

8 MAGNETIZMUS LÁTOK

Vid' Božie dielo,
lebo kto môže narovnať to,
čo On skrivil?

Kazateľ 7, 13

Pojednanie o magnetizme látok by sme mohli začať podobnou otázkou, akú sme položili v úvode 4. kapitoly o elektrických vlastnostiach dielektrík, či totiž magnetické pole interaguje s látkami, a odpoveď by bola tiež pozitívna: "Pole, v tomto prípade magnetické, vplýva na magnetický stav látok, a naopak, látky ovplyvňujú magnetické pole". Táto vzájomná interakcia je však, oproti elektrickému pôsobeniu, oveľa zložitejšia a to vyžaduje rozdeliť magnetické javy na viacero skupín. Sú to: **diamagnetizmus, paramagnetizmus, feromagnetizmus, ferimagnetizmus a antiferomagnetizmus**. Látky, ktoré sme doteraz nazývali vodiče a dielektriká, treba teda podľa ich magnetických vlastností rozdeliť na látky **diamagnetické, paramagnetické, feromagnetické, ferimagnetické a antiferomagnetické**. Z magnetického pohľadu majú spoločný názov – **magnetiká**.

Jednotlivé typy magnetizmu budeme analyzovať v osobitných odsekoch. Aby sme si však uvedomili rozsah a hĺbku problematiky, uvedieme hneď na úvod základné charakteristické črty jednotlivých typov magnetizmu.

Diamagnetické sú také látky, ktoré "sa bránia" vplyvu vonkajšieho magnetického poľa. V ich štruktúre sú mechanizmy vyvolávajúce vznik protipola, takže výsledná magnetická indukcia v nich je menšia ako indukcia tých istých zdrojov (teda tých istých prúdov) vo vákuu. Možno teda očakávať, že jav diamagnetizmu nejakým spôsobom súvisí s elektromagnetickou indukciou a s Lenzovým zákonom.

Paramagnetické látky sa vyznačujú tým, že v svojej štruktúre majú elementárne magnetíky na atomárnej úrovni, ináč povedané, látka obsahuje elementárne magnetické dipóly, ktoré sa vo vonkajšom poli orientujú do jeho smeru.¹ Táto skupina látok nám pripomína dielektriká s orientačnou polarizáciou, lenže zatiaľ čo v dielektriku sa elektrické pole orientáciou dipólov zoslabí, v paramagnetiku sa magnetická indukcia naopak, zosilní. Z toho plynie, že nemá zmysel hľadať analógiu medzi elektrickým a magnetickým polom, pretože tá nie je väčšia ako je analógia medzi elektrickým a magnetickým dipólom – majú síce niektoré formálne podobné vonkajšie prejavy, ale to je všetko.

Interakcia magnetického poľa s paramagnetikami a s diamagnetikami je slabá, čo sa kvantitatívne vyjadruje ako veľmi malá absolútna hodnota magnetickej susceptibility χ , ktorá je mierou magnetickej polarizovateľnosti látky. Z týchto dôvodov sa niekedy paramagnetiká a diamagnetiká označujú spoločným názvom – **slabomagnetické látky**. Výraznejší paramagnetizmus prejavuje iba kvapalný kyslík pri teplote $90\text{ K} = -183\text{ °C}$, vtedy je však látka v nezvyčajných termodynamických podmienkach.

¹ Treba znovu zdôrazniť, že magnetický dipól je v skutočnosti malý kruhový prúd.

Dôležitou vlastnosťou slabomagnetických látok je linearita ich magnetických prejavov. Vzťah medzi budiacim poľom, ktorým je intenzita magnetického poľa H , a magnetickou indukciou B v látke, je v širokom rozsahu dosiahnuteľných hodnôt lineárny. Ak je slabomagnetická látka štruktúrne, a tým aj magneticky izotropná, možno jej magnetické vlastnosti vyjadriť púhym číslom. Analýza makroskopických magnetických polí v takých prostrediach sa nijako nelíši od analýzy vo vákuu a výsledky sa líšia iba číselným bezrozmerným súčiniteľom.

Z hľadiska praktického využitia slabomagnetických látok, napr. v elektrotechnike, sa ich magnetické vlastnosti takmer vždy ignorujú a vlastnosti látky sa nahrádzujú magnetickými vlastnosťami vákuu.

Diamagnetickú zložku má permeabilita všetkých látok. Záleží iba na tom, či v prítomnosti napr. paramagnetických prímiesí v danej látke nakoniec nepreváži paramagnetizmus nad diamagnetizmom.

Feromagnetické látky sa svojimi magnetickými vlastnosťami diametrálne odlišujú od diamagnetík a paramagnetík. Z prírodných látok k nim patrí šesť prvkov, z toho tri kovy – železo (Fe), kobalt (Co) a nikel (Ni) a pri nízkych teplotách tri vzácne zeminy – gadolínium (Gd), dyspróziu (Dy) a samárium (Sm). Okrem nich bolo pripravených veľké množstvo zliatin so špeciálnymi feromagnetickými vlastnosťami. Existuje ešte jedna skupina látok s podobnými vlastnosťami ako feromagnetiká – sú to ferimagnetické látky (nazývané tiež **ferity**), umelo vyrobené keramiky na báze oxidov železa. **Všetky tieto látky sa vyznačujú veľmi silnou magnetizáciou a zachovávajú si magnetický stav aj bez vonkajšieho poľa.** Pre tieto ich vlastnosti sa nazývajú tiež **silnomagnetické látky**. Feromagnetiká a ferimagnetiká sú látky magneticky veľmi nelineárne, a navyše vykazujú hysterézu – nejednoznačnú závislosť magnetizácie od budiaceho poľa.

Tieto neobyčajné fyzikálne vlastnosti feromagnetík vyvolávajú tušenie, že teoretická analýza feromagnetizmu je veľmi zložitá, čo je pravda, a problematika patrí v skutočnosti do oblasti kvantovej a štatistickej fyziky. Na druhej strane, a na rozdiel od slabomagnetických látok, sú feromagnetiká dôležité technické materiály. Ich existencia je predpokladom pre priemyselnú výrobu elektrickej energie na princípe elektromagnetickej indukcie, využívajú sa v elektronike, pri výrobe rôznych elektronických súčiastok a zariadení, ako sú reproduktory, relé, magnetické pamäti, tvoria základ pre výrobu médií na záznam obrazu, zvuku a v iných oblastiach ľudskej činnosti. Bez feromagnetík si elektrotechniku a elektroniku jednoducho nevieme predstaviť.

Fyzikálnu podstatu makroskopického magnetizmu látok treba hľadať v magnetizme základných stavebných kameňov látok – v atónoch, a preto ďalší odsek venujeme magnetickým vlastnostiam atómov.

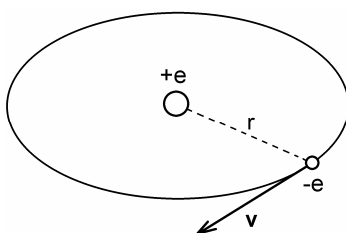
8.1 MAGNETICKÉ VLASTNOSTI ATÓMOV

Elementárnymi nositeľmi magnetických vlastností v látkach sú atómy. Z magnetického hľadiska sú atómy zložené elektrodynamické systémy, ktorých vlastnosti možno dostatočne presne opísať iba metódami kvantovej teórie. Pri našich úvahách budeme vychádzať z predstavy, ktorú začiatkom minulého storočia v rámci svojej poloklasickej a polokvantovej teórie atómu vyslovil dánsky teoretický fyzik Niels Bohr (1885 – 1962). Je to predstava o planetárnom modeli atómu. Podľa tejto predstavy atóm pozostáva

z relatívne masívneho, elektricky kladne nabitého jadra tvoreného protónmi a neutrónmi s celkovým nábojom Ze (Z – atómové číslo, e – náboj protónu), a zo Z záporných elektrónov s nábojmi $-e$ obiehajúcich okolo jadra po uzavretých stabilných dráhach (orbitách) konštantnou obežnou rýchlosťou v podobne, ako planéty okolo Slnka. Nebudeme pátrať po tom, prečo je to tak, na tieto otázky odpovedá atómová fyzika.

Voľný atóm je elektricky neutrálny, pretože jeho celkový náboj je nulový a voľný atóm nevykazuje ani elektrický dipólový moment. O tejto skutočnosti sme hovorili na začiatku 4. kapitoly o dielektrických vlastnostiach materiálov. Iná je situácia v atóme z hľadiska jeho magnetického poľa. Elektricky neutrálny atóm vytvára v svojom okolí magnetické pole a toto pole má dipólový charakter. Elektróny obiehajúce okolo jadra predstavujú slučkové prúdy a pohybujúci sa elektrón na jednej elektrónovej dráhe s polomerom r vytvára elektrický prúd so strednou hodnotou

$$\bar{I} = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$



Obr. 8.1

kde $T = 2\pi r/v$ je perióda obehu elektrónu okolo jadra po kruhovej dráhe s polomerom r . Atóm s jedným elektrónom (vodíkový atóm) je znázornený na obr. 8.1. S takýmto kruhovým prúdom sa spája magnetický dipól, ktorý má **magnetický moment** veľkosti

$$m = \bar{I}S = \bar{I}\pi r^2 = \frac{evr}{2} \quad [\text{A}\cdot\text{m}^2] \quad (8.1)$$

Na druhej strane, s pohybom elektrónu po kruhovej dráhe je spojený tiež moment hybnosti L alebo mechanický moment veľkosti

$$L = m_e r v \quad [\text{m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-1} = \text{J}\cdot\text{s}] \quad (8.2)$$

kde m_e je hmotnosť elektrónu. Magnetický moment možno potom vyjadriť pomocou jeho momentu hybnosti v tvare

$$m = \frac{e}{2m_e} L \quad (8.3)$$

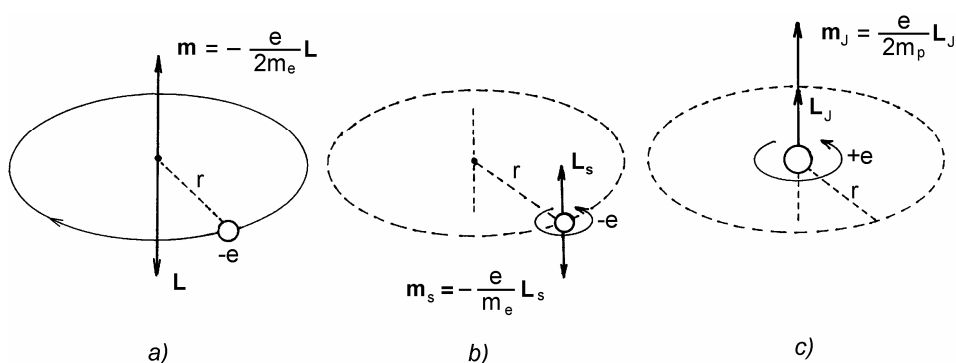
Keďže magnetický moment a moment hybnosti sú vektory \mathbf{m} a \mathbf{L} , možno pre ne napísať aj vektorový vzťah

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L} = -\gamma \mathbf{L} \quad (8.4)$$

kde

$$\gamma = \frac{|\mathbf{m}|}{|\mathbf{L}|} = \frac{e}{2m_e} \quad (8.5)$$

je pomer magnetického a mechanického momentu nazývaný **magnetomechanický pomer** (niekedy menej výstižne nazývaný **gyromagnetický pomer**). Vidíme, že magnetický a mechanický moment sú navzájom opačné a smerujú kolmo na rovinu elektrónovej dráhy (pozri *obr. 8.2a*). Možno si všimnúť, že konštanta úmernosti medzi mechanickým a magnetickým momentom atómu vo vzťahu (8.3) obsahuje iba univerzálne konštanty, teda aj magnetomechanický pomer γ podľa (8.5) je univerzálnou konštantou. V tejto súvislosti je pozoruhodné, že vzťah (8.4) odvodený na základe klasických predstáv je rovnaký, ako vzťah, ktorý plynie z kvantovej mechaniky. Lenže tu sa končí všetka zhoda klasickej a kvantovej fyziky.



Obr. 8.2

Experimenty a kvantová teória ukazujú, že mechanický moment elektrónu na atómovej dráhe nemôže byť daný klasickým výrazom (8.2), podľa ktorého sa môže spojito meniť so zmenou rýchlosti v . Na elektrón v atóme sa nemožno pozerat' ako na klasický objekt s definovanou rýchlosťou. Moment hybnosti je v skutočnosti kvantovaná veličina, ktorá môže nadobúdať iba diskrétné hodnoty dané výrazom

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad (8.6)$$

kde $\hbar = h/(2\pi) = 1,055 \cdot 10^{-34}$ J.s je Planckova konštanta (kvantum momentu hybnosti, alebo kvantum účinku) a l je bezrozmerné celočíselné orbitálne kvantové číslo, ktoré môže nadobúdať hodnoty 0, 1, 2, ...

Nie je možné na tomto mieste zachádzať do kvantovej fyziky, a preto sa tu obmedzíme iba na uvedenie tých faktov, ktoré sú bezprostredne potrebné pre pochopenie atómového magnetizmu. Tieto fakty Vám budú zdôvodnené neskôr, a na primeranej úrovni. Ak dosadíme výraz (8.6) do výrazu (8.3), potom pre veľkosť magnetického momentu elektrónovej orbity dostaneme výraz

$$m_l = -\frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{l(l+1)} = -\mu_B\sqrt{l(l+1)} \quad (8.7)$$

z ktorého vidieť, že aj magnetický moment elektrónovej dráhy je kvantovaný. Najmenšie kvantum elektrónového magnetického momentu

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,274\,041 \cdot 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

sa volá **Bohrov magnetón**.

Orbitálnym pohybom elektrónov okolo jadra atómový magnetizmus zďaleka nie je vyčerpaný. Elektrón na atómovej dráhe má ešte vlastný magnetický moment m_s , ktorý súvisí s jeho vlastným momentom hybnosti L_s , ktorý sa nazýva spin (anglický názov pre "vrtenie, otáčanie"). Podľa klasických predstáv spin je rotačný moment hybnosti elektrónu. Klasická predstava spinu však úplne zlyháva, ak pripustíme, že elektrón je bodová častica (pozri odsek 1.2). Spin elektrónu preto treba považovať za čisto kvantovomechanickú vlastnosť, ktorá nemá v klasickej fyzike vysvetlenie. Teória a experimenty ukazujú, že spinový moment je

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} \quad (8.8)$$

kde s je bezrozmerné spinové kvantové číslo, ktoré môže nadobudnúť iba jednu hodnotu

$$s = \frac{1}{2} \quad (8.9)$$

Vzt'ah medzi spinovým a magnetickým momentom plynie z kvantovej fyziky a je tvaru

$$m_s = -\frac{e}{m_e}L_s = -\frac{e\hbar}{m_e}\sqrt{s(s+1)} = -\mu_B\sqrt{3} \quad (8.10)$$

Aj spinový magnetický moment elektrónu smeruje proti momentu hybnosti (spinu) (pozri obr. 8.2b).

Ak si uvedomíme, že atóm vo všeobecnosti obsahuje viac elektrónov, potom jeho výsledný magnetický moment musí byť výsledkom vektorového zloženia spinových i orbitálnych momentov a výsledok tohto zloženia sa v kvantovej mechanike vyjadruje bezrozmerným **Landého g-faktorom** alebo jednoducho g -faktorom. Výsledný elektrónový magnetický moment atómu je vyjadrený výrazom

$$\mathbf{m}_{ls} = -g\frac{e}{2m_e}\mathbf{L}_{ls} \quad (8.11)$$

Landého faktor môže nadobúdať hodnoty od 1 – pre čiste orbitálny magnetický moment atómu, ak sa spinový moment ruší – po 2, ak magnetický moment atómu je výlučne spinový.

Ani tým však magnetické vlastnosti atómu nie sú vyčerpané. Ukazuje sa, že aj atómové jadro (v prípade vodíka protón) má rotačný moment hybnosti (spin) L_j , a keďže

je to elektricky nabitý objekt, musí mať aj magnetický moment m_j . Žiaľ, aj tento moment možno opísať iba kvantovomechanickými prostriedkami a pre vodíkové jadro (protón) je daný výrazom

$$m_j = g_j \frac{e}{2m_p} L_j \quad (8.12)$$

kde $g_j = 5,585\ 54$ je g -faktor pre protón a m_p je hmotnosť protónu. Jadrový magnetický moment na rozdiel od elektrónového má rovnaký smer ako jeho spin (pozri obr. 8.2c). V analógii s Bohrovým magnetónom možno aj pre protón definovať atómovú jednotku magnetického momentu μ_j . Jej číselná hodnota je

$$\mu_j = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,050\ 804 \cdot 10^{-27} \text{ A}\cdot\text{m}^2 \quad (8.13)$$

a nazýva sa **jadrový magnetón**. Vidíme, že jadrový magnetón je zhruba 1836 krát menší ako Bohrov magnetón, pretože o toľkokrát je väčšia hmotnosť protónu oproti hmotnosti elektrónu. Jadrový magnetizmus v atóme je teda veľmi slabý a na celkovej elektromagnetickej energii atómu sa prejaví iba nepatrnými kvantovými skokmi. Aj slabý jadrový magnetizmus sa dá dnes efektívne skúmať metódou, ktorá sa nazýva metóda jadrovej magnetickej rezonancie, známa pod skratkou JMR, alebo NMR (nuclear magnetic resonance) a pritom je len málo slabých kvantovomechanických efektov, ktoré majú taký obrovský praktický význam, ako práve jadrový magnetizmus. Na princípe NMR boli vyvinuté zariadenia – **počítačové NMR tomografy**, ktorými možno neinvazívne vyšetřovať tkanivá ľudského tela "in vivo" neporovnateľne precíznejšie ako metódami RTG, a bez škodlivého röntgenového žiarenia. O jadrovej magnetickej rezonancii bude podrobnejšie pojednané v odseku 8.5.4.

Ak má byť magnetický obraz atómu úplný, treba s počudovaním povedať, že aj neutrón má magnetický moment

$$m_n = -g_n \frac{e}{2m_n} L_n \quad (8.14)$$

kde $g_n = 3,86$ je neutrónový g -faktor, $m_n \approx m_p$ je hmotnosť neutrónu a L_n je moment hybnosti (spin) neutrónu. Možno, že táto skutočnosť nie je až taká prekvapujúca, ak si uvedomíme, že neutrón má svoju elektromagnetickú štruktúru, a teda nie je to nijaká elektricky neutrálna častica (pozri odsek 1.2, obr. 1.2).

Ak zhrnieme naše poznatky o magnetických vlastnostiach atómu vidíme, že atóm je veľmi zložitý dynamický systém so zložitým vnútorným magnetickým poľom. Treba tiež pripomenúť, že v súvislosti s Pauliho princípom majú dráhové a spinové momenty v atóme tendenciu navzájom sa kompenzovať. Preto iba niektoré atómy sú paramagnetické. Paramagnetický nemôže byť napr. atóm, ktorý má párny počet elektrónov, pretože jeho dráhové a spinové momenty sa kompenzujú. Taký atóm môže prejavovať iba diamagnetizmus a slabý jadrový paramagnetizmus, hoci aj tu sú výnimky. Treba si tiež uvedomiť, že naše úvahy sa týkali izolovaného atómu, čo je neprirodzený stav, pretože atómy v prírode (s výnimkou inertných plynov) vstupujú do vzájomných väzieb a vytvárajú molekuly.

V nasledujúcom odseku budeme tvoriť makroskopickú teóriu magnetizmu látok. Z našich úvah o magnetizme atómov bude dôležitá iba skutočnosť, že na každý atóm, molekulu, prípadne iný agregát v látke, sa možno pozeráť ako na jeden slučkový prúd, teda jeden magnetický dipól, lepšie povedané, jeden magnetický moment.

8.2 MAKROSKOPICKÁ TEÓRIA MAGNETIZMU LÁTOK

8.2.1 Vektor magnetizácie

V tomto odseku budeme predpokladať makroskopický objem spojitého magnetika, ktoré pozostáva z elementárnych magnetických "dipólov" dostatočne malých tak, že ľubovoľne malý objem $d\tau$ obsahuje dostatočne veľký počet slučiek (dipólov) s momentom \mathbf{m} a v látke sa neprejavuje jej magnetická "zrinitosť". Za predpokladu, že materiál nemá žiadnu magnetickú predhistóriu a nenachádza sa vo vonkajšom magnetickom poli, nebude navonok prejavovať žiadne magnetické vlastnosti, pretože možno predpokladať, že momenty v látke sú rozložené štatisticky rovnomerne do všetkých smerov a ich účinky sa v priestore aj v čase navzájom kompenzujú v dôsledku tepelného pohybu.

Čitateľ môže namietať, že z našej analýzy takým postupom vylúčime diamagnetické látky, ktoré sme v úvode nespájali s pojmom magnetických momentov. V makroskopickej teórii však zmenšenie magnetického poľa v diamagnetikách môžeme vyjadriť prítomnosťou magnetických momentov nasmerovaných proti vektoru magnetickej indukcie.

Ak vložíme látku do magnetického poľa s indukciou \mathbf{B} , budú mať jej dipóly pod účinkom točivého momentu $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$ tendenciu natočiť sa do smeru vektora \mathbf{B} .¹ Miera usporiadania momentov do smeru poľa bude závisieť od veľkosti poľa \mathbf{B} v látke. V konečnom dôsledku sa v látke vytvorí istá "polarizácia" momentov úmerná množstvu a veľkosti jednotlivých momentov a objemu. Vektorový súčet magnetických momentov na jednotku objemu definuje vektorovú veličinu

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{\Delta\tau} \quad [\text{A}\cdot\text{m}^{-1}] \quad (8.15)$$

ktorá sa nazýva magnetizácia alebo vektor magnetizácie \mathbf{M} . Vidno, že výraz (8.15) vlastne udáva vektorovú objemovú hustotu magnetických momentov. V nezmagnetizovanom prostredí sú jednotlivé momenty štatisticky nasmerované do všetkých možných smerov, a v tom prípade $\mathbf{M} = 0$. V prípade identických momentov \mathbf{m} vo zvolenom smere s objemovou koncentráciou n možno magnetizáciu vyjadriť jednoducho ako

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m} \quad (8.16)$$

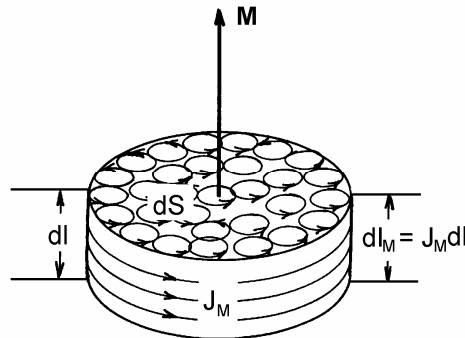
a v prípade spojitého rozloženia momentov tiež

¹ Situácia je podobná ako pri vložení látky do elektrického poľa \mathbf{E} , kde na dipóly s elektrickým momentom \mathbf{p} pôsobí točivý moment $\mathbf{p} \times \mathbf{E}$.

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{d\tau} \quad (8.17)$$

Predpokladajme, že zo zmagetizovaného materiálu bol "vyrezaný" elementárny valček ako na obr. 8.3. Výška valčeka je dl a prierez dS , takže jeho objem je $d\tau = dSdl$. Vektor magnetizácie \mathbf{M} splyva s osou valčeka. Valček obsahuje elementárne (atomárne) slučkové prúdy, ktoré pri danej orientácii vektora \mathbf{M} tečú v priečnej (azimutálnej) rovine valčeka proti smeru hodinových ručičiek. V objeme valčeka sa tieto prúdy navzájom rušia a na plášti valčeka tečie plošný prúd J_M . Tento atomárny cirkulačný prúd v zmagetizovaných látkach predpokladal už Ampère v čase, keď o látkach ešte neexistovala atomárna predstava. Je to celkom reálny prúd, ktorý však nie je prístupný meraniu, a tak, ako sme v dielektriku definovali pojem viazaných nábojov, pre cirkulačné Ampérove prúdy v látke definujeme pojem viazané prúdy. Veľičina J_M má teda význam plošnej hustoty viazaných prúdov v jednotkách A/m. Dáme tento prúd do súvisu s vektorom magnetizácie \mathbf{M} . Na zmagetizovaný valček sa možno pozerat' ako na magnetický dipól s momentom veľkosti $dm = dl dS = J_M dl dS$. Podľa výrazu (8.17) veľkosť vektora magnetizácie v nekonečne malom objeme $d\tau = dS dl$ je

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{d\tau} = \frac{J_M dl dS}{dl dS} = J_M \quad (8.18)$$



Obr. 8.3

Vektor magnetizácie sa teda veľkosťou rovná plošnej hustote cirkulačného viazaného prúdu, ktorý valček azimutálne obteká.¹ Pre lepšie pochopenie súvisu (8.18) môže pomôcť nasledovný príklad: *Nekonečne dlhá tyč (napr. veľmi dlhý feromagnetický prút) bola zmagetizovaná tak, že vo vnútri je konštantná magnetizácia \mathbf{M} v smere osi tyče. Treba určiť magnetickú indukciu v tyči.*

Riešenie je veľmi jednoduché. Na zmagetizovanej tyči tečie priečne po jej povrchu cirkulačný viazaný plošný prúd $J_M = M$. Možno sa na ňu teda dívať ako na nekonečne dlhý solenoid s plošným prúdom $nI = J_M = M$ (n je počet závitov na jednotku dĺžky solenoidu, I je prúd v jeho vinutí). Magnetická indukcia v tyči je teda

¹ Podobným spôsobom bol zavedený súvis medzi objemovou hustotou viazaných nábojov σ_v a vektorom polarizácie \mathbf{P} ($P_n = \sigma_v$).

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 M$$

Ak by bolo na tyči ešte vinutie s prúdom, magnetická indukcia by sa zväčšila o príspevok od tohto prúdu. V prípade feromagnetického prúta by sa ale situácia veľmi skomplikovala, pretože prúd by nelineárne ovplyvnil aj magnetizáciu M .

