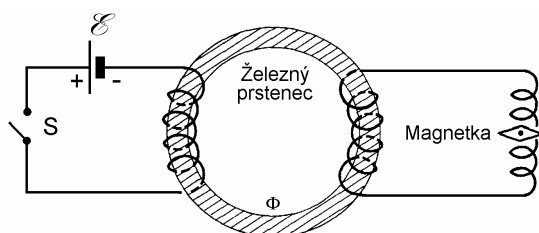


7 ELEKTROMAGNETICKÁ INDUKCIA

7.1 EXPERIMENTÁLNE ZÁKLADY ELEKTROMAGNETICKEJ INDUKCIE

"Geheimnisvoll am lichten Tag
Lässt sich Natur des Schleiers nicht berauben,
Und was sie deinem Geist nicht offenbaren mag,
Das zwingst du ihr nicht ab mit Hebeln und mit Schrauben"
Goethe: "Faust"¹

V roku 1831 vykonal anglický učenec Michael Faraday sériu pokusov, ktoré nadväzovali na pokusy jeho francúzskeho súčasníka André Marie Ampère, a ktorých cieľom bol výskum vzájomných súvislostí medzi prúdmi a magnetickými poľami. Ampère a pred ním aj Oersted svojimi experimentmi dokázali, že elektrický prúd je zdrojom magnetického poľa. Faraday ako skúsený experimentátor logicky očakával, že magnetické pole by mohlo byť zdrojom elektrického prúdu. S týmto očakávaním vykonal množstvo experimentov, ktorých spoločná idea plynie z *obr. 7.1*. Na železnom prstenci sú navinuté dve cievky, z ktorých jedna je pripojená cez spínač *S* ku zdroju napätia \mathcal{E} a druhá ku galvanometru – citlivému zariadeniu na meranie elektrických prúdov. Vo Faradayových experimentoch ako galvanometer slúžila malá dvojité cievočka so zavesenou magnetkou v jej štrbine. Po zopnutí spínača tečie primárnou cievkou stály elektrický prúd, ktorý v cievke vytvorí magnetické pole. Železný prstenec "prenesie" prakticky celý indukčný tok prvej cievky do druhej, sekundárnej, a dalo by sa očakávať, že sa objaví "zrkadlový efekt" a v sekundárnej cievke vznikne elektrický prúd, ktorý galvanometer



Obr. 7.1

¹ Bo pretajomná príroda
si ani za dňa závoj strhnúť nedá,
čo duchu tvojmu sama zjavne nepodá,
to heverom a skrutkou nevyvrveš jej, beda

Preložil M. M. Dedinský, 1966

bude registrovať. Príroda sa však nezachovala podľa učencovho očakávania a predpokladaný prúd v sekundárnej cievke sa neobjavil. Faraday si ale všimol, že v okamihu zopnutia spínača galvanometer zareagoval krátkou výchylkou a pri vypnutí výchylkou opačného smeru. Tento okamih možno považovať za zrod veľkého objavu s obrovským praktickým dosahom – objav elektromagnetickej indukcie.

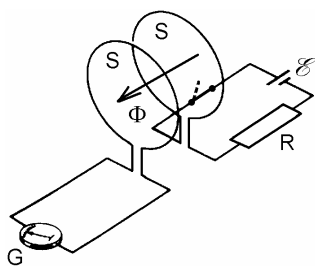
Po uvedenom pozorovaní urobil Faraday množstvo ďalších pokusov, ktorých výsledky možno zatriediť do nasledujúcich výpovedí:

1. **V sekundárnom obvode na obr. 7.1 bude tiecť prúd vtedy, ak sa konštantný prúd v primárnom obvode nahradí časovopremenným prúdom**, čo možno dosiahnuť napr. časovopremenným odporom $R(t)$ alebo jednoducho náhradou zdroja stáleho napätia, zdrojom s časovopremenným EMN $\mathcal{E}(t)$. V takých prípadoch bude indukčný tok železným prstencom časovopremenný, teda $\Phi = \Phi(t)$.

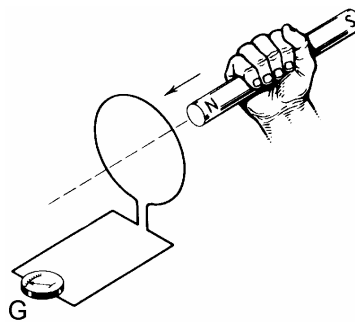
2. Ak sa železným prstencom pevne viazané obvody nahradia voľne viazanými obvodmi ako na obr. 7.2, bude indukčný tok obvodom s galvanometrom síce podstatne slabší, ale v obvode bude možno pozorovať množstvo ďalších prúdových efektov a to aj v prípade, ak zdroj EMN je v čase konštantný.

Prúd v obvode galvanometra potečie aj vtedy, ak

- obvody sa budú osovo vzdáľovať, alebo približovať;
- obvody sa budú pohybovať priečne, prípadne navzájom otáčať;
- jeden alebo obidva obvody sa budú deformovať tak, že sa budú meniť ich efektívne plochy S .



