabité nábojmi Q a zavesené na nitiach rovnakej dĺžky. V dôsledku odpudivej sily medzi nábojmi rozostúpia sa guľôčky tak, že nite zvierajú uhol φ . Tento systém nábojov je ponorený do dielektrickej kvapaliny s hustotou ρ a relatívnou permitivitou ϵ_r . Aká musí byť hustota kvapaliny, aby sa uhol φ medzi nitiami po ponorení guľôčok do kvapaliny nezmenil?

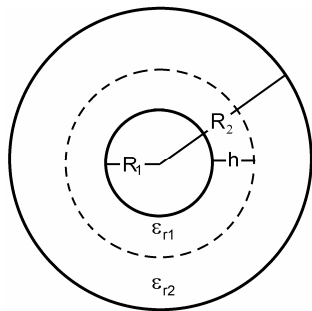
66. Guľový kondenzátor je tvorený dvoma vodivými guľovými plochami s polomerami R_1 a R_2 . Vnútornej guľa je obalená vrstvou dielektrika s hrúbkou h a permitivitou ϵ_{r1} (obr. 66). Zvyšok priestoru je vyplnený dielektrikom s permitivitou ϵ_{r2} . Vypočítajte kapacitu kondenzátora.

67. Doskový kondenzátor s plochou dosiek S a ich vzdialenosťou d je vyplnený dvoma vrstvami dielektrík hrúbkami h a $d - h$ a s permitivitami ϵ_{r1} a ϵ_{r2} (obr. 67). Vypočítajte kapacitu kondenzátora.

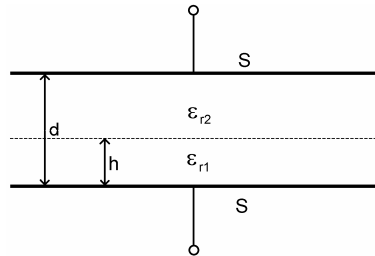
68. Doskový kondenzátor je zaplnený dielektrikom, ktorého permitivita sa mení podľa vzťahu

$$\epsilon(x) = \frac{\epsilon_0(x+a)}{a}$$

kde a je vzdialenosť dosiek a x je os kolmá na rovinu dosiek. Plocha každej dosky je S . Vypočítajte kapacitu kondenzátora a rozdelenie viazaného plošného a priestorového náboja v dielektriku, ak je kondenzátor udržiavaný na napätí U .



Obr. 66

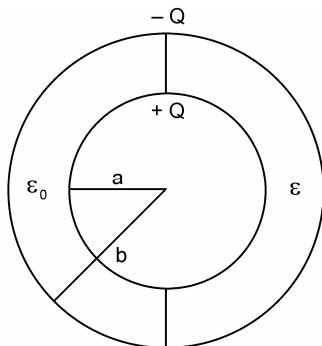


Obr. 67

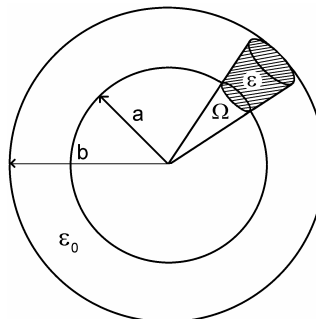
69. Na dvoch koncentrických guľových plochách s polormi a a b sú rozložené náboje $\pm Q$ podľa obr. 69. Priestor v guľovej vrstve medzi elektródami kondenzátora je do polovice vyplnený dielektrikom s permitivitou ϵ , v druhej polovici je vákuum.

- Nájdite priebeh vektora elektrickej indukcie v kondenzátore.
- Vypočítajte rozloženie intenzity elektrického poľa v kondenzátore.
- Nájdite plošné rozloženie nábojov na elektródach kondenzátora.
- Vypočítajte hustotu viazaných nábojov na povrchových plochách dielektrika a v jeho objeme.
- Vypočítajte kapacitu takého kondenzátora.

70. Guľový kondenzátor na obr. 70 je čiastočne vyplnený dielektrikom s permitivitou ϵ . Dielektrikum vymedzuje priestorový uhol Ω s vrcholom v strede guľových plôch kondenzátora. Vypočítajte kapacitu kondenzátora.



Obr. 69



Obr. 70

71. Guľový kondenzátor s polormi guľových elektród a a b ($a > b$) je vyplnený dielektrikom, ktorého permitivita sa s polomerom r mení podľa vzťahu

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \frac{a^2}{r^2}$$

Vypočítajte kapacitu kondenzátora.

72. Vodivá guľa s polomerom R , s celkovým nábojom Q je obalená guľovou vrstvou dielektrika s hrúbkou h a permitivitou ε_r (obr. 72). Vypočítajte:

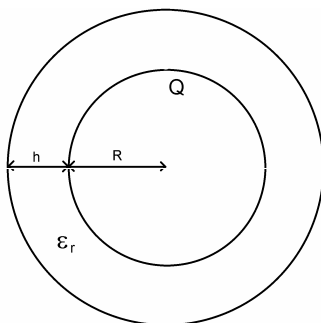
- hustotu plošného viazaného náboja na vonkajšej a vnútornej ploche dielektrika,
- hustotu viazaného priestorového náboja v dielektriku,
- celkový viazaný náboj na vonkajšej a vnútornej ploche dielektrika,
- vektory \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{P} ako funkcie vzdialenosti r od stredu symetrie.

73. Dielektrická guľa s polomerom R je homogénne polarizovaná v celom objeme (vektor polarizácie v celom objeme je konštantný). Vypočítajte potenciál v okolí gule a v jej vnútri. Nakreslite priebeh siločiar vo vnútri gule a v jej okolí.

74. Dielektrická guľa s polomerom R a permitivitou ε_r je umiestnená v homogénnom elektrickom poli intenzity E_0 . Vypočítajte intenzitu elektrického poľa, vektor polarizácie a potenciál vo vnútri gule a v jej okolí.

75. Vodivá uzemnená guľa s polomerom R je vložená do homogénneho elektrického poľa intenzity E_0 . Vypočítajte potenciál v okolí gule a v jej vnútri.

Poznámka: Riešte ako limitný prípad predchádzajúcej úlohy.



Obr. 72

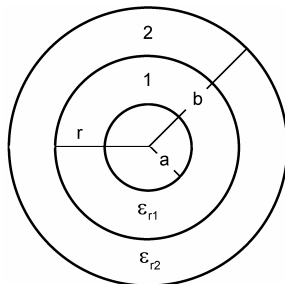
76. Bodový náboj Q je umiestnený na rovinnom rozhraní dvoch dielektrík s permitivitami ε_1 a ε_2 , vyplňujúcich celý priestor. Odvodte výrazy pre vektor intenzity elektrického poľa, vektor elektrickej indukcie a potenciál ako funkcie vzdialenosti od náboja.

77. Doskový kondenzátor s dielektrikom je nabitý na istý potenciálový rozdiel U , pričom jeho energia je $3 \cdot 10^{-5}$ J. Na vybratie dielektrika z kondenzátora treba vynaložiť prácu $5 \cdot 10^{-5}$ J. Aká je relatívna permitivita dielektrika?

78. Doskový kondenzátor s plochou dosiek S a ich vzdialenosťou d je vyplnený pevným dielektrikom s relatívnou permitivitou ε_r a nabitý na potenciálový rozdiel U . Vypočítajte prácu, ktorú treba vynaložiť na vybratie dielektrika z kondenzátora.

79. Priestor medzi cylindrickými vodičmi koaxiálneho kábla je vyplnený dvoma koaxiálnymi vrstvami dielektrík 1 a 2 s permitivitami $\varepsilon_{r1} = 6$ a $\varepsilon_{r2} = 3$. Dielektrická pevnosť dielektrika 1 je

$E_{max1} = 6000$ kV/m a dielektrika 2 je $E_{max2} = 4000$ kV/m. Polomer vnútorného vodiča je $a = 1$ cm a vonkajšieho $b = 5$ cm (obr. 79).



Obr. 79

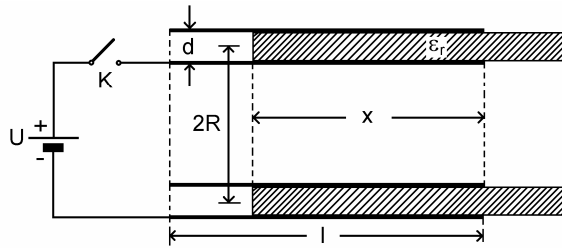
- Ako treba voliť polomer rozhrania dielektrík, aby pri intenzite elektrického poľa na povrchu vnútorného vodiča E_{max1} nepresiahla intenzita elektrického poľa v dielektriku 2 hodnotu E_{max2} ?
- Aké je maximálne dovolené napätie na kábli?
- Aká je kapacita kábla na meter dĺžky?
- Aká maximálna energia môže byť nazhromaždená v jednom metri kábla?

80. Horná hranica prípustného napätia na kondenzátore závisí od dielektrickej pevnosti jeho dielektrika. Dielektrická pevnosť materiálu je daná maximálnou prípustnou hodnotou intenzity elektrického poľa v materiále. Nad touto hranicou nastáva preraz kondenzátora. Dielektrická pevnosť kvalitných dielektrík predstavuje hodnoty okolo 10^7 V/m. Vypočítajte maximálnu elektrickú energiu, ktorú možno „uskladniť“ v jednom kilograme kondenzátora naplneného kvalitným dielektrikom s permitivitou 2,3 a mernou hustotou 10^3 kg/m³. Hmotnosť elektród možno zanedbať. Porovnajtie výsledok s „mernou energiou“ (J/kg) olovených a Ni-Cd akumulátorov. Parametre autoakumulátorov udávané výrobcami podľa časopisu Svět motorů 21/75 sú:

| | výkon/kg | energia/kg |
|------------|----------------|---------------|
| Pb aku. | 36 – 160 W/kg | 10 – 40 Wh/kg |
| Ni-Cd aku. | 100 – 200 W/kg | 30 – 50 Wh/kg |

- Akou silou f sa navzájom priťahujú dosky rovinného kondenzátora, ak medzi doskami je konštantné napätie U a dosky sú vo vzdialenosti a od seba?
 - Aká bude sila f , ak sa nabitý kondenzátor odpojí od zdroja, a potom sa naplní tekutým dielektrikom s relatívnou permitivitou ϵ_r ?
 - Aká bude sila f , ak sa nabitý kondenzátor odpojí od zdroja napätia, a potom sa naplní tuhým dielektrikom s permitivitou ϵ , a s hrúbkou trošku menšou ako je vzdialenosť dosiek a , takže dielektrikum sa dosiek nedotýka?
 - Aká bude sila f , ak sa najprv kondenzátor zaleje tekutým dielektrikom permitivity ϵ_r , a potom sa nabije na potenciálový rozdiel U ?
 - Aká bude sila f , ak sa najprv kondenzátor naplní tuhým dielektrikom ako v prípade c), a potom sa nabije na potenciálový rozdiel U ?

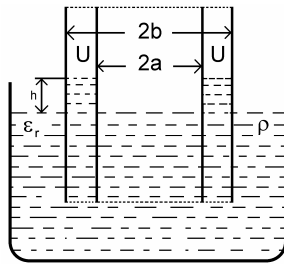
82. V cylindrickom kondenzátore dĺžky l so stredným polomerom elektród R a ich vzdialenosťou d ($d \ll R$) podľa obr. 82 sa môže voľne pohybovať dielektrická trubica permitivity ϵ , s hrúbkou d , takže pri úplnom zasunutí vyplňuje celý aktívny objem kondenzátora.



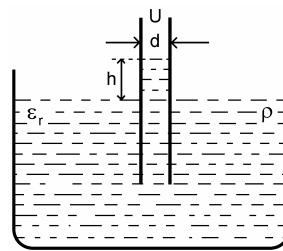
Obr. 82

- Vypočítajte kapacitu kondenzátora bez dielektrika a s dielektrikom.
- Kondenzátor bez dielektrika je pripojený na zdroj napätia U . Aká je jeho energia?
- Dielektrikum sa začne zasúvať do kondenzátora pri konštantnom napätí zdroja. Aká sila pôsobí na dielektrikum? Aká práca sa vykoná pri úplnom zasunutí dielektrika?
- Dielektrikum je úplne zasunuté pri napätí U . Aká je energia kondenzátora?
- Pri zasunutom dielektriku sa zdroj napätia od kondenzátora odpojí a dielektrikum začneme vyťahovať. Aká sila naň pôsobí? Akú prácu treba vykonať na úplné vytiahnutie dielektrika z kondenzátora?
- Aká je energia kondenzátora po vytiahnutí dielektrika?

83. Valcový kondenzátor s polermi elektród a a b ($a < b$) a vzduchovým dielektrikom je ponorený do dielektrickej kvapaliny s hustotou ρ a relatívnou permitivitou ϵ_r podľa obr. 83. Vypočítajte do akej výšky vystúpi kvapalina medzi elektródy kondenzátora, ak je tento udržiavaný na konštantnom napätí U .



Obr. 83



Obr. 84

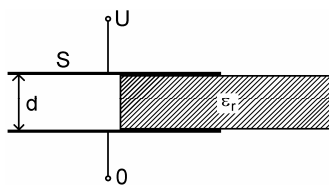
84. Doskový kondenzátor je ponorený do dielektrickej kvapaliny s hustotou ρ a permitivitou ϵ_r podľa obr. 84. Kondenzátor je udržiavaný na napätí U . Vypočítajte výšku, do ktorej vystúpi kvapalina medzi dosky kondenzátora.

85. Vypočítajte silu, ktorou je vťahované dielektrikum s permitivitou ϵ_r medzi dosky kondenzátora na obr. 85. Na kondenzátore je konštantné napätie U .

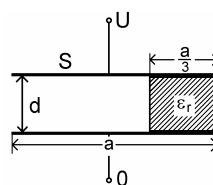
86. Doskový kondenzátor pozostáva z dvoch štvorcových elektród so stranami $a = 15$ cm vzdialenými $d = 3$ mm. Medzi elektródy kondenzátora je zasunutá sklenená doska s relatívnou permitivitou $\epsilon_r = 6$ tak, že vyplňuje tretinu objemu kondenzátora. Vo zvyšku objemu je vákuum, alebo vzduch (obr. 86). Na kondenzátor je pripojené napätie $U = 600$ V.

- Vypočítajte kapacitu kondenzátora.
- Stanovte celkový náboj na kondenzátore a jeho plošné rozloženie.

c) Vypočítajte energiu kondenzátora.



Obr. 85



Obr. 86

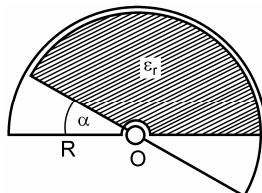
87. Nekonečne dlhý dielektrický valec polomeru R je homogénne polarizovaný (\mathbf{P} je konštantný vektor polarizácie) v smere osi z kolmej na os valca. Vypočítajte potenciál a intenzitu elektrického poľa vo vnútri valca a v jeho okolí.

88. Nekonečne dlhý dielektrický valec s polomerom R a relatívnou permitivitou ϵ_r je vložený do homogénneho elektrického poľa intenzity \mathbf{E} tak, že os valca je kolmá na smer poľa \mathbf{E} . Vypočítajte potenciál vo vnútri a v okolí valca.

89. Nekonečne dlhý kovový valec polomeru R je vložený do homogénneho elektrického poľa intenzity \mathbf{E} tak, že os valca je kolmá na smer poľa \mathbf{E} . Vypočítajte potenciál vo vnútri a v okolí valca. (Riešte ako limitný prípad predchádzajúceho príkladu.)

90. Vypočítajte kapacitu guľového kondenzátora, ktorého polomer vnútornej elektródy je R_1 , polomer vonkajšej elektródy R_2 a aktívny objem kondenzátora je vyplnený dielektrikom, ktorého permitivita je daná výrazom $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos^2 \vartheta$, kde ϑ je polárny uhol.

91. Kondenzátor pozostáva z dvoch pevných polkruhových platní polomeru R a pohyblivej platne polkruhového dielektrika s permitivitou ϵ . Dielektrická platňa sa môže otáčať okolo osi O (obr. 91). Hrúbka dielektrickej platne h sa rovná vzdialenosti elektród kondenzátora. Na kondenzátore je napätie U . Nájdite moment sily vzhľadom na os O , ktorý pôsobí na dielektrikum v polohe podľa obrázku.



Obr. 91

92. Voľný bodový náboj q sa nachádza v dielektrickom prostredí, ktorého permitivita je daná výrazom $\epsilon = \alpha/r$ (α je konštanta, r je vzdialenosť od náboja). Nájdite vektory \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{P} a objemový viazaný náboj v dielektriku ako funkciu r .

93. Nekonečne veľká vrstva homogénneho dielektrika s permitivitou ϵ je nabitá voľným objemovým nábojom ρ s konštantnou hustotou. Hrúbka vrstvy je a . Nájdite:

a) intenzitu elektrického poľa a potenciál ako funkciu vzdialenosti x od stredy vrstvy (potenciál v strede vrstvy nech sa rovná nule); znázornite intenzitu elektrického poľa a potenciál ako funkcie vzdialenosti stredy vrstvy;

b) plošnú a objemovú hustotu viazaných nábojov.

94. Homogénne dielektrikum má tvar guľovej vrstvy s vnútorným polomerom a a vonkajším b . Nájdiť a graficky znázorniť závislosť intenzity elektrického poľa E a potenciálu V ako funkcie vzdialenosti r od stredu systému, ak náboj Q je rozložený rovnomerne

- na vnútornej ploche dielektrika,
- v objeme dielektrika.

95. Voľný náboj Q je rozložený rovnomerne v objeme gule polomeru R z homogénneho dielektrika permitivity ϵ_r . Nájdiť a graficky znázorniť intenzitu elektrického poľa E a potenciál V ako funkcie vzdialenosti r od stredu gule. Nájdiť plošnú a objemovú hustotu viazaných nábojov.

96. V kolmej vzdialenosti d od rovinného rozhrania dvoch dielektrík s permitivitami ϵ_{r1} a ϵ_{r2} sa nachádza bodový náboj Q . Nájdiť plošnú hustotu viazaného náboja na rozhraní ako funkciu vzdialenosti r od náboja a celkový viazaný náboj.

Elektrický prúd

97. Medeným valcovým vodičom s priemerom 1 mm tečie prúd 1 A.

- Aká je hustota prúdu a driftová rýchlosť vodivostných elektrónov, ak ich koncentrácia v medi je $8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$
- Aká je intenzita elektrického poľa v medi, ak rezistivita medi je $1,72 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$?
- Aký náboj prejde prierezom vodiča za 20 s? Koľko je to elektrónov?
- Aké je napätie medzi dvoma prierezmi vodiča vzdialenými 100 m od seba?

98. V synchrotróne pre urýchľovanie elektrónov na energiu 6 GeV sa asi 10^{11} elektrónov pohybuje prakticky rýchlosťou svetla po 240 metrovej kruhovej dráhe. Vypočítajte elektrický prúd v synchrotróne.

99. Sklenená trubica s prierezom 0,5 cm je naplnená roztokom NaCl a tečie ňou elektrický prúd. Pod vplyvom elektrického poľa sa pohybujú ióny Na^+ rýchlosťou 0,045 cm/s a ióny Cl^- rýchlosťou 0,0677 cm/s.

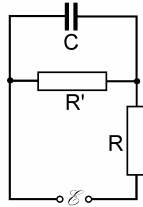
- Aký elektrický prúd tečie trubicou, ak v každom cm^3 je 10^{20} iónov každého druhu?
- Koľko sodíkových iónov prejde na katódu za jednu minútu? Atómová hmotnosť sodíka je 22,99. Koľko sodíka (vo váhovom množstve) prejde na katódu?

100. Doskový kondenzátor s plochou dosiek $S = 10 \text{ cm}^2$ a ich vzdialenosťou $d = 2 \text{ mm}$ je vyplnený dielektrikom, ktorého permitivita lineárne narastá z hodnoty $\epsilon_{r1} = 3$ pri jednej doske, na hodnotu $\epsilon_{r2} = 4$ pri druhej doske. Podobne vodivosť dielektrika narastá z hodnoty $\sigma_1 = 10^{-7} \text{ S/m}$ na hodnotu $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ S/m}$ v tom istom smere. Vypočítajte celkový voľný náboj v objeme kondenzátora, ak ním tečie prúd $I = 10^{-7} \text{ A}$ v smere nárastu permitivity. Zmení sa náboj, ak ten istý prúd tečie v opačnom smere? Vypočítajte tepelné straty (výkon) v kondenzátore.

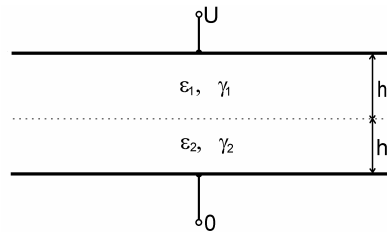
101. Rovinné rozhranie dvoch vodivých prostredí, z ktorých jedno má konduktivitu γ a druhé nekonečnú vodivosť, tečie prúd s prúdovou hustotou $\mathbf{J} = J\mathbf{n}_0$, kde \mathbf{n}_0 je jednotkový vektor normálny k rozhraniu a smeruje do vodiča s konduktivitou γ . Vypočítajte plošný náboj na rozhraní.