8.2.2 Ampérov zákon pre látkové prostredie

Dospeli sme do situácie, keď možno odpovedať na otázku, akú magnetickú indukciu možno očakávať v látkovom prostredí, ktoré je pod účinkom magnetického poľa voľných (prístupných, merateľných) prúdov. Pri odpovedi možno vychádzať z platnosti Ampérovho zákona (pozri odsek 6.1.6), podľa ktorého dráhový integrál po uzavretej dráhe z magnetickej indukcie \mathbf{B} je úmerný prúdu I , ktorý dráha obopína, teda

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (8.19)$$

Pri jeho odvodení sme prúdy nijako nešpecifikovali, ani neobmedzovali. Dôležité bolo iba to, že predstavujú pohyb nábojov. V látkovom prostredí existujú aj viazané atómové prúdy, ktoré sa musia tiež podieľať na tvorbe magnetickej indukcie. K prúdu I na pravej strane rovnice (8.19) treba pripočítať aj celkový viazaný prúd I_M , ktorý je tiež obopnutý čiarou l , a ktorý súvisí s vektorom magnetizácie \mathbf{M} v látke. Rovnica (8.19) prijme teda tvar

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_M) \quad (8.20)$$

Toto je Ampérov zákon pre látkové prostredia. V tomto tvare má skôr teoretický význam, pretože prúd I_M je nemerateľný viazaný prúd. Na vyjadrenie I_M využijeme úvahy predchádzajúceho odseku a magnetický obvod s prúdom na obr. 8.4a. Dutina toroidálnej cievky s prúdom I_0 a počtom závitov N je naplnená homogénnym izotropným magnetikom. Stredná dĺžka toroidu je $l = 2\pi r_0$. V magnetiku vznikne magnetická indukcia \mathbf{B} s indukčnými čiarami v tvare kružníc. Obopnutý prúd stojaci na pravej strane poslednej rovnice je N závitov s prúdom I_0 , teda

$$I = N I_0$$

a viazaný prúd I_M , ktorý s nejakou plošnou hustotou J_M obteká toroidálne magnetikum po jeho plášti podobne ako reálny prúd v závitoch vinutia a po celej dĺžke l toroidu. Tento prúd sa zrejme dá vyjadriť integrálom

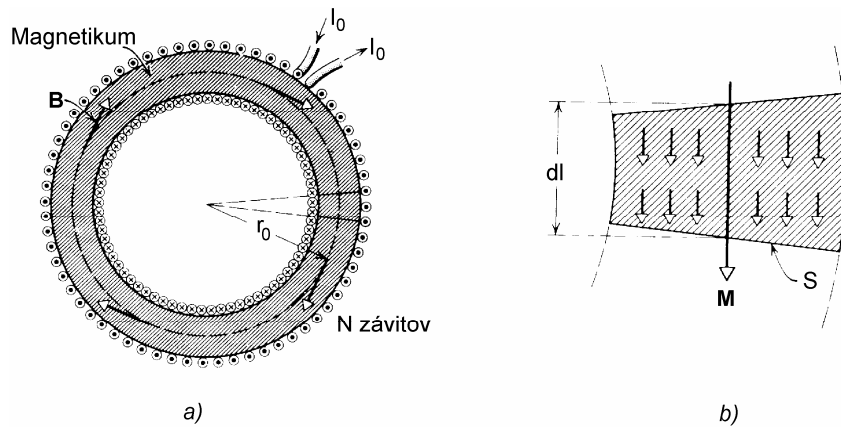
$$I_M = \oint_l J_M dl$$

Ak uvážime, že $J_M dl = M dl = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$ (pozri obr. 8.4b, kde je zobrazený nekonečne krátky úsek dl oblúku toroidu), potom výraz pre I_M nadobudne tvar

$$I_M = \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

Po dosadení tohto vyjadrenia do výrazu (8.20) dostaneme Ampérov zákon (integrálny tvar) pre magnetikum

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(I + \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \right) \quad (8.21)$$



Obr. 8.4

Rovnicu možno prepísať do všeobecnejšieho diferenciálneho tvaru, ak voľný prúd I vyjadríme integrálom prúdovej hustoty \mathbf{J} cez celú plochu S ohraničenú čiarou l , t. j.

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

a na dráhové integrály použijeme Stokesovu vetu. Po úprave dostaneme diferenciálny tvar Ampérovho zákona pre magnetikum

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \text{rot } \mathbf{M}) \quad (8.22)$$

V zátvorke na pravej strane je súčet objemovej prúdovej hustoty \mathbf{J} voľných prúdov a objemovej prúdovej hustoty

$$\mathbf{J}_M = \text{rot } \mathbf{M} \quad (8.23)$$

viazaných prúdov¹.

¹ V dielektriku bola vyjadrená objemová hustota viazaných nábojov $\rho_v = -\text{div } \mathbf{P}$, ale to nie sú tie náboje, ktoré vytvárajú viazané prúdy.

8.2.3 Vektor \mathbf{H}

Ampérov zákon (8.21) možno upraviť na iný dôležitý tvar

$$\oint_l \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = I \quad (8.24)$$

Zvláštnosť výrazu (8.24) spočíva v tom, že integrál po uzavretej dráhe nejakého magnetického vektora (v zátvorke) sa nerovná ničomu inému, iba voľnému (prístupnému) prúdu I v magnetickom prostredí, a nezávisí od prostredia. Označme tento vektor symbolom \mathbf{H} , teda

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (8.25)$$

Vektor sa nazýva **vektor intenzity magnetického poľa \mathbf{H}** , a zaviedli sme ho už v odseku 6.2 pre vákuum (kde $\mathbf{M} = 0$). Ak vo výraze (8.24) urobíme náhradu podľa (8.25) dostaneme Ampérov zákon vo formálne jednoduchom tvare

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (8.26)$$

Interpretácia vektora \mathbf{H} robí rovnaké problémy ako vektora \mathbf{D} . Možno mať k nemu podobné výhrady, aké sme vznikli v teórii dielektrík proti vektoru \mathbf{D} (odsek 4.2). Aj tento vektor je výsledkom zloženia dvoch iných vektorov a jeho fyzikálny význam nie je okamžite zrejmý. Jeho rozmer a jednotka je A/m, čo je rozmer a jednotka plošného prúdu. Napriek všetkým výhradám, praktický význam vektora \mathbf{H} je neporovnateľne väčší ako vektora \mathbf{D} . Integrál \mathbf{H} po uzavretej dráhe podľa rovnice (8.26) závisí iba od voľných dráhou obopnutých prúdov tečúcich napr. vo vinutiach cievok, a tie dokážeme merať ampérmetrami. Vektor \mathbf{D} takúto vlastnosť nemá, pretože hustotu voľných nábojov ρ , ktorá s ním súvisí, merať nevieme.

Ako príklad vypočítame intenzitu magnetického poľa v toroidálnej cievke na obr. 8.4a. Intenzita \mathbf{H} má smer pozdĺž \mathbf{B} , resp. \mathbf{M} a na polomere r_0 má hodnotu plynúcu z (8.26)

$$H = \frac{NI_0}{l} = \frac{I}{l}$$

Vo vnútri toroidálnej cievky, v magnetiku, podľa vzťahu (8.25) teda platí

$$H = \frac{NI_0}{l} = \frac{B}{\mu_0} - M$$

Pokiaľ sa určí súvis magnetizácie M s H , resp. B , dokážeme odpovedať na otázku, aká je magnetická indukcia v toroide.

Uvedený príklad svedčí o tom, že ak je magnetické pole v látke dôsledkom vonkajších magnetizačných prúdov, vektor \mathbf{H} je veľmi užitočný, až natoľko, že vzťah (8.25) sa často píše v tvare

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (8.27)$$

ako keby nie vektor \mathbf{B} , ale vektor \mathbf{H} bol základným vektorom magnetizmu. Ak niekedy hovoríme že "vektor \mathbf{B} závisí od \mathbf{H} " obyčajne máme na mysli skutočnosť, že magnetická indukcia \mathbf{B} je produkovaná voľnými prúdmi, ktoré sú zdrojom vektora \mathbf{H} . Okrem toho magnetizácia \mathbf{M} v látke sa nespája s vektorom \mathbf{B} , ale sa predpokladá, že ju indukuje vektor \mathbf{H} , teda v skutočnosti magnetizujúce vonkajšie prúdy, čo je vcelku logický prístup. Preto sa zavádza vzťah

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H} \quad (8.28)$$

kde χ je bezrozmerný koeficient nazývaný magnetická susceptibilita. Takýto vzťah však musíme hodnotiť ako empirický a treba sa k nemu ešte vrátiť. Ak však výraz (8.28) dosadíme do (8.27) dostaneme nový empirický vzťah

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad (8.29)$$

kde

$$\mu_r = 1 + \chi \quad (8.30)$$

je bezrozmerná **relatívna permeabilita** magnetika a

$$\mu = \mu_0\mu_r \quad [\text{H}\cdot\text{m}^{-1}] \quad (8.31)$$

permeabilita magnetika. Aj posledné výrazy potrebujú komentár.

Posúďme teraz vlastnosti vektora intenzity magnetického poľa \mathbf{H} v spontánne zmagnetizovanom prostredí, ktoré je bez prítomnosti vonkajších magnetizujúcich prúdov. Takýmto prostredím je napríklad permanentný magnet, feromagnetický alebo ferimagnetický materiál, v ktorom bol vybudovaný stály magnetický moment. Je zrejmé, že v takom prípade v rovnici (8.26) $I = 0$ a rovnica má tvar

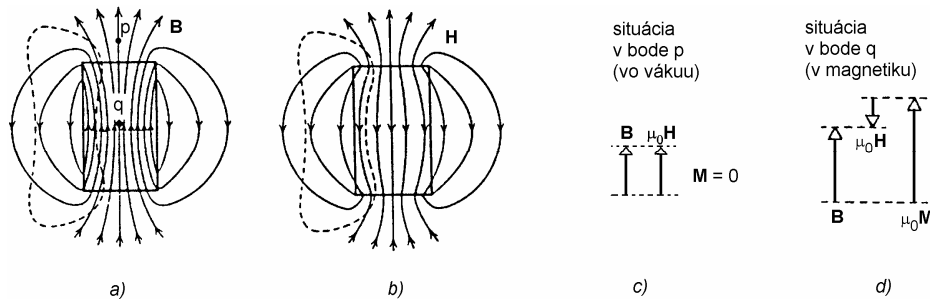
$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (8.32)$$

Ak nejde o triviálny prípad, keď $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ všade, potom také pole musí mať vlastnosti elektrostatického poľa s intenzitou \mathbf{E} , pre ktorú platí

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Lenže elektrostatické pole je potenciálové pole, ktoré má svoje zdroje v elektrických nábojoch. Magnetické pole také zdroje nemá, pretože žiadne magnetické náboje neexistujú. V prípade permanentných magnetov sa teda fyzikálny význam vektora \mathbf{H} úplne stráca a má význam iba formálnej veličiny podľa vzťahu (8.25).

Aby sme toto tvrdenie dokázali, uvažujme tyčový permanentný magnet, ktorý je zdrojom nenulového magnetického poľa indukcie \mathbf{B} znázorneného indukčnými čiarami vo vnútri a v okolí magnetu, ako na obr. 8.5a. Treba zdôrazniť, že zdrojom tohto poľa nie je voľný prúd, ale viazané atomárne prúdy v magnetu. Indukčné čiary \mathbf{B} sú uzavreté, spojité a zachovávajú jeden smer obehu. Pole indukcie \mathbf{B} je presne také, ako pole krátkého solenoidu s plošným prúdom nI_0 rovným plošnej hustote cirkulačného prúdu v štruktúre látky. Integrál po uzavretej (čiarkovanej) dráhe je nenulový a je úmerný obopnutému viazanému cirkulačnému prúdu. Iná je situácia s poľom \mathbf{H} . Pre pole \mathbf{H} musí platiť rovnica (8.32), čo vyžaduje aby na uzavretej čiare na obr. 8.5b vektor \mathbf{H} menil smer. Skutočne – vo vonkajšom priestore (vo vákuu v bode p), kde $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ je $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$, teda \mathbf{H} má smer vektora \mathbf{B} a vo vnútri magnetu (v bode q) $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ a má smer proti vektoru \mathbf{B} (pozri tiež diagramy na obr. 8.5c,d). Vo vonkajšom priestore je pole vektora \mathbf{H} podobné ako pole \mathbf{B} a jednoducho $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$. Ale vo vnútri magnetu sa polia \mathbf{B} a \mathbf{H} diametrálne líšia, už napríklad len tým, že majú opačný smer. Zatiaľ čo pole \mathbf{B} je tam fyzikálnou realitou, pole \mathbf{H} nemá priamy fyzikálny obsah.¹



Obr. 8.5

Čo sa týka "magnetických nábojov", ak by existovali, potom by museli byť plošne rozložené na čelách magnetu a z nich by vystupovali alebo do nich vstupovali magnetické siločiarly \mathbf{H} . Úloha výpočtu poľa \mathbf{H} by bola formálne rovnaká ako úlohy v elektrodinamike spojené s výpočtom \mathbf{E} . Magnetická indukcia \mathbf{B} v okolí magnetu (vo vákuu alebo vo vzduchu) sa potom určí ako $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$. Skutočne sa takým spôsobom formálne riešia magnetostatické problémy spojené s vonkajšími poľami permanentných magnetov. Možno ukázať, že ak platí rovnica (8.32), potom intenzita magnetického poľa musí byť daná výrazom

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m$$

kde $\varphi_m = V_m/\mu_0$ ² (v jednotkách [A]) je magnetický skalárny potenciál pre intenzitu poľa \mathbf{H} , ktorý je daný riešením Laplaceovej rovnice

$$\Delta\varphi_m = 0$$

¹ Pomocou experimentov, pri ktorých rýchle nabité častice alebo pomalé neutróny prenikali zmagnetizovaným železom sa dokázalo, že ich pohyb sa tam riadi účinkom poľa \mathbf{B} a nie $\mu_0\mathbf{H}$ (pozri učebnicu [5]).

² Pozri tiež výrazy (6.47a,b).

pri daných hraničných podmienkach pre φ_m . Tieto okolnosti vysvetľujú, prečo začiatky teórie magnetizmu boli spojené s magnetickým poľom \mathbf{H} . Aj dnes odborníci, ktorí pracujú v problematike permanentných magnetov, uprednostňujú tento praxou osvedčený postup. Napriek tomu, že vektor \mathbf{H} je takto rozporne hodnotený, vystupuje v jednej z Maxwellových rovníc [pozri ďalej rovnicu (8.37)].

V prípade, keď sú voľné prúdy v magnetiku rozložené objemovo s hustotou \mathbf{J} , možno dať výrazu (8.26) diferenciálnu formu. Už viackrát použitou matematickou procedúrou dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (8.33)$$

V prípade, ak sa v látkovom prostredí s časom mení elektrické pole, treba k pravej strane rovnice pridať hustotu posuvného prúdu (pozri odsek 6.3)

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_{pol} \quad (8.34)$$

kde

$$\mathbf{J}_{pol} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (8.35)$$

je objemová hustota polarizačného prúdu v prostredí spojená s posúvaním elektrických dipólových centier v látke. Na pravej strane rovnice (8.33) treba nahradiť prúdovú hustotu \mathbf{J} celkovou hustotou prúdu

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{J} + \mathbf{J}_p = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (8.36)$$

a rovnica (8.33) prejde na tvar

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (8.37)$$

Niekedy sa nazýva **zákon celkového prúdu**, a ako sme už uviedli v odseku 6.3, je to posledná zo série Maxwellových rovníc.

Vráťme sa teraz k empirickým vzťahom (8.28) a (8.29) pre vektory magnetizácie \mathbf{M} a magnetickú indukciu \mathbf{B} . Súčinitele χ , μ_r a μ určujú magnetické vlastnosti látok. Podľa hodnôt týchto súčiniteľov delíme látky na:

a) **diamagnetické látky**, pre ne $\chi < 0$, $\mu_r < 1$. Pre veľkú väčšinu týchto látok je μ_r veľmi blízke jednotke, a v širokom rozsahu magnetických indukcií je to konštanta;

b) **paramagnetické látky**, pre ne $\chi > 0$, $\mu_r > 1$. Aj pre tieto látky je μ_r blízke jednotke, závislé od teploty a v širokom rozsahu magnetických indukcií zostáva konštantou.

Vo vákuu $\chi = 0$, $\mu_r = 1$ a $\mu = \mu_0$.

Väčšina slabomagnetických látok z bodov a) a b) majú magnetické vlastnosti blízke vlastnostiam vákua, a preto pri ich elektrotechnických aplikáciách sa takmer vždy predpokladá, že ich relatívna permeabilita sa s dobrou presnosťou rovná 1.

V tabuľke 9 je na ilustráciu uvedených niekoľko slabomagnetických látok s ich magnetickými susceptibilitami χ .

Tabuľka 9

Diamagnetiká	$-\chi \cdot 10^6$	Paramagnetiká	$\chi \cdot 10^6$
Voda	9	Hliník	24
Kuchynská soľ	14	Titán	71
Ortuť	29	Platina	264
Zlato	36	Urán	400
Bizmut	166	Kyslík (kvapalný)	3 620

Najzložitejšia je tretia skupina látok. Sú to:

c) **feromagnetické látky**, ktorých $\chi \gg 1$, $\mu_r \gg 1$ a môžu dosahovať hodnôt rádu 10^3 až 10^5 . Okrem toho χ a μ v celom rozsahu magnetizácie silne závisia od magnetujúceho poľa H , od teploty, a ich momentálny stav závisí od predchádzajúceho stavu. Táto vlastnosť feromagnetík sa nazýva hysteréza. Výpočtové úlohy spojené s feromagnetikami sa takmer nikdy nedajú riešiť analyticky, ale iba približnými numerickými metódami s využitím siete ich hysterézných slučiek. Teória feromagnetizmu patrí do oblasti kvantovej fyziky a fyziky tuhých látok. Do širšej skupiny feromagnetík možno zahrnúť aj ferimagnetiká, ktoré majú podobné magnetické vlastnosti s tým rozdielom, že z elektrického hľadiska sú to polovodiče alebo dielektriká. Príklady feromagnetických a ferimagnetických látok uvedieme v odseku venovanom feromagnetizmu.

Na záver tohto odseku sú v tabuľke 10 sumarizované základné vzťahy medzi magnetickými vektormi B , M a H .¹

8.2.4 Magnetické pole na rozhraní dvoch prostredí. Hraničné podmienky

Pri riešení praktických problémov spojených s magnetickými poliami treba zodpovedať na otázku, aké vlastnosti majú vektory magnetického poľa na rozhraní dvoch magnetík. Ak sa vo všeobecnosti hľadajú riešenia Maxwellových rovníc, alebo riešenia Laplaceovej rovnice pri magnetostatických problémoch, ktoré sú z matematického hľadiska diferenciálnymi rovnicami, jednoznačnosť riešenia predpokladá znalosť vlastností riešenia na daných hraničných plochách.

Predpokladajme teda, že magnetické pole existuje v priestore, v ktorom dve látky s rôznymi magnetickými vlastnosťami tvoria rozhranie. Relatívne permeability látok sú μ_{r1} a μ_{r2} , rozhraním pre všeobecnosť tečie voľný plošný prúd J_s kolmo za nákrasňu (pozri

¹ V časti odbornej literatúry sa popri vektore magnetizácie M (alebo namiesto neho) zavádza ďalší magnetizačný vektor J , ktorý sa nazýva vektor magnetickej polarizácie a s vektorom M súvisí vzťahom $J = \mu_0 M$. Jeho jednotkou je tesla (T). S vektorom J sa potom spája magnetický dipólový moment (podľa Coulomba) $m_C = \mu_0 I S$, ktorý sa meria v jednotkách Wb.m (!), kde jednotka magnetického indukčného toku Wb predstavuje jednotku "magnetického náboja". Vektor J teda udáva objemovú hustotu dipólových momentov m_C . Keďže nevidím osobitný dôvod na používanie týchto vektorov, v mojom pojednaní ich nezavádzam. Fyzikálny význam vektora J je sporný a vektor m_C je vyslovený anachronizmus. Dnes platná norma STN ISO 31-5 z roku 1997 vektor m_C medzi veličinami SI-sústavy už neuvádza.

obr. 8.6), \mathbf{n}_0 je jednotkový vektor normály k rozhraniu. Označme vektory magnetickej indukcie bezprostredne na rozhraní zhora a zdola v bode 0 symbolmi \mathbf{B}_1 a \mathbf{B}_2 , vektory

Tabuľka 10

Názov	Symbol	Pôvod
Magnetická indukcia	\mathbf{B}	všetky prúdy
Intenzita magnetickeho poľa	\mathbf{H}	iba voľné prúdy
Magnetizácia	\mathbf{M}	iba viazané prúdy

Definičný výraz pre \mathbf{B}	$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ alebo $d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$	(6.6) (6.87)
Všeobecný vzťah medzi tromi vektormi	$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}$	(8.27)
Ampérov zákon pre látkové prostredie	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$	(8.26)
Empirické vzťahy pre niektoré látky*	$\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$ $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H} = (\mu_r - 1)\mathbf{H}$	(8.29) (8.28)

*Iba pre diamagnetické a paramagnetické látky, pre ktoré sú χ a μ_r konštanty nezávislé od \mathbf{H} .

intenzity magnetickeho poľa \mathbf{H}_1 a \mathbf{H}_2 . Pre vektory poľa na rozhraní nevieme zadať nijaké podmienky, môžeme to však urobiť pre ich zložky. Rozložme preto vektory magnetickej indukcie na normálové zložky B_{n1} a B_{n2} a ich tangenciálne zložky B_{t1} a B_{t2} . Okolo bodu 0 možno zvoliť nekonečne nízky valec s osou kolmo na rozhranie a s podstavou dS . Zo všeobecnej platnosti rovnice

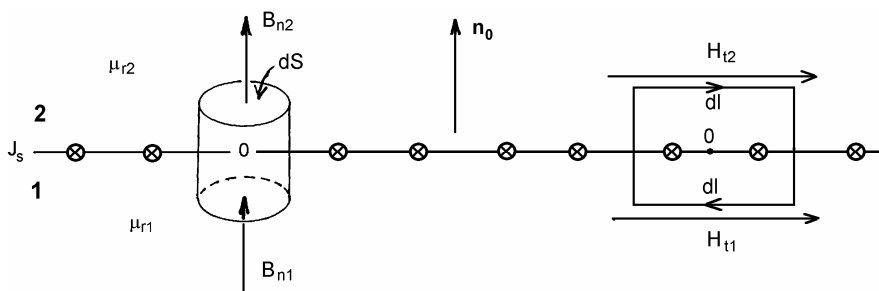
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

plynie, že tok plochou valčeka sa rovná nule, čo pre normálové zložky znamená, že

$$B_{n2}dS - B_{n1}dS = 0$$

alebo

$$B_{n2} - B_{n1} = 0 \quad (8.38)$$



Obr. 8.6

Normálová zložka vektora \mathbf{B} je teda na rozhraní spojitá, bez ohľadu na to, či rozhraní tečie prúd alebo nie.

Podobne rozložíme na rozhraní vektor \mathbf{H} na normálovú a tangenciálnu zložku. V dôsledku všeobecnej platnosti rovnice

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

na nekonečne malom obdĺžniku so stranami dl pozdĺž rozhrania (pozri obr. 8.6) platí

$$H_{t1}dl - H_{t2}dl = J_s dl$$

alebo

$$H_{t1} - H_{t2} = J_s^1 \quad (8.39)$$

Rozdiel tangenciálnych zložiek intenzity magnetického poľa sa rovná plošnej hustote prúdu na rozhraní, ktorý je na zložky poľa kolmý. Ak prúd rozhraním netečie, sú tangenciálne zložky na rozhraní spojité, t.j. ak $J_s = 0$, potom

$$H_{t1} - H_{t2} = 0 \quad (8.40)$$

Vzťahy (8.38) a (8.39) sú hľadané **hraničné podmienky** ktoré možno uviesť vo všeobecnom vektorovom tvare

$$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (8.41a)$$

$$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \quad (8.41b)$$

Uvedené hraničné podmienky platia ako pre statické, tak aj pre časovopremenné magnetické polia a vo všeobecnosti sa považujú za súčasť sústavy Maxwellových rovníc.

Ak na rozhraní netečie prúd ($J_s = 0$), potom pre indukčné čiary možno odvodiť zákon ich lomu podobne, ako sme to urobili pre elektrické siločiaru na rozhraní dvoch dielektrík (odsek 4.5).

Jedno z prakticky dôležitých rozhraní je rovinné alebo mierne zakrivené rozhranie medzi nevodivým neferomagnetickým magnetikom (napr. vzduchom alebo aj vákuom) a dobre vodivým neferomagnetickým kovom, v ktorom tečú elektrické prúdy veľmi vysokej frekvencie. Z teórie elektromagnetických vln plynie, že v dobre vodivom prostredí (napr. v medenom drôte) vysokofrekvenčný prúd tečie prakticky iba vo veľmi tenkej vrstve pri povrchu a do vnútra vodiča prúdová hustota rapídne klesá. Tento jav sa nazýva **povrchový jav** alebo **skinefekt** a bude analyzovaný v odseku 11.5. Z praktického hľadiska možno tento prúd nahradiť povrchovým plošným prúdom J_s . Vo vodiči je prúdová hustota nulová, a nulové je tam aj magnetické pole. Ak týmto dobre vodivým prostredím je na obr. 8.6 prostredie 1, potom v rovniciach (8.41) je

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$$

¹ Prísne vzaté, pri odvodení druhej hraničnej podmienky treba vychádzať z rovnice $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + I_p$, kde I_p

je posuvný prúd. Hustota posuvného prúdu má však objemový charakter a keďže zvolený obdĺžnik limitne obopína nulovú plochu, posuvný prúd sa neuplatní.

a rovnice prijímú tvar
$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{B}_2 = 0 \quad (8.42a)$$

$$\mathbf{n}_0 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_s \quad (8.42b)$$

alebo

$$B_{n2} = 0 \quad (8.43a)$$

$$H_{t2} = J_s \quad (8.43b)$$

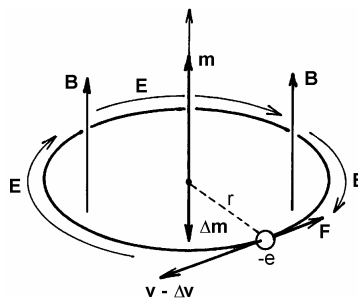
Podľa týchto rovníc vysokofrekvenčné magnetické pole na povrchu dobrého vodiča má iba tangenciálnu zložku a jeho intenzita H_t sa rovná plošnému prúdu J_s . Vektory \mathbf{H}_t a \mathbf{J}_s sú navzájom na seba kolmé a spĺňajú vzťah (8.42b). Tieto skutočnosti sú veľmi dôležité pre konštruktérov rôznych mikrovlnných zariadení.