Obr. 7.2



Obr. 7.3

3. **Najzávažnejšia je skutočnosť, že v obvode s galvanometrom môže vzniknúť prúd aj bez prítomnosti primárneho prúdového obvodu.** Na obr. 7.3 je znázornený obvod s galvanometrom v blízkosti ktorého sa pohybuje tyčový permanentný magnet.¹ Aj takýto magnet vytvára časovopremenný indukčný tok rovinou závitů a v závitě vznikne elektrický prúd.

Všetky uvedené prípady vzniku prúdu v sekundárnom obvode majú jeden spoločný znak a to prítomnosť časovopremenného indukčného toku

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.1)$$

¹ Tyčový magnet je svojím magnetickým poľom ekvivalentný solenoidu s prúdom. Z jeho N konca (severný pól) magnetické indukčné čiary vystupujú a do S konca (južný pól) indukčné čiary vstupujú.

kde S je efektívna plocha obvodu s galvanometrom. Časová závislosť indukčného toku $\Phi(t)$ môže byť spôsobená niekoľkými faktormi. Môže to byť časovo premenná indukcia $\mathbf{B}(t)$, prípadne časovopremenný príspevok $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B dS \cos \varphi$ zapríčinený premenným uhlom $\varphi(t)$ medzi vektormi \mathbf{B} a $d\mathbf{S}$ alebo časovopremenná plocha $S(t)$ (tým, že sa obvod a následne aj jeho plocha v čase deformuje). Nie je vylúčená ani situácia, keď na zmenu indukčného toku pôsobia všetky faktory súčasne.

Faraday si tiež všimol, že veľkosť prúdu je úmerná rýchlosti časovej zmeny indukčného toku, teda veličine $d\Phi(t)/dt$. Keďže prúd v kovovom prúdovodiči je úmerný pôsobiacemu napätiu v obvode, možno pôsobenie časovej zmeny indukčného toku vyjadriť ekvivalentným indukovaným elektromotorickým napätím \mathcal{E}_i v obvode, teda

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.2)$$

Výraz (7.2) je jednou z možných formulácií Faradayovho zákona elektromagnetickej indukcie, ktorý možno vyjadriť slovne:

Indukované elektromotorické napätie vo vodivom elektrickom obvode sa svojou veľkosťou rovná časovej zmene indukčného toku cez obvod a má smer daný Lenzovým zákonom.

Uvedená slovná definícia zákona má dva nedostatky. Nepodáva presnejšiu informáciu o "vodivom elektrickom obvode" a viaže sa na zatiaľ nevyslovený Lenzov zákon.

Definícia elektrického obvodu pre účely elektromagnetickej indukcie je jedna z najošemetnejších úloh spojených s indukovanými napätiami a treba sa jej venovať na osobitnom mieste. Jednoduchých prípadov je málo: napríklad je to kruhový rovinný závit, v ktorom indukované napätie súvisí s časovou zmenou indukčného toku Φ kruhovou plochou obopnutou závitom. Ak sa závit nahradí prstencovou cievkou s N závitmi, indukované napätie je N -násobne väčšie ako v jednom závite, pretože efektívna plocha je N -krát väčšia a teda

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

Podobné napätie sa indukuje v solenoide s N závitmi, ak sa nachádza v homogénnom magnetickom poli a pritom sa zanedbá vplyv indukčného toku vytváraného prívodmi k cievke. Aj v sekundárnom obvode na obr. 7.1 sa indukuje napätie podľa vyššie uvedeného vzťahu, ak má sekundárny obvod N závitov.

Vo všetkých ostatných prípadoch, keď geometria obvodu a magnetické pole sú zložité funkcie súradníc, vznikajú problémy pri stanovení toho indukčného toku, ktorý je spojený so vznikajúcim indukovaným napätím a prúdom v obvode. Práve z týchto dôvodov sa elektromagnetické vlastnosti obvodov vyjadrujú parametrom "indukčnosť" prípadne "vzájomná indukčnosť", ktoré sú vzdialeným analógom pojmu kapacity. Výpočet indukčností nie je o nič jednoduchší ako výpočet indukčného toku, ale sú to veličiny, ktoré aspoň vieme spoľahlivo merať. Pojmy indukčnosti zavedieme neskôr.

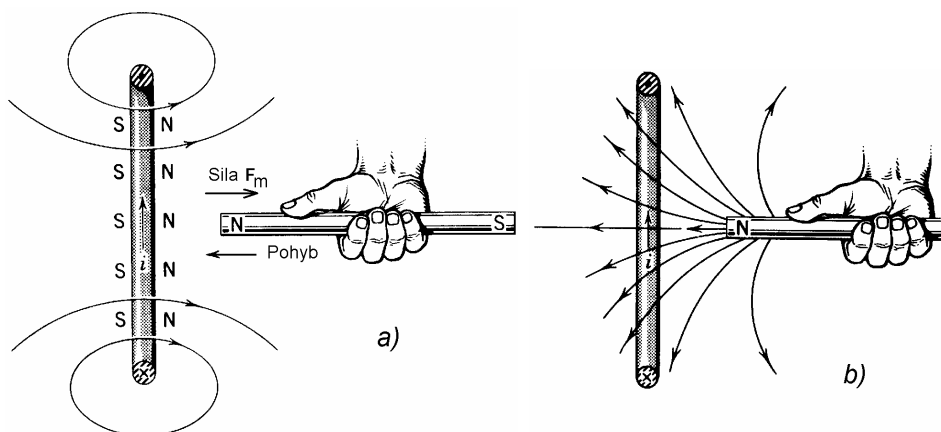
Z uvedených dôvodov treba výraz (7.2) chápať a interpretovať ako vyjadrenie fyzikálneho zákona, a nie ako vzorec, z ktorého možno niečo bezprostredne vypočítať.