102. Vzduch v priestore doskového kondenzátora objemu $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ je ionizovaný röntgenovými lúčmi tak, že v 1 cm^3 za 1 s vzniká 10^9 iónov a rovnaký počet voľných elektrónov. Dosky kondenzátora sú pripojené na zdroj EMN $\mathcal{E} = 1300 \text{ V}$ cez odpor $R = 10^{10} \Omega$ a ku

kondenzátoru je paralelne pripojený odpor $R' = 10^{10} \Omega$ (obr. 102). Aký prúd tečie cez odpor R ? Predpokladajte, že ióny a elektróny pri pohybe medzi doskami nestačia rekombinovať a že náboj každého iónu je v absolútnej hodnote rovnaký ako náboj elektrónu.



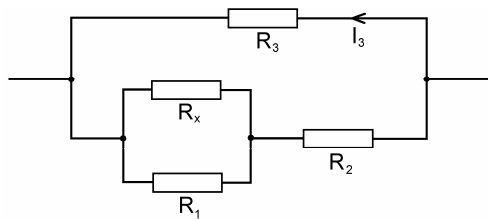
Obr. 102



Obr. 103

103. Priestor medzi rovinnými doskami kondenzátora je vyplnený čiastočne vodivými materiálmi s konduktivitami γ_1 a γ_2 a permitivitami ϵ_1 a ϵ_2 . Materiály tvoria dve vrstvy s hrúbkami h_1 a h_2 a vyplňujú celý objem kondenzátora (obr. 103). Kondenzátor je udržiavaný na konštantnom napätí U . Vypočítajte intenzitu elektrického poľa, elektrickú indukciu a prúdovú hustotu v oboch vrstvách materiálov. Vypočítajte hustoty voľných a viazaných nábojov na všetkých rozhraniach a vo vnútri materiálov. Určite smery vektorov \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{J} . Okrajové efekty možno zanedbať.

104. Použitím Ohmovho zákona, Gaussovho zákona a rovnice kontinuity dokážte, že ak v izolovanom vodiči existuje v čase $t = 0$ nenulová objemová hustota nábojov ρ_0 , potom táto hustota v čase exponenciálne zaniká (rozptylom náboja na hraničné plochy vodiča) s charakteristickým (relaxačným) časom, ktorý závisí od permitivity vodiča a jeho konduktivity.



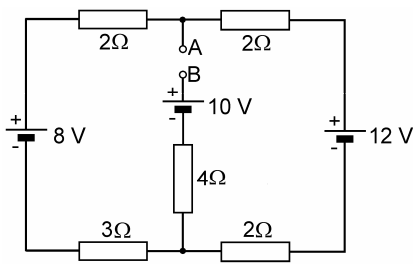
Obr. 105

105. Na obr. 105 je časť elektrickej schémy, v ktorej $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $I_3 = 10 \text{ A}$ a napätie na odpore R_2 je 45 V . Vypočítajte odpor R_x .

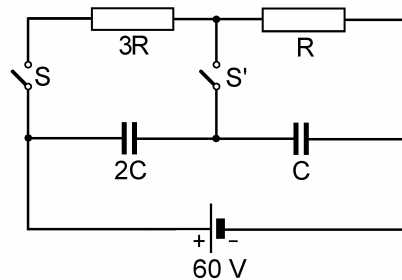
106. V elektrickom zapojení na obr. 106 nájdite hodnotu napätia medzi svorkami A a B . Aký prúd tečie 12-voltovým zdrojom, ak svorky A a B sú skratované?

107. V zapojení podľa obr. 107 treba vypočítať napätia na kondenzátoroch v ustálenom stave v nasledujúcich prípadoch:

- spínače S a S' sú zopnuté,
- spínač S je zopnutý a spínač S' rozopnutý,
- spínač S je rozopnutý a spínač S' zopnutý.

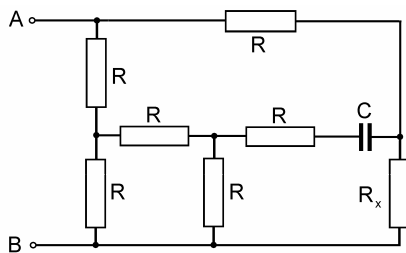


Obr. 106

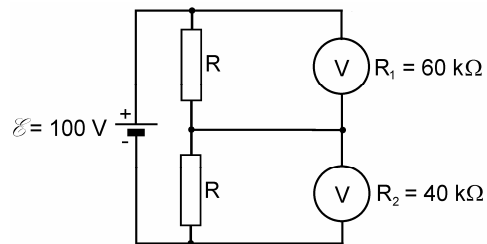


Obr. 107

108. Ak sa ku svorkám A-B na obr. 108 pripojí zdroj EMN, náboj na kondenzátore C sa rovná nule. Aká je hodnota odporu R_x ?



Obr. 108



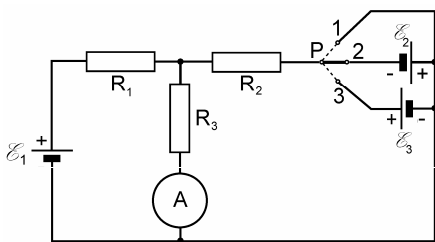
Obr. 109

109. Aké hodnoty napätia ukazujú voltmetre v zapojení podľa obr. 109? R_1 a R_2 sú vnútorné odpory voltmetrov, $R = 50 \text{ k}\Omega$.

110. Telegrafný kábel dlhý 50 km spájajúci telegrafné stanice A a B je na istom mieste porušený zvodom (v danom mieste sa zníži priečny elektrický odpor). Treba určiť vzdialenosť miesta poruchy od stanice A. Za tým účelom v stanici A bol pripojený ku káblu zdroj napätia 200 V so zanedbateľným vnútorným odporom a v stanici B bolo na kábli namerané 40 V. Potom v stanici B bol ku káblu pripojený 300 V zdroj a v stanici A namerali tiež 40 V. Z týchto údajov vypočítajte vzdialenosť miesta poruchy od stanice A. Materiál kábla má nenulový, konštantný odpor na jednotku dĺžky.

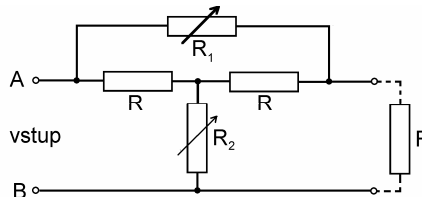
111. Akumulátorová batéria s elektromotorickým napätím \mathcal{E}_0 a s malým vnútorným odporom R_i má dodávať počas dlhej doby konštantný prúd do spotrebiča s odporom R_z . Aby sa batéria šetrila, pripojí sa paralelne so spotrebičom cez odpor R ku generátoru jednosmerného napätia \mathcal{E} . Avšak elektromotorické napätie generátora kolíše v medziach od \mathcal{E}_1 do \mathcal{E}_2 ($\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_0$). Hodnota odporu R sa volí tak, že pri napätí generátora $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ batéria nedodáva prúd.

- Nakreslite schému opísaného zapojenia.
- Aký prúd bude odoberaný z batérie pri napätí generátora $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$?
- Aké prúdy tečú spotrebičom pri oboch krajných hodnotách napätí generátora \mathcal{E}_1 a \mathcal{E}_2 ?
- Riešte numericky pre $\mathcal{E}_0 = 6 \text{ V}$, $R_i = 0,1 \Omega$, $R_z = 10 \Omega$, $\mathcal{E}_1 = 120 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 100 \text{ V}$.



Obr. 112

112. Ak je v zapojení na obr. 112 prepínač P v polohe 1, potom ampérmetr registruje 60 mA. Po prepnutí prepínača do polohy 2 prúd ampérmetrom je 40 mA. Aký prúd tečie ampérmetrom, ak sa prepínač prepne do polohy 3? $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ V}$, $\mathcal{E}_3 = 6 \text{ V}$.



Obr. 113

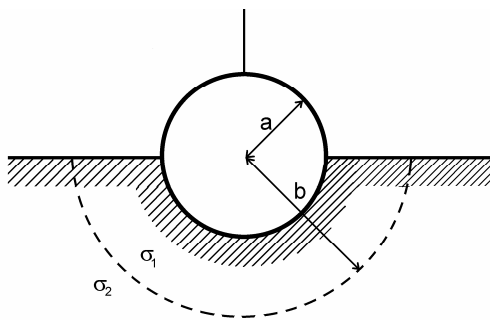
113. V meracej technike je niekedy potrebný atenuátor (zoslabovač) elektrického napätia, ktorý má konštantný vstupný a výstupný odpor nezávislý od zoslabenia. Takéto požiadavky splňuje zapojenie na obr. 113 (tzv. premostený T-článok). Predpokladajte, že výstup T-článku je zaťažený odporom R . Aký vzťah musí platiť medzi odpormi R_1 a R_2 , aby vstupný odpor bol tiež R ?

114. Elektrický stožiar vysokého napätia $U = 400 \text{ kV}$ je uzemnený vodivou guľou do polovice zakopanou v zemi. Polomer gule je $r_0 = 30 \text{ cm}$. Na vedení vznikla porucha tak, že nastal skrat medzi stožiarom a vedením. Vypočítajte pod akým napätím sa ocitne človek, ktorý urobí 80 cm krok vo vzdialenosti a) 100 m, b) 25 m od stožiara (smerom k nemu, alebo od neho). Toto napätie sa nazýva krokovým napätím. Konduktivita zeme je 10^{-2} S/m .

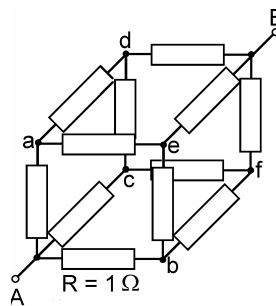
115. Guľový kondenzátor s polormi elektród R_1 a R_2 ($R_1 < R_2$) je vyplnený čiastočne vodivým dielektrikom s rezistivitou $\rho = \text{konšt.}$ Vypočítajte priečny odpor kondenzátora.

116. Uzemnenie pozostáva z vodivej gule s polomerom a , ktorá je do polovice zakopaná v zemi (obr. 116). Vrstva zeme polomeru b okolo gule má umele zvýšenú konduktivitu $\sigma_1 > \sigma_2$, kde σ_2 je konduktivita zeme. Nájďte odpor uzemnenia.

117. Kostra kocky sa skladá z rovnakých 1-ohmových odporov pozdĺž každej hrany (obr. 117). Využitím symetrie zapojenia vypočítajte odpor medzi protíahlými vrcholmi A-B.



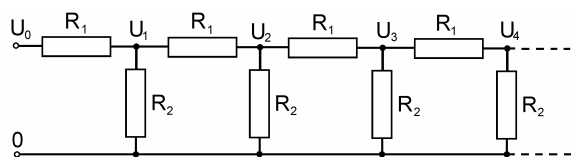
Obr. 116



Obr. 117

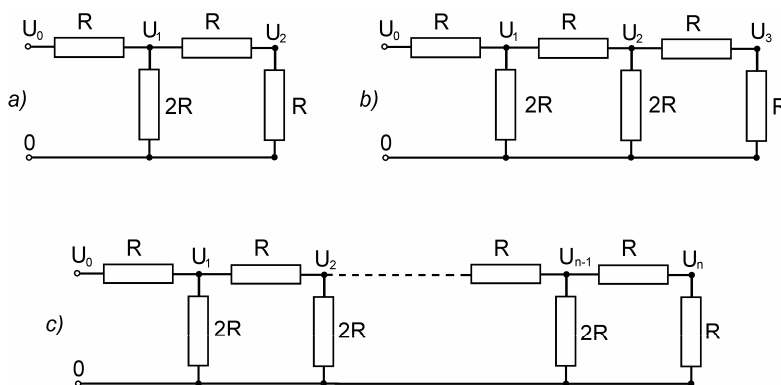
118. Vypočítajte vstupný odpor nekonečného odporového reťazca na obr. 118. Môžete napr. využiť skutočnosť, že odpor reťazca sa nezmení, ak sa k jeho vstupným svorkám pripojí jedna

dvojica R_1 - R_2 . Dokážte, že napätia pozdĺž reťazca (U_1, U_2, U_3, \dots) tvoria geometrickú postupnosť. Ako volíť pomer R_1/R_2 , aby napätia klesali s kvocientom $1/2$?



Obr. 118

119. Vypočítajte vstupné odpory zapojení podľa obr. 119a, b. Určite napätia U_1, U_2, U_3 , ak vstupné napätia v oboch zapojeniach sú U_0 . Matematickou indukciou nájdite vstupný odpor reťazca na obr. 119c a napätia U_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Porovnajtie riešenia s výsledkami úlohy 118.



Obr. 119

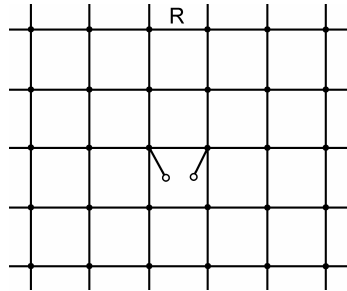
120. Podzemný kábel má konštantný odpor R na jednotku dĺžky. Izolácia kábla je nedokonalá a má priechnú vodivosť G na jednotku dĺžky. Úlohu spätného vodiča kábla hrá okolitá zem. Napíšte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje závislosť prúdu v kábli na vzdialenosti od zdroja. Nájdite súvislosť medzi prúdom v kábli a jeho napätím oproti zemi.

121. Kondenzátor s kapacitou $C = 10 \mu\text{F}$ s dielektrikom s permitivitou $\epsilon_r = 4$ a konduktivitou $\sigma = 10^{-14} \text{ S/m}$ je pripojený na zdroj napätia $U = 1000 \text{ V}$. Vypočítajte zvodový prúd kondenzátora.

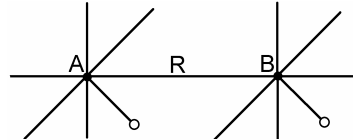
122. Dva kondenzátory s kapacitami $C_1 = 0,2 \mu\text{F}$ a $C_2 = 0,5 \mu\text{F}$ s dielektrikami, ktoré majú relatívne permitivity $\epsilon_{r1} = 2,4$, $\epsilon_{r2} = 4$ a konduktivity $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ S/m}$, $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ S/m}$, sú spojené do série a pripojené na zdroj napätia $U = 1200 \text{ V}$. Vypočítajte napätia na kondenzátoroch v ustálenom stave.

123. Dve kovové gule s polomerami a_1 a a_2 sú ponorené do vody vo veľkej vzdialenosti od seba. Ak sa na gule pripojí pomocou izolovaných káblov zdroj napätia U , potečie obvodom prúd I , ktorého veľkosť je nepriamo úmerná elektrickému odporu vodného prostredia, v ktorom sú gule ponorené. Tento odpor závisí od vodivosti vody a od rozmerov guľ. Nájdite vzťah, ktorý z nameraného odporu medzi guľami (pomeru U/I) a zo známych polomerov guľ dáva možnosť vypočítať konduktivitu vody.

124. Nekonečná štvorcová sieť je zostavená z rovnakých odporov R medzi susednými uzlami (obr. 124). Využitím symetrie zapojenia a zákona superpozície nájdite odpor siete medzi dvoma susednými uzlami.



Obr.124



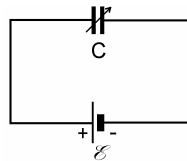
Obr. 125

125. Nekonečná kubická mriežka pozostáva z odporov R medzi susednými uzlami (obr. 125). Nájdite celkový odpor medzi susednými uzlami A-B.

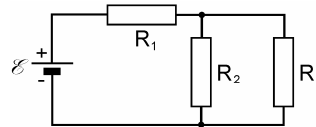
126. V priestore je daných n bodov (uzlov). Všetky uzly sú pospájané odpormi R , každý s každým. Nájdite odpor medzi dvoma uzlami.

127. Desať uzlov je prepojených odpormi $R = 40 \Omega$, každý s každým. K dvom uzlom je pripojený zdroj EMN $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ s vnútorným odporom $R_i = 2 \Omega$. Aké prúdy tečú jednotlivými odpormi?

128. Na kondenzátor premennej kapacity je pripojený zdroj EMN $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$. Aký prúd dodáva zdroj, ak sa kapacita kondenzátora mení rýchlosťou $C_t = 1000 \text{ pF/s}$?



Obr. 129



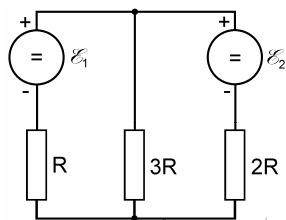
Obr. 130

129. Kapacita kondenzátora na obr. 129 sa zväčšuje tak, že nabíjací prúd kondenzátora je konštantný. Vypočítajte zmenu energie kondenzátora po čase t a energiu dodanú zdrojom. Vysvetlite prípadný rozdiel medzi energiou kondenzátora a energiou dodanej zdrojom.

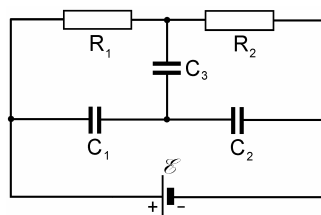
130. Aký musí byť vzájomný súvis medzi odpormi R_1, R_2, R_3 v zapojení na obr. 130, aby výkon v odpore R_3 nezávisel od malých zmien tohoto odporu?

131. Pre ohrev miestnosti sa používa elektrická pec na 220 V . V miestnosti sa rozptýľuje $8,65 \cdot 10^7 \text{ J}$ tepla za 24 hodín. Vypočítajte:

- odpor pece,
- dĺžku odporového drôtu s priemerom 1 mm a s rezistivitou $10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ potrebného na konštrukciu pece,
- výkon pece.



Obr. 133



Obr. 134

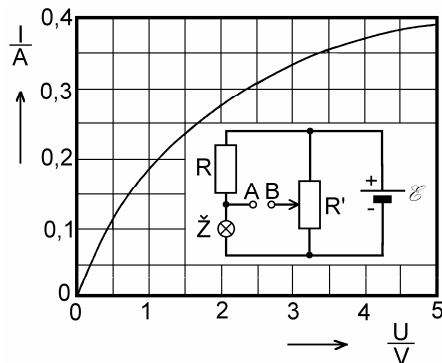
132. Koaxiálny kábel s polomerom vnútorného vodiča 4 mm a vonkajšieho vodiča 8 mm je vyplnený dielektrikom s konduktivitou 10^{-9} S/m. Kábel je dlhý 10 km. Ku káblu je na jeho jednom konci pripojené napätie $U = 600$ V a druhý koniec je nezaťažený. Vypočítajte:

- prúd dodávaný zdrojom,
- hustotu prúdu v dielektriku ako funkciu vzdialenosti od osi kábla,
- hustotu tepelného výkonu v dielektriku,
- celkové tepelné straty v dielektriku kábla vo wattoch.

133. V zapojení na obr. 133 sú \mathcal{E}_1 a \mathcal{E}_2 generátory elektromotorických napätí s nulovým vnútorným odporom. Ak pracuje generátor \mathcal{E}_1 a $\mathcal{E}_2 = 0$, potom výkon dodávaný do zapojenia je 55 W. Ak pracuje generátor \mathcal{E}_2 a $\mathcal{E}_1 = 0$, potom dodávaný výkon je 176 W. Aký výkon je dodávaný do zapojenia, ak obidva generátory pracujú súčasne?

134. V zapojení podľa obr. 134 nájdite náboje na kondenzátoroch C_1 , C_2 a C_3 . V akom vzťahu musia byť R_1 , R_2 , C_1 , C_2 , aby napätie na kondenzátore C_3 bolo nulové? Úlohu riešte pre ustálený stav.

135. Dlhý valcový vodič s polomerom a je vyhotovený z materiálu, ktorého rezistivita je daná výrazom $\rho = \alpha r^2$, kde r je vzdialenosť od osi vodiča a α je konštanta. Vodičom tečie prúd I . Vypočítajte intenzitu elektrického poľa vo vodiči a odpor R na jednotku dĺžky valca.



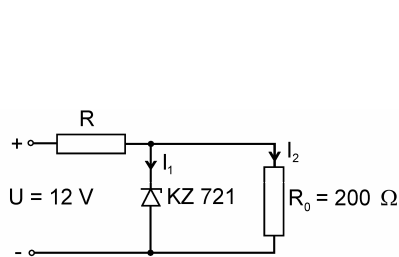
Obr. 136

136. Na obr. 136 je znázornená voltampérová charakteristika žiarovky zapojenej v obvode na obrázku. EMN zdroja $\mathcal{E} = 4$ V, odpor $R = 10 \Omega$, celkový odpor potenciometra $R' = 40 \Omega$. Nájdite

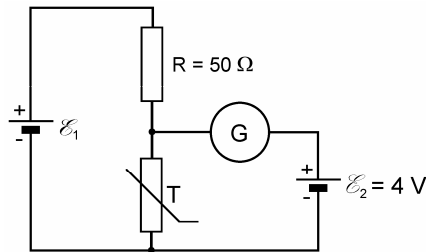
graficky prúd v žiarovke. V akej polohe musí byť bežec potenciometra, aby sa napätie medzi svorkami *A* a *B* rovnalo nule?