8.3 MIKROSKOPICKÁ TEÓRIA DIAMAGNETIZMU A PARAMAGNETIZMU

8.3.1 Diamagnetizmus

K pochopeniu fyzikálnej podstaty diamagnetizmu sa musíme znovu obrátiť k atómovej štruktúre látok. Budeme si všímať, ako pôsobí vonkajšie magnetické pole na atóm, presnejšie na jeho jednu vybranú elektrónovú orbitu zobrazenú na *obr. 8.7*. Predpokladajme, že v priestore atómu vzniká magnetická indukcia, ktorá zo svojej začiatočnej nulovej hodnoty dosiahne hodnotu \mathbf{B} v smere rotačnej osi z vybranej obežnej dráhy elektrónu s polomerom r . V procese narastania magnetickej indukcie rastie aj indukčný tok $\Phi = BS$ kruhovou plochou obopnutou atómovou dráhou $S = \pi r^2$. Rýchlosť nárastu toku plochou S je teda

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2 B) = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad (8.44)$$



Obr. 8.7

Takáto zmena indukčného toku plochou dráhy musí podľa zákona elektromagnetickej indukcie indukovať pozdĺž dráhy intenzitu elektrického poľa \mathbf{E} vyznačenú na obrázku šípkami a danú výrazom

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Smer intenzity \mathbf{E} plynie z Lenzovho pravidla. Posledný výraz môžeme prepísať na tvar

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

z čoho

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (8.45)$$

Intenzita daná výrazom (8.45) bude na elektrón pôsobiť silou $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ (pri danom smere intenzity bude elektrón silou spomaľovaný). Sila súvisí s časovou zmenou hybnosti, teda

$$m_e \frac{dv}{dt} = \frac{er}{2} \frac{dB}{dt}$$

z čoho

$$dv = -\frac{er}{2m_e} dB$$

Vidíme, že zmena rýchlosti dv elektrónu na jeho dráhe je úmerná zmene magnetickej indukcie dB a nezávisí od časového intervalu v akom zmeny prebiehajú. Ak integrujeme obidve strany rovnice

$$\int_v^{v-\Delta v} dv = \frac{er}{2m_e} \int_0^B dB$$

dostaneme výraz

$$\Delta v = -\frac{er}{2m_e} B \quad (8.46)$$

ktorého fyzikálny zmysel je nasledovný: Ak plochou ohraničenou dráhou elektrónu vznikne indukčný tok s konečnou hodnotou magnetickej indukcie B , potom rýchlosť v elektrónu klesne o hodnotu Δv danú výrazom (8.46). S týmto znížením rýchlosti môžeme spojiť indukovaný moment $\Delta \mathbf{m}$ v opačnom smere ako je smer vektora \mathbf{m} . Indukovaný moment má hodnotu

$$\Delta m = \frac{er\Delta v}{2} = -\frac{e^2 r^2}{4m_e} B \quad (8.47)$$

a smeruje vždy proti smeru vektora \mathbf{B} (dokonca pre ľubovoľné znamienko náboja). Toto je podstata diamagnetizmu! Látky s takými atómami budú z nehomogénneho magnetického poľa vytláčané. Práve toto pozoroval Faraday v roku 1846 na prvku bizmut (Bi) a látky s podobnými vlastnosťami nazval diamagnetické.

Možno namietat, že pri odvodení výrazu pre E sme vo vzťahu (8.44) neoprávnene vybrali spod derivácie polomer r . Dá sa však dokázať, že ak $\Delta v \ll v$ (čo je pri dosiahnuteľných B dobre splnené), polomer r sa pri naložení poľa B nezmení, pretože odstredivá sila od zmeny rýchlosti Δv elektrónu a dostredivá magnetická sila na elektrón spôsobená indukciou B sa navzájom kompenzujú (dôkaz tejto skutočnosti prenecháme na čitateľa).

Skutočný "diamagnetický" moment Δm pre celý atóm bude zrejme iný (ale nie principiálne iný) ako udáva výraz (8.47). Atóm má Z elektrónov s rôznymi polomermi atómových dráh a môžeme predpokladať guľovú symetriu rozloženia orientácie osí dráh. Presný vzťah pre diamagnetický moment atómu sa od uvedeného výrazu líši iba tým, že r^2 treba nahradiť s

$$\sum_Z \langle r^2 \rangle$$

kde $\langle r^2 \rangle$ je stredný kvadratický polomer atómovej dráhy a sčítava sa cez Z elektrónov atómu. V menovateli treba 4 nahradiť s 6, čo plynie zo stredovania. Presný výraz pre dodatočný diamagnetický moment atómu je tvaru

$$\Delta m = -\frac{e^2}{6m_e} \sum_Z \langle r^2 \rangle B \quad (8.48)$$

Rovnaký výraz poskytuje aj kvantová teória, ak sa $\langle r^2 \rangle$ interpretuje ako stredná kvadratická vzdialenosť od stredu atómu pre dané pravdepodobnostné rozdelenie elektrónovej hustoty.

Ak koncentrácia atómov v látke je n , potom magnetizácia spojená s momentami podľa (8.48) je

$$M = n\Delta m = -\frac{ne^2}{6m_e} \sum_Z \langle r^2 \rangle B = -\frac{\mu_0 ne^2}{6m_e} \sum_Z \langle r^2 \rangle H$$

Z čoho bezrozmerná veličina – diamagnetická susceptibilita – je daná výrazom

$$\chi = \frac{M}{H} = -\frac{\mu_0 ne^2}{6m_e} \sum_Z \langle r^2 \rangle = -5,9 \cdot 10^{-15} n \sum_Z \langle r^2 \rangle \quad (8.49)$$

Z výrazu (8.49) vidieť, že diamagnetizmus látok je jav univerzálny pre všetky atómy látky, závisí od teploty cez koncentráciu atómov n .

Zavedená susceptibilita je bezrozmerná, ale je úmerná objemovej koncentrácii atómov, a preto sa výraz (8.50) interpretuje ako objemová susceptibilita. Vydelením χ hustotou látky ρ dostaneme hmotovú susceptibilitu $\chi_m = \chi/\rho$ v jednotkách m^3/kg , pretože jednotka hmotnosti (1 kg) zaberá objem $(1/\rho) \text{ m}^3$. Podobne molárna susceptibilita $\chi_M = 10^{-3} M \chi_m$ v jednotkách $\text{m}^3/\text{kilomol}$. M je atómová alebo molekulárna hmotnosť v gramoch. Faktor 10^{-3} je z dôvodu, že χ sa vzťahuje na kilomol látky.

Aby bol zmätok dokonalý, v niektorých tabuľkách sú susceptibility ešte stále udávané v cgs jednotkách, pričom v tuhých látkach a v kvapalinách dosahujú objemové susceptibility (na cm^3) hodnoty rádu 10^{-6} (v plynch oveľa menšie pre oveľa nižší počet atómov na jednotku objemu).

V SI-sústave je objemová susceptibilita (na m^3) väčšia o faktor 4π , a teda je rádu 10^{-5} . Hodnoty susceptibilit v tabuľke 9 sú objemové susceptibilit v SI-sústave.

V kovoch, v ktorých sú prítomné voľné elektróny je situácia zložitejšia, pretože v magnetickom poli Lorentzova sila ovplyvňuje translačný pohyb elektrónov a to vedie k dodatočnej diamagnetickej susceptibilite, ktorá pri bežných magnetických poliach je konštantná. Výraz pre túto dodatočnú susceptibilitu odvodil ruský teoretický fyzik Lev D. Landau (1908 – 1968)¹ v tvare

$$\chi_d = -\mu_0 \frac{e^2}{12\pi m^*} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{1/3} \quad (8.50)$$

kde m^* je efektívna hmotnosť vodivostných elektrónov a n je ich koncentrácia. Tento typ diamagnetizmu sa nazýva **Landauov diamagnetizmus** a je známy aj v polovodičoch.

Tie isté vodivostné elektróny v kove majú aj paramagnetický príspevok k susceptibilite. Ak uvažíme, že voľný elektrón má moment hybnosti (spin) a jemu zodpovedajúci magnetický moment veľkosti Bohrovho magnetónu μ_B (pozri odsek 8.1), budú sa tieto momenty podľa pravidiel kvantovej mechaniky orientovať pozdĺž smeru magnetického poľa a budú prispievať k paramagnetickej susceptibilite látky členom, ktorý je daný výrazom²

$$\chi_p = \mu_0 \frac{3ng^2\mu_B^2}{8W_F} \quad (8.51)$$

kde g je Landého g -faktor a W_F je Fermiho hladina. Tento typ magnetizmu sa nazýva **Pauliho paramagnetizmus** [Wolfgang Pauli (1900 – 1958) – rakúsky teoretický fyzik] a dá sa experimentálne skúmať metódou elektrónovej paramagnetickej rezonancie (EPR), o ktorej sa krátko zmienime v odseku 8.5.4.

Pre voľné elektróny v kovoch $m^* = m_e$, $g = 2$ a $W_F = (3\pi^2 n)^{2/3} \hbar^2 / (2m_e)$. V takom prípade sa Pauliho susceptibilita rovná trojnásobku absolútnej hodnoty Landauovej susceptibility, teda $\chi_p = 3 |\chi_d|$.

Na záver tohto odseku ako príklad uvidíme výpočet objemovej susceptibility zlata s využitím výrazov (8.49) až (8.51). Hustota zlata $\rho = 19\,320 \text{ kg/m}^3$, Avogadrovo číslo $N_A = 6,022\,5 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$, atómová hmotnosť zlata $m_m = 196,966\,5 \text{ kg/kmol}$, takže koncentrácia atómov v zlate

$$n = N_A \frac{\rho}{m_m} = 5,906\,84 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

Atómové číslo zlata $Z = 79$ a ako odhad pre $\langle r^2 \rangle$ zoberieme hodnotu blízku kvadrátu Bohrovho polomeru, konkrétne $0,75a_0$, teda

$$\sum_Z \langle r^2 \rangle = Z \cdot \langle r^2 \rangle = 79 \cdot (0,75a_0)^2 = 1,244 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2$$

¹ Landau, L. D., Z. Phys., Bd. 64, N. 7 – 8, S. 629 (1930)

² Pozri napr. Kittel, C.: Introduction to solid state physics, J. Wiley and Sons, New York 1971

Dosadením týchto hodnôt do výrazu (8.49) dostaneme pre elektrónovú objemovú diamagnetickú susceptibilitu zlata hodnotu $\chi = -43,36 \cdot 10^{-6}$. Príspevok Landauovho diamagnetizmu vypočítaný podľa výrazu (8.50) je $\chi_d = -3,6 \cdot 10^{-6}$ a od Pauliho paramagnetizmu podľa výrazu (8.51) $\chi_p = 3|\chi_d| = 10,8 \cdot 10^{-6}$. Celková susceptibilita zlata je teda

$$\chi_c = \chi + \chi_d + \chi_p = -36,16 \cdot 10^{-6}$$

Výsledok, ktorý sme dostali, sa prakticky rovná experimentálnej hodnote v tabuľke 9. Zhoda experimentálnych a teoretických výsledkov svedčí o tom, že naša predstava o jave diamagnetizmu odpovedá realite. Je tiež známe, že magnetické merania susceptibilit sú najpresnejšou metódou experimentálneho stanovenia strednej hodnoty $\langle r^2 \rangle$. V uvedenom príklade je touto hodnotou $(0,75a_0)^2$.

8.3.2 Paramagnetizmus

Ako sme už konštatovali, paramagnetizmus (odhliadnuc od Pauliho paramagnetizmu vodivostných elektrónov) prejavujú také látky, ktorých atómy, ióny alebo molekuly majú nenulový permanentný magnetický moment. Takých látok je veľa, rovnako ako tých, ktoré moment nemajú, a sú teda diamagnetické. Príčina paramagnetizmu môže byť rôzna. Jedným z dôvodov môže byť nepárny počet elektrónov v atóme, takže je v ňom nespárený, teda nevykompenzovaný orbitálny alebo spinový moment, a tak je prvok paramagnetický. Toto však nemusí byť pravidlo, pretože napr. niektoré dvojatómové molekuly zložené s atómov s párnym počtom elektrónov sú napriek tomu paramagnetické, ako napr. kyslík O_2 . Paramagnetické sú napr. ióny prechodných prvkov ako Mn^{2+} , vzácnych zemín ako Gd^{3+} , aktinidov ako U^{4+} a i. U väčšiny kovov vonkajšie elektróny opúšťajú jednotlivé atómy, čím z nich vzniknú diamagnetické ióny. Uvoľnené elektróny sa môžu voľne pohybovať a nazývajú sa vodivostné elektróny. Ich paramagnetizmus a diamagnetizmus sme analyzovali v predchádzajúcom odseku.¹ Niekoľko typických paramagnetík je uvedených v tabuľke 9.

Bez vonkajšieho magnetického poľa sú magnetické momenty paramagnetickej látky, v dôsledku chaotického tepelného pohybu, vystredované na nulu, a teda stredná magnetizácia v látke je nulová. Energia tepelného pohybu pri absolútnej teplote T sa rádovo rovná hodnote kT (k je Boltzmannova konštanta). Keď sa na látku naloží vonkajšie magnetické pole s indukciou \mathbf{B} , majú dipóly látky pod účinkom točivého momentu tendenciu zaujať smer poľa zodpovedajúci jeho minimálnej potenciálnej energii. Potenciálna energia dipólu s momentom \mathbf{m} v poli magnetickej indukcie \mathbf{B} je $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ (pozri odsek 6.4.1). Táto energia je v porovnaní s tepelnou energiou veľmi malá, napriek tomu však dôjde k istému usporiadaniu dipólov do smeru poľa \mathbf{B} . V látke vznikne nenulová magnetizácia \mathbf{M} v smere \mathbf{B} , čo zodpovedá kladnej magnetickej susceptibilite. Ukážeme neskôr, že v bežných poliach pri teplote blízkej izbovej, teda pre pomer B/T dostatočne malý, je

¹ V tomto odseku budeme hovoriť iba o elektrónovom paramagnetizme. Jadrový paramagnetizmus ako veľmi slabý efekt (rádovo tisíckrát slabší ako elektrónový para- a diamagnetizmus) nebudeme uvažovať (pozri tiež odsek 8.5.4). Treba si uvedomiť, že látka s jadrovým paramagnetizmom môže byť diamagnetická (ako príklad môže poslúžiť voda – H_2O , kde paramagnetické sú dva vodíkové protóny).

magnetizácia nepriamo úmerná teplote. Túto skutočnosť experimentálne potvrdil v roku 1895 francúzsky fyzik Pierre Curie (1859 – 1906), ktorý zistil, že v bežných poliach \mathbf{B} a pri teplotách T blízkyh izbovým, je magnetizácia \mathbf{M} úmerná magnetickej indukcii $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ a nepriamo úmerná teplote, teda

$$\mathbf{M} = \frac{C'}{T}\mathbf{B} = \frac{C}{T}\mathbf{H} = \chi\mathbf{H}$$

kde C' a C sú konštanty. Rovnica je známa ako **Curieho zákon**, a často sa píše v tvare pre susceptibilitu

$$\chi = \frac{C}{T} \quad (8.52)$$

Pre veľmi silné polia a nízke teploty, keď pomer B/T je veľký, vzťah medzi intenzitou magnetického poľa a magnetizáciou nezostáva lineárny. V látke dochádza postupne k nasýteniu a magnetizácia M speje ku konštantnej maximálnej hodnote M_{max} , kedy všetky magnetické momenty smerujú pozdĺž magnetizujúceho poľa \mathbf{B} , resp. \mathbf{H} .

Teoretický výklad Curieho zákona podal v roku 1905 Paul Langevin (1872 – 1946) na základe klasickej Boltzmannovej štatistiky. Matematický postup, ktorý pri tom využil, je ten istý, ktorý sme uviedli pri výpočte elektrickej susceptibility dielektrík s orientačnou polarizáciou (odsek 4.8.3), a preto ho tu uvedieme iba skrátene. Magnetický dipól s momentom \mathbf{m} nachádzajúci sa v magnetickom poli \mathbf{B} má potenciálnu energiu $W = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B} = -mB \cos \vartheta$, kde ϑ je uhol, ktorý zvierajú vektory \mathbf{m} a \mathbf{B} . Podľa klasickej štatistiky počet momentov s energiou W zodpovedajúcou uhlom z intervalu od ϑ po $\vartheta + d\vartheta$ je

$$dn = b e^{-\frac{W}{kT}} \sin \vartheta d\vartheta \quad (8.53)$$

kde b je konštanta, ktorú možno určiť normovaním, t. j. integráciou výrazu (8.53) cez všetky možné hodnoty energie. Táto integrácia musí dať počet momentov n na jednotku objemu (koncentráciu dipólov). Pre náš prípad

$$dn = b e^{\frac{mB}{kT} \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta \quad (8.54)$$

a integráciou tohto výrazu od 0 po π dostaneme hodnotu n . Zložka dipólového momentu do smeru \mathbf{B} na každý atóm je $m \cos \vartheta$, a teda stredná komponenta na atóm je \bar{m} . Magnetizácia jednotkového objemu paramagnetika je potom daná výrazom

$$M = n\bar{m} = m \int_0^\pi \cos \vartheta dn$$

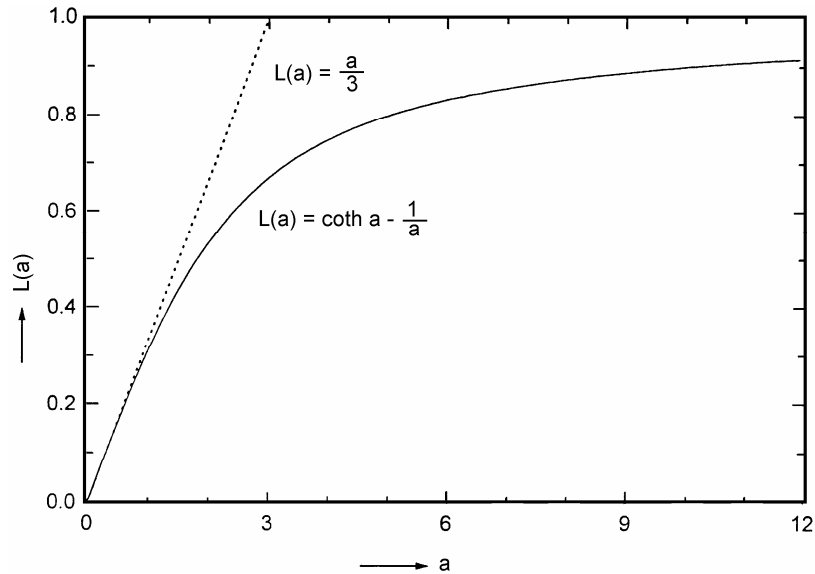
Z toho výrazu môžeme vyjadriť

$$\frac{\bar{m}}{m} = \frac{M}{nm} = \frac{\int_0^\pi \cos \vartheta b e^{\frac{mB}{kT} \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi b e^{\frac{mB}{kT} \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta}$$

zaviesť substitúciu $\frac{mB}{kT} = a$ a $\cos \vartheta = x$

takže nakoniec dostaneme výraz

$$\frac{M}{nm} = \frac{\int_{-1}^{+1} x e^{ax} dx}{\int_{-1}^{+1} e^{ax} dx} = \operatorname{coth} a - \frac{1}{a} = L(a) \quad (8.55)$$



Obr. 8.8

Výsledkom integrácie je Langevinova funkcia $L(a)$, ktorej priebeh v závislosti od a je graficky znázornený na obr. 8.8. Pre veľké hodnoty a (veľký pomer B/T) sa hodnota funkcie blíži k jednotke, t. j. stredný moment \bar{m} v smere poľa sa rovná hodnote individuálneho momentu m . Je to stav nasýtenia (saturácie), keď sú všetky dipóly nasmerované pozdĺž vektora \mathbf{B} . V prípade, že $a \ll 1$, t. j. ak $mB \ll kT$, možno Langevinovu funkciu nahradit' lineárnym výrazom

$$L(a) \approx \frac{a}{3}$$

Z výrazu (8.55) plynie, že

$$\frac{M}{nm} = L(a) \approx \frac{mB}{3kT}$$

alebo

$$M = \frac{nm^2}{3kT} B = \frac{\mu_0 nm^2}{3kT} H \quad (8.56)$$

Výraz (8.56) udáva magnetizáciu paramagnetickej látky umiestnenej v slabom poli pri izbových teplotách. Z tohoto výrazu pre bezrozmernú veličinu – paramagnetickú susceptibilitu – plynie

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 nm^2}{3kT} \quad (8.57)$$

Je to tá istá susceptibilita, ktorú objavil P. Curie, a ktorá je daná výrazom (8.52), ak vezmeme do úvahy, že Curieho konštanta je

$$C = \frac{\mu_0 nm^2}{3k}$$

Vo výraze (8.57) je jedinou atomárnou neznámou magnetický moment m , ktorý možno určiť meraním susceptibility v závislosti od $1/T$ v oblasti, kde a je malé. Vo všeobecnosti sú magnetické momenty paramagnetík rádu 10^{-23} A.m², sú teda rádovo rovné Bohrovmu magnetónu. Objemové susceptibility (na m³) paramagnetických tuhých látok pri izbových teplotách, tých, ktoré spĺňajú Curieho zákon, sú $\approx +10^{-3}$. Paramagnetizmus je teda podstatne silnejší, ako diamagnetizmus, ktorý je však v látke vždy prítomný.

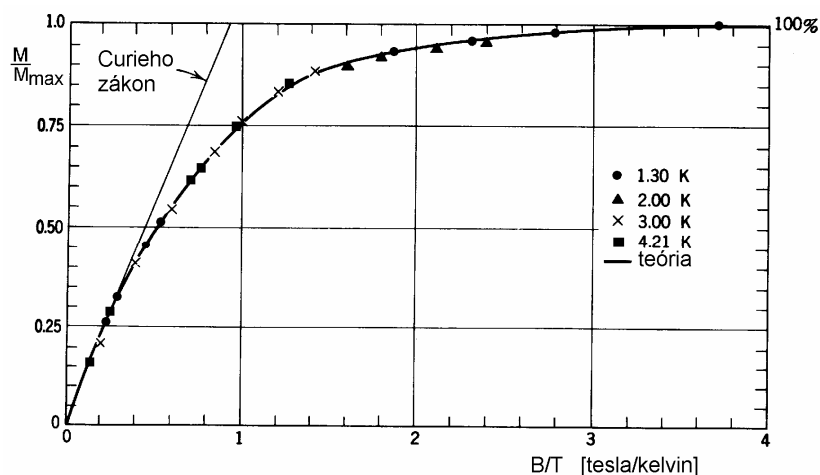
Prísne vzaté, Langevinova teória je použiteľná iba pre plyny, v ktorých dipóly sú dostatočne ďaleko od seba, takže možno zanedbať ich vzájomnú interakciu. V tuhých látkach môže byť táto interakcia značná a mnohé látky vyhovujú modifikovanému Curie-Weissovmu vzťahu

$$\chi = \frac{C}{T - \Theta} \quad (8.58)$$

kde Θ je Weissova konštanta charakteristická pre tú-ktorú látku; môže byť kladná alebo záporná. Rovnica (8.58) platí iba pre $T > |\Theta|$ a pre mnohé látky niet jednoduchého vzťahu, ktorý by opisoval variácie susceptibility v širokom rozsahu teplôt.

Na záver tohto odseku je na obr. 8.9 znázornená zaujímavá grafická závislosť M/M_{max} od pomeru B/T pre rôzne teploty u paramagnetickej soli $\text{CrK}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ (kryštalický síran draselno chromitý).¹ U tejto látky nositeľom paramagnetizmu sú ióny chrómu Cr^{3+} , ostatné ióny (K^+ , SO_4^{2-}) a molekuly vody sú diamagnetické. 99,5 %-né nasýtenie nastane v obrovskom poli $B = 5$ T pri extrémne nízkej teplote $T = 1,3$ K. Pre ľahšie dosiahnuteľné podmienky $B = 1$ T a teplotu $T = 10$ K je pomer $B/T = 0,1$ [T/K]. Pre tento a menší pomer B/T je Curieho zákon dobre splnený. Krivka, ktorá prechádza experimentálnymi bodmi na obrázku, bola vypočítaná na základe modernej kvantovej teórie. Vidíme, že výborne súhlasí s experimentom.

¹ Z meraní W. E. Henryho podľa knihy: Resnick, R. – Halliday, D.: Physics, J. Wiley & Sons, Inc. New York, London, Sydney 1966.



Obr. 8.9

8.4 FENOMENOLOGICKÁ TEÓRIA FEROMAGNETIZMU

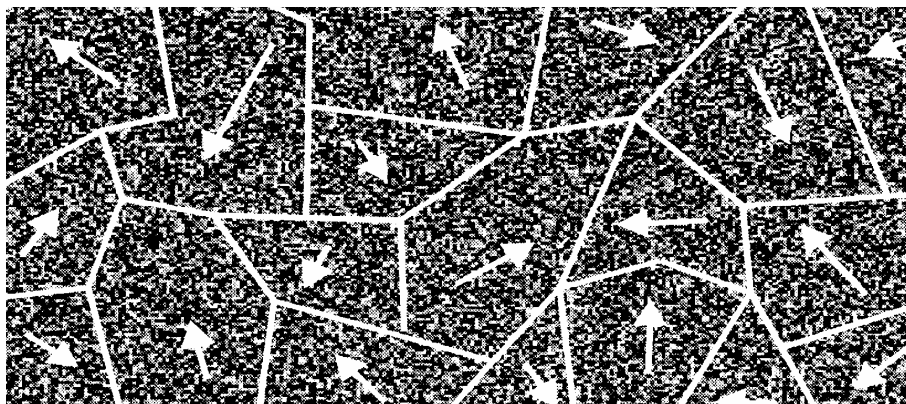
Prvé, čo treba v súvislosti s feromagnetizmom povedať je, že je to kooperatívny jav a vzniká v látke (a nie v jej atómoch) ako dôsledok špecifického pôsobenia medzi paramagnetickými atómami alebo aj inými prímiesami v kryštalickej mriežke. Svedčí o tom aj tá skutočnosť, že feromagnetické látky zahriate nad kritickú Curieho teplotu T_C prechádzajú do paramagnetického stavu. Ich susceptibilita pre teploty $T > T_C$ je daná výrazom

$$\chi = \frac{C}{T - T_C} \quad (8.59)$$

(Curieho-Weissov zákon). Pre reprezentanta tejto skupiny – železo – je Curieho teplota $T_C = 1043 \text{ K} = 773 \text{ }^\circ\text{C}$. Pod touto teplotou je železo feromagnetické, nad ňou paramagnetické. Vo feromagnetickom stave sa medzi magnetickými momentmi atómov látky objavuje zvláštny typ väzby nazvanej výmenná väzba, ktorá prinúti magnetické momenty v relatívne veľkej, až makroskopickej oblasti orientovať sa do jedného smeru. Tieto oblasti spontánnej magnetizácie sa nazývajú magnetické domény. V magnetických doménach sú všetky elementárne momenty usporiadané a vytvárajú jeden relatívne veľký magnetický moment celej domény. Dôležité je, že k spontánnej magnetizácii a vzniku domén dochádza bez akéhokoľvek vplyvu vonkajšieho magnetického poľa. Výmenná väzba zodpovedná za vznik a existenciu domén je výlučne kvantový efekt a nedá sa vysvetliť pomocou klasickej fyziky.