7.2 LENZOV ZÁKON

Súbežne s Faradayom a nezávisle od neho robil výskumy vedúce k elektromagnetickej indukcii profesor Heinrich Friedrich Lenz (1804 – 1865) na petrohradskej akadémii. Lenzova najväčšia zásluha spočíva v tom, že jasne vyjadril smer pôsobenia indukovaného napätia v obvode.¹ Tento princíp je v podstate vyjadrením platnosti zákona zachovania energie v elektrodynamike a formálne vysvetľuje prítomnosť záporného znamienka v zákone elektromagnetickej indukcie. Lenzov zákon možno sformulovať takto:

Indukovaný prúd v obvode svojím magnetickým účinkom pôsobí proti zmene indukčného toku, ktorá ho vyvolala.

Zákon v uvedenom znení sa vzťahuje na indukovaný prúd, t. j. na uzavretý vodivý obvod. V prípade, ak je obvod otvorený, vyjadruje polaritu (smer pôsobenia) indukovaného napätia. Táto polarita určuje smer prúdu, ktorý by v obvode vznikol, ak by sa obvod uzavrel.



Obr. 7.4

Preskúmajme bližšie podstatu Lenzovho zákona s využitím ilustrácií na obr. 7.4a, b. Na obr. 7.4a je tyčový magnet, ktorého smer indukčných čiar ukazuje palec ruky (porovnaj s obr. 7.4b) a prsty ruky ukazujú smer prúdu v ekvivalentnom solenoide, ktorý by nahradil magnet. Ak sa magnet bude pohybovať smerom k závitom, bude indukčný tok závitom vzrastať a podľa Faradayovho aj Lenzovho zákona musí v závitoch tiecť prúd i , ktorého smer je zrejmý z oboch obrázkov. S týmto prúdom je spojené magnetické pole závitov, ktoré smeruje proti pólu magnetu. Cirkulačný prúd v ekvivalentnom solenoide má opačný smer ako prúd v závitoch, takže závit musí na magnet (solenoid) pri jeho pohybe pôsobiť odpudivou silou F_m . Zasúvanie magnetu do závitov je teda spojené s prácou vonkajšej sily, pričom sa táto práca premení na teplo v elektrickom odpore závitov. Zákon zachovania energie je pritom splnený.

¹ Faraday poznal tiež spôsob určenia smeru pôsobenia indukovaného napätia, ale jeho spôsob formulácie nebol tak jasný ako Lenzov. Okrem uvedených dvoch učencov sa na objave elektromagnetickej indukcie zaslúžil aj americký fyzik Joseph Henry (1797 – 1878), ktorý však výsledky svojho výskumu nepublikoval.

Na proces vzniku indukovaného napätia a prúdu v závitě sa možno dívať aj z hľadiska indukčného toku plochou závitú. Tento tok má tendenciu sa zachovávať, teda ak na začiatku je nulový (vzdialený magnet), bude sa snažiť zostať nulový pri akejkoľvek manipulácii s magnetom a pri približovaní magnetu závit bude cez svoju plochu vytvárať protitok (pozri obr. 7.4a) ako produkt vlastného prúdu.

Ak sa magnet bude zo závitú vyťahovať, indukčný tok závitom pochádzajúci od magnetu sa začne zmenšovať, to však vyvolá protitok plochou závitú (pole opačné ako na obr. 7.4a) a následne opačný prúd v závitě. Odpudivá sila magnetu a závitú sa zmení na príťažlivú a práca vykonaná pri vyťahovaní magnetu sa znovu premení na teplo v odpore závitú. Pri tejto analýze Lenzovho zákona si možno čitateľ uvedomil, že sme súčasne analyzovali činnosť najjednoduchšieho indukčného stroja, v ktorom sa mechanická práca mení na elektrický prúd a súčasne na teplo.¹

Kuriózne javy by v systéme magnet – závit vznikli vtedy, ak by Lenzov zákon neplatil, teda ak by vo výraze (7.2) bolo znamienko plus (+). Pri približovaní magnetu by vznikol závitom indukčný tok v smere toku magnetu. Tento tok by v závitě vyvolal prúd opačného smeru ako na obr. 7.4a,b a magnet by bol do závitú vtáňovaný. To by následne viedlo k ďalšiemu zväčšeniu indukčného toku ... atď. Vznikla by tzv. kladná spätná väzba, v dôsledku ktorej by sa systém energeticky zrútil. Zákon zachovania energie by bol v takom prípade porušený.