137. V zemskej atmosfére dochádza za každú sekundu v priemere k asi sto elektrickým výbojom (bleskom). Každý blesk trvá v priemere 10^{-3} s. Blesk nastáva pri potenciálovom rozdieli okolo 10^9 V a zodpovedajúci prúd blesku je 20 kA. Odhadnite celkovú ročnú energiu bleskov na zemi a porovnajte ju celkovou ročnou produkciou elektrickej energie na svete, ktorá je asi $9,5 \cdot 10^{19}$ J.

138. Nelineárny odporový prvok má voltampérovú charakteristiku danú výrazom $I = kU^2$, kde $k = 0,02$ A/V². Tento prvok je spojený do série s odporom $R = 100 \Omega$ a dvojica je pripojená na zdroj EMN $\mathcal{E} = 12$ V so zanedbateľným vnútorným odporom. Vypočítajte výkon v odpore a v nelineárnom prvku.



Obr. 139



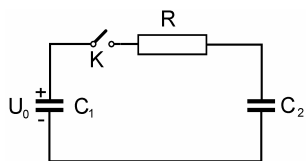
Obr. 140

139. Zenerova dióda KZ 721 má byť použitá ako stabilizátor napätia na odpore R_0 v obvode podľa obr. 139. V katalógu súčiastok je uvedené, že maximálny prípustný výkon na dióde je $P_z = 280$ mW a jej stabilizačné napätie $U_z = 7,8$ V. Vypočítajte minimálnu hodnotu odporu R , pre ktorú prípustný výkon na dióde ešte nebude prekročený. Predpokladajte, že U_z je konštantné pre celý pracovný interval diódy.

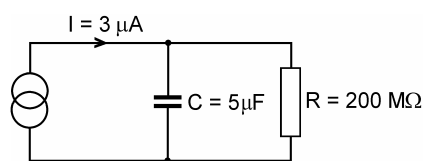
140. V zapojení podľa obr. 140 je nelineárny element, ktorého voltampérová charakteristika je daná vzťahom $I = 0,02 U^2$ [A, V]. Galvanometrom G netečie prúd. Vypočítajte výkon dodávaný zdrojom \mathcal{E}_1 .

141. Vypočítajte časový priebeh prúdu v obvode na obr. 141 a priebeh napätí na kondenzátoroch C_1 a C_2 po zopnutí obvodu. Začiatočné napätie na kondenzátore C_1 je U_0 a kondenzátor C_2 je pred zopnutím nenabitý.

142. RC dvojici na obr. 142 je dodávaný konštantný prúd $3 \mu\text{A}$. Za aký čas sa kondenzátor nabije na 500 V?



Obr. 141



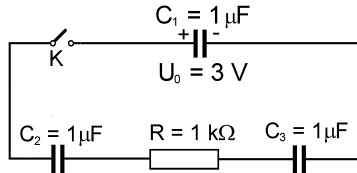
Obr. 142

143. Dokážte, že energia kondenzátora nabitého na potenciálny rozdiel U sa pri vybití kondenzátora cez odpor R premení na teplo v tomto odpore.

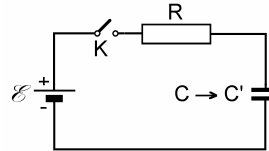
144. Doskový kondenzátor s plochou dosiek S a ich vzdialenosťou d má čiastočne vodivé dielektrikum s permitivitou ε a konduktivitou σ . Ak je takýto kondenzátor nabitý, potom sa samovoľne vybíja. Vypočítajte časovú konštantu kondenzátora.

145. V obvode na obr. 145 je kondenzátor C_1 nabitý na potenciálový rozdiel 3 V a C_2, C_3 sú nenabité. V čase $t = 0$ sa kľúč zopne.

- Nájdite časovú závislosť prúdu v obvode.
- Aké budú napätia na jednotlivých kondenzátoroch po ustálení?
- Aký celkový náboj prejde odporom R ?



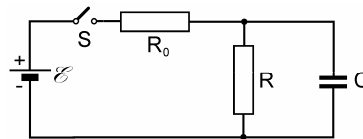
Obr. 145



Obr. 146

146. V obvode na obr. 146 má kondenzátor začiatočnú hodnotu kapacity $C = 1\,000$ pF, po zopnutí spínača a po dostatočne dlhom čase sa elektrické pomery v obvode ustália. Za časový interval $\Delta t = 10^{-2}$ s sa kapacita zmení na hodnotu C' , ktorá zodpovedá polovičnej vzdialenosti dosiek pôvodného kondenzátora.

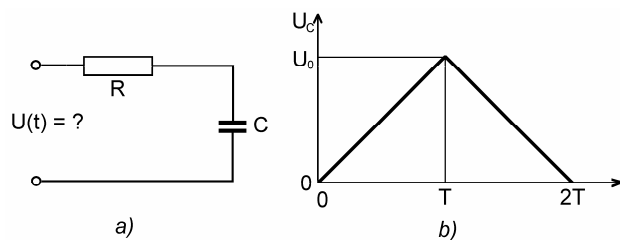
- Aká je hodnota C' ?
- Aká musí byť hodnota odporu R , aby v časovom intervale Δt náboj na kondenzátore zostal prakticky konštantný?
- Aká energia sa vyžiarí na odpore R vo forme tepla od okamihu zmeny kapacity na hodnotu C' až po čas, ktorý zodpovedá novému ustálenému stavu?



Obr. 147

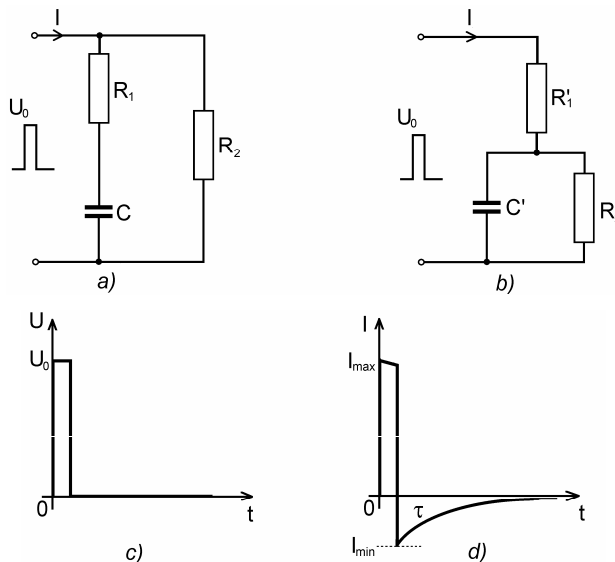
147. V zapojení podľa obr. 147 vypočítajte prúdy jednotlivými vetvami a napätia na jednotlivých prvkoch ako funkcie času po zopnutí spínača S .

148. Na kondenzátore C v obvode podľa obr. 148a má byť časový priebeh napätia podľa obr. 148b. Aký musí byť časový priebeh vstupného napätia? Znázornite graficky.



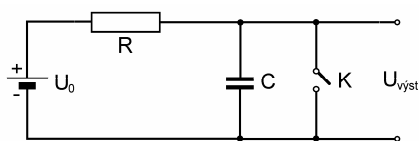
Obr. 148

149. Na obr. 149a a 149b sú znázornené dva obvody pozostávajúce z odporov a kondenzátorov. Pri vhodne zvolených hodnotách odporov a kondenzátorov sú obidva obvody vzhľadom na ich vstupné svorky elektricky identické. Súvis medzi prvkami obvodov pre identické vlastnosti možno získať z porovnania ich impedancií, avšak takýto spôsob je ťažkopádny. Jednoduchšie je porovnať odozvy obvodov na veľmi krátky napät'ový impulz (obr. 149c) z generátora s nulovým vnútorným odporom. Tvar prúdovej odozvy v obidvoch obvodoch je na obr. 149d. Obvody budú identické, ak v obidvoch prípadoch I_{max} a I_{min} , ako aj časové konštanty τ sú rovnaké. Na základe analýzy odozvy na napät'ový impulz nájdite vzťahy medzi prvkami obvodov pre ich elektrickú identitu.



Obr. 149

150. Jednoduchý relaxačný generátor periodických časových priebehov je na obr. 150. Vo funkcii kľúča K môže slúžiť napr. neónová výbojka so zápalným napätím U_1 a zhášacím napätím U_2 . Po pripojení zdroja U_0 k obvodu sa kondenzátor začne nabíjať a v okamihu, keď napätie na kondenzátore dosiahne hodnotu U_2 , kľúč sa zopne a kondenzátor sa rýchle vybije na hodnotu napätia U_1 , pri ktorom sa kľúč rozopne. Kondenzátor sa z hodnoty napätia U_1 začne znovu nabíjať až na hodnotu U_2 a celý proces sa opakuje. Napätie zdroja U_0 musí byť vždy vyššie ako U_2 . Vypočítajte periódu kmitov takého generátora, pričom čas, za ktorý sa kondenzátor vybíja cez kľúč, považujte za nulový. Časové priebehy kmitov znázorníte graficky.



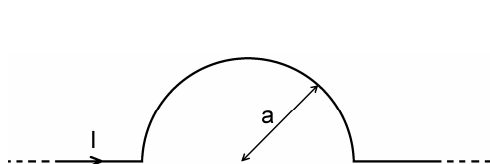
Obr. 150

151. Biologickú bunku možno v istom zmysle považovať za kondenzátor tvorený bunečnou membránou (dielektrikom kondenzátora), ktoré oddeľuje dve vodivé kvapaliny (elektrody kondenzátora).

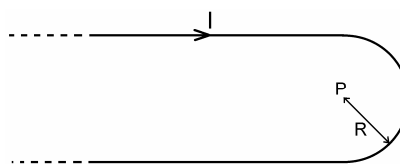
Elektrické vlastnosti nervových buniek sú zvlášť dôležité, pretože šírenie nervového impulzu je doprevádzané rýchlymi zmenami rozdielu potenciálov medzi vnútrom bunky a prostredím, ktoré ju obklopuje. Je známe, že kapacita bunečnej membrány je $C' = 10^{-2} \text{ F.m}^{-2}$ a jej relatívna permitivita je $\epsilon_r = 3$. Aká je hrúbka bunečnej membrány? Iné elektrické merania ukazujú, že bunečná membrána nie je dokonalý izolátor. Pričná vodivosť bunečnej membrány je $G' = 1/R' = 10 \text{ S.m}^{-2}$. Bunečná membrána je teda kondenzátorom so zvodom, čo je ekvivalentné kondenzátoru s ideálnym dielektrikom, ku ktorému je pripojený paralelne odpor. Aká je časová konštanta takeého "bunečného kondenzátora" (ktorá je mimochodom mierou rýchlosti reakcie nervového systému na nervový impulz)? Závaži táto časová konštanta od rozmerov kondenzátora? Aká je rezistivita bunečnej membrány?

Magnetické pole prúdov. Lorenzové transformácie elektromagnetických polí

152. Nekonečný priamy vodič vytvára v istom mieste polkružnicu s polomerom a podľa obr. 152. Vodičom tečie prúd I . Vypočítajte magnetickú indukciu v strede polkružnice.



Obr. 152



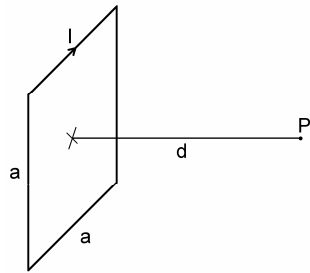
Obr. 153

153. Nekonečný vodič je ohnutý do tvaru U podľa obr. 153. Polomer ohybu je R . Vodičom tečie prúd I . Vypočítajte magnetickú indukciu v bode P (v strede ohybovej kružnice) a určite jej smer.

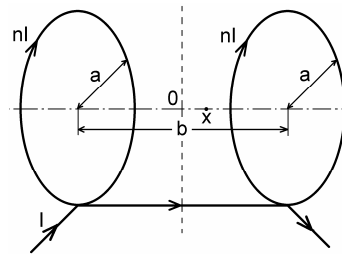
154. Vypočítajte magnetickú indukciu budenú prúdom I v štvorcovej slučke so stranou a , v bode P na osi slučky vo vzdialenosti d od jej stredu (obr. 154).

155. V laboratórnej praxi je často potrebné vysokohomogénne magnetické pole v relatívne veľkom objeme. Takéto pole možno vytvoriť vo veľmi dlhom solenoide, avšak veľmi dlhý solenoid je nepraktický a okrem toho priestor, kde je maximálna homogenita poľa (stred solenoidu) je zle prístupný. Vysokohomogénne pole možno vytvoriť aj sústavou dvoch tenkých axiálnych cievok (paralelných kruhových prúdov), ktoré sa nazývajú Helmholtzovými cievkami (obr. 155). Každá z cievok má n závitov. Preskúmajte magnetické pole v polovičnej vzdialenosti cievok na ich osi (bod O). Za tým účelom:

- napište výraz pre magnetickú indukciu na osi cievok vo vzdialenosti x od bodu O ,
- predpokladajte, že $x \ll a, b$ (a – polomer cievok, b vzdialenosť cievok). Rozviňte výraz pre magnetickú indukciu do MacLaurinovho radu, v ktorom zanedbajte členy s mocninami vyššími ako x^2 ,
- zistite ako treba voliť vzájomný súvis medzi a a b , aby v danom priblížení pole nezáviselo od x ,
- napište výraz pre magnetickú indukciu v bode O (a v jeho blízkom okolí).



Obr. 154



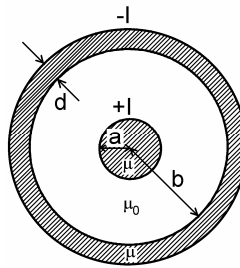
Obr. 155

156. Tenký dielektrický disk (Rowlandov disk¹) s polomerom R , nabitý plošným nábojom σ sa otáča okolo svojej rotačnej osi uhlovou rýchlosťou ω . Vypočítajte magnetickú indukciu na osi rotácie vo vzdialenosti z od stredu disku.

157. Vypočítajte magnetickú indukciu B v okolí dvoch priamych, paralelných, nekonečne dlhých vodičov vo vzájomnej vzdialenosti $2a$, ktorými tečie prúd I :

- v oboch vodičoch v súhlasnom smere,
- v oboch vodičoch v opačnom smere.

158. Koaxiálny kábel pozostáva z vnútorného valcového vodiča s polomerom a a hrubého plášťa s vnútorným polomerom b a s hrúbkou d (obr. 158). Materiál vodičov má permeabilitu $\mu = \mu_r \mu_0$, dutina kábla má permeabilitu $\mu = \mu_0$. Káblom tečie prúd I (vo vnútornom vodiči a v plášti v navzájom opačných smeroch). Vypočítajte magnetickú indukciu ako funkciu vzdialenosti od osi kábla.



Obr. 158

159. V okolí nekonečného solenoidu sa magnetické pole obyčajne považuje za nulové. V skutočnosti – v dôsledku špirálového stúpania závitov – existuje pozdĺžna zložka prúdu v solenoide, ktorá vytvára v okolí solenoidu slabé magnetické pole. Predpokladajte, že solenoid s polomerom a je navinutý z drôtu s polomerom δ , pričom $\delta \ll a$. Odhadnite pomer magnetickej indukcie na povrchu solenoidu a v jeho vnútri za predpokladu, že solenoidom tečie prúd I .

160. Solenoid dlhý 30 cm je zhotovený z drôtu s priemerom 0,2 mm s odporom 0,65 Ω /m. Na jeden milimeter pripadá 5 závitov a priemer solenoidu je 6 cm. Solenoid je pripojený na 24 V

¹ Rowland, H. A., Amer. Journ. of Science **3**, XV, 30 – 38, 1878

zdroj so zanedbateľným vnútorným odporom. Vypočítajte magnetickú indukciu v strede solenoidu a rozptýlený tepelný výkon v solenoide.

161. V nekonečnom vodivom valci s polomerom a je vyvŕtaná valcová dutina s polomerom a' ($a > a'$), ktorej os je paralelná s osou valca (obr. 161). Valcom tečie prúd s konštantnou hustotou J . Vypočítajte magnetickú indukciu v dutine.

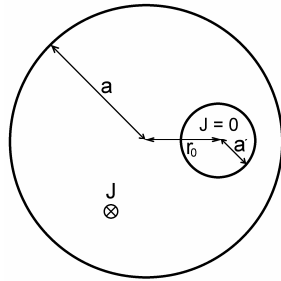
162. Vychádzajúc z Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

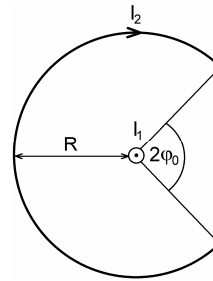
dokážte, že v ľubovoľnom bode P v okolí uzavretej prúdovej slučky I s prúdom I , možno magnetickú indukciu vyjadriť v tvare

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{grad } \Omega = -\text{grad} \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega \right) = -\text{grad } V_m$$

kde Ω je priestorový uhol, pod ktorým slučku vidieť z bodu P .



Obr. 161



Obr. 163

163. V uzavretom obvode tvorenom časťou kružnice s polomerom R a priamym úsekom pod uhlom $2\phi_0$ vzhľadom na stred kružnice (obr. 163) tečie prúd I_2 . Kolmo na rovinu obvodu a stredom kružnice prechádza priamy vodič, ktorým tečie prúd I_1 . Vypočítajte moment dvojice síl, pôsobiaci na obvod.

164. Vypočítajte magnetický moment dutej gule s polomerom R a s nábojom Q rovnomerne rozloženým na jej povrchu, ak sa guľa otáča s uhlovou rýchlosťou ω . Vypočítajte gyromagnetický pomer gule, t. j. pomer magnetického momentu k mechanickému momentu (moment hybnosti), ak celková hmotnosť gule je M .

165. Vypočítajte magnetický moment rotujúcej dielektrickej gule s polomerom R a s nábojom Q , rovnomerne rozloženým v objeme gule. Uhlová rýchlosť rotácie je ω . Vypočítajte gyromagnetický pomer gule, ak jej hmotnosť je M .

166. Zemské magnetické pole má vlastnosti magnetického poľa dipólu. Vypočítajte magnetický moment zemského magnetického dipólu, ak je známe, že na severnom magnetickom póle je magnetická indukcia $6,2 \cdot 10^{-5}$ T. Aký ekvivalentný prúd by musel tečieť na rovníku pre dipól s vypočítaným momentom? Za polomer Zeme považujte hodnotu $6 \cdot 10^6$ m.

167. Podľa jednej zo zavrnutých hypotéz o pôvode zemského magnetizmu je magnetické pole Zeme dôsledkom rovnomerne rozloženého náboja v celom objeme Zeme. Vychádzajúc z tejto hypotézy, vypočítajte objemovú hustotu náboja vo vnútri Zeme, ak magnetické pole na póle má vertikálny smer a veľkosť $6,2 \cdot 10^{-5}$ T. Polomer Zeme je približne $6 \cdot 10^6$ m. Koľko neskompenzovaných elementárnych nábojov by obsahoval 1 m^3 ? Aká by bola intenzita elektrického poľa na povrchu Zeme v dôsledku existencie takýchto nábojov?

168. Koaxiálny kábel pozostáva z vnútorného dutého vodiča s polomerom $D/2 = 1$ cm a vonkajšieho vodiča s polomerom $a = 5$ cm. Hrúbka stien vodičov je zanedbateľne malá. Vnútorý vodič je obalený feritovou vrstvou hrubou $d = 1$ cm s relatívnou permeabilitou $\mu_r = \mu/\mu_0 = 50$. Zvyšok vnútra koaxiálneho kábla je vyplnený materiálom s permeabilitou $\mu_r = 1$ (obr. 168). Koaxiálnym káblom tečie prúd 1 A. Vypočítajte energiu magnetického poľa na meter dĺžky kábla. Koľko percent energie je uskladnených vo ferite? Takáto úprava kábla feritom zvyšuje jeho charakteristickú impedanciu (vlnový odpor).

169. Vypočítajte energiu magnetického poľa Zeme v celom jej nekonečnom okolí. Predpokladajte, že magnetické pole Zeme je poľom magnetického dipólu s indukciou na rovníku $3,1 \cdot 10^{-5}$ T. Posúďte, či by výbuch atómovej bomby s energiou 1 megatony trinitrotoluénu ($\sim 4,2 \cdot 10^{15}$ J) vo vysokých vrstvách atmosféry mohol ovplyvniť magnetické pole Zeme.