Ak teplota feromagnetického materiálu klesne pod Curieho bod T_C , prestáva preň platiť výraz (8.59) a jeho správanie sa diametrálne mení. Pôsobením spomínaných kvantových efektov vzájomnej výmeny vznikajú magnetické domény. Magnetické momenty domén

bez prítomnosti vonkajšieho magnetického poľa sú štatisticky rozložené do všetkých smerov, a látka, pokiaľ predtým nebola vystavená pôsobeniu magnetických polí, zostáva makroskopicky nezmagnetizovaná. Na *obr. 8.10* je schematicky znázornená doménová štruktúra nezmagnetizovaného feromagnetika, šípkami sú vyznačené smery magnetizácie domén. Rozmery domén sú v rozsahu 10^{-4} až 10^{-1} mm.



Obr. 8.10

Bude nás zaujímať, ako sa vzorka feromagnetického materiálu bude správať, ak ju budeme magnetizovať. Predpokladajme, že vzorka je toroidálneho tvaru a je na nej navinutá cievka ako na *obr. 8.4a*, ktorou tečie prúd, ktorý možno meniť. Prúd vytvorí v toroide magnetizujúce pole intenzity H , v dôsledku ktorého vznikne vo feromagnetiku magnetizácia M a v konečnom dôsledku magnetická indukcia B .¹ Závislosti magnetickej indukcie B alebo magnetizácie M od intenzity magnetického poľa H sa nazývajú **magnetizačné krivky** a poskytujú plnú informáciu o technických vlastnostiach feromagnetík. Experimentálne snímanie magnetizačných kriviek opíšeme inde, tu sa pokúsime o ich fyzikálnu interpretáciu.

Na *obr. 8.11* je schematicky ilustrovaná zmena doménovej štruktúry feromagnetika v procese jeho prvotného magnetovania. Zodpovedajúca závislosť zobrazená na obrázku je magnetizačná krivka $M - H$, **krivka prvotnej magnetizácie**. Závislosť M od H , je silne nelineárna a formálne ju možno zapísať v tvare

$$M = M(H)$$

Magnetizujúce pole H sa ovláda magnetizujúcim prúdom. Priebeh magnetickej indukcie B je potom tiež daný formálnym vzťahom

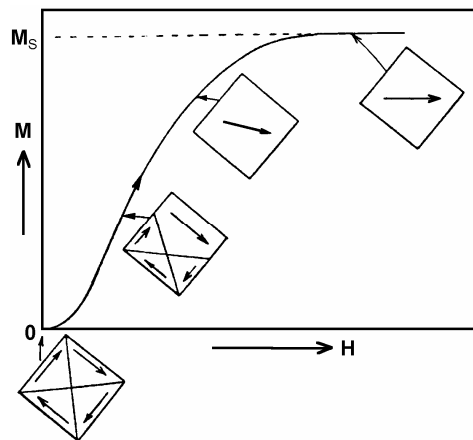
$$B = \mu_0 H + \mu_0 M(H) \quad (8.60)$$

Pre feromagnetikum je charakteristické, že prvý člen $\mu_0 H$ na pravej strane je vo väčšine prípadov v oblasti technického sýtenia (veľkých zmien magnetizácie podmienených

¹ Budeme predpokladať, že makroskopické vektory B , M a H vo feromagnetiku ležia pozdĺž jednej priamky, a v ďalšom budeme udávať iba ich absolútne hodnoty.

magnetizačným prúdom) zanedbateľný a celá magnetická indukcia je daná druhým členom $\mu_0 M(H)$, ktorý je veľký a silne nelineárny. Možno teda približne napísať

$$B \approx \mu_0 M(H) \quad (8.61)$$



Obr. 8.11

Krivka na obr. 8.11 je teda súčasne obrazom závislosti B od H . Vráťme sa však na začiatok závislosti do bodu 0. V tomto bode má feromagnetická vzorka formálne štyri rovnaké domény, ktorých magnetické momenty sa navzájom rušia, teda $M = 0$ a aj $B = 0$. So zvyšovaním H sa domény postupne "zlievajú" (odborne sa to nazýva "posuv doménových stien"), až v celej vzorke zostane iba jedna doména, ktorá sa nakoniec plne natočí do smeru poľa H . V tom okamihu je proces technického sýtenia vzorky ukončený, magnetizácia dosahuje hodnotu technického nasýtenia M_s , a ďalej nerastie. Pre ilustráciu možno uviesť, že v typických feromagnetických materiáloch sa hodnota indukcie nasýtenia $B \sim 1,5$ T dosiahne v poli H niekoľkých stoviek A/m, ktoré by vo vákuu alebo v paramagnetiku, resp. diamagnetiku, vytvorilo indukciu len rádovo 10^{-4} T.

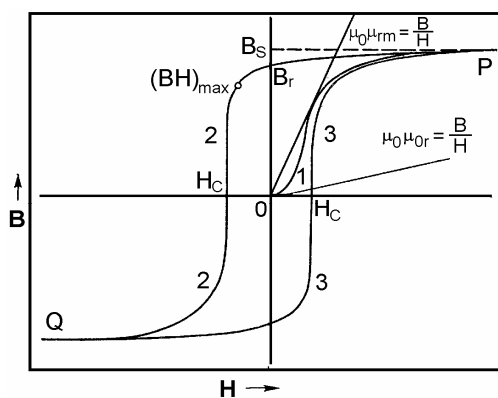
Po skončení technického sýtenia je ďalší rast magnetizácie v materiáli spojený už iba s orientáciou atómových alebo iónových momentov, ktoré v dôsledku chaotického tepelného pohybu ešte neboli zorientované do smeru M , teda proces podobný ako v paramagnetikách. Takáto magnetizácia je fyzikálna a možno ju ďalej zvyšovať znižovaním teploty k veľmi nízkym hodnotám. Končí sa teoreticky pri teplote absolútnej nuly. Nárast M touto procedúrou je však tak malý, že v praktických aplikáciách feromagnetík nehrá žiadnu úlohu. Hodnota M_s na magnetizačnej krivke nezostane konštantná, ale bude mierne narastať.

Magnetická indukcia B v oblasti nasýtenia je daná predovšetkým veľkou hodnotou $\mu_0 M_s$, a malým príspevkom $\mu_0 H$. Ak sa H bude ďalej zvyšovať, bude nepatrne a lineárne narastať príspevok $\mu_0 H$ a magnetizácia M rastie v tej miere, v ktorej ešte H môže ovplyvniť orientáciu atómových momentov.

8.4.1 Hysterézná slučka

Obráťme teraz smer magnetizácie a znižujeme hodnotu H . Objavíme pri tom ďalšiu zvláštnosť feromagnetizmu, že magnetizácia M , prípadne magnetická indukcia B , nebudú pri spätnom chode sledovať krivku prvotnej magnetizácie.

Na obr. 8.12 je znázornená závislosť magnetickej indukcie B vo vzorke od intenzity H , ak sa vzorka magnetuje cyklicky z bodu P do bodu Q a naspäť do bodu P . Krivka 1 zodpovedá krivke prvotnej magnetizácie vzorky od nuly až do stavu nasýtenia B_s . Pri znižovaní hodnoty H k nule klesá magnetická indukcia po novej magnetizačnej krivke 2 a po dosiahnutí $H = 0$, keď sa prúd vo vinutí rovná nule, je vo vzorke **zvyšková (remanentná) indukcia** B_r , ktorá môže byť ešte stále blízka hodnote saturácie B_s . V tejto situácii by sme mohli z toroidu odstrániť vinutie a mali by sme kruhový permanentný magnet. Ak sa teraz zmení smer magnetizačného prúdu a H sa bude zvyšovať v zápornom smere, bude indukcia klesať po krivke 2 k nulovej hodnote. Tú dosiahne, keď je intenzita poľa $H = H_c$. Je to **koercitívna intenzita**, pri ktorej vo vzorke zanikne predchádzajúca magnetická indukcia. Permanentné magnety musia mať vysokú koercitívnu intenzitu, aby bol magnet odolný proti demagnetizovaniu. Ďalšie zvyšovanie H v opačnom smere vedie k nárastu indukcie do saturácie, ale v opačnom smere. Ak sa v bode Q smer chodu H znovu zmení, bude indukcia rásť pozdĺž krivky 3 až do východiskovej začiatkovej saturácie v bode P . Celá uzavretá krivka 2 – 3 sa nazýva hysterézná slučka. Vidno z nej, že zmeny magnetickej indukcie B vo feromagnetiku zaostávajú za zmenami magnetujúceho poľa H .



Obr. 8.12

Závislosť prvotnej magnetizácie a s ňou spojená závislosť indukcie od intenzity magnetickeho poľa sa často vyjadrujú kontradikčnými vzťahmi

$$M = \chi H \approx \mu_r H$$

resp.

$$B = \mu_0 \mu_r H \quad (8.62)$$

Všetka nelinearita materiálu je teraz skrytá v relatívnej permeabilite μ_r , ktorá je zložitou funkciou H . Z posledných dvoch výrazov vyplýva, že

$$\mu_r \approx \frac{M}{H} \quad (8.63)$$

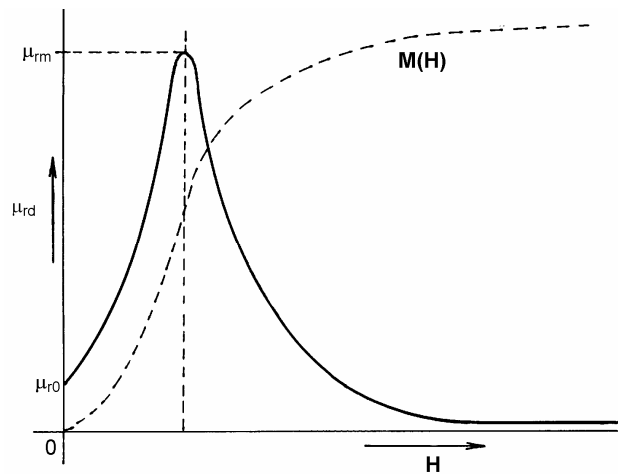
alebo

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} \quad (8.64)$$

Na obr. 8.12 sú znázornené dve priamky, ktorých smernice $\mu_0 \mu_r = B/H$ udávajú hodnoty μ_r . Plochá priamka dáva začiatočnú minimálnu hodnotu relatívnej permeability μ_{r0} v bode 0 krivky 1, druhá, strmá priamka, udáva permeabilitu v bode jej dotýčnice ku krivke 1. Je to maximálny pomer B/H , a teda v tomto bode je maximálna aj permeabilita μ_{rm} . Pri ďalšom zvyšovaní H bude μ_r klesať ku hodnote 1.

Je zrejmé, že v mnohých dynamických aplikáciách feromagnetík, keď sa hodnoty H a B menia v malých intervaloch, takto zavedená relatívna permeabilita neodráža zodpovedajúco vlastnosti materiálu. Pre takéto použitie feromagnetík treba zaviesť pojem diferenciálnej (dynamickej) permeability, definovanej výrazom

$$\mu_{rd} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \quad (8.65)$$

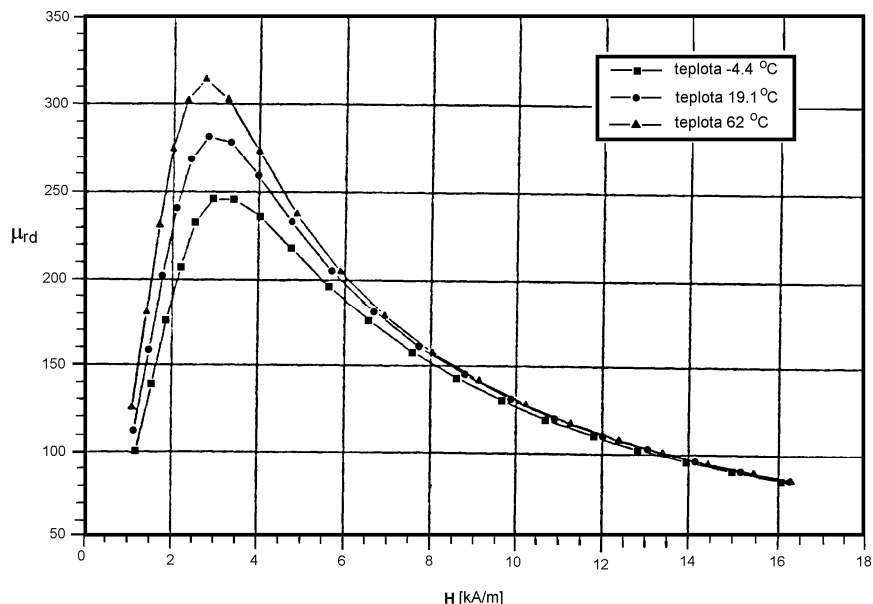


Obr. 8.13

Jej hodnotu možno dostať grafickým alebo numerickým derivovaním krivky 1 na obr. 8.12. Závislosť μ_{rd} od H je znázornená na obr. 8.13. Začína pri hodnote blízkej nule, prechádza maximom pri maximálnej strmosti krivky 1 a potom klesá k nule. Začiatočná hodnota permeability μ_{r0} je tiež daná výrazom (8.65). Pre čisté železo maximum μ_{rm} dosahuje hodnôt blízkyh 10^4 . Na obr. 8.14 sú znázornené experimentálne získané závislosti μ_{rd} od magnetizujúceho poľa H , pre rôzne teploty v stavebnej oceli.¹

¹ Závislosti na obr. 8.14 až 8.16 boli získané pri experimentálnom skúmaní magnetoelastického javu v stavebnej oceli na Katedre rádiofyzyky MFF UK Bratislava (Jaroševič, A. Magnetoelastic Method of Stress Measurement in Steel, J. Holnicki-Szulc and J. Rodellar (eds.), Smart Structures, 107-114).

Zobrazená hysterézná slučka na obr. 8.12 je v skutočnosti iba limita tých slučiek, ktoré by vznikli, ak by sa vzorka magnetizovala neúplne, t. j. magnetizácia a indukcia by nedosahovali saturačných hodnôt. Na obr. 8.15 je zobrazená dynamicky snímaná závislosť indukcie B od intenzity H v stavebnom železe tak, že magnetická intenzita sa menila periodicky a jej amplitúda sa zväčšovala z nulovej hodnoty až do stavu technického nasýtenia. Magnetizácia je nereverzibilná a krivka sa nikde nepretína.



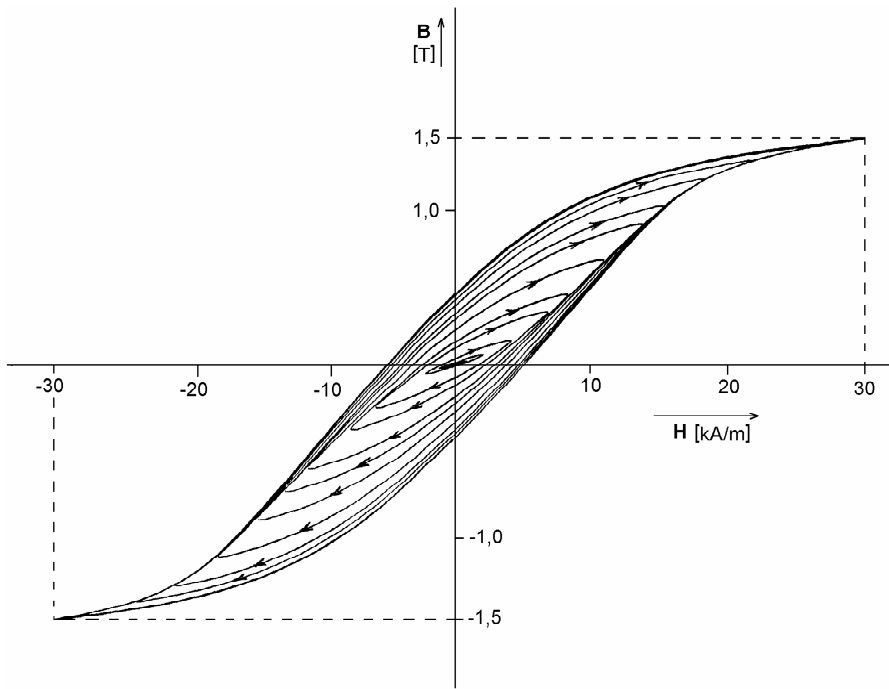
Obr. 8.14

Zavedené permeability nemajú veľkú praktickú hodnotu, pretože zriedkakedy sa pracuje s feromagnetickým materiálom v oblasti jeho krivky prvotnej magnetizácie. Častejšie sa materiál magnetuje striedavým poľom väčšej alebo menšej amplitúdy a magnetizácia prebieha pozdĺž "minoritných" hysteréznych slučiek posadených na istú statickú hodnotu intenzity alebo indukcie. Strmosť týchto slučiek je menšia ako strmosť krivky prvotnej magnetizácie. Tieto slučky možno vidieť na obr. 8.16 a vznikajú tak, že hodnota intenzity sa v nejakom bode vráti späť o hodnotu ΔH_1 , resp. ΔH_2 . Magnetická indukcia sa týmto vráti o hodnotu ΔB_1 , prípadne o ΔB_2 . Prírastky $\Delta B/\Delta H$ definujú inkrementálnu permeabilitu¹

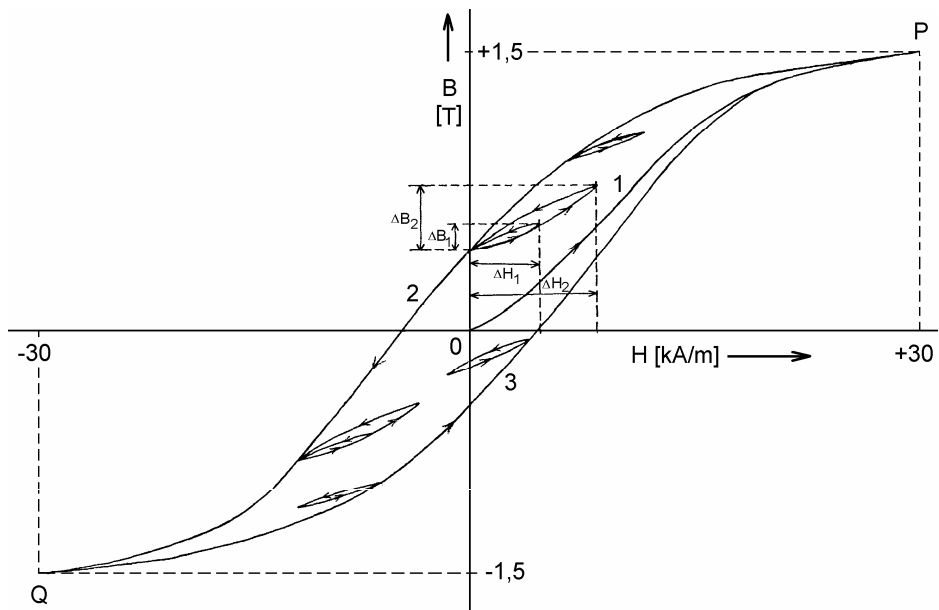
$$\mu_{ink} = \mu_{rv} + \mu_{irv} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (8.66)$$

kde μ_{rv} je reverzibilná (vratná) a μ_{irv} je ireverzibilná (nevratná) časť inkrementálnej permeability. Pre malé ΔH nenastávajú nevratné zmeny v magnetickej doménovej štruktúre a μ_{ink} sa rovná μ_{rv} . Práve táto inkrementálna permeabilita určuje napr. indukčnosť tlmiviek s feromagnetickým jadrom.

¹ Jiles, D. C.: Introduction to Magnetism and Magnetic Materials, Chapman & Hall 1995



Obr. 8.15



Obr. 8.16

Ak je feromagnetický materiál podrobený premagnetizovávaniu, je tento proces spojený so spotrebou energie zdroja magnetizačného prúdu. Môžeme to ukázať na magnetizovaní feromagnetického toroidálneho prstenca, na ktorom je toroidálne navinutá cievka s N závitmi (pozri napríklad obr. 8.4). Ak je stredná dĺžka prstenca l , potom prúd I v cievke je viazaný s intenzitou magnetického poľa H podľa Ampérovho zákona vzt'ahom

$$I = \frac{Hl}{N}$$

V prípade, že sa prúd s časom mení, bude sa meniť aj intenzita magnetického poľa v prstenci a následne aj magnetická indukcia B . V dôsledku takejto zmeny bude sa v prstenci s časom meniť indukčný tok Φ a na svorkách cievky vznikne indukované protinapätie veľkosti

$$U_{ind} = \frac{d\Phi}{dt} = NS \frac{dB}{dt}$$

kde S je prierezová plocha prstenca. Súčin prúdu a indukovaného napätia udáva elektrický výkon P zdroja, s ktorým sa jeho energia W_e spotrebuje na magnetizáciu prstenca, teda

$$P = \frac{dW_e}{dt} = IU_{ind} = SIH \frac{dB}{dt}$$

Ak označíme $Sl = \tau$ objem prstencovej feromagnetickéj vzorky, potom malá zmena magnetizačnej energie je daná výrazom

$$dW_e = Pdt = \tau HdB$$

a objemová hustota tejto energie

$$dW = \frac{dW_e}{\tau} = HdB$$

Integráciou týchto príspevkov po uzavretej hysteréznej slučke z bodu Q ($-B_{max}$) na obr. 8.12 do bodu P ($+B_{max}$) a späť do bodu Q dostaneme celkové energetické straty (hysterézne straty) na jednotku objemu a na jeden magnetizačný cyklus

$$W = \oint_{-B_{max}}^{+B_{max}} HdB \quad [\text{J} \cdot \text{m}^{-3}] \quad (8.67)$$

Hodnota integrálu (8.67) je daná práve plochou hysteréznej slučky v jednotkách B a H . Hysterézne straty sú väčšie u magneticky tvrdých materiálov, ktoré majú široké hysterézne slučky, oproti stratám v magneticky mäkkých materiáloch, ktorých slučky sú úzke. To je v súhlase s tým, čo sme už povedali o fyzikálnych vlastnostiach magneticky tvrdých a mäkkých materiálov. Keďže slučky sú cyklované raz za periódu, hysterézne straty rastú lineárne s frekvenciou prúdu.

Okrem hysteréznych strát vo feromagnetických materiáloch vznikajú pri striedavom magnetovaní aj straty spojené s vírivými prúdmi, ktoré boli analyzované v časti 7.4. Tam bolo tiež povedané, aké opatrenia treba urobiť na ich zníženie. Problém vírivých prúdov neexistuje vo feritoch, ktoré sú nevodivé.

8.4.2 Magnetostrikcia a magnetoelastický jav

Proces magnetizovania feromagnetík je spojený so zmenami ich lineárnych rozmerov a objemu. Tento jav sa nazýva magnetostrikcia. Pozoroval ju už v roku 1841 anglický fyzik James P. Joule¹ (1818 – 1889), k jeho podrobnejšiemu skúmaniu však došlo až v päťdesiatych rokoch tohto storočia. Ukazuje sa, že vo feromagnetickú látku ochladenej pod Curieho teplotu T_C vzniknú okrem spontánnej magnetizácie aj spontánne mriežkové mechanické napätia, ktoré sa nazývajú spontánna magnetostrikcia. Mriežkové deformácie spôsobené "feromagnetickým poriadkom" sú podľa Joula zdrojom rozmerových zmien feromagnetika. Tak, ako sa pod účinkom magnetizujúceho poľa mení smer magnetizácie, mení sa aj smer mriežkových deformácií. Zmena lineárnych rozmerov feromagnetika sa vyjadruje saturačnou magnetostrikčnou konštantou λ_{si} , ktorá je mierou relatívneho predĺženia alebo skrátenia i -tého rozmeru vzorky pri jej zmagnetizovaní od nuly až po stav jej magnetickej saturácie. Typické hodnoty λ pozdĺž kryštalografických osí sú²

pre Fe	$\lambda_{100} = 20,7 \cdot 10^{-6}$	a	$\lambda_{111} = 21,2 \cdot 10^{-6}$
pre Ni	$\lambda_{100} = -45,9 \cdot 10^{-6}$	a	$\lambda_{111} = -24,3 \cdot 10^{-6}$

S magnetostrikciou sú spojené mnohé javy, ktoré sa prejavujú zmenou tvaru hysteréznej slučky, a ktoré vplyvajú na magnetický príspevok k voľnej energii, resp. ovplyvňujú také technologické parametre látky, ako sú magnetické straty a i. Dnes sú známe materiály, ktorých magnetostrikčná konštanta λ_{si} dosahuje hodnôt až $1600 \cdot 10^{-6}$. Na princípe magnetostrikcie sa vyrábajú magnetostrikčné filtre a hyperzvukové meniče. Magnetostrikcia sa dá využiť v spojení s optickými metódami na veľmi presné meranie magnetickej indukcie (až do presnosti rádu $pT = 10^{-12} T$).

K magnetostrikcii obrátený jav dostal názov magnetoelastický jav. Mechanické napätia pôsobiace na zmagnetované feromagnetikum ovplyvnia magnetické parametre materiálu (jeho magnetizáciu, magnetické straty a i.), čo sa tiež prejaví na tvare hysteréznej slučky, teda na magnetizačných krivkách. Dnes sú vyvinuté vysokocitlivé a presné metódy merania zmien týchto magnetických parametrov, čo spätne umožňuje nedeštruktívne merať mechanické napätia v rôznych častiach strojných zariadení, stavebných konštrukcií, v prostriedkoch cestnej, železničnej a leteckej dopravy a i.³ Nezanedbateľný je aj vedecký prínos poznávania takých štruktúrne zložitých materiálov, ako sú feromagnetiká.

¹ Joule, J. P., Sturgeon's Annals of Electricity 8, 219 (1842); Joule, J. P., Phil. Mag. **30**, 76 (1847)

² Lee, E. W., Rep. Prog. Phys. **18**, 184 (1955)

³ Jaroševič, A., Fabo, P., Kyška, R., Hatala, M. (1992) Vorspannungsmessungen an Baukonstruktion, Braunschweiger Bauseminar, Braunschweig, Germany November 1992, Heft **97**, 71-82

8.4.3 Klasifikácia feromagnetických materiálov a ich výroba

Feromagnetické materiály sa podľa technického použitia delia na dve skupiny:

1. **magneticky mäkké materiály**, ktoré majú vysokú permeabilitu, ľahko sa magnetizujú aj demagnetizujú, to znamená, že ich koerčitívna intenzita je relatívne nízka a hysterézná slučka je úzka;

2. **magneticky tvrdé materiály** s relatívne nízkou permeabilitou, ktoré sa ťažko magnetizujú aj demagnetizujú, majú teda vysokú koerčitívnu intenzitu a širokú, takmer obdĺžnikovú hysteréznú slučku.

Látky z prvej skupiny sa používajú hlavne pri výrobe elektrických motorov a transformátorov, z druhej pri výrobe permanentných magnetov. V magneticky mäkkých feromagnetických materiáloch sa doménové steny posúvajú a preklápajú pomerne ľahko, takže magnetizácia sa môže značne meniť pri malých zmenách magnetizujúceho poľa. Taký materiál musí byť veľmi čistý a čo najhomogénnejší, bez nepravidelností v kryštalickej štruktúre. Musí byť tiež zbavený všetkých vnútorných mechanických napätí. Technológia spracovania materiálov spočíva v žíhaní materiálu a v jeho pomalom ochladzovaní tak, aby sa atómy látky usadili v zodpovedajúcich polohách kryštalickej mriežky.