7.3 TEORETICKÉ PRINCÍPY ELEKTROMAGNETICKEJ INDUKCIE

Naše doterajšie úvahy o zákone elektromagnetickej indukcie sa zakladajú na experimentálnom pozorovaní Faradaya, Lenza a Henryho. Zákon však možno teoreticky zdôvodniť aj pomocou výrazu pre Lorentzovu silu [pozri výraz (6.7)] alebo z Lorentzových transformačných vzťahov pre elektromagnetické polia [výraz (6.128)]. Tieto výrazy poskytujú ekvivalentnú intenzitu elektrického poľa, ktorá pôsobí na náboje pohybujúce sa v magnetickom poli. Ekvivalentná intenzita (ktorú môžeme nazvať vnútenou indukovanou intenzitou) v ľubovoľnom bode priestoru je daná výrazom

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.3)$$

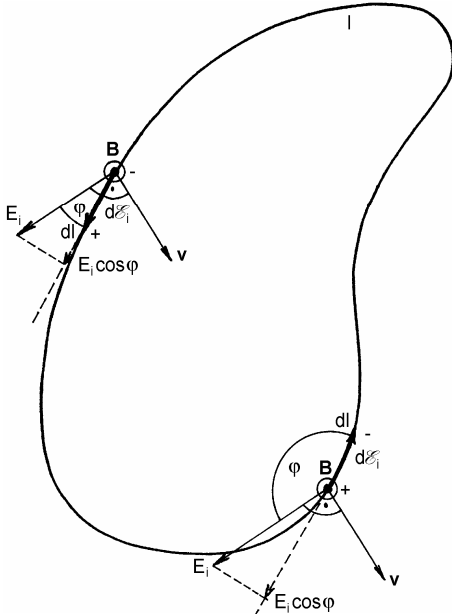
kde \mathbf{v} je vektor rýchlosti náboja v danom bode priestoru a \mathbf{B} je magnetická indukcia. Predpokladajme, že v takom magnetickom poli sa pohybuje vodivá kovová slučka l (pozri obr. 7.5). Slučka obsahuje elektróny, ktoré sa pod účinkom elektrického poľa daného výrazom (7.3) budú pohybovať, a vo vodiči vznikne elektrický prúd. V každom elementárnom úseku slučky $d\mathbf{l}$ vznikne indukované napätie

$$d\mathcal{E}_i = \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = E_i dl \cos \varphi = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l})$$

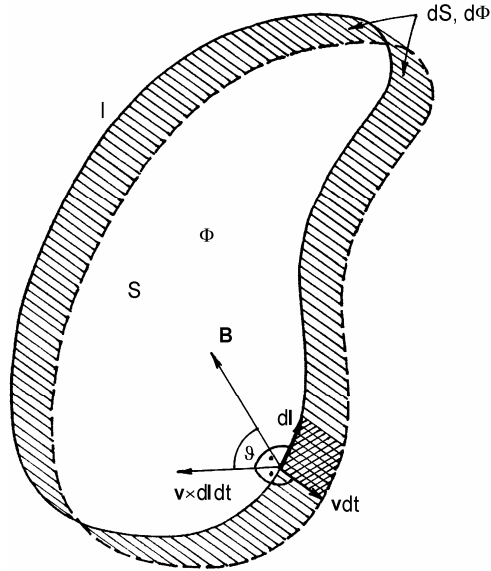
¹ V roku 1884 zákon podobný Lenzovmu vyslovil Henri L. Le Chatelier (1850 – 1936) pre termodynamické procesy, ktorý však má všeobecnejšiu platnosť a tým zahrňuje aj Lenzov zákon. Formulácia zákona je nasledovná: "Každé vonkajšie pôsobenie, ktoré vyvádza termodynamický systém z rovnováhy stimuluje v ňom také procesy, ktoré toto pôsobenie zoslabujú" (Comptes rendus, 99, 786 (1884)). Zákon teoreticky zdôvodnil v roku 1887 K. Braun. Pozri knihu Landau, L., Lifšic, E.: Statističeskaja fizika, M.-L., 1964 (Teoret. fizika, tom 5)

Na obr. 7.5 sú znázornené dva elementy dl na rôznych miestach slučky so zodpovedajúcimi polaritami príspevkov $d\mathcal{E}_i$. V celej uzavretej (alebo aj neuzavretej) slučke l indukované napätie

$$\mathcal{E}_i = -\oint_l \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) \quad (7.4)$$



Obr. 7.5



Obr. 7.6

Výraz (7.4) sa však vôbec nepodobá na vyjadrenie indukovaného napätia vzťahom (7.2). Treba si však uvedomiť, že vzťah (7.2) udáva indukované napätie ako dôsledok zmeny indukčného toku cez obvod, zatiaľ čo posledný vzťah udáva indukované napätie ako dôsledok pohybu obvodu (slučky) v magnetickom poli. Avšak aj v tomto prípade sa v čase mení indukčný tok slučkou, a teda obidva výrazy vyjadrujú rovnakú príčinu vzniku indukovaného napätia. Na dôkaz toho uvažujme ten istý obvod teraz však z iného pohľadu. Na obr. 7.6 je obvod zobrazený v dvoch nekonečne blízkych časových okamihoch t a $t + dt$. V čase t je obvod v nejakej pozícii, preniká ním indukčný tok Φ a obvod ohraničuje plochu S . V čase $t + dt$ preniká obvodom tok $\Phi + d\Phi$ a obopnutá plocha sa zmenila na $S + dS$. Zmenu dS predstavujú vyšrafované pásiky. Vektorovou plôškou $\mathbf{v} dt \times d\mathbf{l}$, na ktorej pôsobí vektor magnetickej indukcie \mathbf{B} , preniká indukčný tok

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} dt \times d\mathbf{l}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) dt = B |\mathbf{v} \times d\mathbf{l}| dt \cos \vartheta$$

Celková zmena indukčného toku $d\Phi$ je daná integrálom takých príspevkov pozdĺž celého obvodu l , teda

$$d\Phi = \oint_l \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) dt = - \mathcal{E}_i dt$$

kde sme využili výraz (7.4). Z tohto vzťahu priamo plynie výraz (7.2).