170. Podľa Bohrovej teórie obieha elektrón v atóme vodíka po kruhovej dráhe s polomerom

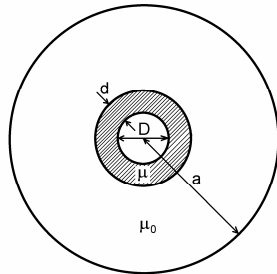
$$a = \frac{h^2}{\pi \mu_0 c^2 m_e e^2} = 5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

a s obežnou rýchlosťou

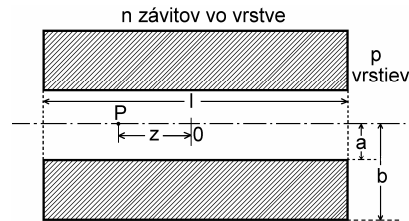
$$v = \frac{\mu_0 c^2 e^2}{2h} = 2,187 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

kde e je náboj a m_e je hmotnosť elektrónu, $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J.s je Planckova konštanta, μ_0 je magnetická konštanta (permeabilita vákuua) a c je rýchlosť svetla vo vákuu. Vypočítajte:

- aký ekvivalentný prúd zodpovedá obiehajúcemu elektrónu v atóme,
- aká je magnetická indukcia v mieste protónu,
- aký je orbitálny (zviazaný s pohybom elektrónu okolo jadra) magnetický moment elektrónu, ktorý je atomárnou jednotkou magnetického momentu a nazýva sa Bohrov magnetón.



Obr. 168



Obr. 171

171. Hrubá cievka má p vrstiev drôtu, pričom v každej vrstve je n závitov. Cievka má dĺžku l , vnútorný polomer a , vonkajší polomer b (obr. 171). Vypočítajte magnetickú indukciu na osi cievky v bode P , vo vzdialenosti z od jej stredy.

172. Veľmi dlhý solenoid má n závitov na jednotku dĺžky. Nájdite miesto na osi solenoidu, v ktorom sila pôsobiaca na malý objem slabomagnetického materiálu je maximálna.

173. Vektor magnetickej indukcie je daný výrazom

$$\mathbf{B} = k \frac{\mathbf{J}_z \times \mathbf{r}}{r^3}$$

kde \mathbf{J}_z je konštantný vektor v smere osi z , \mathbf{r} je vektor kolmý na os z a k je konštanta. Vypočítajte rotáciu vektora \mathbf{B} .

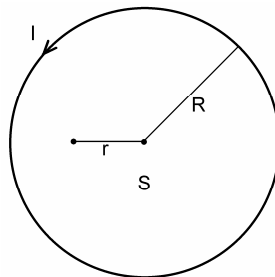
174. Vektor magnetickej indukcie v cylindrických súradniciach je daný výrazom

$$\mathbf{B} = k\mathbf{J}_z \times \mathbf{r}$$

kde \mathbf{J}_z je konštantný vektor v smere osi z a k je konštanta. Vypočítajte rotáciu vektora \mathbf{B} .

175. Veľmi dlhý (nekonečne) solenoid s polomerom 3 cm je navinutý z tenkého drôtu s priemerom 0,3 mm tak, že závitov sú tesne vedľa seba. Vypočítajte aké magnetické pole v solenoide spôsobí roztrhnutie drôtu, ak je známe, že materiál, z ktorého je drôt vyrobený má pevnosť v ťahu $2 \cdot 10^8 \text{ N/mm}^2$.

176. Dielektrická guľa s hmotnosťou M nabitá rovnomerne v celom objeme nábojom Q sa otáča okolo jedného zo svojich priemerov uhlovou rýchlosťou ω . Guľa je umiestnená v magnetickom poli s indukciami \mathbf{B} tak, že smer poľa zvierá s osou rotácie uhol ϑ . Pod účinkom magnetického poľa bude guľa vykonávať precesný pohyb okolo smeru magnetického poľa, podobne ako gyroskop v gravitačnom poli. Vypočítajte uhlovú rýchlosť precesie gule. Pri výpočte využite skutočnosť, že magnetický moment \mathbf{m} rotujúcej gule je zviazaný s jej momentom hybnosti \mathbf{L} vzťahom $\mathbf{m} = \gamma \mathbf{L}$, kde γ je gyromagnetický pomer (pozri úlohu 165).



Obr. 177

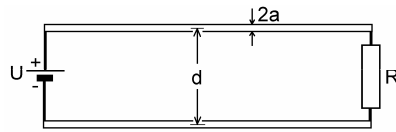
177. Vypočítajte magnetickú indukciu ako funkciu vzdialenosti r od stredu kruhového závitov, v ktorom tečie prúd I (obr. 177). Porovnajme vypočítanú magnetickú indukciu s indukciou v strede závitov ($\mu_0 I / 2R$).

178. Vektorový potenciál \mathbf{A} formálne rovnako súvisí s magnetickou indukciami \mathbf{B} , ako magnetická indukcia s prúdovou hustotou \mathbf{J} , t. j. $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ a $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. Aké tvrdenie týkajúce sa \mathbf{A} zodpovedá tvrdeniu, že integrál po uzavretej dráhe l z magnetickej indukcie \mathbf{B} sa rovná μ_0 -násobku celkového prúdu ohraničeného čiarou l ? Preskúmajte magnetickú indukciu od prúdu v nekonečne dlhom valcovom vodiči pri konštantnej prúdovej hustote vo vodiči. Na základe uvedenej analógie nájdite vektorový potenciál nekonečne dlhého solenoidu, v ktorom $\mathbf{B} = \text{konšt. vektor}$ ako funkciu vzdialenosti

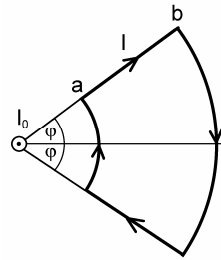
od osi solenoidu. Všimnite si, že vektorový potenciál sa nerovná nule v oblasti, kde $\mathbf{B} = 0$ (v okolí solenoidu).

179. Dvojvodičové vedenie podľa obr. 179 je zakončené odporom R (polomer vodičov je a , osová vzdialenosť d , $a \ll d$). Na vstup vedenia je pripojený zdroj s napätím U . Aký musí byť odpor R , aby magnetická sila medzi vodičmi bola kompenzovaná elektrickou silou?

180. V magnetickom poli veľmi dlhého priameho vodiča s prúdom I_0 sa nachádza obvod s prúdom I podľa obr. 180. Rovina obvodu je kolmá na vodič. Nájdite moment dvojice síl pôsobiaci na tento obvod.

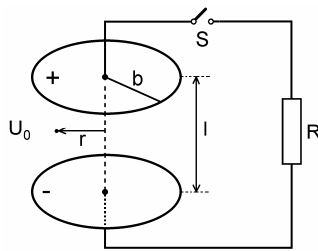


Obr. 179

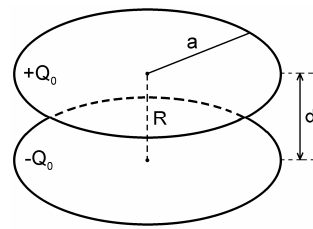


Obr. 180

181. Bodový náboj q sa pohybuje vo vákuu priamočiaro rovnomerne s rýchlosťou v . Využitím Maxwellovej rovnice pre cirkuláciu vektora \mathbf{H} nájdite intenzitu magnetického poľa \mathbf{H} v ľubovoľnom bode P . Platí: $v \ll c$.



Obr. 182



Obr. 183

182. Doskový kondenzátor s doskami v tvare kruhov s polomerom b a vzdialenosťou dosiek l je nabitý na potenciálový rozdiel U a v čase $t = 0$ je prepojený odporom R (obr. 182).

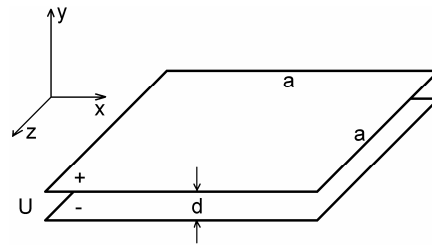
- Nájdite časovú závislosť napätia na kondenzátore.
- Určite časovú závislosť intenzity elektrického poľa medzi doskami.
- Určite časovú závislosť intenzity magnetického poľa medzi doskami vo vzdialenosti r od spojnice stredov dosiek, pričom $r < b$. Výpočet urobte z posuvného prúdu. Systém je vo vákuu a platí $b \gg l$.

183. Kondenzátor pozostávajúci z dvoch kruhových planoparalelných dosiek polomeru a je nabitý nábojmi $\pm Q_0$. V čase $t = 0$ sa stredy dosiek prepoja tenkým vodičom (obr. 183), ktorého odpor R je tak veľký, že možno zanedbať indukčnosť systému. Nájdite časové a priestorové závislosti:

- a) plošnej hustoty nábojov na doskách kondenzátora,
- b) celkového náboja,
- c) prúdu vodičom,
- d) posuvného prúdu,
- e) magnetickej indukcie.

184. Kondenzátor pozostáva z dvoch štvorcových dosiek so stranami dlhými $a = 20$ cm, uložených planparalelne s rovinou xz pravouhlého súradnicového systému podľa obr. 184. Vzďialenosť dosiek je $d = 2$ mm a kondenzátor je nabitý na potenciálny rozdiel $U = 300$ V.

- a) Vypočítajte počet elektrónov na zápornej doske kondenzátora.
- b) Pozorovateľ sa pohybuje rýchlosťou $0,6c$ v smere osi x . Vypočítajte v jeho sústave: rozmery kondenzátora, počet elektrónov na zápornej doske a intenzitu elektrického poľa v kondenzátore.
- c) Odpovedzte na otázky bodu b) ak sa pozorovateľ pohybuje rýchlosťou $0,6c$ v smere osi y .

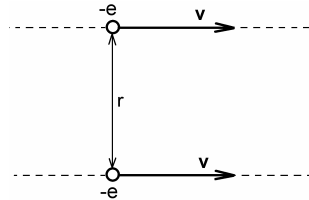


Obr. 184

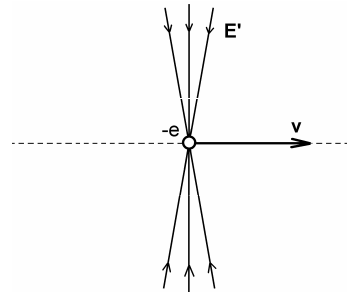
185. Elektrické pole v laboratórnej sústave má zložky

$$E_x = E_0 \cos \varphi \quad E_y = E_0 \sin \varphi \quad E_z = 0$$

Nájdite elektrické a magnetické polia v sústave, ktorá sa pohybuje v smere osi y rýchlosťou v . Riešte numericky pre: $E_0 = 33$ V/m, $\varphi = 30^\circ$, $v = 0,6c$.



Obr. 186



Obr. 187

186. Dva elektróny sa pohybujú po paralelných dráhach vo vzdialenosti r rýchlosťou v na jednej úrovni podľa obr. 186. Vypočítajte:

- a) silu, ktorou elektróny na seba pôsobia v sústave pohybujúcej sa spolu s nimi,

b) silu, ktorou na seba pôsobia v laboratórnej sústave. Aká bude sila v laboratórnej sústave pri malých rýchlostiach elektrónov, ak $v \ll c$ a aká bude ak $v \rightarrow c$?

187. Pri ultrarelativistických rýchlostiach elektrónov, t. j. ak

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \gg 1$$

je elektrické pole elektrónu prakticky celé sústredené v rovine kolmej k smeru pohybu a v jeho blízkom okolí podľa obr. 187. Vo výraze pre elektrické pole pohybujúceho sa elektrónu

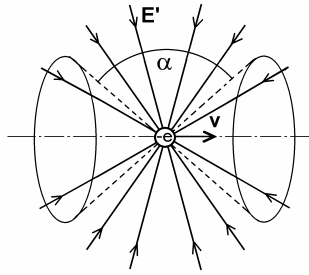
$$E' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2 \vartheta\right]^{3/2}} \quad \{1\}$$

možno v tomto prípade položiť

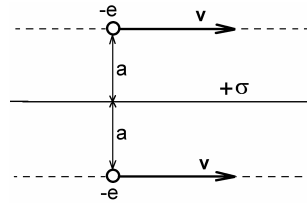
$$\vartheta = \pi/2 \pm \varepsilon$$

kde $|\varepsilon| \ll 1$. Dokážte, že v ultrarelativistickom prípade vzťah {1} prejde na tvar

$$E' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{\gamma}{(1 + \gamma^2 \varepsilon^2)^{3/2}} \quad \{2\}$$



Obr. 188



Obr. 192

188. Mierou relativistického "stlačenia" siločiar elektrického poľa pohybujúceho sa náboja je uhol α medzi dvoma kónickými plochami podľa obr. 188, vymedzujúcimi polovicu toku elektrického poľa. Využitím výrazu {2} vypočítajte uhol α v ultrarelativistickom prípade.

189. V sústave xyz je dané elektrické pole a magnetické pole so zložkami E_y a B_z . Nájdite inerciálnu sústavu, v ktorej je:

- elektrické pole nulové,
- magnetické pole nulové.

Vypočítajte zložky polí v týchto sústavách.

190. Bodový náboj q je umiestnený vo vzdialenosti a od nekonečnej priamky nabitej dĺžkovým nábojom λ . Vypočítajte silu, ktorá pôsobí na náboj v laboratórnej sústave, v ktorej je náboj i priamka

v pokoji a v sústave, ktorá sa pohybuje pozdĺž priamky rýchlosťou v . Náboje q a λ sú rovnakého znamienka.

191. Dokážte, že veličiny

- a) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$,
- b) $E^2 - c^2 B^2$

sú invariantné k špeciálnym Lorentzovým transformáciám.

192. Dva elektróny sa pohybujú rýchlosťou v vo vzdialenosti a po oboch stranách nekonečnej roviny nabitaj plošným nábojom $+\sigma$ (obr. 192). Vypočítajte:

- a) veľkosť plošného náboja, pri ktorom sila pôsobiaca na elektróny je nulová,
- b) pomer plošných nábojov z prípadu a) pre elektróny s energiou 500 MeV a elektróny v pokoji.

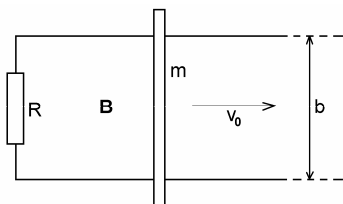
193. Dve nekonečne dlhé paralelné tyče sú nabité nábojom s hustotou $\pm\lambda$ na jednotku dĺžky a umiestnené vo vzdialenosti d . Vypočítajte silu, ktorou na seba tyče pôsobia:

- a) v sústave spojenj s tyčami,
- b) v sústave pohybujúcej sa rýchlosťou v pozdĺž tyčí.

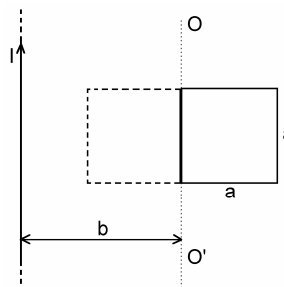
Elektromagnetická indukcia

194. Kovová tyč dĺžky $l = 1$ m sa otáča okolo osi, ktorá je kolmá na tyč a prechádza 1/3-nou jej dĺžky, uhlovou rýchlosťou $\omega = 4$ rad/s. V smere osi otáčania je naložené magnetické pole s indukciou $B = 0,1$ T. Vypočítajte indukované napätie medzi koncami tyče.

195. Kovová tyč dĺžky l_0 upevnená na jednom konci, vykonáva precesný pohyb s kruhovou frekvenciou ω okolo smeru homogénneho magnetického poľa indukcie B , pod uhlom precesie ϑ . Vypočítajte indukované elektromotorické napätie medzi koncami tyče.



Obr. 196



Obr. 197

196. Kovová tyč s hmotnosťou m sa môže bez trenia pohybovať po dvoch paralelných vodičoch uložených vo vzdialenosti b a na jednom konci spojených odporom R (obr. 196). Odpor vodičov a tyče je zanedbateľný. Kolmo k rovine vodičov je naložené homogénne magnetické pole indukcie B . V čase $t = 0$ je tyči udelená rýchlosť v_0 .

- a) Určite dobu, počas ktorej sa tyč bude pohybovať.

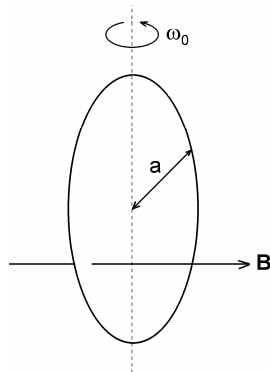
- b) Akú dráhu pritom tyč prejde?
 c) Na čo sa premení začiatočná kinetická energia tyče? Riešte číselne pre $m = 0,01$ kg, $b = 0,1$ m, $R = 10$ Ω , $B = 1$ T, $v_0 = 0,1$ m/s.

197. Štvorcový kovový rámček so stranou a a nekonečne dlhý vodič s prúdom I ležia v jednej rovine ako na obr. 197. Rámček sa otočil okolo osi OO' o 180° . Nájdite celkový náboj Q , ktorý pretečie rámčekom, ak jeho odpor je R .

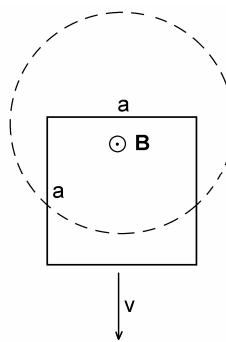
198. Medený prstenec s polomerom a je uložený v stálom magnetickom poli s indukciou B (obr. 198). V čase $t = 0$ bola prstencu udelená uhlová rýchlosť ω_0 . Nájdite čas, za ktorý uhlová rýchlosť prstenca klesne na $1/e$ -tinu začiatočnej hodnoty! Konduktivita medi je $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ S/m, jej hustota $\rho = 8\,900$ kg/m³, magnetická indukcia $B = 2 \cdot 10^{-2}$ T.

199. Štvorcový kovový rámček so stranou a sa nachádza medzi pólmi magnetu v magnetickom poli indukcie B podľa obr. 199. Spodná strana rámčeka je mimo magnetického poľa. V istom okamihu je rámček uvoľnený a začne padať smerom dole. Nájdite časovú závislosť rýchlosti v rámčeka. Ak rýchlosť bude závisieť exponenciálne od času, nájdite charakteristický čas závislosti a limitnú hodnotu rýchlosti, ktorou by sa rámček pohyboval po nekonečne dlhom čase. Všimnite si, že rýchlosť nezávisí od geometrických rozmerov rámčeka, iba od jeho konduktivity, hustoty a magnetickej indukcie B . Riešte číselne pre rámček z hliníka s konduktivitou $\sigma = 3,5 \cdot 10^7$ S/m a hustotou $\rho = 2\,700$ kg/m³ v magnetickom poli $B = 1$ T.

200. Morský prúd má rýchlosť 2 uzlov (približne 1 m/s) v miestach, kde vertikálna zložka magnetického poľa Zeme je $3,5 \cdot 10^{-5}$ T. Konduktivita vody v týchto miestach je 0,4 S/m. Predpokladajte, že okrem elektrického poľa viazaného na pohyb vodnej masy inej horizontálnej zložky elektrického poľa vo vode niet. Vypočítajte veľkosť horizontálnej zložky hustoty prúdu vo vode.



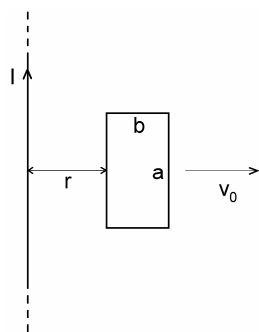
Obr. 198



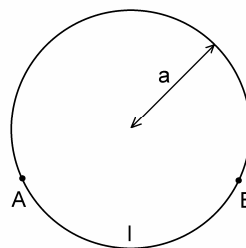
Obr. 199

201. Nekonečným priamym vodičom na obr. 201 tečie prúd I . Od vodiča sa konštantnou rýchlosťou v_0 vzdaluje štvoruholníková slučka o stranách a a b . Za predpokladu, že odpor slučky je dosť veľký, takže prúd v nej možno zanedbať, vypočítajte indukované elektromotorické napätie v slučke ako funkciu vzdialenosti r . Určite smer indukovaného elektromotorického napätia.

202. Kruhovou slučkou na obr. 202 z odporovo homogénneho materiálu s celkovým odporom R preniká časovopremenný indukčný tok $\Phi = -\mathcal{E}t$ (\mathcal{E} – konštanta, t – čas). Mimo slučky je indukčný tok nulový. Aké napätie sa nameria ideálnym voltmetrom na oblúku medzi bodmi A a B ?