Na druhej strane, magneticky tvrdé materiály musia mať pevné doménové steny, odolné proti posúvaniu a rotácii, čo sa dá dosiahnuť vytvorením mriežkových porúch a nečistotami. Feromagnetické materiály s prísadami sa nahrievajú na vysokú teplotu a prudko sa v oleji ochladzujú, čím sa v štruktúre vytvorí potrebné vnútorné mechanické napätia. Zásadný obrat vo výrobe tvrdých feromagnetických materiálov nastal v roku 1932, keď japonský technolog T. Mishima¹ tepelným opracovaním zliatiny železa, niklu, hliníka a kobaltu pripravil tvrdý feromagnetický materiál známy pod názvom ALNICO (pozri tabuľku 12 a obr. 8.18). Tento materiál v jeho mnohých variáciách sa používa dodnes na výrobu permanentných magnetov.

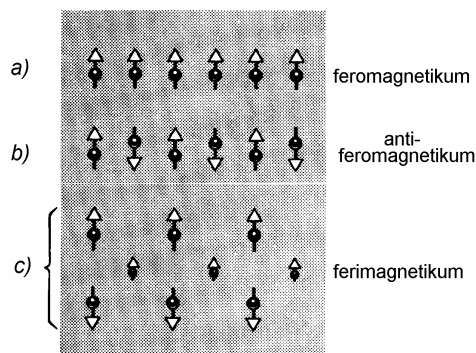
Permanentné magnety sa vyrábajú tiež zlisovaním veľmi jemných feromagnetických práškov. Ak sú častice prášku dostatočne malé, potom každá častica je jednou doménou bez vnútorných doménových stien. Magnet možno magnetizovať a demagnetizovať iba rotáciou magnetického momentu celej častice. Vhodným tvarom a vnútornou štruktúrou častíc sa dá dosiahnuť taká anizotropia vlastností, že rotácia magnetizácie je možná iba o 180°. To je spojené s vyššou koerčitívnou intenzitou v materiále. Dobrý permanentný magnet vyžaduje prášky s vysokou saturačnou magnetizáciou M_s , a usporiadané tak, aby "ľahké" smery magnetizácie boli paralelné. Vyžaduje sa tiež vysoká Curieho teplota.

S feromagnetizmom sú úzko spojené ďalšie dva už spomínané typy magnetizmu, a to antiferomagnetizmus a ferimagnetizmus. V antiferomagnetických látkach, akou je napr. MnO_2 , už spomínaná výmenná väzba spôsobuje antiparalelné zoskupovanie magnetických momentov zobrazené na obr. 8.17b (pre porovnanie je na obr. 8.17a zobrazené zorientované feromagnetikum). Také látky vykazujú navonok veľmi malý výsledný magnetizmus. Ak sa nahrejú nad istú – **Néelovu teplotu**, výmenná väzba vymizne a látky sa stávajú paramagnetické.

Ferimagnetické látky, ktorých reprezentantom je železný ferit, obsahujú dva rôzne magnetické ióny (v danom prípade Fe^{2+} a Fe^{3+}). Výmenná väzba vedie k takému usporiadaniu iónov, aké je znázornené na obr. 8.17c. Vonkajšie magnetické vlastnosti ferimagnetík ležia medzi vlastnosťami feromagnetík a antiferomagnetík. Pri zvyšovaní teploty

¹ Mishima, T., U.S. Patent 2 027 966, Ohm, **19**, 353 (1932)

ferimagnetika výmenná väzba pri istej teplote vymizne a látka stratí makroskopické magnetické vlastnosti. Ferimagnetiká majú jednu vynikajúcu elektrickú vlastnosť, že sú prakticky nevodivé, sú to teda veľmi dobré dielektriká. Táto ich vlastnosť ich predurčuje na použitie v striedavých, hlavne vysokofrekvenčných magnetických poliach, bez nebezpečia vzniku indukovaných prúdov a nežiaducich Jouleových strát vo ferimagnetiku.



Obr. 8.17

V tabuľke 11 je uvedených niekoľko vybraných magneticky mäkkých materiálov s ich zložením a magnetickými parametrami. Všetky, okrem feritov, sú pripravované žiňaním pri teplotách v rozsahu 800 °C až 1 300 °C, supermalloy vo vodíkovej atmosfére, a presne kontrolovaným ochladzovaním. Permalloy a supermalloy sa po magnetickej príprave nesmú mechanicky upravovať (napr. ohýbať). Sú to mimoriadne magneticky mäkké materiály. K ich magnetickému nasýteniu dochádza už pri desatinách A/m. Používajú sa v malých jadrách elektromagnetických mechanizmov (nízkoprúdových transformátoroch, magnetických zosilňovačoch, krokových motoroch a i.) pracujúcich na nízkych frekvenciách do rádu 10 kHz pri slabých magnetických poliach.

Magneticky mäkké ferity sú pripravované spekaním kysličníkov železa s prísadami a majú úzku, takmer obdĺžnikovú hysteréznú slučku. Sú to vlastne keramiky a ich rezistivita je veľmi vysoká.

Magneticky tvrdé materiály sa takmer výlučne používajú na výrobu permanentných magnetov. Permanentné magnety umožňujú získať stabilné magnetické polia, často s väčšou indukciou a pri menšom objeme ako pomocou elektromagnetov.

V tabuľke 12 sú uvedené parametre niektorých typických magneticky tvrdých materiálov. Niekoľko závislostí $B - H$ v druhom kvadrante hysteréznych slučiek, nazývaných demagnetizačné krivky (pozri obr. 8.12), pre vybrané materiály je zobrazených na obr. 8.18.¹

¹ Dáta (s výnimkou Nd-Fe-B magnetu) sú prevzaté z knihy Nesbitt, E. A., Wernick, J. H.: Rare Earth Permanent Magnets, Bell Laboratories Murray Hill, New Jersey, Academic Press New York and London 1973

Tabuľka 11

Magneticky mäkké materiály

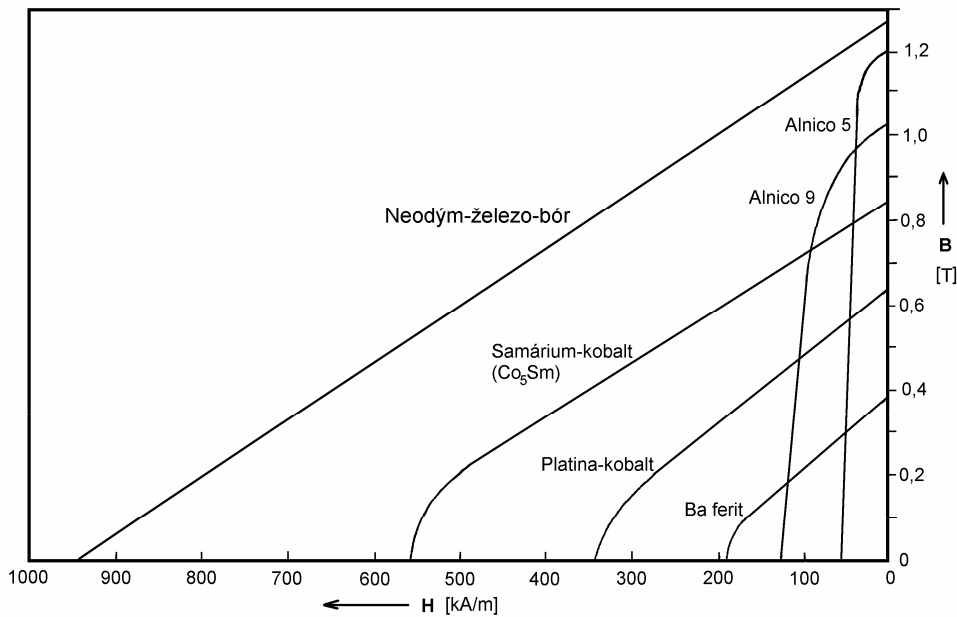
Názov – zloženie (%)	B_s [T]	μ_{ro}	μ_{rm}	H_c [A/m]	ρ^1 [$\mu\Omega\cdot\text{cm}$]
Technické železo – armco (prímesí 0,2, zvyšok Fe)	2,16	150	5 000	80	10
Kremičité železo (4 Si, zvyšok Fe)	1,97	500	7 000	40	60
Permalloy (68 Ni, zvyšok Fe)	1,30	1 200	$2,5 \cdot 10^3$	2,4	20
Supermalloy (5 Mo, 79 Ni, zvyšok Fe)	0,79	10^5	10^6	0,16	60
Permendur V (49 Co, 2 V, zvyšok Fe)	2,40	800	4 500	140	26
Ni-Zn ferit (48,5 Fe ₂ O ₃ , 35,5 ZnO, 16,0 NiO)	0,1965	5 000	7 560	4,0	10^8
Mn-Mg ferit (37,8 Fe ₂ O ₃ , 28,1 MgO, 34,1 MnO)	0,19	4,8	500	110	10^{12}

¹ ρ je rezistivita materiálov

Tabuľka 12

Magneticky tvrdé materiály

Názov – zloženie (%)	B_r [T]	H_c [kA/m]	$(BH)_{max}$ [kJ/m ³]
Chrómová oceľ (3,5 Cr, 1 C, 0,5 Mn, zvyšok Fe)	0,95	5,30	2,30
Kobaltová oceľ (40Co, 0,7 C, 5 W, 4,25 Cr, zvyšok Fe)	1,0	19,30	8,20
Alnico 5 (8 Al, 15 Ni, 24 Co, 3 Cu, zvyšok Fe)	1,2	57,30	39,80
Alnico 9 (7Al, 15Ni, 35 Co, 4 Cu, 5 Ti, zvyšok Fe)	1,04	127,40	67,60
Platina – kobalt (76,7 Pt, 23,3 Co)	0,6	342,30	75,60
Lisovaný Fe mikroprášok	0,45	37,80	6,80
Báryový ferit – orientovaný (BaO.6Fe ₂ O ₃)	0,37	195,50	27,90
Samárium – kobalt (prášok Co ₅ Sm, spekanie 60 hm. % Sm + 40 hm. % Co)	0,84	557,00	127,30
Sintrovaný Nd-Fe-B magnet	1,27	940,00	300,00



Obr. 8.18

8.4.4 Permanentné magnety

Popri remanentnej indukčii B_r a koerčitívnej intenzite H_c sa materiál hodnotí pomocou akostného faktoru $(BH)_{max}$, ktorý zodpovedá bodu na hysteréznej slučke v jej druhom kvadrante (pozri obr. 8.12). Tento bod udáva maximálnu hustotu magnetickej energie v zmagnetovanom materiále. Pre hlbšie pochopenie tohto pojmu treba urobiť všeobecnejšiu úvahu o magnetických poliach produkovaných permanentnými magnetmi. Permanentný magnet, podobne ako elektromagnet, slúži na produkciu silných magnetických polí v definovanom voľne prístupnom objeme v priestore magnetu, napr. v štrbine medzi pólmi magnetu na obr. 8.19 (uzavretý železný toroid zmagnetovaný pozdĺž jeho kruhovej osi by asi nemal veľký praktický význam). V praxi požadované magnetickej indukcie bývajú v rozsahu 0,1 až 10 T v objeme, ktorý sa mení od 10^{-4} m^3 až do mnohých kubických metrov, napr. vo veľkých urýchľovačoch alebo v zariadeniach vysokoteplotnej plazmy. Hustota energie magnetickeho poľa v štrbine magnetu je podľa odseku 7.7.1 daná výrazom

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0$$

a podobne v jadre magnetu

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

Energia magnetickeho poľa v štrbine magnetu je

$$\left(\frac{1}{2} B_0 H_0\right) \tau_0$$

kde $\tau_0 = Sl_0$ je objem štrbiny. Predpokladá sa, že vektory \mathbf{B}_0 a \mathbf{H}_0 sú paralelné a pole nemá rozptyl. Energia štrbiny súvisí s magnetickou energiou magnetických momentov feromagnetika, teda s energiou magnetizovaného feromagnetika. Súvis energií možno získať jednoduchou úvahou. Z hraničných podmienok plynie, že na čelnej ploche S pólového nadstavca platí

$$B_0 S = BS$$

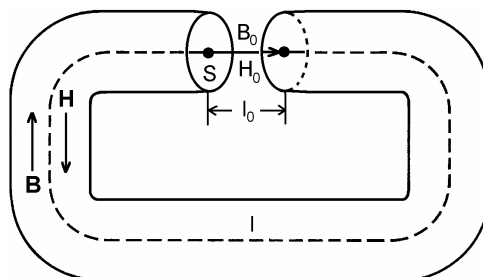
a pre uzavretú dráhu v magnete, vyznačenú čiarkovane, podľa Ampérovho zákona platí

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_0 l_0 + Hl = 0$$

kde l_0 je časť dráhy v štrbine a l je dráha v jadre magnetu. Pravá strana rovnice sa rovná nule, pretože $I = 0$. Kombináciou posledných dvoch rovníc dostaneme

$$\left(\frac{1}{2} B_0 H_0\right) \tau_0 = -\left(\frac{1}{2} BH\right) \tau \quad (8.68)$$

kde $\tau = Sl$ je objem jadra magnetu. Tento dôležitý vzťah udáva, že pri danom objeme τ magnetu bude energia v štrbine maximálna, ak súčin BH má maximálnu hodnotu.

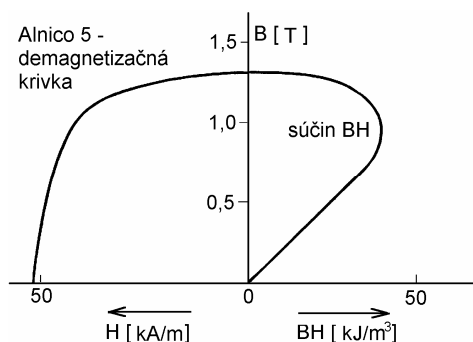


Obr. 8.19

Závislosť súčinu BH v magnete od indukcie B pre typický materiál Alnico 5 je znázornená na obr. 8.20 spolu s **demagnetizačnou krivkou**. Vo vnútri magnetu má intenzita magnetického poľa H opačný smer ako indukcia B , preto je na pravej strane vzťahu (8.68) znamienko mínus. Veľkosť demagnetizačného poľa závisí od tvaru magnetu a šírky jeho štrbiny, ktoré musia byť zvolené tak, aby sa materiál nachádzal v bode, v ktorom je BH maximálne. Spravidla je tento bod blízky hodnote $B_r H_c$.

V praxi je energia magnetu vždy menšia ako hodnota daná výrazom (8.68) pretože magnet má vždy istý rozptyl indukcie. Najlepší tvar magnetu je taký, ktorý zaručuje, že súčin BH v každom jeho bode je blízky k maximálnej hodnote. Keďže súčin BH je pre materiál charakteristický, magnetická energia v štrbine je úmerná objemu magnetu.

Moderné magnetické materiály majú veľmi vysoký faktor $(BH)_{max}$ a vysokú koerčívnu intenzitu, čo vidieť z tabuľky 12 alebo z *obr. 8.18*. Takými sú najmä magnety na báze vzácnych zemin (napr. Co_5Sm). Vynikajúcim materiálom je aj zliatina Pt-Co, je však veľmi drahá, a preto sa používa iba na špeciálne účely (napr. na fokusáciu elektrónového zväzku v permaktrónoch a p.). Vývoj materiálov na permanentné magnety pokračuje. V roku 1985 prišli na trh sintrované vysokokvalitné magnety zloženia neodým-železo-bór s parametrami $H_c = 940 \text{ kA/m}$ a $(BH)_{max} = 300 \text{ kJ/m}^3$.¹ Tieto magnety predstavujú súčasnú špičku v technológii výroby magnetov.



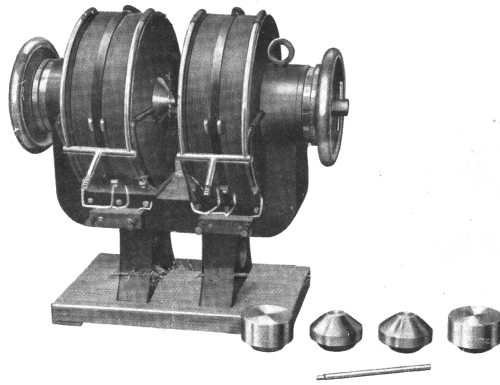
Obr. 8.20

8.4.5 Elektromagnety

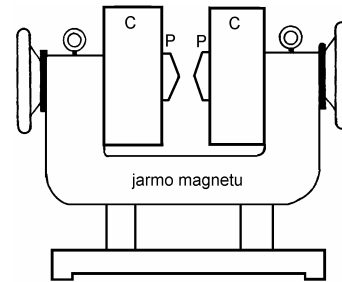
Ak treba dosiahnuť magnetické pole väčšie, ako umožňujú permanentné magnety alebo sa vyžaduje možnosť meniť indukciu, používajú sa elektromagnety. Elektromagnet pozostáva z feromagnetického jadra a z vinutia s veľkým počtom závitov medeného drôtu, ktorým preteká elektrický prúd. Vinutia elektromagnetov s veľkými prúdmi sú často chladené vodou. Elektromagnetom možno dosiahnuť indukcie do cca 2,5 T. Indukcia je obmedzená saturačnou magnetizáciou M_s použitého feromagnetika, z ktorého je vyrobené jarmo elektromagnetu. Na výrobu jarma elektromagnetu sa používajú magneticky mäkké materiály s vysokou hodnotou M_s . Pólové nastavce elektromagnetu (feromagnetické zakončenie magnetického obvodu smerom do štrbiny) sú vyrobené z ušľachtilých homogénnych mäkkých ocelí (napr. permendur, pozri tab. 11). Na *obr. 8.21* je znázornený laboratórny elektromagnet typu Weiss, s premennou vzdialenosťou pólových nastavcov P a vinutím rozdeleným do dvoch veľkých cievok C .

Pozrime sa teraz, ako možno určiť magnetickú indukciu v štrbine elektromagnetu v závislosti od prúdu vo vinutí, od geometrie magnetu a magnetických vlastností jadra. Na *obr. 8.22* je znázornený jednoduchý elektromagnet pozostávajúci z mäkkého feromagnetického jadra podobného tvaru ako permanentný magnet na *obr. 8.19*, na ktorom je navinutá cievka s N závitmi. Budeme predpokladať, že štrbina magnetu je taká úzka, že je splnená podmienka $l_0 \ll l$, okrem toho priemer pólových nastavcov $D \gg l_0$. V takom prípade magnetická indukcia B_0 aj B je kolmá na čelá pólových nastavcov a jej rozptyl

¹ Magnetic Development Ltd, Magnet House, Blackworth Industrial Estate, Highworth, Swindon, UK



a)

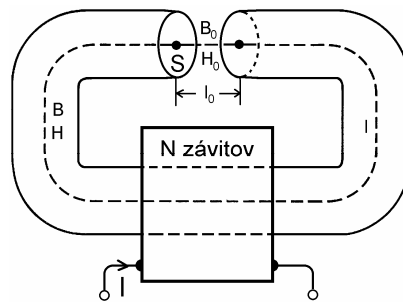


b)

Obr. 8.21

zo štrbiny možno zanedbať (pole indukcie B v štrbine i v jadre je homogénne a jadro tvorí tokovú trubicu). Pre uzavretú dráhu po prerušovanej čiare cez jadro a štrbinu možno podľa Ampérovho zákona písať

$$\oint_{l_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_0 l_0 + Hl = NI \quad (8.69)$$



Obr. 8.22

kde $l_c = l_0 + l$ je celková dĺžka uzavretej dráhy, I je prúd vo vinutí elektromagnetu. Na čelách pólových nastavcov je splnená hraničná podmienka pre normálové magnetické indukcie B a B_0 , teda

$$B = B_0$$

V štrbine magnetu je vzduch, a preto tam platí

$$B_0 = \mu_0 H_0 = B$$

Ak v rovnici (8.69) dosadíme za H_0 , dostaneme

$$\frac{l_0}{\mu_0} B + lH = NI \quad (8.70)$$

V rovnici (8.70) sú dve neznáme B a H v jadre magnetu, ostatné veličiny sú známe. K riešeniu rovnice potrebujeme ďalší vzťah medzi B a H . Takýto analytický vzťah však neexistuje. Ak sa možno uspokojíť s nejakou strednou konštantnou permeabilitou $\mu_0\mu_r = B/H$ na nejakom intervale magnetovania materiálu, potom týmto vzťahom je

$$B = \mu_0\mu_r H \quad (8.71)$$

a riešenie sústavy rovníc (8.70) a (8.71) je algebraické tvaru

$$B = \mu_0\mu_r H = \frac{\mu_0\mu_r NI}{l_0\mu_r + l} = B_0 \quad (8.72)$$

a

$$H = \frac{B}{\mu_0\mu_r} = \frac{NI}{l_0\mu_r + l} \quad (8.73a)$$

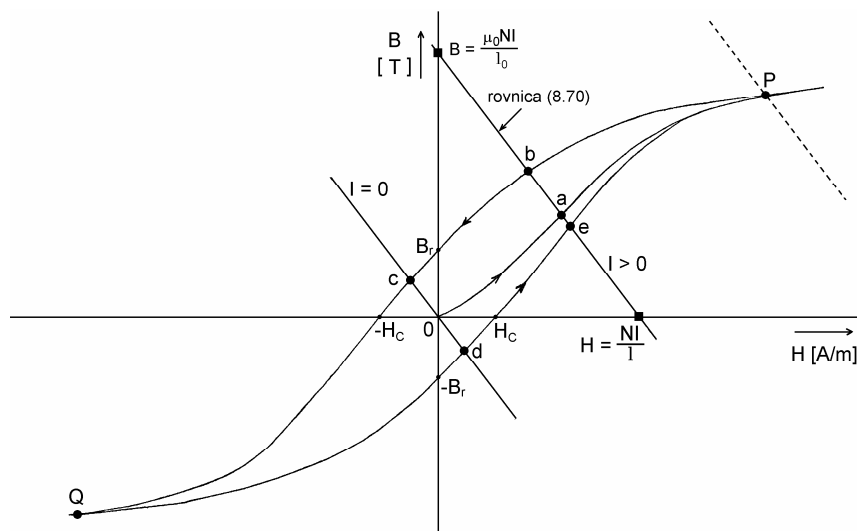
V štrbine je intenzita magnetického poľa

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\mu_r NI}{l_0\mu_r + l} \quad (8.73b)$$

Magnetická indukcia v štrbine a v jadre elektromagnetu je teda rovnaká ($B_0 = B$), zatiaľ čo intenzita magnetického poľa v štrbine je μ_r -krát väčšia ako v jadre ($H_0 = \mu_r H$).

V prípade, ak sa vyžaduje vyššia presnosť, funkčným vzťahom medzi B a H v jadre sú magnetizačné krivky, resp. hysteréza slučka a problém poľa v jadre a v štrbine treba riešiť graficky. Na obr. 8.23 je znázornená hysteréza slučka v súradniciach $B - H$ a lineárny vzťah (8.70) medzi B a H pre konštantný kladný prúd I . Je to priamka so smernicou $-l/l_0$. Možnými riešeniami nášho problému sú všetky body, v ktorých sa priamka pretína so všetkými možnými magnetizačnými a hysteréznymi krivkami. Na obrázku je znázornená krivka prvotnej magnetizácie a limitná hysteréza slučka získaná premagnetovaním jadra do nasýtenia. Ak je jadro práve vyrobené, bez magnetickej predhistórie, pri prvotnom zvýšení prúdu na hodnotu I vzrastie H a B v jadre na hodnotu určenú priesečníkom a . Ak zvýšime prúd dostatočne vysoko, tak aby sa materiál dostal do nasýtenia v bode P , a potom ho znovu znížime na hodnotu I , dostaneme sa do bodu b , ktorému zodpovedá iná dvojica B a H . Ak prúd znížime na nulu, bude v materiále a v štrbine magnetu magnetická indukcia daná hodnotou B v bode c . Je to bod, v ktorom by sme vinutie z magnetu mohli odstrániť a mali by sme slabý permanentný magnet s hodnotou indukcie $B < B_r$ a zodpovedajúcim demagnetizačným poľom $-H$. Ak by mal magnet nulovú štrbinu $l_0 = 0$, indukcia v jadre by bola B_r a intenzita $H = 0$. Ak zmeníme smer prúdu a budeme jeho hodnotu zvyšovať, dostaneme sa do nasýtenia v opačnom smere v bode Q . Znížením prúdu na nulu sa dostaneme do bodu d , keď je elektromagnet znovu permanentným magnetom, ale opačne magnetovaným. Ďalším zvýšením prúdu na pôvodnú začiatočnú hodnotu I sa dostaneme do bodu e , ktorému zodpovedá ďalšia

možná dvojica hodnôt B a H . Vidíme, že rôznym spôsobom magnetovania jadra môžeme v elektromagnete dosiahnuť množstvo hodnôt indukcií pri tom istom prúde. Magnetizácia a indukcia je jednoznačná iba v oblastiach nasýtenia nad bodmi P a Q . Možno si tiež všimnúť, že ak je prúd konštantný, magnetická indukcia je v istom rozsahu nepriamo úmerná šírke štrbiny.



Obr. 8.23

Na koniec tohto odseku sa treba ešte dotknúť otázky maximálnych magnetických indukcií, ktoré možno dosiahnuť v permanentných magnetoch a v elektromagnetoch s feromagnetickým jadrom. Tieto maximálne magnetické indukcie sú obmedzené maximálnou magnetizáciou v oblasti nasýtenia M_s a im zodpovedajúcim saturačným magnetickým indukciami $B_s \sim \mu_0 M_s$. Ako vidieť z tabuliek 11 a 12, neexistujú prirodzené ani pripravené feromagnetiká, ktoré by mali vyššie B_s ako cca 2,5 T, a to je aj medza najvyšších magnetických indukcií vo feromagnetikách. Ak treba vytvoriť vyššie magnetické indukcie, dá sa to teoreticky iba vo vzduchových cievkach, napr. vo vnútri solenoidu, v ktorom magnetická indukcia je (v prípade dlhého solenoidu) daná výrazom

$$B = \mu_0 nI$$

kde I je prúd v solenoide a n je počet závitov na jednotku jeho dĺžky. Magnetická indukcia v solenoide je priamo úmerná prúdu vo vinutí, ten je však obmedzený maximálnou prípustnou prúdovou hustotou, nad ktorou sa vinutie začne neprípustne zahrievať. Spravidla sa v solenoide práve z týchto dôvodov nedajú dosiahnuť také statické magnetické indukcie ako vo feromagnetoch. Možno v nich však dosiahnuť veľmi vysoké impulzné indukcie.

Vysoké statické magnetické indukcie, až cca 20 T, možno dosiahnuť v supravodivých magnetoch, ktorých podstatu tvorí supravodivý solenoid s veľkým prúdom udržiavaným veľmi nízkou teplotou supravodiča (pozri odsek 8.5).