Indukované elektromotorické napätie \mathcal{E}_i možno tiež zapísať ako integrál indukovanej intenzity $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}$ pozdĺž obvodu l , teda

$$\mathcal{E}_i = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

a indukčný tok

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

kde S je plocha ohraničená čiarou (obvodom) l . S využitím takýchto zápisov možno zákonu elektromagnetickej indukcie (7.2) dať najvšeobecnejší tvar

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.5)$$

Dôležité je upozorniť, že vzťah (7.5) platí nielen vo vodivom prostredí obvodu, ale aj v dielektriku, prípadne vo vákuu, kde čiara l je ľubovoľná myšliená čiara. Výraz (7.5) je integrálna forma zákona elektromagnetickej indukcie. V dielektriku a vo vákuu možno odvodiť diferenciálny vzťah. Na ľavej strane vzťahu (7.5) použijeme Stokesovu vetu a na pravej strane deriváciu vložíme pod integrál, čo je možné, ak sa plocha S s časom nemení. Dostaneme rovnicu

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Keďže integrácia na oboch stranách rovnice sa robí na tej istej hraničnej ploche S a rovnica platí pre ľubovoľné S , musia sa rovnať integrandy rovnice, teda musí platiť

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.6)$$

Výraz (7.6) je diferenciálna forma zákona elektromagnetickej indukcie. Existuje ešte jedna, menej často uvádzaná forma zákona elektromagnetickej indukcie, ktorá spočíva na vyjadrení vektora magnetickej indukcie prostredníctvom vektorového potenciálu. Keďže $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, možno rovnicu (7.6) uviesť na tvar

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (7.7)$$

Rotácia výrazu (7.7) sa rovná nule, ak sa napríklad výraz v zátvorke rovná nule, t. j. ak

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.8)$$

Indukovaná intenzita v priestore je teda daná časovou deriváciou vektorového potenciálu. Tu však vektorový potenciál nie je daný riešením Poissonovej rovnice ako v magnetostatike (pozri odsek 2.12.3), ale riešením príslušných vlnových rovníc. Tieto úvahy však patria do inej časti elektromagnetizmu, a preto ich tu ďalej nebudeme rozvíjať. Čitateľovi sa v súvislosti s výrazom (7.8) odporúča vyriešiť úlohu 218.

Rovnica (7.7) má však ešte jedno riešenie. Rotácia výrazu v zátvorke (7.7) sa bude rovnat' nule aj vtedy, ak výraz v zátvorke bude úmerný gradientu nejakej skalárnej funkcie, v tomto prípade skalárneho elektrického potenciálu V , teda ak

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad} V$$

alebo

$$\mathbf{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.9)$$

Výraz (7.9) udáva celkovú intenzitu elektrického poľa \mathbf{E} vyjadrenú pomocou elektromagnetických potenciálov V a \mathbf{A} . Vo všeobecnosti má intenzita dve zložky – gradientovú, s ktorou sme sa oboznámili v elektrostatike a jej príčinou je samotná prítomnosť nábojov. Druhá zložka je indukovaná intenzita vyjadrená časovou zmenou vektora \mathbf{A} , ktorej pôvod treba vidieť v pohybe nábojov. Elektromagnetické potenciály sú dané riešením príslušných vlnových rovníc a tvoria obsah teórie elektromagnetického poľa. Magnetická indukcia je pritom daná už známym vzťahom

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

7.4 ZÁKLADNÉ APLIKÁCIE ZÁKONA ELEKTROMAGNETICKEJ INDUKCIE

Hovorí sa, že keď Faraday predložil výsledky svojich pokusov britskej kráľovskej spoločnosti (British Royal Society), učení členovia spoločnosti mu položili otázku: "Aký je z toho úžitok?" Faraday odpovedal protiotázkou: "A aký je úžitok z práve narodeného dieťaťa?"

V súčasnosti sa na svete ročne vyrobí (podľa údajov z roku 1992) asi $9,512 \cdot 10^{19}$ joulov (J), čo je asi $2,642 \cdot 10^7$ gigawatthodín (GWh) elektrickej energie, na princípe platnosti zákona elektromagnetickej indukcie¹. Je to takmer celá svetová produkcia elektrickej energie, pretože všetky ostatné elektrické zdroje (galvanické články, akumulátory, slnečné batérie atď.) sú v tomto porovnaní energeticky bezvýznamné.