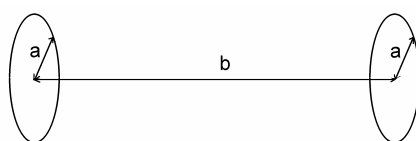


Obr. 201



Obr. 202

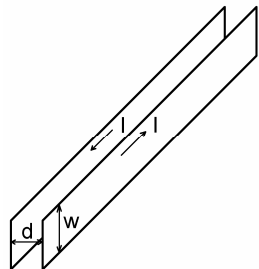
203. Vypočítajte vzájomnú indukčnosť dvoch kruhových závitov s polermi a , uložených paralelne so stredmi na jednej osi vo vzdialenosti b (obr. 203). Predpokladajte, že $a \ll b$.



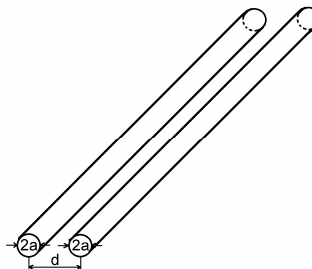
Obr. 203

204. Rovinný závit s plochou S uzavretý galvanometrom s vnútorným odporom R_i sa v homogénom magnetickom poli indukcie B otočí tak, že plošný vektor S pôvodne v smere poľ'a bude smerovať kolmo na smer poľ'a. Aký náboj pretečie galvanometrom pri tomto otočení?

205. Vypočítajte vnútornú indukčnosť na jednotku dĺžky valcového priameho vodiča s permeabilitou $\mu = \mu_0$.



Obr. 206

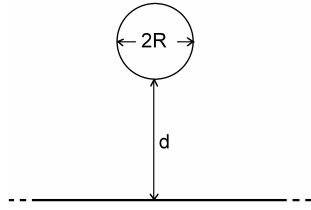


Obr. 207

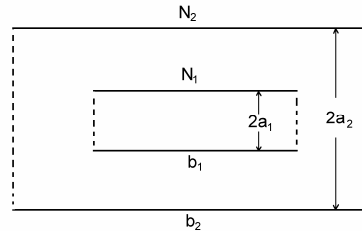
206. Páskové vedenie pozostáva z dvoch vodičových tenkých pásov so šírkou w , uložených paralelne vo vzdialenosti d , pričom $w \gg d$ (obr. 206). Vypočítajte indukčnosť na jednotku dĺžky takého vedenia.

207. Vypočítajte indukčnosť na jednotku dĺžky dvojlinky podľa obr. 207 za predpokladu, že $d \gg a$, takže možno zanedbať indukčný tok vo vnútri vodičov.

208. Vypočítajte indukčnosť na jednotku dĺžky vedenia pozostávajúceho z valcového vodiča o polomere R , umiestneného nad nekonečnou vodivou rovinou vo výške $d \gg R$ (obr. 208). Rovina slúži ako spätný vodič. (**Poznámka:** použite metódu zrkadiel podobnú ako v elektrickom poli.)



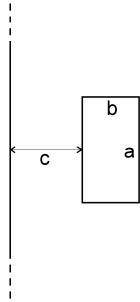
Obr. 208



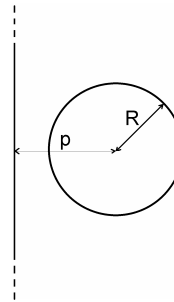
Obr. 209

209. Na obr. 209 je znázornený solenoid s polomerom a_1 a dĺžkou b_1 vložený do veľmi dlhého solenoidu s polomerom a_2 a dĺžkou b_2 . Vnútorň solenoid má N_1 závitov a vonkajší N_2 závitov. Vypočítajte vzájomnú indukčnosť solenoidov.

210. Vypočítajte vzájomnú indukčnosť nekonečného priameho vodiča a štvoruholníkovej slučky, ktorej rozmery a uloženie sú zrejme z obr. 210.

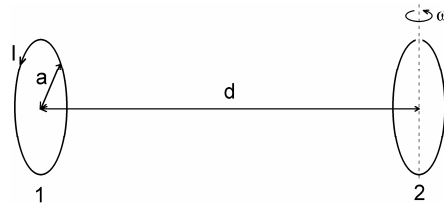


Obr. 210



Obr. 211

211. Vypočítajte vzájomnú indukčnosť nekonečného priameho vodiča a kruhového závitú s polomerom R . Priamy vodič a závit ležia v jednej rovine, pričom kolmá vzdialenosť stredu závitú od vodiča je $p > R$ (obr. 211).

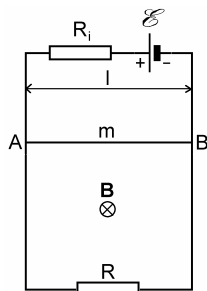


Obr. 212

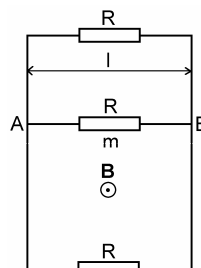
212. V kruhovom závitú 1 s polomerom a tečie prúd I (obr. 212). Druhý taký istý závit 2 je umiestnený na osi prvého vo vzdialenosti d , pričom $d \gg a$. Roviny závitú sú paralelné. Druhý

závit sa otáča okolo jedného zo svojich priemerov uhlovou rýchlosťou ω . Vypočítajte indukované elektromotorické napätie v druhom závite za predpokladu, že tento je rozpojený.

213. Po dvoch vertikálnych vodičoch spojených dole odporom $R = 2 \Omega$ a hore zdrojom EMN $\mathcal{E} = 1,9 \text{ V}$ s vnútorným odporom $R_i = 2 \Omega$ kľže bez trenia vodič AB , ktorého dĺžka je $l = 10 \text{ cm}$ a hmotnosť $m = 10 \text{ g}$ (obr. 213). Sústava sa nachádza v magnetickom poli indukcie $B = 1 \text{ T}$, kolmom na rovinu obrazca. Nájďte ustálenú rýchlosť vodiča AB v gravitačnom poli zanedbajúc trenie a odpor pohybujúceho sa vodiča.



Obr. 213



Obr. 214

214. Po dvoch vertikálnych vodičoch spojených hore a dole odporom $R = 0,01 \Omega$ môže bez trenia kľzat' vodič AB , ktorého dĺžka je $l = 100 \text{ cm}$, hmotnosť $m = 100 \text{ g}$ a odpor $R = 0,01 \Omega$ (obr. 214). Sústava sa nachádza v magnetickom poli s indukciou $B = 1 \text{ T}$. Nájďte maximálnu rýchlosť, ktorú nadobudne vodič pri svojom páde v gravitačnom poli Zeme.

215. Dlhá kovová páska z neferomagnetického materiálu sa pohybuje rovnomerne v magnetickom poli indukcie $B = 0,18 \text{ T}$ rýchlosťou $v = 6,28 \cdot 10^5 \text{ m/s}$. Vektory \mathbf{v} a \mathbf{B} sú navzájom kolmé a ležia v rovine páske. Vypočítajte plošnú hustotu nábojov na páske, ktoré vzniknú v dôsledku jej pohybu v magnetickom poli.

216. Dutý dielektrický valec s vnútorným polomerom r_1 a vonkajším polomerom r_2 sa rovnomerne otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo svojej geometrickej osi. V smere tejto osi je naložené magnetické pole indukcie B . Relatívna permitivita materiálu valca je ϵ_r . Vypočítajte:

- objemovú hustotu viazaných nábojov vo valci,
- celkový objemový viazaný náboj na jednotku dĺžky valca,
- hustotu plošných viazaných nábojov na vnútornej a vonkajšej ploche valca,
- celkový plošný viazaný náboj na jednotku dĺžky,
- súčet nábojov z bodu b) a d).

217. Vo vnútri veľmi dlhého solenoidu je súsovo vložená malá plošná cievočka s počtom závitov $N = 400$ a plochou závitov $S = 10 \text{ cm}^2$, v ktorej tečie prúd $i = 0,5 \sin \omega t \text{ [A]}$, $\omega = 500 \text{ rad/s}$. Dĺžková hustota závitov solenoidu je $n = 5 \text{ 000 m}^{-1}$. Vypočítajte napätie indukované v solenoide.

218. Elektróny v betatróne sa pohybujú po kruhovej dráhe s polomerom R pod vplyvom cylindricky symetrického magnetického poľa, kolmého na rovinu dráhy elektrónov. Os symetrie magnetického poľa je totožná s osou symetrie dráhy elektrónov. Elektróny sú urýchľované zvyšovaním hodnoty magnetickej indukcie.

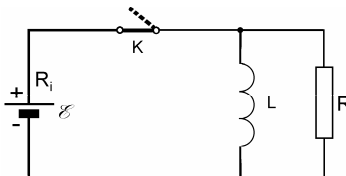
- Nájďte indukované elektrické pole na kruhovej dráhe elektrónov pri časovej zmene magnetického poľa dB/dt . Pre tento prípad považujte magnetické pole za homogénne.

b) Dokážte, že k tomu, aby polomer dráhy elektrónov zostal konštantný, je potrebné, aby zmena poľa dB_R na polomere R bola rovná $d\bar{B}/2$, kde \bar{B} je stredná hodnota magnetickej indukcie na ploche obopnutej dráhou elektrónov.

219. Cievka, ktorá má odpor $0,01 \Omega$ a indukčnosť $0,5 \text{ mH}$ je v istom okamihu pripojená na 12 V batériu so zanedbateľným vnútorným odporom.

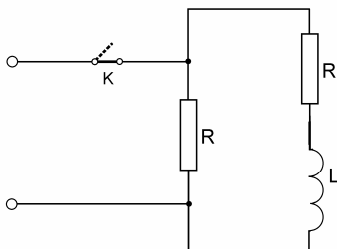
- Za aký čas prúd v tomto obvode dosiahne 90% svojej maximálnej hodnoty?
- Aká energia je v tom čase nazhromaždená v magnetickom poli cievky?
- Aká celková energia bola do tohto času dodaná zdrojom?

220. Vypočítajte celkový náboj, ktorý prejde odporom R v zapojení na obr. 220 po zapnutí kľúča K .



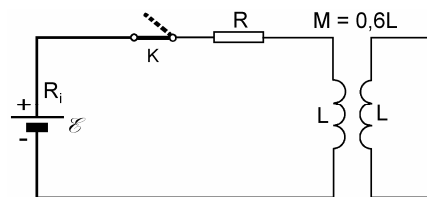
Obr. 220

221. Elektromagnet s indukčnosťou $L = 1 \text{ H}$ je napájaný prúdom $I = 10 \text{ A}$. Aby sa predišlo elektrickému prerazu izolácie vinutia (a prípadnému smrteľnému ohrozeniu osôb v blízkosti) v dôsledku vysokého indukovaného elektromotorického napätia, ktoré vznikne pri náhodnom prerušení prúdového obvodu elektromagnetu, pripája sa paralelne k vinutiu magnetu kondenzátor, ktorý stlmí začiatočný napäťový náraz pri prerušení obvodu. Vypočítajte kapacitu kondenzátora, ktorý stlmí začiatočný napäťový náraz na svorkách elektromagnetu na 10 kV , za predpokladu, že odpor vinutia možno zanedbať. Aké bude indukované napätie na svorkách elektromagnetu pri danej kapacite, ak odpor vinutia je $R = 1 \Omega$?



Obr. 222

222. Z dôvodov uvedených v úlohe 221 sa niekedy veľké indukčnosti reprezentované čistou indukčnosťou L a jej odporom R_L premošťujú na svorkách zdroja odporom R (obr. 222), ktorý stlmí začiatočné napätie na indukčnosti v prípade odpojenia zdroja. Vypočítajte koľkokrát prevyší maximálne napätie na indukčnosti U_{max} napätie zdroja U_0 v prípade jeho odpojenia.



Obr. 223

223. V zapojení podľa obr. 223 vypočítajte časové závislosti prúdov I_1 a I_2 v primárnom a sekundárnom obvode po zopnutí kľúča K . Sekundárny obvod má nulový odpor.

Magnetizmus látok

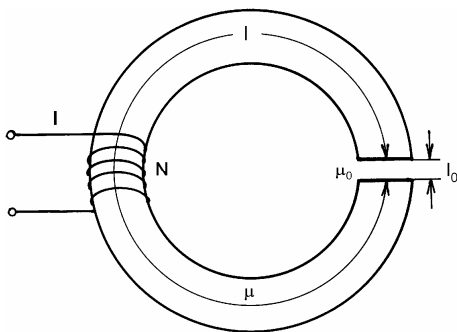
224. Susceptibilita jedného kilomolu hélia je $-2,4 \cdot 10^{-8}$. Dokážte, že to zodpovedá hodnote stredného kvadratickeho polomeru $1,22 a_0^2$ každej orbity v héliovom atóme, kde a_0 je polomer prvej Bohrovej dráhy vo vodíkovom atóme.

225. Susceptibilita jedného kilomolu látky $\text{NiK}_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ je

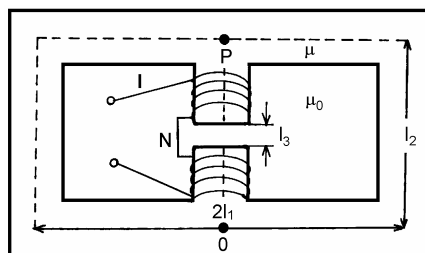
$$\chi = 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 1/T$$

Za predpokladu, že diamagnetický príspevok je zanedbateľný a paramagnetické príspevky sú iba od iónov Ni^{2+} , vypočítajte permanentný dipólový moment pripadajúci na každý Ni^{2+} ión.

226. Na prstenci z mäkkého železa podľa obr. 226 je navinutých $N = 150$ závitov drôtu, ktorým tečie prúd $I = 5$ A. Prstenec má štrbinu širokú $l_0 = 5$ mm a stredný obvod prstenca je $l = 25$ cm. Pri danom sýtení je permeabilita materiálu prstenca $3\,000 \mu_0$. Vypočítajte B a H v štrbine prstenca. Rozptyl indukčného toku je zanedbateľný.



Obr. 226



Obr. 227

227. Pre magnetický obvod podľa obr. 227 platí: počet závitov $N = 150$, prúd vo vinutí $I = 1$ A, šírka štrbiny $l_3 = 1$ cm, $\mu = 1\,000\mu_0$, rozmery obvodu $l_1 = l_2 = 10$ cm. Vypočítajte B a H v štrbine. Rozptyl magnetického indukčného toku je zanedbateľný.

228. Na železný prstenec s vnútorným polomerom $R = 10$ cm a vonkajším polomerom $R_1 = 12$ cm je navinutých 20 závitov drôtu. Využitím magnetizačnej krivky $B-H$ materiálu prstenca podľa obr. 228 vypočítajte veľkosť prúdu vo vinutí, potrebného pre vytvorenie magnetickej indukcie $B = 1,2$ T v strede prierezu prstenca.

229. Anglický fyzik Lord Rayleigh (1842 – 1919) ukázal, že pre nízke hodnoty magnetickej indukcie je hysteréza slučka s koncovými bodmi $\pm B_0, \pm H_0$ daná rovnicami

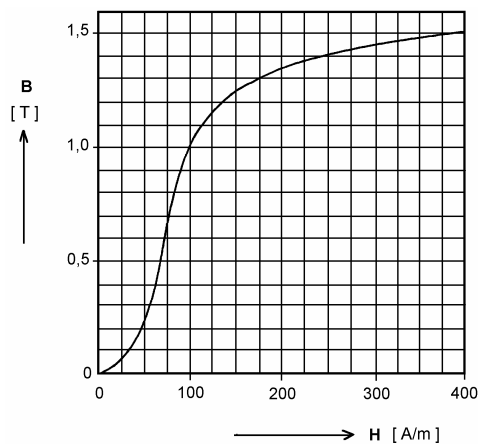
$$B = \mu H + \frac{1}{2} a(H_0^2 - H^2) \quad (\text{horná polovica slučky})$$

$$B = \mu H - \frac{1}{2} a(H_0^2 - H^2) \quad (\text{dolná polovica slučky})$$

kde $\mu = B_0/H_0$. Dokážte, že hysterézne straty na jednotku objemu vzorky a na jeden magnetizačný cyklus (reprezentované plochou slučky) sú

$$W = \frac{4}{3} a H_0^3$$

Tento výraz platí iba pre nízke hodnoty B_0 (v železe pod hodnotou asi 0,05 T). Pri vyšších hodnotách W sa mení približne s mocninou $B_0^{1,6}$, podľa Steinmetzovho empirického vzťahu.



Obr. 228

230. Pri meraní Hallovho napätia v kovovom sodíku sa ukázalo, že intenzita Hallovho elektrického poľa je $2\,500\ \mu\text{V/m}$ pri hustote prúdu v sodíku $10^7\ \text{A/m}^2$ a kolmom magnetickej poli 1 T. Určite objemovú hustotu vodivostných elektrónov v sodíku a porovnajte ju s počtom atómov sodíka na jednotku objemu. Hustota sodíka je $\rho = 970\ \text{kg/m}^3$ a atómová hmotnosť $M = 23$.

Striedavé elektrické prúdy

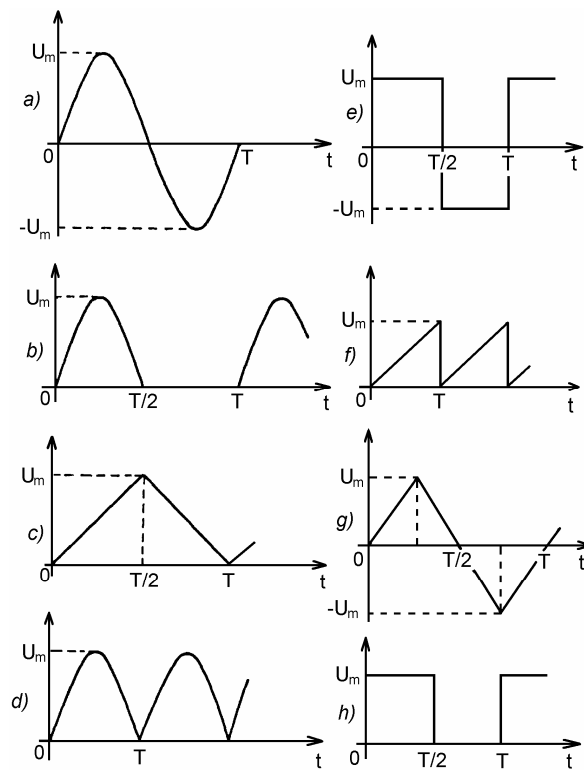
231. Stredná hodnota periodickej funkcie $v(t)$ s periódou T je daná výrazom

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

a efektívna (stredná kvadratická) hodnota je daná výrazom

$$u_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Vypočítajte stredné a efektívne hodnoty funkcií zobrazených na obr. 231.



Obr. 231

232. Rozhodnite, z ktorých dvoch elementov pozostáva sériový obvod, v ktorom prúd a napätie sú dané časovými závislosťami

$$u = 150 \sin(500t + 10^\circ) \quad [\text{V}]$$

$$i = 13,42 \sin(500t - 53,4^\circ) \quad [\text{A}]$$

Vypočítajte hodnoty týchto elementov.

233. V sériovom RLC obvode prúd a napätie sú dané vzťahmi

$$i = 12,5 \cos(3000t - 45^\circ) \quad [\text{A}]$$

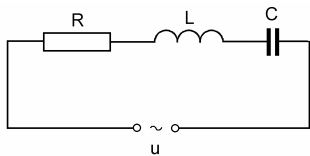
$$u = 353,5 \cos(3000t) \quad [\text{V}]$$

Indukčnosť v obvode má hodnotu 10 mH. Vypočítajte hodnoty odporu a kapacity.

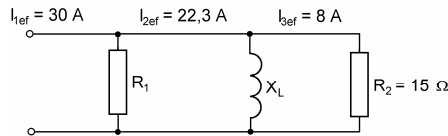
234. Ak je k sériovému RLC obvodu na obr. 234 pripojené striedavé napätie $u_1 = 100 \cos(1000t)$ V, potom amplitúda prúdu v obvode je 5 A. V prípade, že k obvodu je pripojené napätie $u_2 = 80 \cos(500t)$ V, potom stredný výkon v odpore R je 200 W a účinník sa rovná jednej. Vypočítajte hodnoty odporu, indukčnosti a kapacity.

235. V zapojení podľa obr. 235 vypočítajte:

- efektívnu hodnotu napätia na vstupných svorkách,
- hodnotu odporu R_1 a reaktancie X_L ,
- celkový činný výkon v obvode,
- komplexnú impedanciu obvodu.



Obr. 234

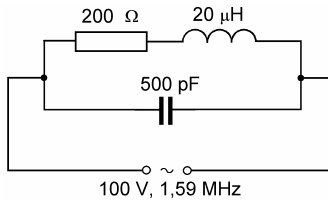


Obr. 235

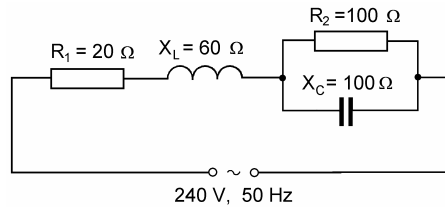
236. Vypočítajte amplitúdu prúdu dodávaného zdrojom do obvodu podľa obr. 236. Zdroj má efektívne napätie 100 V s frekvenciou 1,59 MHz.