8.4.6 Magnetické obvody

V prípade, keď je pre feromagnetický materiál prijateľné lineárne priblíženie dané výrazom (8.71), možno vzťah (8.69) prepísať do tvaru

$$\oint_{l_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI = B \left(\frac{l_0}{\mu_0} + \frac{l}{\mu_0 \mu_r} \right)$$

alebo

$$\oint_{l_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI = \Phi \left(\frac{l_0}{\mu_0 S} + \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} \right) \quad (8.74)$$

$\Phi = BS$ je indukčný tok prierezom S . Veličiny v poslednej zátvorke majú rozmer recipročného henry (H^{-1}) a svojou štruktúrou sa podobajú na výraz pre elektrický odpor úseku l vodiča s prierezom S , ak sa urobí zámena $\sigma \Leftrightarrow \mu$. Možno teda definovať veličinu

$$R_m = \frac{l}{\mu S} \quad [\text{H}^{-1}] \quad (8.75)$$

ktorá sa nazýva **magnetický odpor** alebo **reluktancia** časti magnetického obvodu, ktorým tečie indukčný tok $\Phi = BS$. Prevrátená hodnota magnetického odporu $G_m = 1/R_m$ [H] sa nazýva **magnetická vodivosť**, alebo **permeancia**. V analógii s elektrickými obvodmi možno súčiny typu ΦR_m nazvať "magnetické napätie", a súčiny NI **magnetomotorické napätie** (MMN) \mathcal{M} s jednotkou A.¹ Ľavá strana rovnice (8.74) je teda magnetomotorické napätie v magnetickom obvode

$$\mathcal{M} = \oint_{l_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI \quad [\text{A}] \quad (8.76)$$

ktoré pôsobí v uzavretom magnetickom obvode pozdĺž čiar l_c . Rovnicu (8.74) možno teda napísať v tvare

$$\mathcal{M} = \Phi(R_{m0} + R_m) = \Phi R_{mc} \quad (8.77)$$

ktorý sa formálne podobá na Ohmov zákon pre uzavretý obvod. Rovnicu (8.77) odvodili v roku 1886 bratia J. a E. Hopkinson a po nich sa nazýva **zákon Hopkinsonovcov**. Ľubovoľne zložitý systém magnetických tokov možno na základe výrazu (8.77) modelovať elektrickou sieťou a pri formálnej analógii s Ohmovým zákonom využiť na riešenie metódy elektrickej obvodovej analýzy. Treba pri tom urobiť záměny:

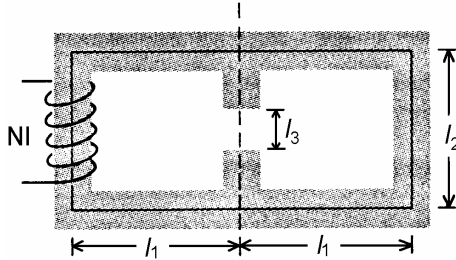
$$\begin{aligned} \text{EMN zdroja } \mathcal{E} &\Leftrightarrow \text{MMN zdroja } \mathcal{M} \\ \text{elektrický odpor } R = \frac{l}{\sigma S} &\Leftrightarrow \text{magnetický odpor } R_m = \frac{l}{\mu S} \end{aligned}$$

¹ V MKSA sústave jednotiek bol jednotkou magnetomotorického napätia ampérzávit [Az] = [A], ktorý výstižne vyjadroval veľkosť veličiny NI . S týmto pojmom sa stretáme aj dnes vo výrobe transformátorov, tlmiviek alebo elektrických motorov. SI sústava však tento užitočný pojem a jednotku nepozná.

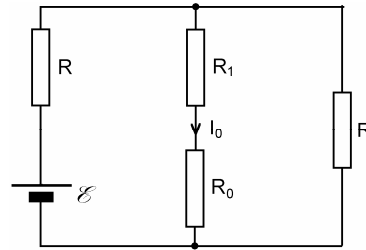
elektrický prúd $I \Leftrightarrow$ indukčný tok Φ

Na ilustráciu metódy môže poslúžiť nasledujúci príklad:

Na obr. 8.24 je znázornený magnetický obvod, pre ktorý sú dané tieto numerické údaje: počet závitov $N = 150$, prúd vo vinutí $I = 1$ A, rozmery jadra $l_1 = l_2 = 10$ cm, dĺžka štrbiny $l_3 = 1$ cm, permeabilita materiálu $\mu = 3\,000\mu_0$. Treba vypočítať magnetickú indukciu v štrbine. Okrajové efekty a rozptyl magnetickej indukcie možno zanedbať.



Obr. 8.24



Obr. 8.25

Riešenie: Magnetický obvod možno modelovať elektrickým zapojením podľa obr. 8.25, kde

$$\mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{M} = NI$$

$$R \Leftrightarrow R_m = \frac{2l_1 + l_2}{\mu S} \quad R_1 \Leftrightarrow R_{m1} = \frac{l_2 - l_3}{\mu S} \quad R_0 \Leftrightarrow R_{m0} = \frac{l_3}{\mu_0 S}$$

Pre prúd I_0 odporni R_1 a R_0 (ktoré modelujú magnetické odpory obidvoch pólových nastavcov a štrbiny) platí

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R + 2R_1 + 2R_0}$$

takže analogický indukčný tok pólovými nastavcami a štrbinou je

$$\Phi = BS = \frac{\mathcal{M}}{R_m + 2R_{m1} + 2R_{m0}}$$

alebo

$$B = \frac{3\,000\mu_0 NI}{2l_1 + 3l_2 - 2l_3 + 6\,000 l_3} = 9,35 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Treba si všimnúť, že v magnetických obvodoch najväčšie magnetické odpory majú neferomagnetické (vzduchové a iné) štrbiny, ktoré rozhodujúcim spôsobom obmedzujú indukčné toky. Naopak, feromagnetiká majú najmenšie odpory. Tak napr. v poslednom

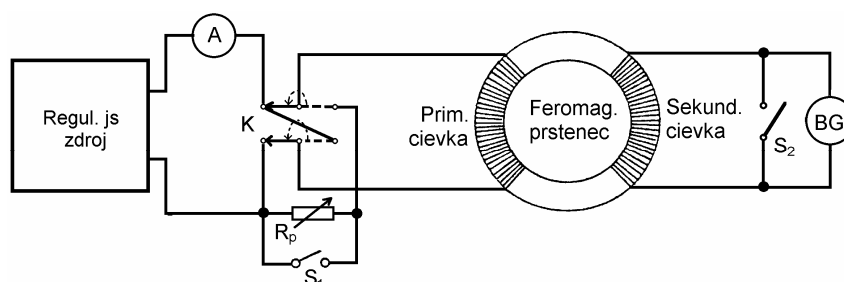
výraze možno prvé tri členy v menovateli (súvisiace s odpormi R_m a R_{m1}) zanedbať, čo podstatne neovplyvní výsledok. Magnetické odpory R_m a R_{m1} sú totiž oveľa menšie ako odpor R_{m0} .

8.4.7 Experimentálne snímanie magnetizačných kriviek a hysteréznej slučky

8.4.7.1 Balistická metóda

Pre zobrazenie magnetizačných a hysteréznych kriviek materiálu treba určiť v jeho vnútri veličiny B a H v závislosti od magnetizujúceho prúdu a potom závislosť B na H znázorniť graficky. Na tieto účely sa ako vzorka feromagnetického materiálu najlepšie hodí tenký prstenec alebo toroid, ktorého stredný priemer je podstatne väčší ako rozdiel vonkajšieho a vnútorného priemeru. Ak je toroid magnetovaný pozdĺž jeho vytvárajúcej kružnice, neexistuje v ňom demagnetizujúce pole (nemá otvorené konce), a preto je tento tvar vzorky na meranie najvýhodnejší. Absolútne merania magnetizačných kriviek na toroidálnej vzorke robil už v roku 1873 americký fyzik H. A. Rowland.¹ Elektrické zapojenie na meranie je znázornené na obr. 8.26. Základným prvkom zapojenia je prstencová (toroidálna) vzorka, na ktorej je tesne a rovnomerne navinutá sekundárna cievka s veľkým počtom závitov N_s a na nej primárna magnetizačná cievka s N_p závitmi hrubšieho medeného drôtu. Primárna cievka sa cez komutátor K , premenný odpor R_p a ampérmetr A pripája k regulovateľnému jednosmernému napájaciemu zdroju. Regulovateľný zdroj umožňuje nastaviť ľubovoľný magnetizačný prúd I kontrolovaný ampérmetrom a komutátorom možno meniť smer prúdu v primárnej cievke. Ak primárnou cievkou tečie prúd I , v toroide je intenzita magnetického poľa

$$H = \frac{NI}{l}$$



Obr. 8.26

kde l je dĺžka stredovej kružnice prstenca. Spínačom S_1 možno meniť prúd v skokoch ΔI pri predchádzajúcom vhodnom nastavení hodnoty odporu R_p , a tým meniť aj intenzitu poľa o hodnotu ΔH . Pri komutácii prúdu sa mení H na $-H$, teda o $\Delta H = 2H$. K sekundárnej cievke je pripojený fluxmeter alebo balistický galvanometer BG kalibrovaný na meranie

¹ Rowland, H. A., Amer. Journ. of Science **30** (1878)

impulzného náboja. Kvôli ochrane možno galvanometer spínačom S_2 kedykoľvek skratovať. Princíp merania spočíva v tom, že každá zmena intenzity poľa ΔH v toroide vedie k zmene indukčného toku $\Delta\Phi$. Zmena $\Delta\Phi$ indukuje v sekundárnej cievke napätie a následne impulzný prúd I cez galvanometer. Galvanometer meria integrálny náboj

$$Q = \int_0^t I_{ind} dt = \int_0^t \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} dt = -\frac{1}{R} \int_0^t \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{1}{R} \int_0^t d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R} \quad (8.78)$$

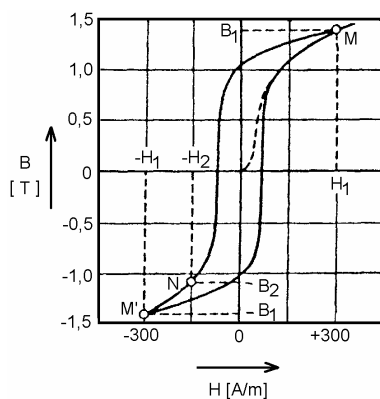
kde R je celkový odpor obvodu sekundárnej cievky a

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = N_s S \Delta B$$

je celková zmena indukčného toku N_s závitmi sekundárnej cievky s prierezom S . ΔB je zmena indukcie zodpovedajúca zmene ΔH . Kombináciou posledných dvoch výrazov dostaneme pre zmenu indukcie výraz

$$\Delta B = \frac{R}{N_s S} Q = kQ \quad (8.79)$$

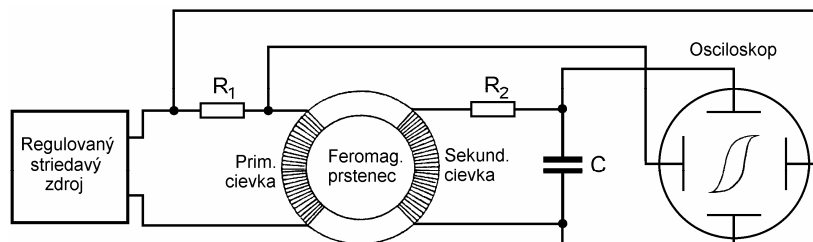
kde k je konštanta zariadenia.



Obr. 8.27

Samotný postup merania je nasledujúci: Vzorku treba najprv dôkladne demagnetizovať, pretože balistická metóda je založená na meraní zmien indukcie ΔB . Najvhodnejšie je pre tento účel nahradiť jednosmerný zdroj zdrojom striedavým, skratovať galvanometer spínačom S_2 , zvýšiť v obvode striedavý prúd až do oblasti nasýtenia a z tejto hodnoty ho pozvoľne znížiť na nulu. Skúsenosti ukazujú, že takáto demagnetizácia nemusí viesť vždy k úplnému potlačeniu remanentného magnetizmu. Spoľahlivú demagnetizáciu možno dosiahnuť iba nahriatím vzorky nad Curieho teplotu. Po demagnetizovaní vzorky sa k zariadeniu pripojí jednosmerný zdroj a nastaví sa intenzita poľa na hodnotu H_1 zodpovedajúcu bodu M na obr. 8.27. Komutátorom sa zmení smer intenzity H a na galvanometri sa odčíta údaj úmerný zmene magnetickej indukcie, teda hodnota $2B_1$, z čoho sa určí B_1 . Tým sú určené body M a M' na obr. 8.27. Na určenie bodu N sa zmení

hodnota H_1 komutáciou prúdu pri vhodnej hodnote odporu R_p na hodnotu $-H_2$ a zodpovedajúci údaj galvanometra sa odčíta od hodnoty B_1 , čím dostaneme hodnotu $-B_2$ v bode N . Takto postupne, zmenou H_2 , možno získať potrebný počet bodov hysteréznej slučky. Podľa literárnych prameňov možno pri balistickej metóde dosiahnuť presnosť merania 0,1 %.



Obr. 8.28

8.4.7.2 Dynamické snímanie hysteréznej slučky

Na rýchle orientačné snímanie hysteréznej slučky slúži dynamická metóda, pri ktorej sa využíva zapojenie zobrazené na obr. 8.28. Primárna cievka na feromagnetickú vzorku sa napája striedavým prúdom vhodnej amplitúdy cez odpor R_1 . Striedavé napätie z odporu sa privádza na horizontálny vstup osciloskopu. Zo sekundárnej cievky sa indukované napätie cez jednoduchý R_2C integrátor privádza na vertikálny vstup osciloskopu. Na obrazovke osciloskopu sa takto zobrazí kompletná hysterézná slučka. Test magnetického materiálu touto metódou nie je tak presný ako pri predchádzajúcej metóde, je však rýchly, a preto sa využíva hlavne pri priemyselnej kontrole výroby feromagnetík.

8.5 Meranie magnetických polí

8.5.1 Indukčné metódy

Aj keď sme sa v našom pojednaní nevenovali meraniu a meracím metódam elektrických veličín, domnievam sa, že meranie magnetickej indukcie si zaslúži pozornosť, pretože ide o fyzikálne meranie vyžadujúce dostatočne veľkú experimentálnu zručnosť, čo je zrejme najmä z opisu snímania hysteréznych slučiek.

Pomerne jednoduché je meranie striedavých harmonických magnetických polí, na ktoré možno využiť zákon elektromagnetickej indukcie. K meraniu je potrebná malá plochá prstencová cievka s N závitmi a s definovanou plochou závitú S . Cievka sa pripojí k voltmetru s vysokým vstupným odporom (elektronický voltmeter) a vloží sa do priestoru magnetického poľa tak, aby os cievky bola paralelná so smerom vektora magnetickej indukcie B . Ak magnetické pole má amplitúdu B a časový priebeh $B = B_0 \cos \omega t$ so známou kruhovou frekvenciou ω , indukčný tok cievkou je $\Phi = NSB = NSB_0 \cos \omega t$ a indukované napätie v cievke, merané voltmetrom je

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -NS \frac{dB}{dt} = \omega SNB_0 \sin \omega t = U_0 \sin \omega t$$

kde U_0 je amplitúda napätia meraná voltmetrom. Amplitúda magnetickej indukcie je teda

$$B_0 = \frac{U_0}{\omega SN} \quad (8.80)$$

To isté experimentálne usporiadanie možno použiť aj na meranie časovo stálych magnetických polí B , ak vhodným spôsobom zaistíme, aby sa indukčný tok $NS \cdot B$ v čase menil. Ak sa cievka v poli otáča so známou uhlovou rýchlosťou ω_0 okolo niektorého z jej priemerov, potom súčin $NS \cdot B = NSB \cos \omega_0 t$ a voltmeter bude merať striedavé napätie s amplitúdou U_0 . Magnetická indukcia bude daná podobným výrazom ako (8.80), teda

$$B = \frac{U_0}{\omega_0 SN} \quad (8.81)$$

Ďalšia metóda merania B využíva balistický galvanometer alebo fluxmeter a má veľa spoločného s metódou snímania hysteréznej slučky. Ak už opísanú cievku pripojíme k balistickému galvanometru a presunieme ju z miesta, kde sú magnetická indukcia, a teda aj indukčný tok nulové, do miesta, kde magnetická indukcia je B a indukčný tok cievkou je $\Phi = NSB$, pretečie balistickým galvanometrom náboj Q daný podobným výrazom ako je (8.78), teda

$$Q = \int_0^t I_{ind} dt = \int_0^t \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} dt = -\frac{1}{R} \int_0^t \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{1}{R} \int_0^{\Phi} d\Phi = \frac{\Phi}{R}$$

kde R je celkový odpor uzavretého obvodu galvanometra, teda jeho vstupný odpor plus v sérii odpor cievky s prívodnými vodičmi. Z tejto rovnice pre absolútnu hodnotu magnetickej indukcie dostaneme

$$B = \frac{QR}{NS} \quad (8.82)$$

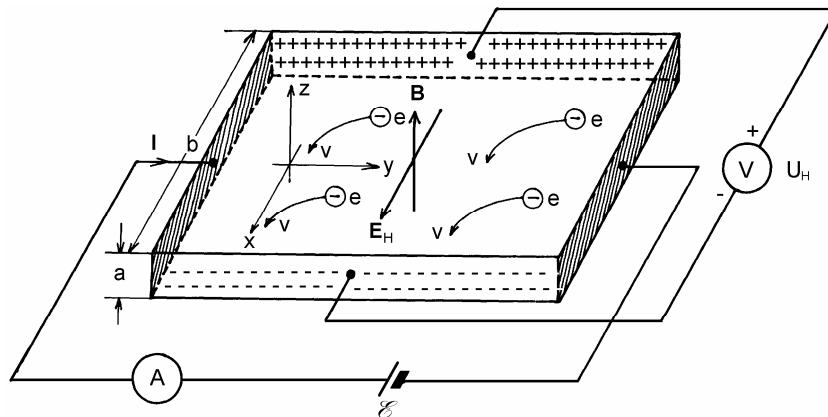
Treba pripomenúť, že vzhľadom na nenulovú plochu závitov cievky S , a nie úplne homogénne magnetické pole, sú namerané hodnoty B pri všetkých metódach strednými hodnotami indukcie na ploche S .

8.5.2 Hallov jav

Pohodlná a presná metóda na meranie magnetických polí je založená na jave, ktorý v roku 1879 objavil americký fyzik, Rowlandov žiak, Edwin H. Hall. Jav je zaujímavý a dôležitý nielen z hľadiska merania magnetických polí, ale aj preto, že v čase keď bol objavený, nebol známy ani elektrón a pritom podstata javu spočíva na elektrónovej, resp. dierovej vodivosti kovov a polovodičov.

Na obr. 8.29 je k platničke z vodivého materiálu daných rozmerov cez dobre vodivé plošné kontakty pripojený cez ampérmetr zdroj napätia \mathcal{E} . Platnička môže byť z kovu alebo polovodiča (napr. indium antimonid alebo indium arzenid – známe n -typy polovodičov), jej rádové rozmery sú $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$. Na bočných stenách platničky sú naspájkované napäťové kontakty, ku ktorým sa pripája citlivý voltmeter. Platnička je uložená v magnetickom poli s indukciou B , ktorého smer je znázornený na obrázku. Ak platničkou tečie prúd elektrónov I , potom jeho hustota je

$$J = nev = \frac{I}{ab}$$



Obr. 8.29

kde n je koncentrácia nosičov náboja (v danom prípade elektrónov), e je elementárny náboj, v je driftová rýchlosť nosičov a ab je pričný prierez platničky. Prúdová hustota má smer kladnej osi y , nosiče náboja sa však pohybujú v smere $-y$. Rýchlosť v nosičov náboja

$$v = \frac{I}{neab}$$

je úmerná prúdu platničkou. Okrem sily pozdĺž osi y , ktorou na elektrón pôsobí elektrické pole zdroja napätia \mathcal{E} , bude naň pôsobiť aj magnetická sila

$$F = evB$$

smerujúca v kladnom smere osi x , ktorá bude elektróny ztláčať k prednej stene platničky. V rovnovážnom stave bude hustota elektrónov väčšia pri prednej stene ako pri zadnej, kde vznikne nedostatok elektrónov (a teda vznikne kladný náboj). V dôsledku takého rozloženia náboja vznikne v objeme platničky intenzita elektrického poľa E_H v smere osi x , ktorá sa rovná vB , teda

$$E_H = vB$$

Pole E_H sa nazýva Hallovým poľom a kompenzuje účinok magnetickej sily F na elektróny. Medzi prednou a zadnou stenou platničky na šírke b vznikne Hallovo napätie U_H ,

ktorého veľkosť je

$$U_H = bE_H = \frac{I}{nea} B = R_H \frac{I}{a} B \quad (8.83)$$

Toto napätie meria voltmeter v obvode. $R_H = 1/ne$ je Hallova konštanta, veličina charakteristická pre konkrétny materiál. Konštanta R_H môže byť kladná alebo záporná v závislosti od toho, či je materiálom vodič typu n (teda obyčajný vodič, prípadne polovodič typu n) alebo polovodič typu p , v ktorom nosičmi voľných nábojov sú kladné diery. Polarita Hallovoho napätia takto závisí od typu polovodiča a Hallov jav môže slúžiť k experimentálnemu určeniu typu vodivosti polovodivej látky.

Z výrazu (8.83) plynie, že koncentrácia voľných nosičov náboja je

$$n = \frac{IB}{eaU_H} \quad (8.84)$$

Veličiny na pravej strane výrazu (8.84) sú merateľné, takže výraz umožňuje určiť koncentráciu voľných elektrónov v kove. V tabuľke 13 sú uvedené koncentrácie vodivostných elektrónov pre niektoré kovy. Údaje boli vypočítané z nameraného Hallovoho napätia s využitím výrazu (8.84) v známom magnetickom poli B . Koncentrácie boli určené aj inými, teoretickými metódami. Z tabuľky vidno, že pre jednodenné kovy je zhoda experimentálnych a teoretických údajov dosť dobrá.

Pre viacmocné kovy, železo a iné silnomagnetické materiály je výraz (8.84) nepoužiteľný. Pre takéto materiály treba Hallov jav interpretovať na základe kvantovej teórie, ktorá dáva výsledky porovnateľné s experimentom.

Tabuľka 13

Kov	Koncentrácia $n [10^{28} \text{ m}^{-3}]$	
	experiment	teória*
Li	3,7	4,8
Na	2,5	2,6
K	1,5	1,3
Cs	0,80	0,85
Cu	11	8,4
Ag	7,4	6,0
Au	8,7	5,9

* predpokladá sa jeden voľný elektrón na atóm

Využitie Hallovoho javu na meranie magnetických polí sa zakladá na využití výrazu (8.83). Ak je známa konštanta R_H pre použitú vzorku (platničku) a jej rozmery, zmeraním prúdu I vzorkou a Hallovoho napätia U_H hodnota magnetickej indukcie plynie z výrazu

$$B = \frac{aU_H}{R_H I} \quad (8.85)$$

8.5.3 Kvantový Hallov jav

V roku 1980 objavil Klaus von Klitzing kvantový Hallov jav.¹ Ako Hallove vzorky použil von Klitzing polovodičové heteroštruktúry, konkrétne kremíkový FET v poliach s vysokou indukciou B až 20 T pri veľmi nízkych teplotách T cca 1,5 K a menej a pri prúde $I = 1$ A. Ukázalo sa, že za takých extrémnych podmienok Hallovo napätie U_H nerastie s magnetickou indukciou B lineárne podľa výrazu (8.83), ale vykazuje platá, na ktorých U_H zostáva konštantné. Ešte prekvapujúcejšie je, že Hallov odpor \mathcal{R}_H definovaný výrazom

$$\mathcal{R}_H = \frac{U_H}{I}$$

je na týchto platách kvantovaný. Odpovedajúca Hallova vodivosť $\mathcal{G}_H = 1/\mathcal{R}_H$ je daná kvantami vodivosti e^2/h , takže

$$\mathcal{G}_H = \frac{e^2}{h} i$$

kde h je Planckova konštanta a i je celé číslo nadobúdajúce hodnoty $i = 1, 2, 3, \dots$. Existuje teda kvantum elektrického odporu s veľkosťou

$$\mathcal{R}_0 = \frac{h}{e^2} = 25\,812,807\,58\ \Omega$$

ktoré sa od roku 1990 považuje za normál odporu. V roku 1982 dostal K. von Klitzing za svoj objav Hewlett-Packardovu cenu a v roku 1985 Nobelovu cenu.

8.5.4 Jadrová magnetická rezonancia a elektrónová paramagnetická rezonancia

Jedna z najpresnejších dnes známych metód merania magnetických polí je metóda založená na kvantovomechanickom jave, ktorý sa nazýva jadrová magnetická rezonancia (v skratke JMR, alebo NMR – nuclear magnetic resonance).² Treba hneď na začiatok povedať, že meranie magnetických polí metódou NMR je iba jej "vedľajším produktom", pretože má oveľa závažnejšie použitie vo fyzikálnom, chemickom a biologickom výskume, ale predovšetkým v medicíne, kde **počítačové NMR-tomografy** spôsobili revolúciu v diagnostike rôznych onemocnení. Technika jadrovej magnetickej rezonancie bola vyvinutá v roku 1946 nezávisle dvoma skupinami amerických fyzikov. Boli to F. Bloch, W. W. Hansen, M. E. Packard zo Stanfordskej univerzity a E. M. Purcell, H. C. Torrey, R. V. Pound z Harvardskej univerzity v USA.³ O neobyčajnom význame NMR svedčí aj skutočnosť, že Bloch a Purcell dostali za svoje objavné práce už v roku 1952 Nobelovu cenu.

¹ Von Klitzing, K., Dorda, G., Pepper, M., Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980)

² Pozri napr. Rákoš, M.: Rádiospektroskopické metódy, Alfa Bratislava 1988

³ Bloch, F., Hansen, W. W., Packard, M. E., Phys. Rev. **70**, 474 (1946)

Purcell, E. M., Torrey, H. C., Pound, R. V., Phys. Rev. **69**, 37 (1946)

Ako už bolo povedané na začiatku tejto kapitoly, jadrový magnetizmus (presnejšie povedané jadrový paramagnetizmus) je jav veľmi slabý, až natoľko, že sa nedá statickými metódami pozorovať, a to ani pri veľmi nízkych teplotách. Je to možné iba rezonančným zvýraznením efektu.

JMR – jednou vetou povedané – je selektívna rezonančná absorpcia vysokofrekvenčnej elektromagnetickej energie súborom jadrových magnetických momentov (spinov) uložených v stálom silnom magnetickom poli s indukciou \mathbf{B} . Podľa tejto definície látka prostredníctvom svojich atómových jadier (ako príklad môžu slúžiť protóny vodíkov v obyčajnej vode), je schopná prijať (absorbovať) energiu elektromagnetickeho poľa selektívne pri istej frekvencii závislej od \mathbf{B} . Úlohou experimentu je tieto frekvencie a absorpciu merať.