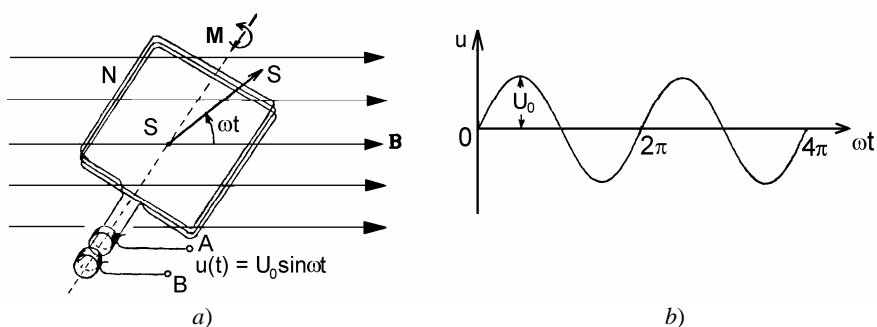
¹ Zdroj informácie: ABB, Asea Brown Boveri Ltd., Power Generation Segment, Marketing Department, 1000 Prospect Hill Road, Windsor, CT 06095-0500, USA

Základným objektom každej elektrárne je zložitý a výkonný generátor indukovaného elektromotorického napätia, poháňaný mechanickým, vodným alebo tepelným strojom. Princíp činnosti generátora je neobyčajne jednoduchý a možno ho pochopiť z obr. 7.7a. V magnetickom poli indukcie \mathbf{B} sa okolo zvolenej osi otáča konštantnou uhlovou frekvenciou $\omega = 2\pi f$ (f je frekvencia) prstencová cievka s N závitmi a s plochou jedného závitú S . V istom okamihu t zvierá normála k ploche cievky s vektorom magnetickej indukcie \mathbf{B} uhol $\varphi(t) = \omega t$. Indukčný tok Φ prenikajúci cievkou je v každom okamihu t daný výrazom

$$\Phi(t) = NBS \cos \omega t$$

a na prívodoch k cievke sa podľa zákona elektromagnetickej indukcie (7.2) indukuje časovopremenné (striedavé) EMN

$$u(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega NBS \sin \omega t = U_0 \sin \omega t \quad (7.10)$$



Obr. 7.7

Ako vidíme, časový priebeh napätia na cievke je sínusový, s amplitúdou $U_0 = \omega NBS$ a okamžitou fázou $\varphi = \omega t$ a je graficky znázornený na obr. 7.7b. Opísané zariadenie predstavuje najjednoduchší generátor striedavého napätia.

Pokiaľ výstupné svorky generátora nie sú zaťažené žiadnym odporom, teoreticky netreba na výrobu takého napätia žiadnu vonkajšiu energiu. Iná situácia nastane, ak sa generátor zaťaží odporom R (pozri náhradný obvod na obr. 7.8). Vo vinutí sa objaví časovopremenný striedavý elektrický prúd daný podľa Ohmovho zákona výrazom

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t \quad (7.11)$$

kde v R je zahrnutý aj vnútorný odpor zdroja, ktorým v tomto prípade je odpor vinutia cievky. Tento prúd vo vinutí treba udržiavať vonkajším točivým momentom

$$M(t) = Bm(t) \sin \varphi(t) = BNSi(t) \sin \omega t = \frac{U_0^2}{\omega R} \sin^2 \omega t$$

kde $m(t) = NSi(t)$ je magnetický moment prstencovej cievky [pozri výraz (6.55)]. Točivý stroj dodávajúci energiu musí teda pracovať s okamžitým mechanickým výkonom

$$p_m(t) = \omega M(t) = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t = \frac{(\omega NBS)^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (7.12a)$$

alebo so stredným výkonom za jednu periódu $T = 2\pi/\omega$

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p_m(t) dt = \frac{U_0^2}{2R} = \frac{(\omega NBS)^2}{2R} \quad (7.12b)$$

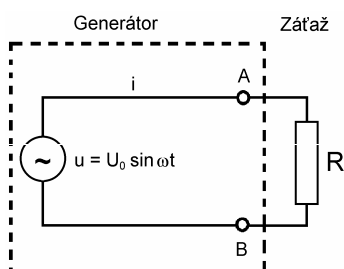
Na druhej strane okamžitý elektrický výkon $p_e(t)$ v odpore je daný Joulovým zákonom [pozri výrazy (5.30) až (5.33)], napr. výrazom

$$p_e(t) = u(t)i(t) = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (7.13a)$$

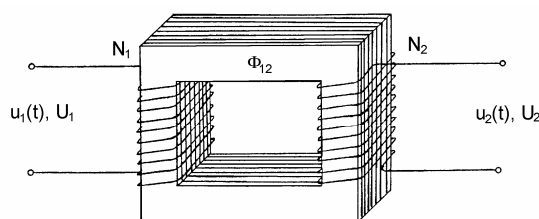
alebo stredný výkon

$$P_e = \frac{1}{T} \int_0^T p_e(t) dt = \frac{U_0^2}{2R} \quad (7.13b)$$

Vidíme, že výrazy (7.12) a (7.13) dávajú rovnaké hodnoty pre dodávaný mechanický výkon a odoberaný elektrický výkon, čo je v súhlase so zákonom zachovania energie a závermi plynúcimi z Lenzovho zákona. Skutočný užitočný elektrický výkon je však menší, pretože zariadenie, ako každý iný stroj, pracuje s účinnosťou, ktorá je vždy nižšia ako 1. Energetické siete v Európe pracujú na frekvencii $f = 50$ Hz s amplitúdou napätia jednej fáze na strane spotrebiteľa $U_0 = \sqrt{2} \cdot 220 \text{ V} \approx 311,1 \text{ V}$.