237. V obvode na obr. 237 vypočítajte:

- efektívnu hodnotu prúdu dodávaného zdrojom,
- maximálny náboj na kondenzátore (jeho amplitúdu),
- celkový činný výkon v obvode.



Obr. 236



Obr. 237

238. Odpor $R = 10 \text{ k}\Omega$ a kondenzátor $C = 0,2 \text{ }\mu\text{F}$ sú spojené v sérii a pripojené na zdroj striedavého efektívneho napätia 220 V s frekvenciou 50 Hz. Vypočítajte:

- impedanciu obvodu,
- efektívnu hodnotu prúdu dodávaného zdrojom,
- činný výkon v obvode,
- efektívne hodnoty napätí na odpore a kondenzátore.

Vypočítajte veličiny podľa bodov a), b), c) pre paralelné spojenie daných elementov. Stanovte efektívne hodnoty prúdov v odpore a kondenzátore.

239. Čierna skrinka má dve svorky. Ak sa na svorky pripojí jednosmerné napätie 100 V, potom v obvode tečie prúd 0,01 A. Pri pripojení sieťového efektívneho napätia (220 V, 50 Hz) tečie v obvode efektívny prúd 2 A. Ak sa amplitúda napätia udržuje konštantnou a mení sa frekvencia, pri $f_0 = 1$ kHz má amplitúda prúdu maximum. Čo obsahuje skrinka?

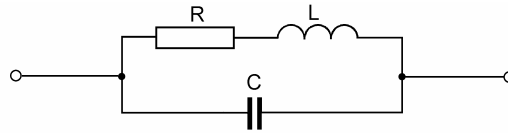
240. Priestor medzi kruhovými elektródami doskového kondenzátora je vyplnený slabou vodivým dielektrikom s mernou vodivosťou σ a permitivitou ϵ . Nájdite intenzitu magnetického poľa v kondenzátore, ak intenzita elektrického poľa medzi doskami je

$$E = E_m \cos \omega t$$

241. Kondenzátor je vyplnený dielektrikom s relatívnou permitivitou

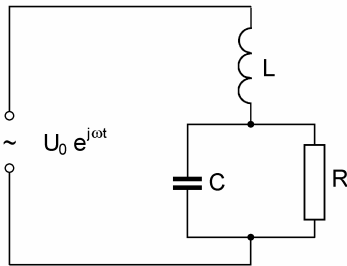
$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\gamma)}$$

(ionizovaný plyn, plazma, ω_p je plazmová frekvencia). Kapacita nevyplneného kondenzátora je C_0 . Dokážte, že impedancia takého kondenzátora je rovnaká ako impedancia dvojpoľu podľa obr. 241, ak sa jeho prvky vyberú zodpovedajúcim spôsobom. Vypočítajte hodnoty R , L , C .

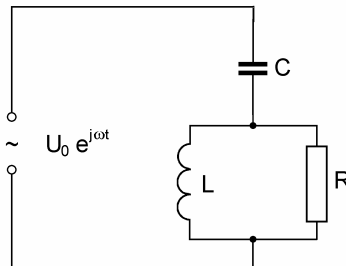


Obr. 241

242. Je daný obvod podľa obr. 242. Vypočítajte prúd odporom, ak $\omega L = 1/\omega C$. Obvod si dal patentovať ako jednoduchý stabilizátor striedavého prúdu americký elektrotechnik Charles Steinmetz (1865 – 1923).



Obr. 242



Obr. 243

243. Je daný obvod podľa obr. 243. Vypočítajte prúd odporom, ak $\omega L = 1/\omega C$.

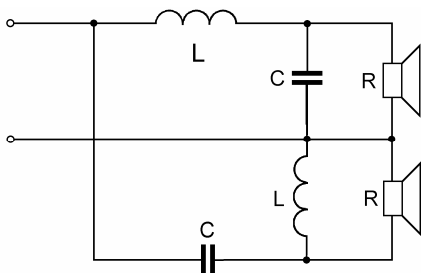
244. Principiálne zapojenie reproduktorových sústav pre Hi-Fi zosilňovače je znázornené na obr. 244. Aktívny odpor každého reproduktora je R .

a) Ukážte, že impedancia na vstupných svorkách je reálna pri frekvencii

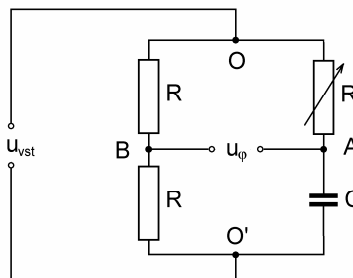
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- b) Ako treba zvoliť pomer L/C , aby vstupný odpor pri frekvencii ω_0 bol rovný práve hodnote R ?
 c) Ako sa v tomto prípade delí vstupný výkon medzi jednotlivými reproduktormi?

245. V obvodovej elektronike niekedy treba posúvať fázu napätia, ktorého amplitúda musí pritom zostať konštantná. Na nízkych frekvenciách takému účelu slúži fázový posúvač na obr. 245. Dokážte, že ak je na vstup fázového posúvača pripojené striedavé napätie s amplitúdou U_0 , potom pri zmene odporu R' od nuly do nekonečna zostáva amplitúda výstupného napätia u_φ konštantná a rovná $U_0/2$ a fáza sa oproti vstupnému napätiu mení v intervale od 0° do 180° .

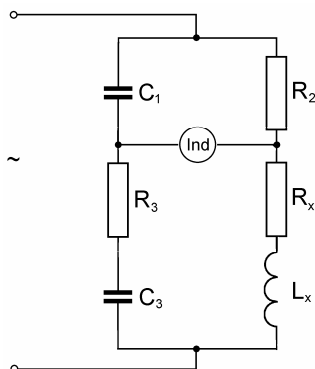


Obr. 244

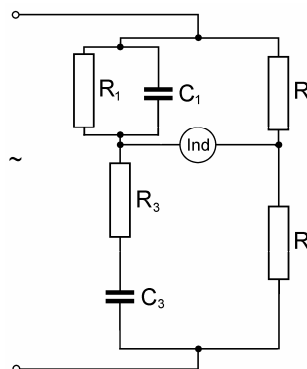


Obr. 245

246. Zapojenie na obr. 246 je Owenov most, vhodný na meranie indukčností a odporov cievok. Zistite aké vzťahy musia platiť medzi elementmi mostu, aby bol vyvážený, t. j. aby prúd indikátorom bol nulový. Závisí vyváženie mostu od frekvencie napájacieho napätia?

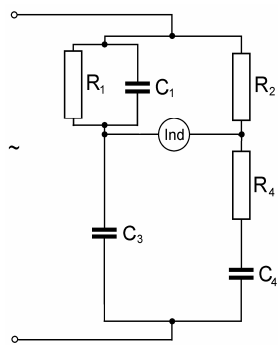


Obr. 246

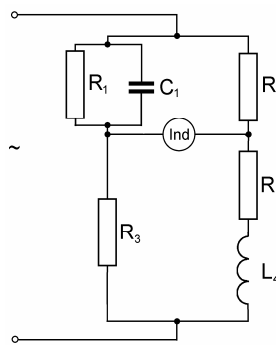


Obr. 247

247. Na meranie nízkych frekvencií a tiež ako selektívny spätnoväzobný prvok v RC-generátoroch sa používa Wienov most podľa obr. 247. Nájdite podmienky rovnováhy tohoto mostu. Aké sú podmienky rovnováhy, ak $R_1 = R_3 = R$, $C_1 = C_3 = C$, $R_2 = R_4/2 = R_0$?



Obr. 248

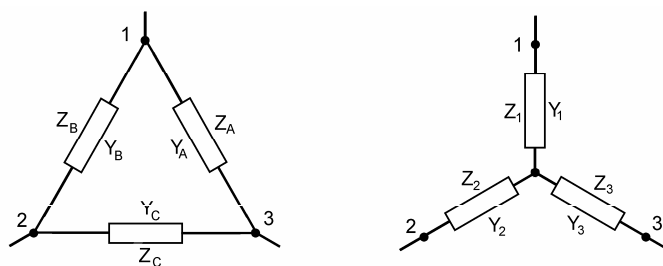


Obr. 249

248. Na meranie kapacít a dielektrických vlastností materiálov sa používa Scheringov most v zapojení podľa obr. 248. Nájdite podmienky rovnováhy tohoto mostu. Závisí rovnováha mostu od frekvencie napájacieho napätia?

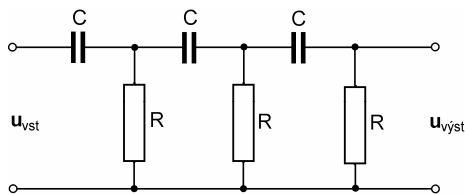
249. Na meranie indukčností a odporov cievok sa používa aj Maxwellov most, ktorého zapojenie je na obr. 249. Nájdite podmienky rovnováhy mostu. Je tento most frekvenčne závislý?

250. Pri analýze elektrických sietí je niekedy užitočné urobiť transformáciu "trojuholníkového" zapojenia impedancií na "trojčipú hviezdu" impedancií a naopak. Takáto transformácia časti elektrickej siete je znázornená na obr. 250. Hodnoty elementov vo hviezde a trojuholníku možno vybrať tak, že obidva obvody budú elektricky ekvivalentné, t. j. ich impedancie, resp. admitancie z ľubovoľnej strany budú rovnaké. Nájdite vzťahy medzi Z_1, Z_2, Z_3 a Z_A, Z_B, Z_C , pre identické vlastnosti obidvoch zapojení.



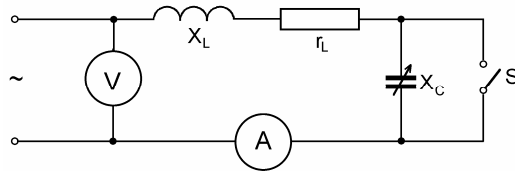
Obr. 250

251. V generátoroch nízkych frekvencií sa na otočenie fázy napätia o 180° používa zapojenie podľa obr. 251. Dokážte, že v takomto zapojení pri frekvencii $\omega = \frac{1}{\sqrt{6RC}}$ je $U_{výst} = -\frac{1}{29}U_{vst}$.



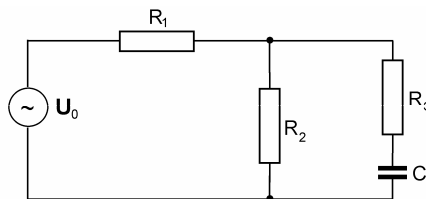
Obr. 251

252. Na meranie parametrov cievok (r_L , X_L) môže slúžiť obvod podľa obr. 252. Kapacita C v obvode sa pri meraní nastaví tak, aby efektívna hodnota prúdu v obvode bola rovnaká pri zopnutom a rozopnutom spínači S . Vypočítajte ohmický odpor indukčnosti r_L a jej reaktanciu X_L , ak pri efektívnom napätí 220 V a reaktancii kondenzátora $X_C = 48\ \Omega$ bola efektívna hodnota prúdu v obvode pri rozopnutom a zopnutom spínači $5,6\text{ A}$.



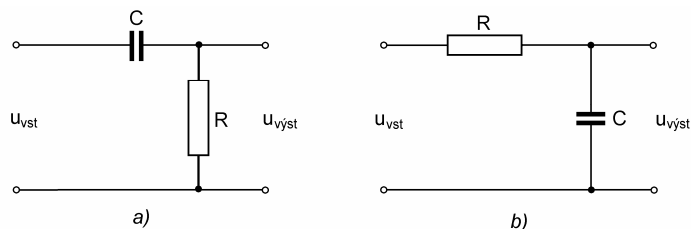
Obr. 252

253. V zapojení na obr. 253 treba vypočítať komplexné amplitúdy (fázory) prúdov v jednotlivých odporoch. Hodnoty jednotlivých elementov sú: $R_1 = R_2 = R_3 = 1\ \Omega$, $C = 3,183\ \mu\text{F}$. Zdroj má amplitúdu napätia $U_0 = 10 e^{j0}\text{ V}$ a frekvenciu $f = 50\text{ kHz}$. Aký je fázový posuv medzi prúdmi v odporoch R_2 a R_3 ?



Obr. 253

254. Obvod na obr. 254a sa za istých podmienok správa ako "derivačný", t. j. jeho výstupné napätie je úmerné časovej derivácii vstupného napätia. Podobne obvod na obr. 254b sa správa ako "integračný". Zistite za akých podmienok platí (v prvom prípade)



Obr. 254

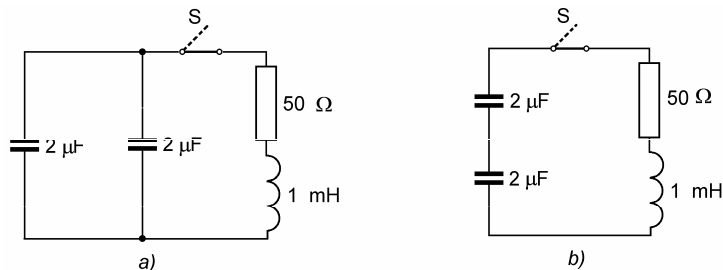
$$u_{\text{výst}} \sim \frac{d}{dt} u_{\text{vst}}$$

resp. (v druhom prípade)

$$u_{\text{výst}} \sim \int u_{\text{vst}} dt$$

Nech $u_{vy} = U_0 \cos \omega t$. Ako voliť hodnoty R a C v obvodoch, aby výstupné napätie bolo úmerné derivácii (integrálu) vstupného napätia?

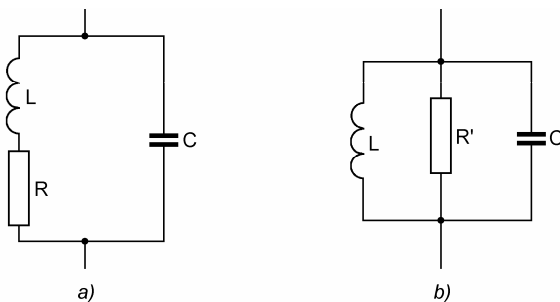
255. Rezonančný obvod kmitá bez tmenia na frekvencii $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. O koľko sa zmení rezonančná frekvencia (v percentách), ak sa obvod zatlmí sériovým odporom, ktorého veľkosť je taká, že obvod má kvalitu 200?



Obr. 256

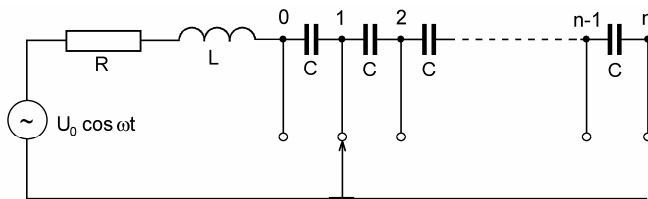
256. Zistíte, v ktorom z obvodov na obr. 256a,b môžu po zapnutí spínača vzniknúť tmené kmity.

257. Na obr. 257a,b sú dva rezonančné obvody RLC a $R'LC$. Odpor R je taký malý, že $R \ll \omega_0 L$, kde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Ako treba voliť odpor R' , aby obidva obvody boli v okolí rezonancie ekvivalentné?



Obr. 257

258. V elektrickom zapojení na obr. 258 možno k sériovej dvojici RL pripájať prepínačom sériovo radené kondenzátory C .

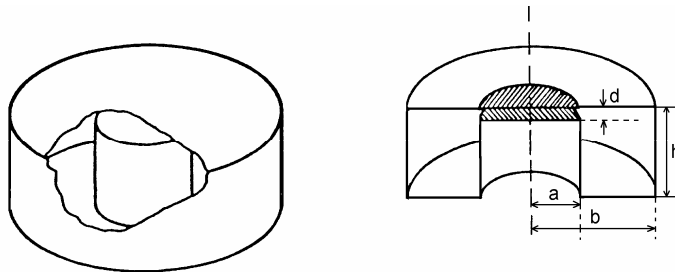


Obr. 258

a) Nájdiť stredný výkon v odpore R , ak je prepínač v ľubovoľnej polohe m ($0 \leq m \leq n$).

b) Nech $R = 1\,000\ \Omega$, $L = 10\ \text{H}$, $C = 20\ \mu\text{F}$, $\omega = 100\ \text{rad/s}$. Pre akú hodnotu m je stredný výkon v odpore maximálny?

c) Aká je amplitúda napätia na sériovej dvojici RL , ak je prepínač v polohe 2 a $U_0 = 100\ \text{V}$? Aká je amplitúda napätia na odpore?



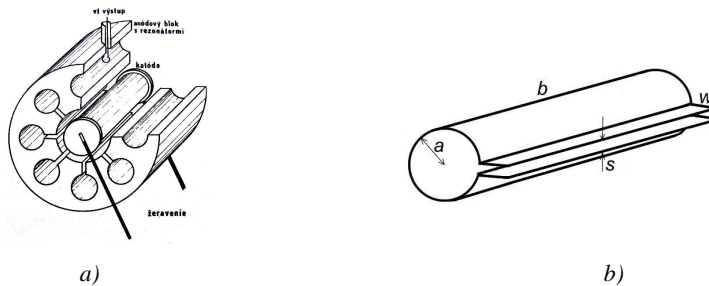
Obr. 259

259. Rezonančná dutina na obr. 259 je podstatnou časťou generátora veľmi vysokých frekvencií – klystrónu. Takúto dutinu možno považovať za paralelný LC obvod. Jeho indukčnosť tvorí toroid s jedným závitom (cylindrická časť dutiny) a paralelné plochy uzatvárajúce toroid (vyšrafovaná časť) predstavujú kapacitu obvodu. Nájdiť výraz pre rezonančnú frekvenciu dutiny, pričom predpokladajte, že steny dutiny sú ideálne vodivé! Riešte numericky pre $a = 1\ \text{cm}$, $b = 2\ \text{cm}$, $h = 1\ \text{cm}$, $d = 1\ \text{mm}$. V dutine je vákuum.

260. Podstatnou časťou magnetronu (generátora veľmi vysokých frekvencií) je masívny anódový blok (obr. 260a) s vyfrézovanými rezonančnými dutinami, z ktorých jedna je zobrazená na obr. 260b. Dutinu možno považovať za paralelný rezonančný LC obvod, ktorého indukčnosť je tvorená valcovou časťou a kapacitu predstavujú paralelné rovinné plochy. Rezonančná frekvencia dutiny je v prvom priblížení frekvenciou, na ktorej magnetrón kmitá, pričom počet dutín len málo ovplyvňuje výslednú frekvenciu.

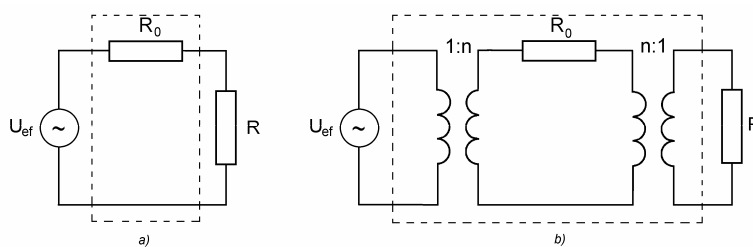
a) Vypočítajte rezonančnú frekvenciu dutiny za predpokladu, že $b \gg a$ a $s \ll w$.

b) Prvý magnetrón vyrobený v USA počas druhej svetovej vojny pre radarové účely mal parametre: $a = 3\ \text{mm}$, $s = 1\ \text{mm}$, $w = 3\ \text{mm}$. Vypočítajte číselne rezonančnú frekvenciu a vlnovú dĺžku kmitov magnetronu. V dutine je vákuum.



Obr. 260

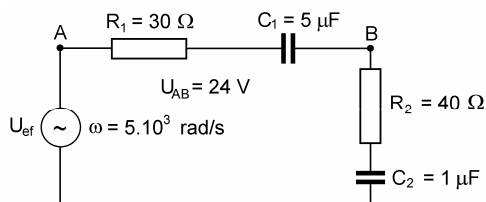
261. Pri prenose veľkých elektrických výkonov na diaľku sa primárne napätie elektrárne najprv transformuje na vysoké napätie (rádovo stovky kilovoltov) a na strane spotrebiteľa sa znovu



Obr. 261

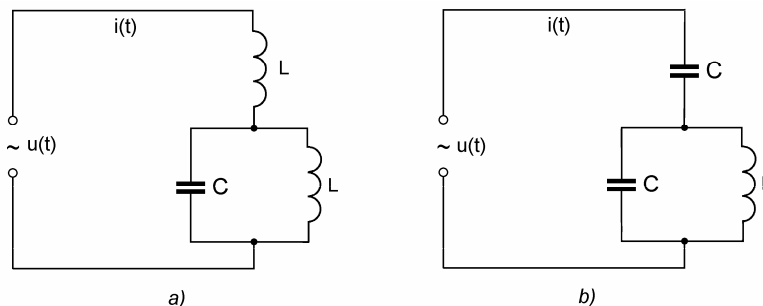
transformuje na nízke napätie (napr. 220 V). Táto transformácia sa robí kvôli zníženiu tepelných (ohmických) strát vo vedení. Na obr. 261a je obvod, v ktorom generátor a spotrebič R sú priamo spojené vedením o celkovom odpore R_0 . Na obr. 261b je spojenie generátor – spotrebič urobené ideálnymi transformátormi s prevodom $1 : n : n : 1$, pričom samotné vedenie má ten istý odpor R_0 . Vypočítajte pomer celkového prenášaného výkonu k tepelným stratám v prvom a druhom prípade.