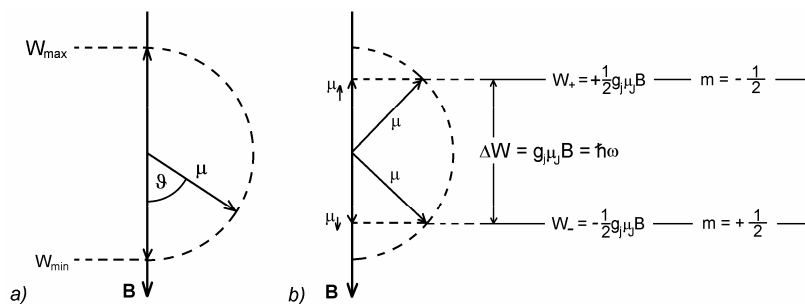
Predpokladajme teda, že medzi pólmí silného permanentného magnetu alebo elektromagnetu s magnetickou indukciou \mathbf{B} sa nachádza látka s paramagnetickými jadrami (pozri odsek 8.1). Nech touto látkou je obyčajná, chemicky trochu upravená voda v ampulke, a uvažovanými jadrami sú vodíkové jadrá, teda protóny. Z magnetického hľadiska sa každý takýto protón správa ako magnetický dipól s magnetickým momentom $\mathbf{m}_j = \boldsymbol{\mu}$, ktorý podľa výrazu (8.12) súvisí s mechanickým momentom (momentom hybnosti) \mathbf{L}_j vzťahom

$$\boldsymbol{\mu} = g_j \frac{e}{2m_p} \mathbf{L}_j \quad (8.86)$$

Keby bol protón klasickým malým magnetíkom, v danom magnetickom poli by sa snažil nasmerovať pozdĺž tohto poľa tak, že uhol medzi vektormi \mathbf{B} a $\boldsymbol{\mu}$ by bol nulový ($\vartheta = 0$ – na obr. 8.30a smerom dole). Vonkajším pôsobením by sme mohli uhol ϑ zväčšovať, a tak spojitou meniť a zväčšovať aj potenciálnu energiu dipólu podľa vzťahu

$$W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu B \cos \vartheta \quad (8.87)$$

z hodnoty $W_{min} = -\mu B$ ($\vartheta = 0$) až po hodnotu $W_{max} = \mu B$ ($\vartheta = \pi$).



Obr. 8.30

Protón však nie je klasickým magnetíkom. S ním spojený mechanický moment \mathbf{L}_j je kvantovaný, jeho veľkosť je daná hodnotou

$$L_j = \hbar \sqrt{I(I+1)}$$

kde I vo všeobecnosti je celočíselné alebo poločíselné **spinové kvantové číslo**, ktoré v prípade protónu má hodnotou $I = 1/2$. Nekladieme si za úlohu pokúšať sa vysvetliť prečo je to tak. Spomínali sme to už na začiatku tejto kapitoly, a ak sa čitateľ s týmto faktom nestretol v stredoškolskej fyzike, stretne sa s ním pri štúdiu jadrovej fyziky, alebo kvantovej mechaniky. Magnetický moment protónu má potom podľa výrazu (8.86) veľkosť

$$\mu = g_j \frac{e\hbar}{2m_p} \sqrt{I(I+1)} = g_j \mu_J \sqrt{I(I+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} g_j \mu_J$$

kde $\mu_J = e\hbar/(2m_p)$ je už spomínaný jadrový magnetón. Voľný protón môže zaujať v priestore ľubovoľný smer, nie však náš protón v magnetickom poli. Ten môže – a to je ďalšie prekvapenie kvantovej mechaniky – v tomto poli zaujať iba dve orientácie, a to také, že priemet magnetického momentu do smeru poľa má dve hodnoty

$$\mu_{\downarrow} = g_j \mu_J m_+ = +\frac{1}{2} g_j \mu_J \quad (8.88a)$$

alebo

$$\mu_{\uparrow} = g_j \mu_J m_- = -\frac{1}{2} g_j \mu_J \quad (8.88b)$$

kde $m_- = -1/2$ a $m_+ = +1/2$ sú dve možné hodnoty **magnetického kvantového čísla m** . Orientácie magnetického momentu μ zodpovedajúce projekciám μ_{\uparrow} a μ_{\downarrow} sú znázornené na obr. 8.30b.

Vzhľadom na dve možné orientácie magnetického momentu môže mať protón v magnetickom poli tiež iba dve hodnoty potenciálnej energie dané výrazmi

$$W_+ = -\mu_{\uparrow} B = +\frac{1}{2} g_j \mu_J B \quad (8.89a)$$

$$W_- = -\mu_{\downarrow} B = -\frac{1}{2} g_j \mu_J B \quad (8.89b)$$

ktoré sú znázornené hladinami energie na obr. 8.30b. Prechod dipólu z jednej energetickej hladiny na druhú vyžaduje zmenu energie dipólu o hodnotu $\Delta W = W_+ - W_-$ a je možný iba prijatím (absorpciou) alebo vyslaním (emisiou) elektromagnetického kvanta $\hbar\omega$, čiže musí platiť

$$W_+ - W_- = \Delta W = g_j \mu_J B = \hbar\omega$$

Z výrazu plynie, že žiarenie musí mať kruhovú frekvenciu

$$\omega = \frac{g_j \mu_J}{\hbar} B = \gamma_p B \quad (8.90)$$

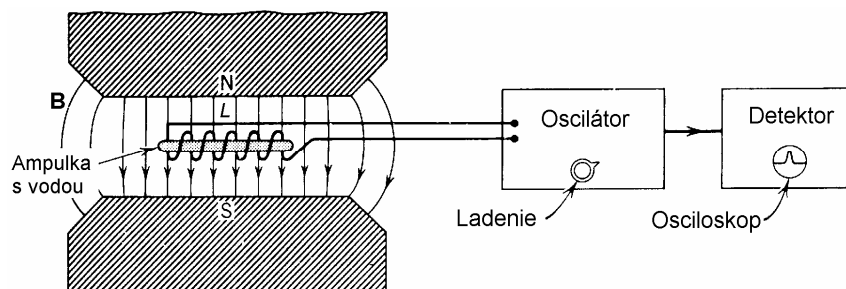
kde
$$\gamma_p = \frac{g_j \mu_J}{\hbar} = g_j \frac{e}{2m_p} = 2,675\,136\,61 \cdot 10^8 \text{ T}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (8.91)$$

je magnetomechanický (gyromagnetický) pomer protónu ($g_j = 5,585\ 54$). Jednoduchý výraz (8.90) je základným vzťahom, ktorý vystupuje pri jadrovej magnetickej rezonancii a jeho interpretácia je nasledovná:

Absorbcia (alebo emisia) elektromagnetického žiarenia systémom identických neinteragujúcich jadrových magnetických momentov môže nastať iba na rezonančnej kruhovej frekvencii ω danej výrazom (8.90), ktorá lineárne závisí od magnetickej indukcie B a od vlastností jadier (v danom prípade protónov). Pri inej frekvencii žiarenie s protónmi prakticky neinteraguje. Rezonančná frekvencia žiarenia je pomerne nízka a napr. v poli $B = 1\ \text{T}$ bude v systéme uvažovaných protónov indukovať prechody medzi energetickými hladinami elektromagnetickej pole s frekvenciou

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\gamma_p B}{2\pi} = 42,577\ \text{MHz} \quad (8.92)$$

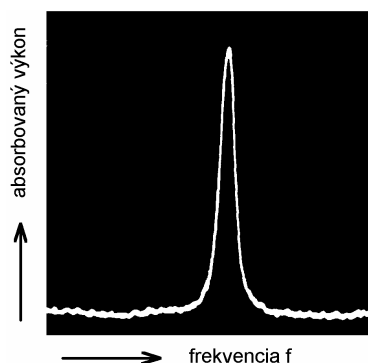
Veda, ktorá sa zaoberá skúmaním energetických prechodov medzi energetickými hladinami elektrónov, atómov a molekúl a využíva vzťah $\Delta W = \hbar\omega$ sa nazýva spektroskopia. Podľa frekvencie sa spektroskopia delí na gama, UF, optickú, IČ, mikrovlnovú a vysokofrekvenčnú spektroskopiou. Jednotlivým frekvenčným pásmam zodpovedajú stále menšie rozdiely ΔW , a teda nižšie frekvencie. Vidíme, že aj JMR patrí do spektroskopie a podľa vzťahu (8.92) je súčasťou vysokofrekvenčnej spektroskopie, kde sa skúmajú najjemnejšie energetické prechody atómov.



Obr. 8.31

Najjednoduchšie zariadenie na experimentálne pozorovanie JMR je spektrometer JMR znázornený na obr. 8.31. Pozostáva zo silného magnetu, z generátora elektromagnetických kmitov (obyčajný LC-oscilátor) v oblasti desiatok až stoviek MHz, detektora a registračného zariadenia. Kmity oscilátora treba vhodne naviazať na ampulku s vodou. Obyčajne sa na ampulku – ako je to znázornené na obrázku – navinie cievka L , ktorá je súčasťou rezonančného LC obvodu oscilátora, a vloží sa do poľa B tak, aby os cievky bola kolmá na smer magnetickej indukcie B . V experimente sa mení frekvencia f generátora (alebo hodnota indukcie B) dovtedy, kým pre protóny nie je splnená rezonančná podmienka (8.90) alebo (8.92). V okamihu rezonancie sa zníži kvalita rezonančného obvodu, čo má za následok pokles amplitúdy napätia generátora. Pokles je na druhej strane úmerný absorbovanej elektromagnetickej energii protónmi vody. Tento absorbovaný výkon možno elektronicky pohodlne registrovať. Výstupným registračným zariadením môže byť osciloskop alebo zapisovač.

Na obr. 8.32 je osciloskopický záznam signálu JMR vo vode s prídavkom paramagnetických iónov Fe^{3+} . Oscilogram pochádza od Bloembergena a i.¹ z prvých prác o JMR. Paramagnetické ióny vo vzorke vody skracujú relaxačné časy protónov, aby v systéme jadrových momentov nedochádzalo k saturácii, pretože inak by sa absorpcia elektromagnetickej energie zastavila a signál by zanikol.² Absorpcia v osciloskopickom zázname je funkciou frekvencie a vidno, že nenastáva iba pri presnej frekvencii danej výrazom (8.92), ale v istom konečnom pásme (rezonančná krivka má konečnú nenulovú šírku). Triviálnou príčinou toho je nedokonalá homogenita vonkajšieho magnetického poľa cez objem ampulky, takže jednotlivé protóny sa nachádzajú v rôznom poli B a rezonančná podmienka je rozmazaná. Závažnejšie príčiny pre konečnú šírku čiary sú vnútorné magnetické polia v látke od iných susedov protónu a interakcie medzi nimi, ako aj relaxácia, bez ktorej by pozorovanie JMR nebolo možné.



Obr. 8.32

JMR je veľmi efektívna výskumná metóda. Už krátko po jej objave boli pomocou nej zmerané magnetické momenty mnohých atómových jadier. Napríklad magnetický moment protónu sa zmeria tak, že sa určí rezonančná frekvencia protónov ω a nezávislým meraním (napr. Halloovou sondou) sa zmeria magnetická indukcia B . Zo vzťahu (8.90) sa vypočíta gyromagnetický pomer γ_p a pomocou neho s využitím výrazov (8.91) a (8.88), sa vypočíta projekcia momentu do smeru poľa

$$|\mu_{\uparrow}| = |\mu_{\downarrow}| = \frac{1}{2} \gamma_p \hbar = 1,410\,44 \cdot 10^{-26} \text{ A}\cdot\text{m}^{-2} \quad (8.93)$$

V kontexte experimentálnych skúmaní JMR je meranie magnetických polí, kvôli ktorému sme vlastne jav JMR analyzovali, takmer triviálne. V rezonancii protónov vo vode treba iba zmerať frekvenciu f generátora a magnetickú indukciu B vypočítame zo vzťahu

¹ Bloembergen, N., Purcell, E. M., Pound, R. V., Phys. Rev. **73**, 679 (1948)

² Práve táto okolnosť zabránila C. J. Gorterovi objaviť JMR o niekoľko rokov skôr. Pozri Gorter, C. J., Mißglückter Versuch zur Kerninduktion (Absorption), Physica **3**, 995 (1936); Gorter, C. J., Broer, L. F., Negative result of an attempt to observe nuclear magnetic resonance in solids, Physica **9**, 591 (1942)

$$B = \frac{2\pi}{\gamma_p} f = 2,348\,665\,725 \cdot 10^{-2} f \quad [\text{T}; \text{MHz}] \quad (8.94)$$

ktorý plynie zo vzťahu (8.90). Pri danej presnosti γ_p , presnosť merania B závisí iba od presnosti merania frekvencie, ktorá je dnes veľmi vysoká.

Rezonanciu podobného charakteru ako JMR možno pozorovať aj na elektrónoch v látkach. Jav je známy pod menom **elektrónová paramagnetická rezonancia** (EPR), alebo **elektrónová spinová rezonancia** (ESR). EPR experimentálne objavil v roku 1944 ruský vedec E. K. Zavojskij.¹ Rezonanciu možno pozorovať iba na nespárených elektrónoch, takých, ktorých spinový magnetický moment nie je vykompenzovaný momentom iného elektrónu. Bez ohľadu na toto ohraňenie existuje množstvo látok, v ktorých rezonancia je možná. Sú to napr. ióny prechodných prvkov, prímеси v polovodičoch, poruchy kryštalickej mriežky (farebné centrá), vodivostné elektróny v kovoch, voľné radikály v organických zlúčeninách a mnohé iné. **EPR je podobne ako JMR selektívna (rezonančná) absorpcia elektromagnetickej energie systémom elektrónových spinov v magnetickom poli.** Rezonančná podmienka je rovnaká ako pri JMR, teda je to podmienka typu (8.90), kde však gyromagnetický pomer protónu γ_p treba nahradiť gyromagnetickým pomerom voľného elektrónu s faktorom $g = 2$, teda

$$\gamma_e = -g \frac{e}{2m_e} = -1,756 \cdot 10^{11} \quad \text{T}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

V magnetickom poli indukcie $B = 1 \text{ T}$ rezonancia podľa výrazu (8.92) nastane pri frekvencii

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\gamma_e B}{2\pi} = 27,95 \text{ GHz}$$

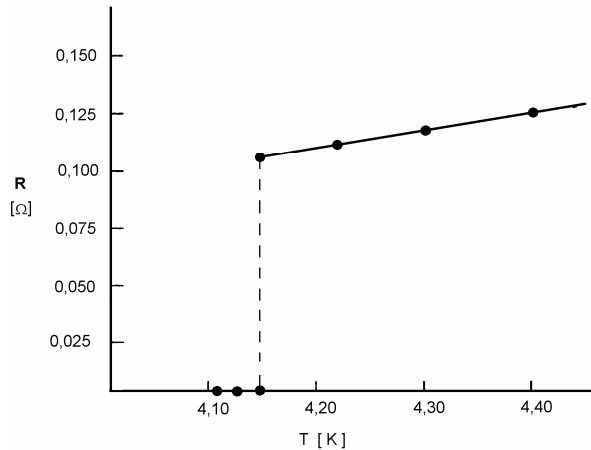
teda v oblasti, ktorú nazývame mikrovlnová oblasť elektromagnetického spektra. Táto skutočnosť vyžaduje aj celkom odlišnú experimentálnu metodiku – zatiaľ čo pri JMR sa využívajú elektronické zariadenia s obvodmi so sústredenými parametrami, v metodike EPR sa používajú vlnovody, dutinové rezonátory, mikrovlnové detektory a pod. Ako generátory sa zvyčajne používajú reflexné klystróny.

Využitie EPR je mnohostranné – v chémii napr. umožňuje štruktúrnu analýzu, v biológii a v medicíne sa využíva pri výskume karcinogénnych látok (voľné radikály!) a i. EPR možno využiť podobne ako JMR na meranie magnetických polí, avšak presnosť merania je oveľa nižšia ako pri JMR v dôsledku oveľa väčšej šírky rezonančnej čiary EPR. Nemenej dôležité je aj to, že JMR-magnetometer je malý a jednoduchý prístroj oproti odpovedajúcemu robustnému mikrovlnovému EPR zariadeniu.

¹ Zavojskij, E. K., Doktorskaja dissertacija, Moskva, FIAN, 1944; J. Phys. USSR **9**, 245, 1945

8.6 SUPRAVODIVOSŤ

V roku 1911, tri roky po skvapalnení hélia, objavil holandský fyzik H. Kamerlingh-Onnes¹ supravodivosť. Tento neočakávaný a fascinujúci jav, ktorý sa pozoruje na niektorých kovoch a zliatinách, vyvolal veľký záujem vedeckej komunity a mal za následok intenzívny teoretický a experimentálny výskum.

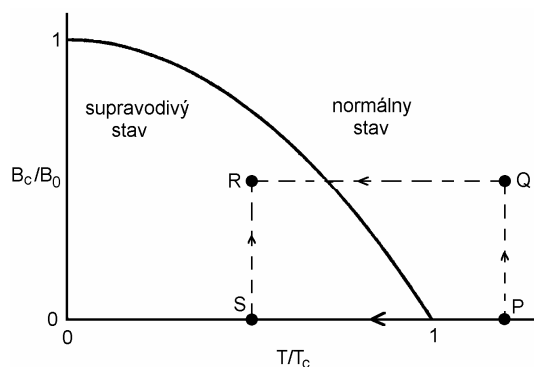


Obr. 8.33

Meraním elektrického odporu ortuti pri teplote niekoľkých kelvinov Kamerlingh-Onnes zistil, že pri kritickovej teplote $T_c = 4,15$ K klesne zrazu elektrický odpor ortuti na nulu. Na obr. 8.33 je graficky znázornená závislosť elektrického odporu ortuti v okolí jej kritickovej teploty. Ďalší výskum ukázal, že prechod do supravodivého stavu vykazujú aj ďalšie kovy a zliatiny. Nejde pri tom o nejaký pokles odporu k malým nemerateľným hodnotám, ale o vymiznutie odporu pri zmene teploty menšej ako desaťtisícina stupňa (pre monokryštály). Merania ukázali, že ak supravodič pod kritickou teplotou má nejaký odpor, musí byť jeho rezistivita menšia ako 10^{-25} $\Omega\cdot\text{m}$, čo je o mnoho rádov nižšie, ako napr. rezistivita vysoko čistej meďi ($\sim 10^{-12}$ $\Omega\cdot\text{m}$) pri rovnakej teplote. Meď však nie je supravodičom. Kritické teploty T_c , pri ktorých klasické supravodiče prechádzajú do supravodivého stavu sú charakteristické konštanty a sú v rozsahu 0,5 K až 20 K. Ak sa zo supravodivého materiálu vyrobí prstenec a ochladí sa pod kritickú teplotu, možno v ňom elektromagnetickou indukciou vybudíť elektrický prúd, ktorý v ňom bude cirkulovať aj niekoľko rokov.

Kamerlingh-Onnes predpovedal, že vlastnosť nulového odporu bude možné využiť na výrobu supravodivých cievok vhodných na produkciu veľmi silných magnetických polí, rádovo až desiatok tesla (T). V roku 1914 objavil ďalší efekt, že supravodivosť sa rozruší prítomnosťou magnetického poľa, ak je magnetická indukcia väčšia ako istá kritická hodnota B_c závislá od materiálu a jeho teploty. Pre väčšinu materiálov závislosť B_c od teploty T je s presnosťou na niekoľko percent daná výrazom

¹ Kamerlingh-Onnes, H., Comm. Phys. Lab., Univ. Leyden, No. 119, 120, 122 (1911)



Obr. 8.34

$$B_c = B_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (8.95)$$

Táto závislosť je znázornená grafom na obr. 8.34. Pri hodnote $(T/T_c) = 0,5$ je hodnota B_c pre olovo asi o 2,2 % vyššia a pre cín asi o 3 % nižšia, ako udáva závislosť na obrázku. Pod parabolou na obr. 8.34 sa látky nachádzajú v supravodivom stave a nad ňou v normálnom vodivom stave. Fázový prechod medzi normálnym a supravodivým stavom, ktorý je pre $B = 0$ v čistých vzorkách veľmi ostrý, závisí od tvaru a orientácie vzorky v nenulovom magnetickom poli. Je to dôsledok demagnetizačných efektov. Prechod zostáva ostrým, ak je magnetické pole vo vzorke homogénne.

Tabuľka 14

Prvok	Teplota T_c [K]	Magnetická indukcia B_0 [T]
Zn	0,875	0,005 4
Cd	0,56	0,003 0
Hg	4,15	0,041 2
Al	1,18	0,010 5
Ga	1,09	0,005 1
In	3,40	0,029 3
Tl	2,39	0,017 1
Sn (biely)	3,72	0,030 9
Pb	7,19	0,080 3

Je zaujímavé, že supravodivý stav sa zruší aj vlastným magnetickým poľom prúdu, ktorý tečie supravodičom, ak tento dosiahne istú prahovú hodnotu. Naopak, každej hodnote teploty $T < T_c$ zodpovedá maximálny prípustný prúd, ktorý ešte nezmení supravodivý stav materiálu na normálny vodivý stav. Táto okolnosť sa musí brať do úvahy pri konštrukcii supravodivých magnetov.

V tabuľke 14 sú uvedené niektoré prvky vykazujúce supravodivosť s ich kritickými teplotami T_c a kritickými magnetickými indukciami B_0 pre $T \rightarrow 0$.

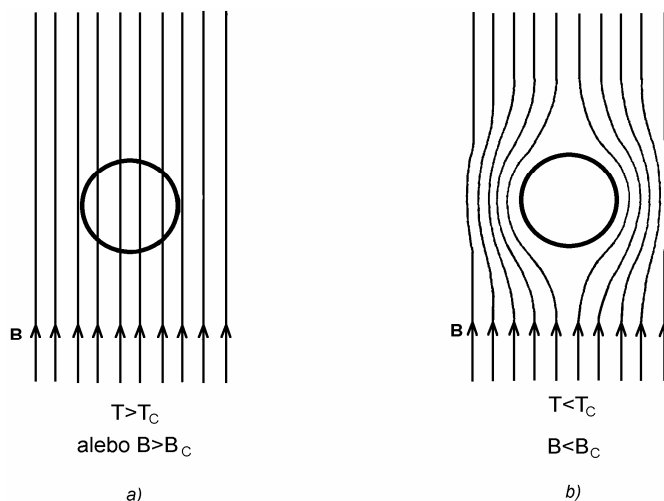
Dvadsaťdva rokov po objave supravodivosti Meissner a Ochsenfeld¹ v roku 1933 experimentálne dokázali, že supravodiče sú súčasne ideálne diamagnetiká, že zo svojho vnútra "vytláčajú" magnetické pole. Tento jav je ilustrovaný na obr. 8.35 a nazýva sa Meissnerov jav. Ak sa na vzorku supravodiča pri teplote $T > T_c$ naloží magnetické pole B , napr. prechodom z bodu P do bodu Q na obr. 8.34, bude pole prenikať materiálom ako na obr. 8.35a. Ak sa teraz vzorka ochladí a prejde z bodu Q do bodu R , pri dosiahnutí kritickej teploty bude pole zo vzorky úplne vytlačené ako na obr. 8.35b. Interné pole B_i sa teda rovná nule, takže

$$\mu_0 H + \mu_0 M = B_i = 0$$

z čoho

$$\frac{M}{H} = \chi = -1 \quad (8.96)$$

H je intenzita magnetizujúceho poľa a M je magnetizácia. Vidíme, že v supravodivom stave je vzorka skutočne perfektným diamagnetikom so susceptibilitou $\chi = -1$. Treba zdôrazniť, že táto principiálne nová vlastnosť supravodičov nie je dôsledkom ideálnej elektrickej vodivosti materiálu, pretože ak vo vnútri materiálu je intenzita elektrického poľa $E = 0$, z Maxwellovej rovnice $\text{rot } E = -\partial B_i / \partial t$ plynie iba to, že magnetická indukcia $B_i = \text{konšt.}$, avšak v supravodiči je magnetická indukcia nulová. Maxwellove rovnice samy osebe nestačia na úplný opis supravodiča.

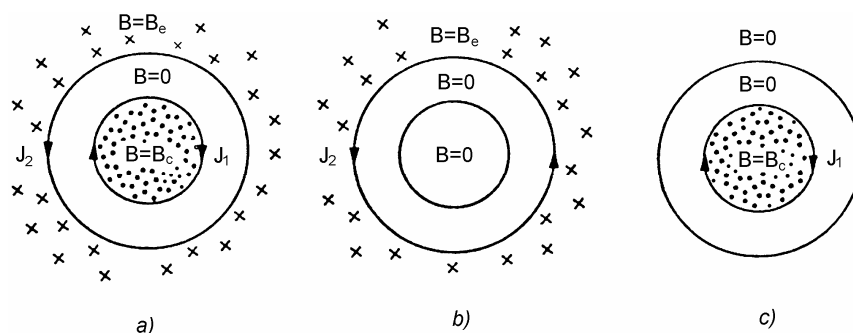


Obr. 8.35

Iný spôsob prechodu z bodu P do bodu R je cez bod S , pričom sa vzorka najprv ochladí do bodu S a potom sa zvýši magnetické pole do bodu R , teda na hodnotu menšiu ako B_c . Indukcia vo vnútri zostane nulová. Možno teda konštatovať, že pri akomkoľvek prechode z bodu P do bodu R bude magnetická indukcia v supravodiči nulová.

¹ Meissner, W., Ochsenfeld, R., Naturwiss. **21**, 787 (1933)

Iný názorný príklad Meissnerovho javu je demonštrovaný na *obr. 8.36*. Dutý valec (v Meissnerovom a Ochsenfeldovom experimente z olova) sa umiestní do magnetického poľa indukcie B_e paralelného s osou valca. Ak sa zmenou teploty alebo poľa dosiahne supravodivý stav, vymizne pole v telese valca a v jeho dutine "zamrzne" pole $B = B_c$ zodpovedajúce bodu prechodu valca do supravodivého stavu (stav na *obr. 8.36a*). Ak sa však valec najprv ochladí pod bod prechodu a potom sa naň naloží pole B , zostane vnútrajšok valca a jeho dutina bez magnetického poľa (stav na *obr. 8.36b*). Tieto dva procesy zodpovedajú prechodom PQR a PSR v diagrame na *obr. 8.34*.