Obr. 7.8



Obr. 7.9

Druhým dôležitým zariadením pracujúcim na princípe elektromagnetickej indukcie je elektrický výkonový transformátor. Transformátorom sa premieňa primárne (vstupné) napätie alebo prúd zdroja na sekundárnu (výstupnú) hodnotu po transformácii. Transformátor (obr. 7.9) pozostáva z dvoch cievok, primárnej a sekundárnej s počtami závitov N_1 a N_2 . Cievky majú spoločné feromagnetické alebo feritové jadro, ktoré zaručuje, že prakticky celý indukčný tok $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ produkovaný jednou cievkou sa prenáša do druhej cievky. To je ideálny transformátor. V reálnom transformátore sa vždy nejaký indukčný tok rozptyľuje a časť energie sa spotrebuje na indukčný ohrev a hysterézne straty. Ak na

vstupe ideálneho transformátora pôsobí časovo premenné napätie $u(t)$, vytvorí na svorkách primárnej cievky rovnako veľké protinapätie $-N_1 d\Phi_1/dt$, teda

$$u_1(t) = -N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -u(t)$$

Spoločný indukčný tok preniká N_2 závitov sekundárnej cievky a vytvorí na jeho svorkách napätie

$$u_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

Vydelením týchto výrazov dostaneme vzťah

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} \quad (7.14)$$

podľa ktorého pomer primárneho a sekundárneho okamžitého napätia na nezaťaženom transformátore sa rovná pomeru počtu závitov na primárnej a sekundárnej strane. Ak je budiace napätie sínusové, dané výrazom (7.10), potom pre pomer amplitúd U_1 a U_2 primárneho a sekundárneho napätia platí

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = p \quad (7.15)$$

Ak je ideálny transformátor na svojom sekundári uzavretý, potom výkon v primárnom obvode sa rovná výkonu v sekundárnom obvode, t. j. $U_1 I_1 = U_2 I_2$ a pre amplitúdy prúdov na vstupnej a výstupnej strane platí

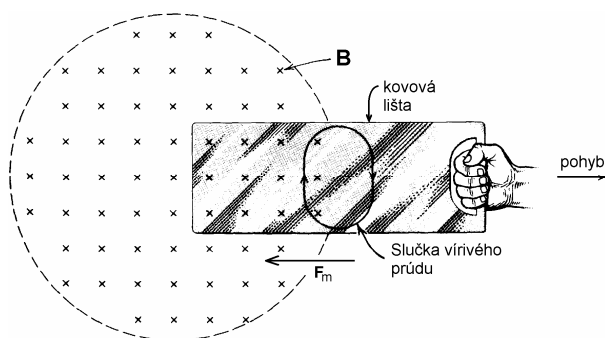
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{p} \quad (7.16)$$

Výrazy (7.15) a (7.16) platia iba pre ideálny transformátor. V reálnom transformátore s nenulovou všeobecnou záťažou je analýza zložitejšia.

Priamym dôsledkom zákona elektromagnetickej indukcie a Lenzovho zákona sú vírivé (Foucaultove) prúdy, vznikajúce v masívnych vodičoch, ktoré sú v časovo premennom magnetickom poli alebo sa pohybujú v konštantnom magnetickom poli. Na obr. 7.10 sa kovová vodivá lišta vyťahuje z priestoru, v ktorom je magnetické pole. V oblasti zobrazenej slučky sa znižuje indukčný tok, v dôsledku čoho v slučke tečie prúd, ktorého magnetické pole bráni znižovaniu pôvodného poľa. Na prúdovú dráhu (a teda aj na kovovú lištu) pôsobí sila F_m smerujúca proti smeru pohybu.

Účinky vírivých prúdov sú mnohoraké a majú široké technické využitie. Známym je indukčný ohrev vodivých materiálov, rôzne systémy tlmenia meracích prístrojov, elektromagnetické brzdy a i. Vírivé prúdy vo feromagnetických jadrách transformátorov spôsobujú ich nežiadúci ohrev. Aby sa vírivé prúdy obmedzili na minimálnu mieru, vyrábajú sa jadrá z izolovaných železných plechov, čo zabráni vzniku veľkých slučiek vírivých prúdov (pozri obr. 7.9).

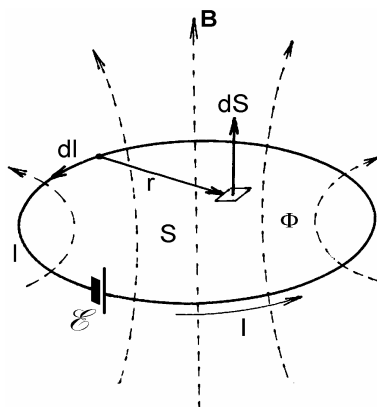
Uvedené príklady ani zďaleka nevyčerpávajú všetky možnosti aplikácie zákona elektromagnetickej indukcie. Ďalšie sú predmetom analýzy početných inžiniersko-technických monografií.