262. V obvode na obr. 262 nájdite efektívnu hodnotu napätia zdroja U_{ef} , ak na sériovej dvojici $R_1 C_1$ bolo namerané efektívne napätie $U_{AB} = 24$ V.



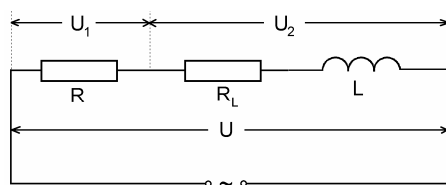
Obr. 262

263. V obvodoch podľa obr. 263a,b nájdite časovú závislosť prúdu $i(t)$, ak $u(t) = U_0 \cos \omega t$.



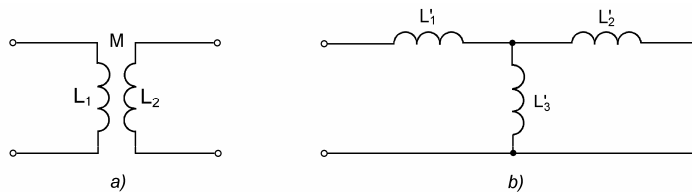
Obr. 263

264. Cievka a známy odpor R sú spojené v sérii (obr. 264) a pripojené na zdroj striedavého napätia s efektívnou hodnotou U . Na odpore bolo namerané efektívne napätie U_1 a na cievke U_2 . Vypočítajte stredný výkon na cievke (na jej činnom odpore).



Obr. 264

265. Viazané obvody na obr. 265a sa pre výpočtové účely dajú nahradiť zapojením podľa obr. 265b. Ako treba voliť hodnoty indukčností L'_1 , L'_2 a L'_3 , aby obvody boli elektricky ekvivalentné?

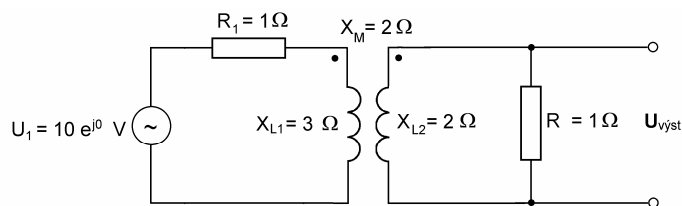


Obr. 265

266. Dve cievky s indukčnosťami L_1 a L_2 majú vzájomnú indukčnosť M .

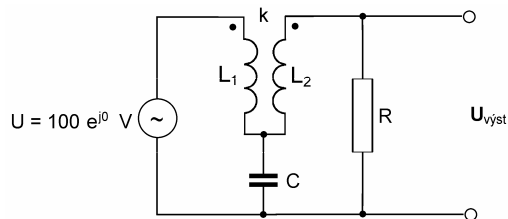
- Vypočítajte dve možné hodnoty indukčnosti cievok spojených do série.
- Vypočítajte dve možné hodnoty indukčnosti, ak sú cievky spojené paralelne.
- Aká indukčnosť je medzi svorkami každej cievky, ak je druhá cievka skratovaná?

Riešte číselne pre $L_1 = 6 \text{ H}$, $L_2 = 4 \text{ H}$, $M = 3 \text{ H}$.



Obr. 267

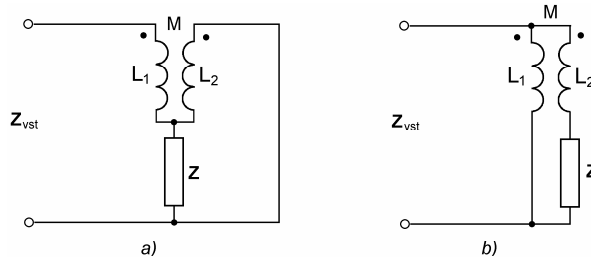
267. V zapojení na obr. 267 nájdite amplitúdu a fázu výstupného napätia.



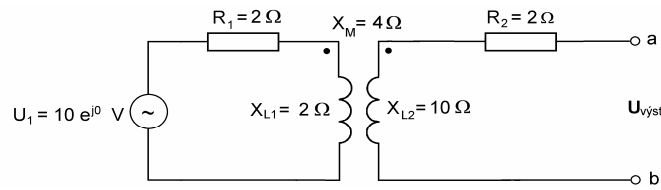
Obr. 268

268. V obvode na obr. 268 nájdite amplitúdu a fázový posuv výstupného napätia. Riešte pre číselné hodnoty $R = 1 \Omega$, $X_C = 8 \Omega$, $X_{L1} = 16 \Omega$, $X_{L2} = 4 \Omega$, $k = 1/2$.

269. Vypočítajte vstupnú impedanciu obvodov na obr. 269a, b pri frekvencii ω .



Obr. 269

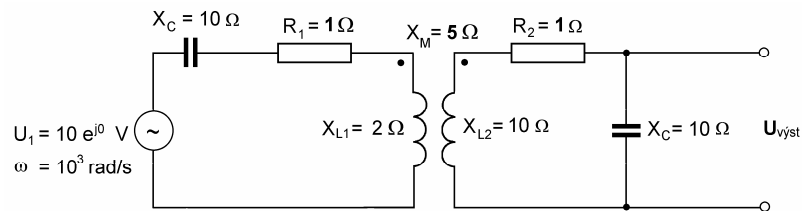


Obr. 270

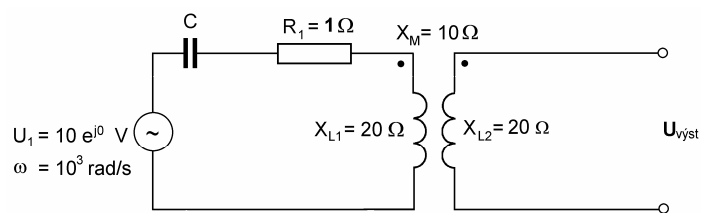
270. Pre obvod podľa obr. 270 nájdite:

- Výstupné napätie (amplitúdu a fázový posuv) medzi svorkami $a-b$.
- Prúd, ktorý tečie sekundárnym obvodom ak svorky $a-b$ sú skratované.

271. V zapojení na obr. 271 nájdite amplitúdu a fázový posuv výstupného napätia.



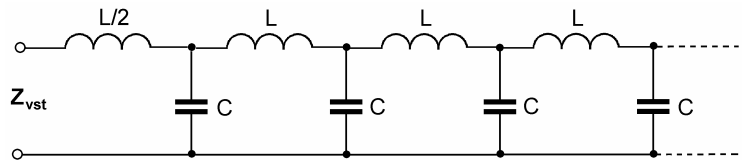
Obr. 271



Obr. 272

272. a) V obvode na obr. 272 nájdite takú hodnotu C , pri ktorej výsledná reaktancia primárneho obvodu bude nulová (sériová rezonancia). b) Pre túto hodnotu C nájdite amplitúdu a fázový posuv výstupného napätia. Ukážte, že amplitúda výstupného napätia je maximálna pri zvolenej hodnote C .

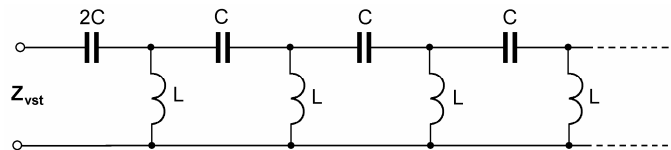
273. Vypočítajte vstupnú impedanciu nekonečného LC reťazca podľa obr. 273 (použite postup uvedený v úlohe 118). Vstupná impedancia zapojenia na obrázku môže byť reálna alebo imaginárna. V akom pásme frekvencií je táto impedancia reálna?



Obr. 273

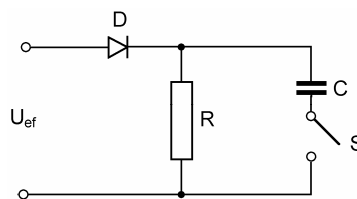
Reálna impedancia (ohmický odpor) pripojená k zdroju napätia odoberá zo zdroja energiu, ktorá sa v prípade zapojenia zostaveného z čisto reaktančných prvkov nemôže meniť na teplo, ale iba postupovať pozdĺž nekonečného reťazca (nekonečný reťazec sa môže nahradiť konečným, ak sa na jeho výstup pripojí vhodný tzv. charakteristický odpor). Reťazec sa teda správa ako frekvenčný filter – prepustí signály s frekvenciou, pre ktorú je vstupná impedancia reálna a zadrží signály s frekvenciou, pre ktorú vstupná impedancia reťazca je imaginárna. V akom pásme frekvencií je uvedený filter "priezračný"? Opísané zapojenie predstavuje oneskorovacie vedenie, často používané v impulzovej technike.

274. Podobne ako v úlohe 273 analyzujte nekonečný reťazec, ktorého zapojenie je na obr. 274.



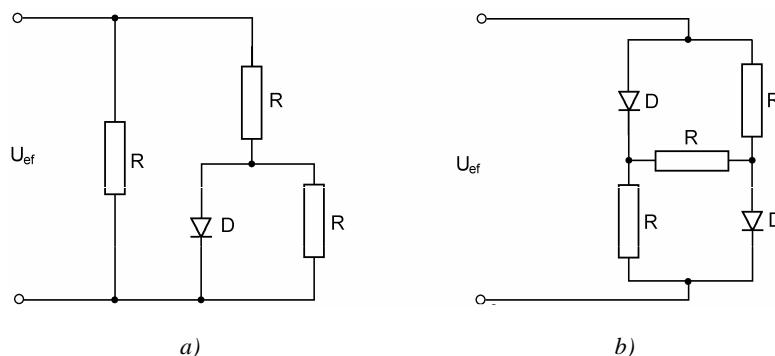
Obr. 274

275. Usmerňovač s ideálnou diódou (ideálna dióda je v priepustnom smere dokonale vodivá a v závernom smere dokonale nevodivá) je pripojený na zdroj striedavého napätia U_{ef} s frekvenciou f podľa obr. 275. Koľkokrát sa zmení stredný výkon v odpore R , ak sa zopne spínač S , keď je známe, že za jednu periódu napätie na kondenzátore zostáva prakticky konštantné? V akom vzťahu musia byť R , C a f ?



Obr. 275

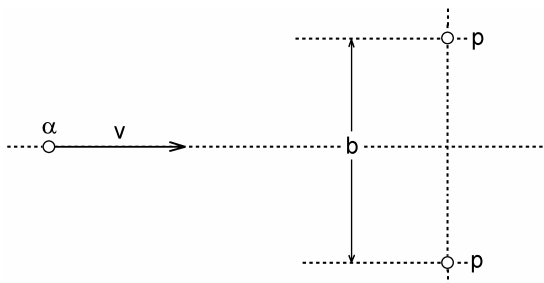
276. V obvodech na obr. 276a,b vypočítajte stredný výkon. Diódy sú ideálne.



Obr. 276

Pohyb nabitých častíc v elektrických a magnetických poliach

277. α -častica prechádza veľkou rýchlosťou cez geometrický stred molekuly vodíka H_2 a pohybuje sa po priamke kolmej k osi molekuly (obr. 277). Vzdialenosť protónov v molekule je b . Určite bod na dráhe α -častice, kde sila pôsobiaca na ňu je maximálna. Predpokladá sa, že vzdialenosť protónov sa pri prechode α -častice molekulou nemení. Tento predpoklad je prípustný, pretože rýchlosť α -častice je veľká. Pri výpočte sa zanedbáva tiež vplyv elektrónov v molekule, čo je hrubé priblíženie, pretože v centrálnej časti molekuly H_2 je značná koncentrácia záporného náboja.

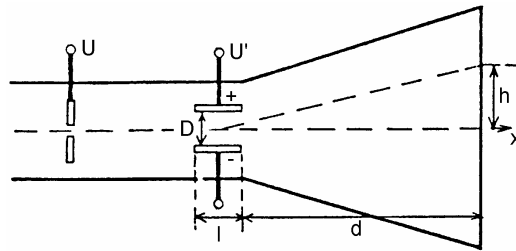


Obr. 277

278. Jednomocný ión cézia je urýchľovaný pozdĺž dráhy dlhej $d = 3,3$ mm elektrickým poľom o intenzite $E = 3 \cdot 10^4$ V/m zo stavu pokoja. Vo vákuu bez prítomnosti poľa prejde potom urýchlený ión dráhu o dĺžke $s = 1$ mm za čas $t = 8,7 \cdot 10^{-8}$ s. Z uvedených údajov určite hmotnosť iónu Cs^+ .

279. V katódovej trubici na obr. 279 sú elektróny urýchľované napätím U a po urýchlení prechádzajú medzi vychyľovacími doskami v tvare doskového kondenzátora. Po prechode

vychyľovacím priestorom dopadajú elektróny na fluorescenčné tienidlo, kde vytvárajú svetelnú stopu. Odvodte výraz pre odchýlku h elektrónového lúča na tienidle, ak napätie na vychyľovacích doskách je U' . Riešte numericky pre: $U = 500$ V, $U' = 100$ V, $l = 2$ cm, $D = 0,5$ cm, $d = 8$ cm.



Obr. 279

280. Dva rovnaké doskové kondenzátory 1 a 2 (dĺžka dosiek l , vzdialenosť dosiek d) sú zapojené ku zdroju EMN \mathcal{E} podľa obr. 280, pričom kondenzátory sú tesne vedľa seba. Do oblasti kondenzátora 1 (v bode 0 na osi $0x$) vletí elektrón rýchlosťou v_0 v smere osi x .

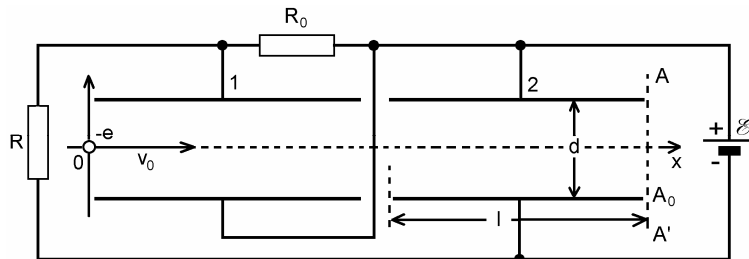
a) Vypočítajte veľkosť a smer rýchlosti, s ktorou elektrón opustí kondenzátor 2 (v rovine AA') pri všeobecne zadaných hodnotách l , d , \mathcal{E} a odporov R a R_0 . Predpokladá sa, že všetky parametre sú zvolené tak, že elektrón pri pohybe medzi doskami kondenzátora nenarazí na dosky.

b) V akej vzdialenosti od osi $0x$ v rovine AA' opustí elektrón kondenzátor 2?

c) Ako musí byť zvolený odpor R (pri konštantnej hodnote odporu R_0), aby elektrón opustil kondenzátor 2 rýchlosťou paralelnou s osou $0x$? Aká veľká je táto rýchlosť? V akej vzdialenosti od osi $0x$ vystúpi elektrón z kondenzátora 2?

d) Aká musí byť hodnota EMN zdroja, aby elektrón vyletel z kondenzátora 2 tesne popri pravej hrane jeho dolnej dosky (bodom A_0) rýchlosťou paralelnou s osou $0x$? Tento prípad riešte numericky pre: Energia elektrónu na vstupe kondenzátora 1 je $W_k = 10$ keV a jeho rýchlosť je paralelná s osou $0x$, $l = 10$ cm, $d = 2$ cm.

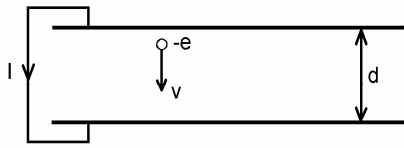
e) Kde je v prípade d) energia elektrónu medzi doskami kondenzátorov maximálna? Aká je jej hodnota?



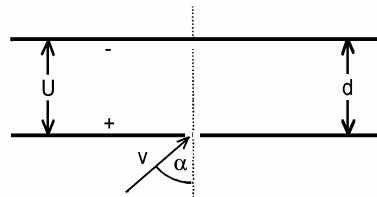
Obr. 280

281. Dve veľmi veľké paralelné vodivé roviny uložené vo vzdialenosti $d = 2$ mm sú spojené vodivým skratom podľa obr. 281. V istom okamihu je z jednej roviny uvoľnený elektrón, ktorý sa konštantnou rýchlosťou $v = 10^6$ m/s pohybuje kolmo k druhej rovine a dopadne na ňu. Nájďte veľkosť prúdu, ktorý potečie skratom v čase pohybu elektrónu medzi rovinami. Ako dlho trvá tento prúdový impulz? Jednoduchý výraz, ktorý dostanete pre prúd je špeciálnym prípadom vety

o indukovaných prúdoch (Shockleyho-Ramova veta) často používanej v teórii generátorov kmitov veľmi vysokých frekvencií. Pri riešení využite výsledok riešenia úlohy 43.

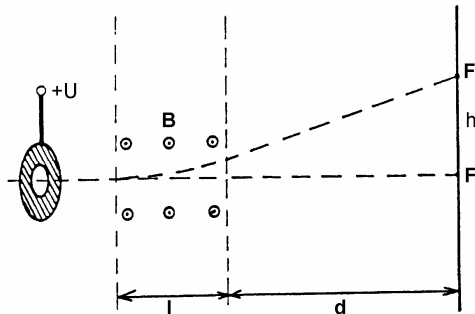


Obr. 281



Obr. 282

282. Elektrón s rýchlosťou $v = 10^7$ m/s vlieta do priestoru doskového kondenzátora so vzdialenosťou dosiek $d = 1$ cm, ktorý je pod napätím $U = 425$ V (obr. 282). Uhol dopadu elektrónu vzhľadom na kolmicu k doske kondenzátora $\alpha = 30^\circ$. Vypočítajte hĺbku preniku elektrónu do kondenzátora, ak horná doska kondenzátora je záporná. Nájdite vzdialenosť miesta dopadu elektrónu od kolmice na hornej doske, ak polarita napätia na doskách je opačná.



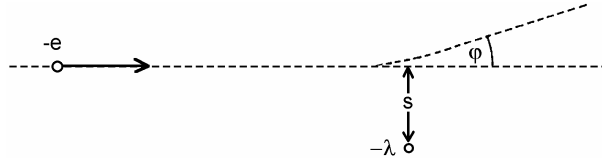
Obr. 283

283. Zväzok elektrónov urýchlených napätím $U = 300$ V prechádza priestorom s homogénnym magnetickým poľom s indukciou $B = 1,46 \cdot 10^{-2}$ T, ktoré smeruje na obr. 283 pred nákrešňu. Magnetické pole pôsobí na dĺžke $l = 2,5$ cm. Bez prítomnosti magnetického poľa zväzok dopadá do bodu F na fluorescenčnom tienidle, ktoré sa nachádza vo vzdialenosti $d = 5$ cm od pravej hranice magnetického poľa. Za prítomnosti magnetického poľa zväzok dopadá do bodu F' na tienidle. Vypočítajte odchýlku $h = FF'$ elektrónového zväzku.

284. α -častica vletí do homogénneho magnetického poľa s indukciou $B = 2,5 \cdot 10^{-2}$ T, pričom jej rýchlosť je kolmá na smer magnetického poľa. Moment hybnosti častice v danom poli je $L = 1,33 \cdot 10^{-22}$ m².kg.s⁻¹. Vypočítajte kinetickú energiu častice a jej cyklotrónovú frekvenciu. Hmotnosť protónu, príp. neutrónu je $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

285. Nabitá častica sa pohybuje rýchlosťou v_x v smere osi x v navzájom kolmých elektrických a magnetických poliach E_y a B_z . V akom vzťahu musí byť rýchlosť častice v_x k poliach E_y a B_z , aby polia neovplyvnili smer pohybu častice? Na princípe dvoch kolmých polí, ktoré sú kolmé na rýchlosť častice sa zakladá činnosť rýchlostného selektora v Bainbridgeovom hmotnostnom spektrografe.

286. V elektrónovom mikroskope prechádza zväzok elektrónov s veľkou energiou vedľa tenkého priameho drôtu, ktorý je uložený kolmo k začiatočnému smeru elektrónov vo vzdialenosti s od tohoto smeru podľa obr. 286. Drôt je nabitý záporným nábojom λ na jednotku dĺžky. Elektrické pole drôtu je slabé, takže málo ovplyvní dráhu elektrónov. Ukážte, že v takomto prípade uhol odchýlky elektrónového zväzku v nezávisí od vzdialenosti s , t. j. rovnobežný zväzok zostáva rovnobežným aj po odklone od prvotného smeru! Nabitý drôt pôsobí v tomto prípade na elektrónový zväzok podobne ako Fresnelov dvojhranol na svetelný zväzok.