Obr. 8.36

Aj keď sa supravodič považuje za perfektné diamagnetikum, jeho diamagnetizmus nemá atomárny pôvod ako v normálnych diamagnetikách, ale je to dôsledok elektrónových prúdov v supravodiči. Tieto prúdy vyvolajú v jeho vnútri také pole, ktoré kompenzuje vplyv vonkajšieho magnetického poľa. "Vytlačenie" magnetického poľa zo supravodiča je v skutočnosti jeho kompenzácia poľom prúdov v supravodiči. Tak napríklad, ak má byť pole vo vnútri vzorky a v dutine na *obr. 8.36b* nulové, potom po obvode valca musí tiecť plošný prúd (pozri odsek 6.1.9)

$$J_2 = -\frac{B_e}{\mu_0}$$

ktorý zruší externé pole B_e vo valci a v dutine. Podobne v situácii na *obr. 8.36a* po vnútornom obvode valca tečie plošný prúd s hustotou

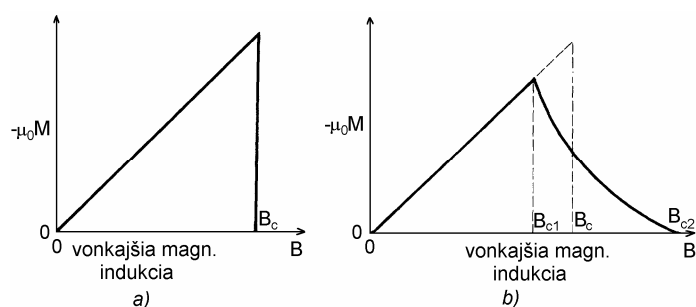
$$J_1 = +\frac{B_c}{\mu_0}$$

Ak sa dutý valec ochladí do supravodivého stavu za prítomnosti magnetickej indukcie veľkosti B_c a externé pole sa potom zruší, vznikne situácia znázornená na *obr. 8.36c*. V dutine $B = B_c$, zatiaľ čo všade inde $B = 0$. Pole v dutine je práve tak veľké, aké by produkoval plošný prúd J_1 . Tento prúd sa nazýva "perzistentný (trvalý) prúd". Skutočnosť, že magnetická indukcia vo valci zostáva v supravodivom stave konštantná bez ohľadu na zmeny vonkajších polí, svedčí o tom, že supravodič perfektne odťahuje ako magnetické, tak aj elektrické polia.

Povrchové plošné prúdy v supravodičoch sú analogické viazaným prúdom v obyčajných magnetikách, ktoré boli diskutované v odseku 8.2, s tým rozdielom, že sú to reálne

prúdy. O viazaných prúdoch sme predpokladali, že majú plošný charakter, teda tečú v nekonečne tenkej vrstve. Reálne prúdy na povrchu supravodiča v nekonečne tenkej vrstve by museli mať nekonečnú povrchovú plošnú hustotu, čo je neprijateľné. Bratia F. a H. London dokázali,¹ že prúd v supravodiči tečie s objemovou hustotou, ktorá s hĺbkou exponenciálne klesá do vnútra supravodiča. Takisto klesá smerom do supravodiča aj magnetická indukcia. Charakteristické hĺbky s poklesom prúdu a magnetického poľa na $1/e$ -tinu povrchovej hodnoty sú napr. rádu 10^{-8} m.

Fyzikálnu teóriu supravodivosti vytvorili americkí fyzici J. Bardeen, L. M. Cooper a J. R. Schrieffer² na Univerzite v Illinois v roku 1956 a táto teória je dnes známa pod skratkou BCS. Autori za jej vytvorenie dostali v roku 1972 Nobelovu cenu za fyziku.³



Obr. 8.37

BCS teória supravodivosti vychádza z experimentálneho faktu perfektnej vodivosti a perfektného diamagnetizmu supravodičov. Je to kvantovo-štatistická teória založená na kooperatívnom správaní sa elektrónovej "kvapaliny" v supravodiči. Základným predpokladom supravodivosti je tvorba viazaných elektrónových dvojíc (Cooperových párov), v dôsledku ktorých elektrónová kvapalina nadobúda vlastnosti supratekutosti. Páry sa tvoria pôsobením zvláštnych príťažlivých síl medzi elektrónmi. Zvyčajne sa tieto sily spájajú s kmitmi kryštalickej mriežky, ktoré existujú aj pri nulovej absolútnej teplote ($T = 0$). Vďaka elektrostatickej interakcii nábojov elektrónu a iónov mriežky v okolí každého elektrónu sa režim kmitov mriežky mení, čo vyvoláva dodatočnú silu pôsobiacu na druhý elektrón. Z hľadiska kvantovej teórie sa tieto sily objavujú v dôsledku výmeny elektrónov s fonónmi – kvantami kmitov mriežky. Sily sú vždy príťažlivé a môžu prevyšovať bezprostredné coulombovské odpudzovanie elektrónov. V takom prípade materiál môže vykazovať supravodivosť.

Doteraz sme analyzovali vlastnosti supravodivých materiálov, v ktorých je magnetická indukcia nulová až po bod prechodu B_c . Vzťah medzi naloženým poľom a "magnetizáciou" je v nich daný výrazom (8.96), z ktorého plynie, že

$$-\mu_0 M = B \quad (8.97)$$

Táto závislosť je graficky znázornená na obr. 8.37a a materiály s daným správaním sa nazývajú supravodiče typu I na rozdiel od skupiny materiálov predovšetkým zliatin, ktorých

¹ London, F., London, H., Proc. R. Soc., A139, 71 (1935); Physica 2, 341 (1935)

² Bardeen, J., Cooper, L. N., Schrieffer, J. R., Phys. Rev. 108, 1175 (1957)

³ Bardeen spolu s Brattainom a Shockleym dostali v roku 1956 Nobelovu cenu aj za objav a vývoj tranzistora.

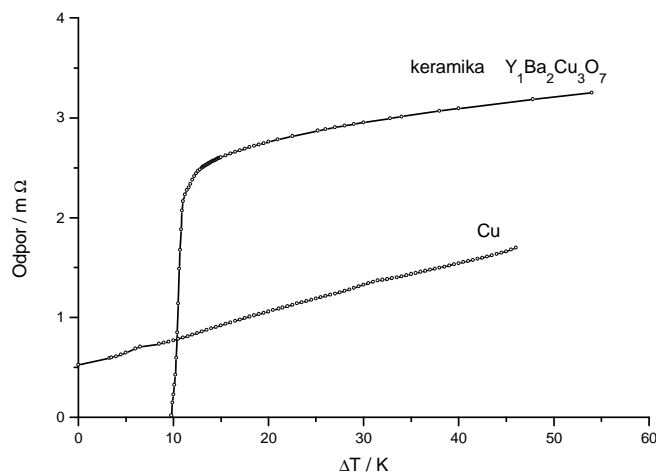
správanie ilustruje obr. 8.37b. Sú to supravodiče typu II. Aj v týchto supravodičoch je magnetická indukcia nulová až po prvú kritickú hodnotu indukcie B_{c1} ; nad touto hodnotou začína pole prenikať do materiálu, ale vzorka zostáva supravodivá až po druhú kritickú hodnotu indukcie B_{c2} . Nad touto hodnotou pole úplne preniká do materiálu, ktorý sa stáva normálnym vodičom. Prechodové kritické teploty T_c a kritické magnetické indukcie B_{c2} niektorých vybraných supravodičov typu II sú uvedené v tabuľke 15.

Mnohé zliatiny majú značný technický význam, pretože ich kritické teploty sú relatívne vysoké a kritické magnetické indukcie veľmi vysoké, ako to vidieť z tabuľky 15. Niektoré z nich (Nb_3Sn) sa používajú na konštrukciu supravodivých magnetov, v ktorých možno udržiavať vysoké magnetické polia pri relatívne nízkych nákladoch.

Tabuľka 15

Materiál	Teplota T_c [K]	Magnetická indukcia B_{c2} [T]
V	5,4	0,14
Nb	9,5	0,19
NbTi	16,0	12
Nb_3Sn	18,1	22,5
V_3Ga	14,0	19,5
V_3Si	16,8	22,5

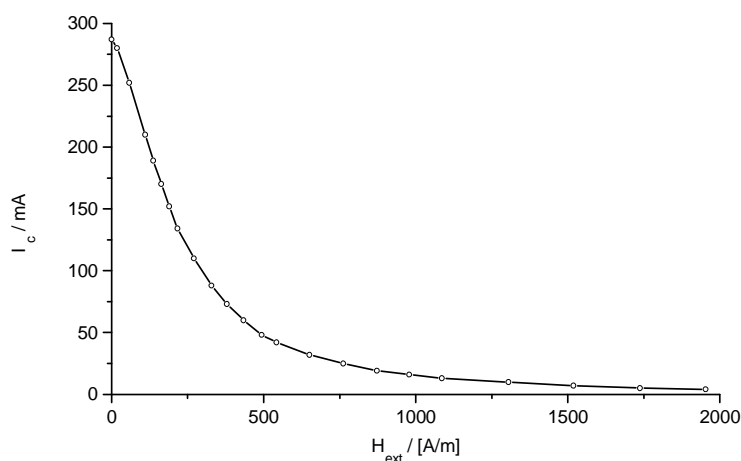
V šesťdesiatych rokoch minulého storočia pri pokusoch vyrobiť vodivé keramiky sa zistilo, že niektoré keramiky po ochladení na teplotu kvapalného dusíka (78 K) vykazujú perfektný diamagnetizmus (čo sa prejavuje napríklad aj tak, že sa malé vzorky vznášajú – levitujú – v magnetickom poli). Tento poznatok viedol k domnienke, že vzorky sú pri tejto relatívne vysokej teplote supravodivé. Ďalšie výskumy, hlavne v osemdesiatych rokoch a až doteraz ukázali, že niektoré keramiky, ako napr. $\text{Y}_1\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ ($0 \leq \delta \leq 0,3$) sú skutočne supravodivé, aj keď typ a charakter vodivosti je stále predmetom výskumu.



Obr. 8.38

Takéto materiály sa nazývajú vysokoteplotné supravodiče. Na *obr. 8.38* je graficky znázornená závislosť odporu vzorky keramiky $Y_1Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$ od teploty.¹ Z teplotnej závislosti odporu keramiky vidieť, že jej odpor pri teplote $T = 78 + \Delta T = 88$ K klesá k nule (v daných experimentoch s rozlíšením na $\pm 10^{-6} \Omega$). Pre porovnanie je v grafe vynesena aj teplotná závislosť odporu medenej vzorky (s normálnou vodivosťou) v rovnakom teplotnom intervale. Vidieť, že obidve vzorky sa správajú úplne rozdielne. Na *obr. 8.39* je grafická závislosť kritického prúdu I_c supravodivou keramikou od naloženej intenzity magnetického poľa H_{ext} .

Aj keď začiatočná eufória vo výskume vysokoteplotných supravodičov opadla, výskum je stále intenzívny, a hľadajú sa materiály s vysokou kritickou teplotou.



Obr. 8.39

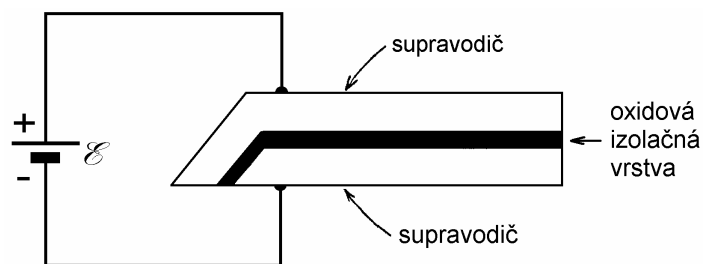
8.6.1 Josephsonov jav

Ak sú dve vrstvy supravodičov oddelené tenkou izolačnou oxidovou vrstvou (hrubou asi 2 nm) a na štruktúru sa pripojí zdroj elektrického napätia \mathcal{E} (*obr. 8.40*), vznikne v elektrickom obvode neočakávaný prúdový kvantový jav, ktorý v roku 1962 predpovedal a v roku 1963 objavil anglický fyzik Brian D. Josephson a podľa neho sa nazýva **Josephsonov jav**² (v roku 1973 dostal za svoj objav Nobelovu cenu). Napriek tomu, že je v obvode izolačná vrstva, ktorá tvorí mostík, tečie obvodom jednosmerný prúd so striedavou zložkou, ktorej frekvencia je

$$f = \frac{2e}{h} \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}}{\Phi_0} \quad (8.98)$$

¹ Grafické závislosti zobrazené na *obr. 8.38* a *8.39* boli získané pri skúmaní vysokoteplotnej supravodivosti (Jaroševič, A., Kundracik, F. – nepublikované, Katedra rádiofyziky MFF UK Bratislava, 1999)

² Josephson, B. D., Physics Letters, **1**, 251 (1962)

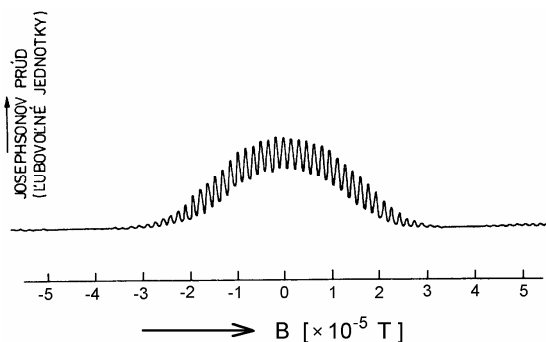


Obr. 8.40

Frekvencia nezávisí od druhu supravodiča ani oxidu, iba od naloženého napätia \mathcal{E} . Keďže frekvenciu možno merať s vysokou relatívnou presnosťou (cca 10^{-12}), umožňuje jav veľmi presne definovať napäťový štandard. Veličina

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2,067\,833\,637 \cdot 10^{-15} \text{ Wb} \quad (8.99)$$

je elementárne kvantum magnetického toku.



Obr. 8.41

Ak sa dva Josephsonove mostíky zapoja paralelne a v oblasti medzi mostíkmi sa vybudí magnetické pole, vznikne zariadenie, ktoré je známe pod názvom SQUID (superconducting quantum interference device). Prúdy oboch vetiev spolu interferujú a priebeh výsledného prúdu v závislosti od magnetickej indukcie je graficky znázornený na obr. 8.41.¹ Vidíme, že amplitúda prúdu v rozsahu magnetickej indukcie cca $\pm 3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ veľmi citlivo reaguje na zmeny magnetickej indukcie. Takýmto spôsobom možno registrovať zmeny magnetickej indukcie veľkosti $\sim 10^{-10} \text{ T}$. SQUID je dnes najcitlivejší známy magnetometer.

¹ Jaklevic, R. C., Lambe, J., Silver, A. H., Mercereau, J. E., Phys. Rev. Letters 12, 159 (1964)

8.7 MAXWELLOVE ROVNICE A KLASICKÁ ELEKTRODYNAMIKA

"Vo fyzike bola formulácia týchto rovníc
najväčšou udalosťou od Newtonových čias"
Albert Einstein: Evolúcia fyziky

"Bol to Boh, čo písal tieto riadky ...?"
L. Boltzmann: Prednášky o Maxwellovej
teórii elektriny a svetla.

Analýzou magnetizmu látok sme dospeli k vrcholnému bodu našej teórie elektromagnetizmu, sme pripravení sumarizovať výsledky jednotlivých odsekov, a znovu poukázať na vzájomné súvislosti, ktoré platia medzi jednotlivými veličinami klasickej elektromagnetickej teórie.

V elektromagnetizme sa definujú štyri vektory elektromagnetického poľa. Sú to:

\mathbf{E} – vektor intenzity elektrického poľa v jednotkách $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$,

\mathbf{B} – vektor magnetickej indukcie v jednotkách T,

\mathbf{D} – vektor elektrickej indukcie v jednotkách $\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$,

\mathbf{H} – vektor intenzity magnetického poľa v jednotkách $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$.

Tieto štyri vektory spolu s objemovou hustotou náboja ρ ($\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$) a prúdovou hustotou \mathbf{J} ($\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$) sú zviazané štyrmi Maxwellovými rovnicami, ktoré predstavujú štyri základné zákony elektromagnetizmu. Na týchto zákonoch stojí celá stavba klasickej elektrodynamiky. Sú to nasledovné – v integrálnom a diferenciálnom tvare napísané – zákony:

I. Faradayov zákon: *Indukované elektromotorické napätie na uzavretej krivke l v dielektriku alebo vo vodiči sa rovná zápornej časovej zmene indukčného toku ľubovoľnou plochou S ohraničenou krivkou l . Lokálnou vlastnosťou poľa je skutočnosť, že rotácia intenzity elektrického poľa \mathbf{E} v ľubovoľnom bode priestoru sa rovná zápornej časovej zmene vektora magnetickej indukcie \mathbf{B} . Matematicky sú tieto vlastnosti elektromagnetického poľa vyjadrené rovnicami*

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

II. Ampérov zákon: *Magnetomotorické napätie na uzavretej krivke l v priestore s magnetikami sa rovná celkovému voľnému prúdu I nábojov pretekajúcich ľubovoľnou plochou S ohraničenou krivkou l a celkovému posuvnému prúdu reprezentovanému plošným integrálom časovej zmeny vektora elektrickej indukcie \mathbf{D} na ploche S . Lokálnou vlastnosťou poľa je skutočnosť, že rotácia vektora intenzity magnetického poľa \mathbf{H} v ľubovoľnom bode priestoru sa rovná súčtu vektora prúdovej hustoty \mathbf{J} tečúcich nábojov a prúdovej hustoty posuvného prúdu $\partial \mathbf{D} / \partial t$. Matematicky sú tieto vlastnosti elektromagnetického poľa vyjadrené rovnicami*

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \qquad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

III. **Gaussov zákon v elektrine:** Tok vektora elektrickej indukcie \mathbf{D} uzavretou plochou S sa rovná celkovému voľnému náboju Q uzavretému plochou S . Lokálnou vlastnosťou vektora \mathbf{D} je skutočnosť, že jeho divergencia v ľubovoľnom bode priestoru sa rovná objemovej hustote ρ voľného náboja v tomto bode. Matematicky sú tieto vlastnosti elektrického poľa vyjadrené rovnicami

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

IV. **Gaussov zákon v magnetizme:** Tok vektora magnetickej indukcie \mathbf{B} uzavretou plochou S sa vždy rovná nule. Lokálnou vlastnosťou magnetického poľa je skutočnosť, že jeho divergencia z ľubovoľného bodu priestoru sa rovná nule. Matematicky sú tieto vlastnosti magnetického poľa vyjadrené rovnicami

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

Vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} sú zviazané s elektromagnetickými potenciálmi V a \mathbf{A} vzťahmi

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

V elektrostatike a v magnetostatike sú všetky časové derivácie rovné nule.

Základnými vektormi elektromagnetického poľa sú vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} , pretože tie určujú elektromagnetickú (Lorentzovu) silu

$$\mathbf{F}_{elmag} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

kde \mathbf{v} je rýchlosť pohybujúceho sa náboja q . Častica s relativistickou hmotnosťou m sa v takomto silovom polí bude pohybovať podľa Newtonovej pohybovej rovnice

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{elmag}$$

kde

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

je relativistická hybnosť častice, m_0 je pokojová hmotnosť častice a c je rýchlosť svetla vo voľnom priestore (vo vákuu).

Poznámka: Ak k týmto základným zákonom elektromagnetizmu pridáme Newtonov zákon všeobecnej gravitácie v známom tvare

$$\mathbf{F}_{grav} = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}$$

(F_{grav} je gravitačná príťažlivá sila dvoch častíc s hmotnosťami m_1 a m_2 , r je vektorová vzdialenosť, $\kappa = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitačná konštanta), potom v týchto pár riadkoch tejto kapitoly je obsiahnutá celá klasická fyzika.

Na rozhraní dvoch prostredí 1 a 2 platia pre vektory $E_{1,2}$, $D_{1,2}$, $B_{1,2}$, a $H_{1,2}$ hraničné podmienky

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= \mathbf{0} & \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \\ \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma & \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{J}_s \end{aligned}$$

kde σ je plošný náboj na rozhraní v jednotkách C/m^2 , \mathbf{J}_s plošný prúd rozhraním v jednotkách A/m a \mathbf{n}_0 je jednotkový vektor smerujúci kolmo z prostredia 1 do prostredia 2.

V látkových izotropných prostrediach sú vektory \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} a \mathbf{H} viazané materiálovými vzťahmi

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

ε_r je relatívna permitivita a μ_r je relatívna permeabilita. Sú to bezrozmerné látkové parametre a môžu byť číslami (pre lineárne, izotropné materiály), tenzormi (pre anizotropné materiály), alebo môžu závisieť od \mathbf{E} , príp. \mathbf{B} (v nelineárnych materiáloch).

Veličina μ_0 je magnetická konštanta (permeabilita vákuua) a má presnú, definičnú hodnotu

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

Veličina ε_0 je elektrická konštanta (permitivita vákuua) a má hodnotu

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

kde

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

je rýchlosť svetla vo vákuu.

V elektromagnetickom poli sa materiál elektricky a magneticky polarizuje. Vektor elektrickej polarizácie \mathbf{P} a vektor magnetizácie \mathbf{M} sú dané výrazmi

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E} \qquad \mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$$

kde

$$\kappa = \varepsilon_r - 1 \qquad \chi = \mu_r - 1$$

sú bezrozmerná elektrická a magnetická susceptibilita. V odporovo lineárnych prostrediach platí Ohmov zákon (diferenciálny tvar)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \qquad \text{alebo} \qquad \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$$

Tu, pre zmenu, σ je konduktivita ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$) a $\rho = 1/\sigma$ je rezistivita materiálu ($\Omega \cdot \text{m}$).

Elektrické náboje sa v prírode zachovávajú, čoho matematickým vyjadrením je rovnica kontinuity elektrického prúdu

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad \text{alebo} \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Podľa rovnice kontinuity prúd tečúci uzavretou plochou S sa rovná časovému úbytku náboja Q uzavretého plochou alebo v ľubovoľnom bode prúdového poľa sa divergencia prúdovej hustoty rovná časovému úbytku hustoty náboja ρ .

V elektromagnetickom poli je sústredená energia s objemovou hustotou

$$w = w_{el} + w_{mag} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2}$$

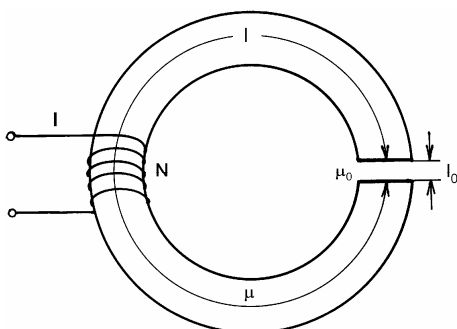
Úlohy 224 – 230

224. Susceptibilita jedného kilomolu hélia je $-2,4 \cdot 10^{-8}$. Dokážte, že to zodpovedá hodnote stredného kvadratického polomeru $1,22 a_0^2$ každej orbity v héliovom atóme, kde a_0 je polomer prvej Bohrovej dráhy vo vodíkovom atóme.

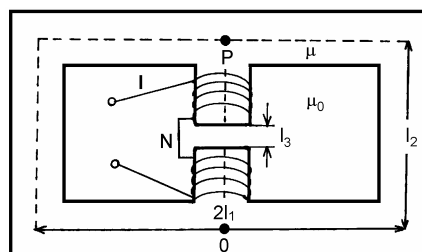
225. Susceptibilita jedného kilomolu látky $\text{NiK}_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ je

$$\chi = 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 1/T$$

Za predpokladu, že diamagnetický príspevok je zanedbateľný a paramagnetické príspevky sú iba od iónov Ni^{2+} , vypočítajte permanentný dipólový moment pripadajúci na každý Ni^{2+} ión.



Obr. 226



Obr. 227

226. Na prstenci z mäkkého železa podľa obr. 226 je navinutých $N = 150$ závitov drôtu, ktorým tečie prúd $I = 5$ A. Prstenec má štrbinu širokú $l_0 = 5$ mm a stredný obvod prstenca je $l = 25$ cm. Pri danom sýtení je permeabilita materiálu prstenca $3\,000 \mu_0$. Vypočítajte B a H v štrbine prstenca. Rozptyl indukčného toku je zanedbateľný.

227. Pre magnetický obvod podľa obr. 227 platí: počet závitov $N = 150$, prúd vo vinutí $I = 1$ A, šírka štrbiny $l_3 = 1$ cm, $\mu = 1\,000\mu_0$, rozmery obvodu $l_1 = l_2 = 10$ cm. Vypočítajte B a H v štrbine. Rozptyl magnetického indukčného toku je zanedbateľný.

228. Na železný prstenec s vnútorným polomerom $R = 10$ cm a vonkajším polomerom $R_1 = 12$ cm je navinutých 20 závitov drôtu. Využitím magnetizačnej krivky $B-H$ materiálu prstenca podľa obr. 228 vypočítajte veľkosť prúdu vo vinutí, potrebného pre vytvorenie magnetickej indukcie $B = 1,2$ T v strede prierezu prstenca.

229. Anglický fyzik Lord Rayleigh (1842 – 1919) ukázal, že pre nízke hodnoty magnetickej indukcie je hysterézná slučka s koncovými bodmi $\pm B_0, \pm H_0$ daná rovnicami

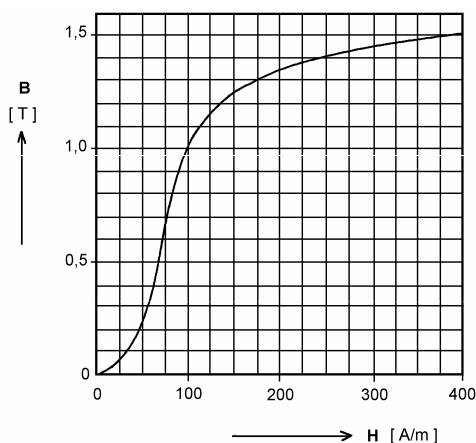
$$B = \mu H + \frac{1}{2}a(H_0^2 - H^2) \quad (\text{horná polovica slučky})$$

$$B = \mu H - \frac{1}{2}a(H_0^2 - H^2) \quad (\text{dolná polovica slučky})$$

kde $\mu = B_0/H_0$. Dokážte, že hysterézne straty na jednotku objemu vzorky a na jeden magnetizačný cyklus (reprezentované plochou slučky) sú

$$W = \frac{4}{3}aH_0^3$$

Tento výraz platí iba pre nízke hodnoty B_0 (v železe pod hodnotou asi 0,05 T). Pri vyšších hodnotách W sa mení približne s mocninou $B_0^{1,6}$, podľa Steinmetzovho empirického vzťahu.



Obr. 228

230. Pri meraní Hallovhovho napätia v kovovom sodíku sa ukázalo, že intenzita Hallovhovho elektrického poľa je $2\,500\ \mu\text{V/m}$ pri hustote prúdu v sodíku $10^7\ \text{A/m}^2$ a kolmom magnetickom poli 1 T. Určite objemovú hustotu vodivostných elektrónov v sodíku a porovnajte ju s počtom atómov sodíka na jednotku objemu. Hustota sodíka je $\rho = 970\ \text{kg/m}^3$ a atómová hmotnosť $M = 23$.