Obr. 286

287. Vákuová dióda má cylindrickú anódu s polomerom R a katódou veľmi malého polomeru r na osi anódy. Anóda je udržiavaná na potenciále V oproti katóde. V smere osi cylindra je naložené homogénne magnetické pole B . Bez prítomnosti magnetického poľa by sa elektróny emitované katódou pohybovali radiálne k anóde. V dôsledku pôsobenia magnetického poľa sa elektróny pohybujú po zakrivených dráhach s polermi zakrivenia závislými od veľkosti magnetickej indukcie. Pri istej hodnote magnetickej indukcie B elektróny vôbec nedosiahnu anódu a vracajú sa na katódu. Vypočítajte túto najmenšiu kritickú hodnotu magnetickej indukcie, pri ktorej prúd diódou prestáva tiecť! Pri výpočte predpokladajte, že rýchlosť elektrónov je konštantná a daná výrazom

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

čo je skutočne dobre splnené, ak $r \ll R$ (prečo?). Na opísanom princípe pracuje generátor veľmi vysokých frekvencií nazývaný magnetrón.

288. Elektrón sa pohybuje v elektrickom a magnetickom poli, ktoré má v pravouhlom súradnicovom systéme zložky

$$(0, -E_y, 0)$$

$$(0, 0, -B_z)$$

V čase $t = 0$ sa elektrón nachádza v začiatku súradníc, kde je jeho rýchlosť nulová. Vypočítajte:

- tvar dráhy elektrónu,
- zložky rýchlosti elektrónu ako funkcie času,
- unášavú (driftovú) rýchlosť elektrónu.

289. Frekvencia elektrického poľa na urýchlenie protónov v cyklotróne s magneticou indukciou B je $\omega = 10^7$ rad/s. Aká frekvencia je potrebná na urýchlenie

- deuterónov,
- iónov He^+ ,
- α -častic?

290. V cyklotróne s polomerom $R = 0,35$ m je na duantoch naložené vysokofrekvenčné elektrické pole s frekvenciou $f = 13,8$ MHz. Vypočítajte:

a) magnetickú indukciu B potrebnú pre synchrónnu činnosť cyklotrónu pri urýchľovaní protónov,

b) maximálnu energiu urýchlených protónov.

291. Elektrón a protón sú urýchľované zo stavu pokoja po dráhe $d = 10$ cm elektrickým poľom intenzity $E = 3 \cdot 10^4$ V/m a potom vniknú do magnetického poľa s indukciou $B = 1$ T, ktoré smeruje kolmo na rýchlosť častíc. Vypočítajte cyklotrónové frekvencie a polomery kruhových dráh častíc v magnetickom poli.

292. Elektrické a magnetické pole v cyklotróne má zložky

$$E_x = E \cos \omega_c t \quad E_y = -E \sin \omega_c t \quad E_z = 0 \quad B_x = B_y = 0 \quad B_z = B$$

kde

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

Os z je totožná s osou cyklotrónu. Vypočítajte zložky dráhy ako funkcie času pre nabitú časticu s nábojom q a hmotnosťou m za predpokladu, že v čase $t = 0$ je častica v začiatku súradníc (v strede cyklotrónu) v pokoji. Nakreslite tvar dráhy častice.

Elektromagnetické vlny

293. Dokážte, že každá funkcia tvaru $f(x, t) = f(x \pm ct)$ vyhovuje vlnovej rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

294. Dokážte, že monochromatické vlny $f(x, t) = Ce^{j(\omega t \pm \beta x)}$ (C je konštanta) sú riešeniami vlnovej rovnice pri hodnote $\beta = \omega/c$.

295. Dokážte, že elektromagnetické pole dané výrazmi

$$E_x = E_0 \cos(z - ct) \quad B_y = \frac{E_0}{c} \cos(z - ct) \quad E_y = E_z = B_x = B_z = 0$$

vyhovuje Maxwellovým rovniciam.

296. Súčin kapacity na jednotku dĺžky a indukčnosti na jednotku dĺžky prenosových vedení je veličina konštantná a rovná sa prevrátenej hodnote štvorca rýchlosti šírenia elektromagnetického poľa v danom prostredí. Dokážte to na príklade koaxiálneho kábla a dvojlinky.

297. Valcovým vodičom s polomerom R a mernou vodivosťou σ tečie konštantný prúd I . Vypočítajte veľkosť Poyntingovho vektora na povrchu vodiča a určite jeho smer. Dokážte, že energia elektromagnetického poľa tečie do vodiča s výkonom

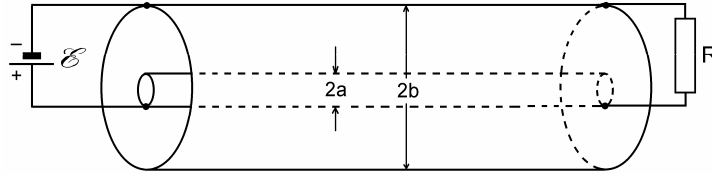
$$P = \frac{I^2}{\pi \sigma R^2}$$

na jednotku dĺžky, t. j. s tým výkonom, s ktorým sa v ňom mení na teplo.

298. Koaxiálny kábel pozostáva z dvoch dutých, ideálne vodivých valcov s polomerami a a b ($a < b$). Na jednom konci je zakončený odporom R (obr. 298). Na vstup kábla je pripojený zdroj elektromotorického napätia \mathcal{E} s nulovým vnútorným odporom. Vypočítajte Poyntingov vektor vo vnútri kábla. Pomocou Poyntingovho vektora dokážte, že energia postupuje káblom s výkonom

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

pozdĺž jeho osi, t. j. s tým výkonom, s ktorým sa mení na teplo v odpore R .



Obr. 298

299. Vypočítajte rýchlosť prenosu energie pozdĺž koaxiálneho kábla podľa predchádzajúcej úlohy. V akom vzťahu je rýchlosť prenosu k rýchlosti svetla?

Poznámka: Rýchlosť prenosu energie vedením je zavedená podobne ako rýchlosť prúdenia kvapaliny v hydrodynamike a je definovaná vzťahom

$$v_p = \frac{S}{w}$$

kde S je tok energie jednotkou plochy za jednotku času (Poyntingov vektor) a w je objemová hustota energie.

300. Rovinná elektromagnetická vlna sa šíri vo vákuu v kladnom smere osi z a jej elektrická zložka je daná výrazom

$$E_x(z, t) = E_{x0} e^{j(\omega t - \frac{\omega}{c}z)}$$

kde E_{x0} je amplitúda x -ovej zložky podľa $E_y = E_z = 0$.

- Vypočítajte rýchlosť šírenia fázy vlny (fázovú rýchlosť).
- Pomocou Maxwellových rovníc nájdite magnetickú zložku vlny.
- Vypočítajte pomer amplitúd elektrickej a magnetickej zložky vlny vo vákuu.
- Vypočítajte strednú hodnotu hustoty toku energie v elektromagnetickej vlně ako reálnu časť komplexného Poyntingovho vektora

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2}$$

kde \mathbf{H}^* je vektor komplexne združený k vektoru \mathbf{H} .

301. Charakteristická impedancia Z prenosového vedenia je definovaná ako pomer priečnej postupujúcej zložky elektrickej vlny k postupujúcej priečnej zložke magnetickej vlny na vedení, pričom sa ukazuje, že

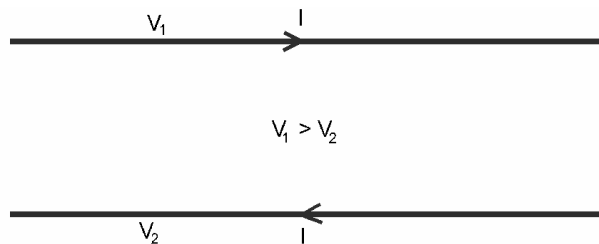
$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

kde L' , C' sú indukčnosť a kapacita na jednotku dĺžky vedenia. Vypočítajte Z pre páskové vedenie vo vákuu z úlohy 206.

302. Svetelná vlna má frekvenciu $f = 4 \cdot 10^{14}$ Hz a dĺžku vlny $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m. Aká je rýchlosť šírenia tejto vlny? Aká je permitivita prostredia, v ktorom sa vlna šíri a jeho index lomu? Permeabilita prostredia je $\mu = \mu_0$. Aká je dĺžka danej vlny vo vákuu?

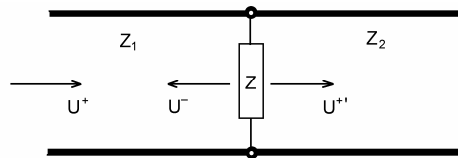
303. Vzduch sa začína ionizovať pri intenzite elektrického poľa $E \approx 3 \cdot 10^6$ V/m (pozri tabuľku 5). Pri akej strednej hustote toku výkonu elektromagnetických vln dostatočne nízkej frekvencie môže vo vzduchu nastať ionizácia?

304. Rovinná elektromagnetická vlna s frekvenciou $\omega = 10^6$ rad/s dopadá na vodivý rámček tak, že vektor \mathbf{H} je kolmý na rovinu rámčeka. Rozmery rámčeka sú malé v porovnaní s dĺžkou vlny. Plocha rámčeka $S = 100$ cm², stredný výkon v elektromagnetickej vlně $P = 1$ W/m². Nájdite amplitúdu indukovaného EMN v rámčeku.



Obr. 305

305. Na obr. 305 je znázornený úsek dvojvodičového vedenia s udanými smermi prúdov vo vodičoch a potenciálmi V_1 a V_2 ($V_1 > V_2$) v tej istej priechnej rovine. Podľa smeru Poyntingovho vektora rozhodnite, kde sa nachádza zdroj – vpravo, či vľavo?.



Obr. 306

306. Nekonečne dlhé dvojvodičové vedenie je v istej rovine premostené impedanciou Z (obr. 306). Vlnová impedancia vedenia naľavo od Z je Z_1 a napravo Z_2 . Z ľavej strany sa po vedení šíri napäťová vlna s amplitúdou U^+ . Nájdite amplitúdu U^- odrazenej a amplitúdu U^{++} postupujúcej vlny v rovine premostenia a amplitúdy prúdov v impedancii Z a vo vedení s vlnovou impedanciou Z_2 .

307. Úlohu 306 riešte pre $Z_1 = Z_2 = Z = R$ (R je činný odpor). Aká časť výkonu napäťovej vlny U^+ sa spotrebuje v impedancii $Z = R$? Aká časť výkonu postupuje vedením s impedanciou $Z_2 = R$ a aká časť výkonu sa odrazí?

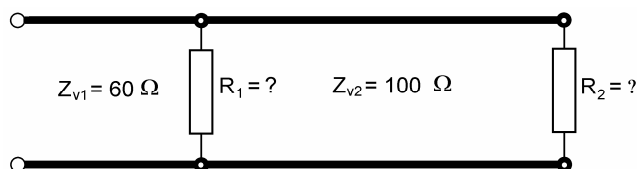
308. Riešte úlohu 307 pre $Z_1 = R$, $Z_2 = Z = 2R$.

309. Dvojvodičové vedenie s vlnovým odporom Z_0 je v prvom prípade zakončené impedanciou $Z = 0$ (skratom) a v druhom prípade $Z = \infty$ (otvorené vedenie). Po vedení postupuje napäťová vlna s amplitúdou U^+ . Nájdite amplitúdu odrazenej vlny U^- v koncovej rovine vedenia. Čím sa budú líšiť vzniknuté stojaté vlny na vedení v prvom a v druhom prípade?

310. Dvojvodičový symetrický kábel má pri frekvencii $f = 1000$ Hz takéto parametre: $R = 6,55 \cdot 10^{-3} \Omega/\text{m}$, $L = 1,36 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$, $C = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, G zanedbateľné. Na frekvencii $f = 100$ MHz je: $R = 0,606 \Omega/\text{m}$, $L = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$, $C = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, G zanedbateľné. Vypočítajte pre obe frekvencie vlnovú impedanciu kábla, útlm v dB/m, straty na vlnovú dĺžku a fázovú rýchlosť vlny v kábli. Porovnajte výsledky pre obidve frekvencie.

311. Koaxiálny kábel pre televízny rozvod podľa údajov výrobcu má polomer vnútorného vodiča $a = 0,575$ mm a vnútorný polomer plášťa $b = 3,625$ mm. Kábel je vyplnený polyetylénom s relatívnou permitivitou $\epsilon_r = 2,25$. Kapacita kábla $C = 67$ pF/m. Vypočítajte:

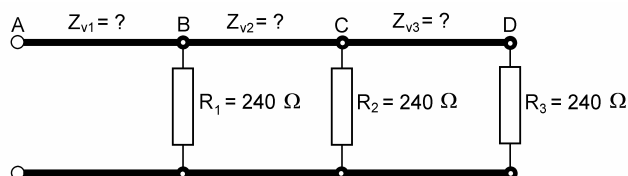
- vlnovú impedanciu kábla,
- indukčnosť na jednotku dĺžky kábla,
- fázovú rýchlosť vlny na kábli.



Obr. 312

312. Aké musia byť hodnoty odporov R_1 a R_2 , aby na vedení podľa obr. 312 nevznikla stojatá vlna?

313. Aké musia byť vlnové impedancie vedení AB, BC a CD na obr. 313, aby pozdĺž celého vedenia nevznikali odrazy?



Obr. 313

314. Vedenie dlhé l má vlnovú impedanciu Z_v a konštantu šírenia γ . Na vstupe vedenia je napätie s amplitúdou U_{vst} a prúd s amplitúdou I_{vst} . Vypočítajte amplitúdu výstupného napätia, prúdu a výstupnú impedanciu.

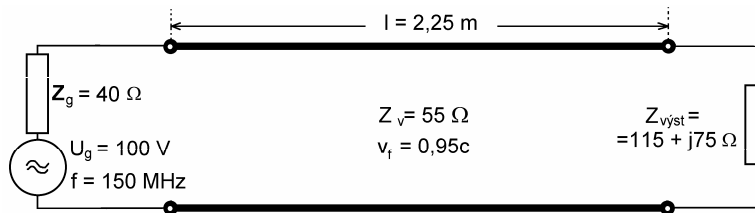
315. K vedeniu dlhému $l = 20$ m je na vstupe pripojený generátor pracujúci na frekvencii $f = 3$ MHz. Vedenie je na výstupe otvorené. Nájdite amplitúdu výstupného napätia, ak amplitúda vstupného napätia $U_{vst} = 20$ V.

316. Amplitúda napätia na konci otvoreného vedenia s vlnovou impedanciou $Z_v = 300 \Omega$ je $U_{vyst} = 600 \text{ V}$. Nájdite amplitúdu napätia a prúdu vo vzdialenosti $l = 40 \text{ m}$ od konca vedenia. Dĺžka vlny na vedení $\lambda = 300 \text{ m}$.

317. Na konci otvoreného vedenia pracujúceho na vlnovej dĺžke $\lambda = 20 \text{ m}$ bola nameraná amplitúda napätia $U_{vyst} = 200 \text{ V}$ a vo vzdialenosti $l = 2 \text{ m}$ od konca vedenia amplitúda prúdu $I_m = 0,5 \text{ A}$. Nájdite vlnovú impedanciu vedenia. Aká je amplitúda prúdu v maxime prúdovej stojatej vlny?

318. Vedenie so vzduchovou izoláciou má vlnovú impedanciu $Z_v = 400 \Omega$ a je dlhé 75 cm . Na výstup vedenia je pripojená reaktancia $Z_r = -j 400 \Omega$. Vedenie pracuje na frekvencii $f = 150 \text{ MHz}$ a amplitúda napätia na jeho vstupe je $U_{vst} = 50 \text{ V}$.

- Vypočítajte vstupnú impedanciu vedenia,
- načrtnite napät'ovú a prúdovú stojatú vlnu,
- vypočítajte amplitúdy napätia a prúdu na výstupe a v maximách stojatých vln.



Obr. 319

319. Na vedení zobrazenom na obr. 319 treba nájsť amplitúdu vstupného a výstupného napätia, prúdu, vstupný a výstupný výkon, ďalej činiteľ stojatej vlny, koeficient odrazu na vstupe a výstupe vedenia, amplitúdy napätia a prúdu v minimách a v maximách stojatých vln a polohy miním a maxím stojatých vln. Načrtnite napät'ovú a prúdovú stojatú vlnu.

320. Vedenie dlhé $l = 120 \text{ km}$ je určené na prenos jednosmerného výkonu. Jeho parametre sú: $R = 53,45 \Omega/\text{km}$, $G = 1,55 \cdot 10^{-6} \text{ S/km}$. Napätie na vstupe vedenia $U_{vst} = 24 \text{ V}$, na výstupe vedenia je skrat. Vypočítajte vstupný a výstupný prúd a vstupný odpor vedenia.

321. Dvojvodičové telefónne vedenie má pri frekvencii $f = 1 \text{ kHz}$ vlnovú impedanciu $Z_v = 615 - j 78 \Omega$ a konštantu šírenia $\gamma = 3,05 \cdot 10^{-3} + j 2,18 \cdot 10^{-2} \text{ km}^{-1}$. Vedenie je dlhé $l = 240 \text{ km}$ a je zakončené záťažou rovnou vlnovej impedancii vedenia. Na vstup je pripojený generátor pracujúci na frekvencii $f = 1 \text{ kHz}$, ktorý zabezpečuje vstupné napätie s amplitúdou $U_{vst} = 5 \text{ V}$. Vypočítajte:

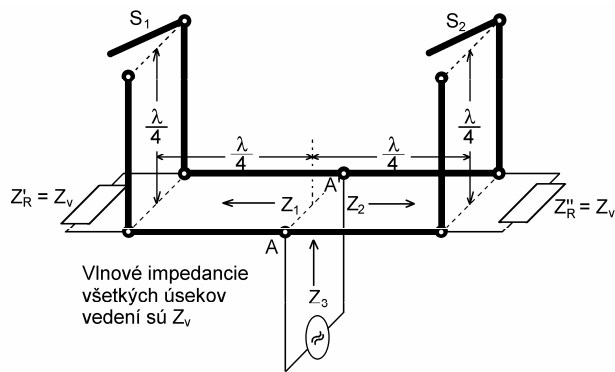
- fázovú rýchlosť na vedení a vlnovú dĺžku,
- amplitúdu vstupného prúdu, výstupného napätia vstupný a výstupný výkon.

322. Nájdite vlnovú impedanciu vedenia, ktoré pozostáva z dvoch paralelných vodičov priemeru $D = 4 \text{ mm}$ uložených vo vzduchu v osovej vzdialenosti $l = 13,54 \text{ cm}$. Vypočítajte vstupnú impedanciu takeého vedenia, ak je dlhé $d = 35 \text{ m}$ (16 m) a na konci skratované (otvorené). Pracovná vlnová dĺžka $\lambda = 50 \text{ m}$. Akú indukčnosť, resp. kapacitu predstavuje vedenie z hľadiska jeho vstupných svoriek?

323. Vedenie s vlnovou impedanciou $Z_v = 70 \Omega$ je na jednom konci skratované a na druhom konci premostené kapacitou $C = 10 \text{ pF}$. Systém má predstavovať rezonátor na frekvencii $f = 100 \text{ MHz}$. Aká musí byť dĺžka vedenia?

324. Paralelný LC obvod s indukčnosťou $L = 125 \mu\text{H}$ kmitá na frekvencii $f = 2 \text{ MHz}$. Pre účely merania je k nemu pripojený paralelne jeden koniec koaxiálneho vedenia, ktorého druhý koniec je pripojený k meraciemu prístroju s nekonečnou vnútornou impedanciou. Podľa údajov výrobcu má kábel vlnovú impedanciu $Z_v = 52 \Omega$ a kapacitu $C = 93,5 \text{ pF/m}$. Kábel má dĺžku $d = 76 \text{ cm}$. Ako sa zmení rezonančná frekvencia obvodu po pripojení kábla?

325. 70-ohmový dipól treba prispôsobiť k 300-ohmovému symetrickému zvodu úsekom štvrtvlnového vedenia pri vlnovej dĺžke $\lambda = 4,84 \text{ m}$ ($f = 62 \text{ MHz}$) Nájdiť vlnovú impedanciu a dĺžku tohoto vedenia.



Obr. 326

326. Na obr. 326 je znázornený prenosový systém s dvoma záťažami a generátorom.
- Určite Z_1 , Z_2 a Z_3 , ak je spínač S_1 zopnutý a S_2 rozopnutý. Kam postupuje výkon?
 - Odpovedzte na otázky bodu a) ak je spínač S_1 rozopnutý a S_2 je zopnutý.
 - Kam postupuje výkon?