Obr. 7.10

7.5 SAMOINDUKCIA A VZÁJOMNÁ INDUKCIA. INDUKČNOSŤ A VZÁJOMNÁ INDUKČNOSŤ

Pri formulácii zákona elektromagnetickej indukcie sme konštatovali, že indukčný tok, ktorý je príčinou vzniku indukovaného napätia v obvode, sa vo väčšine prípadov ťažko počíta. Problém spočíva v tom, že pri zložitých prúdových obvodoch úlohu výpočtu magnetického indukčného toku nevieme ani matematicky sformulovať. Posúďme teraz výpočet indukčného toku z inej strany.



Obr. 7.11

Na obr. 7.11 je znázornený jednoduchý prúdový obvod dĺžky l , v ktorom zdroj EMN \mathcal{E} , vytvára prúd I . Tento prúd budí v každom bode priestoru magnetické pole indukcie B , ktoré možno vyjadriť Biotovým-Savartovým-Laplaceovým zákonom (pozri odsek 6.1.3).

Ak v priestore zvolíme plochu S , ktorej hranicu tvorí obvod l , potom magnetická indukcia v ľubovoľnom bode plochy je dané výrazom

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

kde význam symbolov je jasný z obr. 7.11. Indukčný tok Φ plochou S , ktorý vytvára toto magnetické pole, je podľa definície toku

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

po dosadení a úprave

$$\Phi = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \oint_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} \right) I \quad (7.17)$$

Výpočet indukčného toku vyžaduje vykonať integrácie v zátvorke, ktoré môžu byť pri geometricky zložitejších obvodoch (toroidálnych a iných cievkach a pod.) veľmi zložité. Dôležité však je, že výraz (7.17) je jednoduchý lineárny vzťah medzi indukčným tokom Φ a prúdom I , ktorý ho produkuje. Koeficient úmernosti

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \oint_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.18)$$

sa nazýva **indukčnosť** obvodu. Je závislá iba od geometrie rozloženia prúdovodiča a vlastností prostredia, v ktorom je obvod "ponorený". V danom prípade je uvažovaný obvod vo vákuu, čo vyjadruje konštanta μ_0 . S uvážením výrazu (7.18) možno pre indukčný tok obvodom napísať na prvý pohľad jednoduchý vzťah

$$\Phi = LI \quad (7.19)$$

v ktorom Φ je celkový indukčný tok viazaný s prúdom I . Pre obvody, ktorých geometria sa s časom nemení je L nezávislé od času, čo je veľmi dôležité, pretože v takom prípade časová zmena indukčného toku je daná jedine časovou zmenou prúdu v obvode.

Indukčnosť obvodu je jeho dôležitý elektrotechnický parameter a podľa výrazu (7.19) ju možno vyjadriť pomerom

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad [\text{H}] \quad (7.20)$$

Meracou jednotkou indukčnosti je **1 henry (H)**, nazvanou na počesť amerického fyzika J. Henryho, pritom podľa posledného vzťahu

$$1\text{H} = \frac{1\text{Wb}}{1\text{A}} = \frac{1\text{V}\cdot\text{s}}{1\text{A}} = 1\Omega\cdot\text{s} = 1\text{m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{A}^{-2}$$

Definícia indukčnosti (7.20) je statická, a nemá veľký praktický význam, pretože statické indukčné toky obvodov sa nedajú jednoducho merať, a okrem toho také toky nie sú v praxi veľmi dôležité. Oveľa dôležitejšie sú časovo premenné toky, ktoré majú za následok vznik indukovaných EMN v obvode. Ak sa teda v obvode mení s časom indukčný tok ako dôsledok časových zmien prúdu, vznikne v obvode indukované protinapätie

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt} \quad (7.21)$$

ak $L = \text{konšt.}$ Napätie \mathcal{E}_i sa nazýva samoindukované napätie a samotný jav, s ktorým súvisí, sa nazýva **samoindukciou**. Samoindukované napätie vzniká v každom elektrickom obvode, ak sa v ňom s časom mení elektrický prúd.

Na základe výrazu (7.21) možno napísať dynamickú definíciu indukčnosti

$$L = \frac{|\mathcal{E}_i|}{\left|\frac{dI}{dt}\right|} \quad [\text{H}]$$

Podľa tejto definície sa indukčnosť obvodu číselne rovná absolútnej hodnote samoindukovaného napätia na ňom, ak sa v ňom mení prúd absolútnou rýchlosťou 1 A/s.

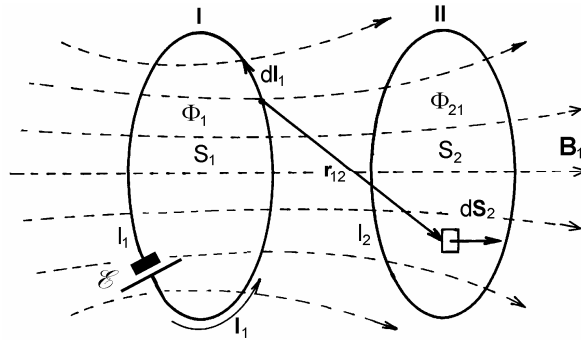
Praktická elektronika a elektrotechnika pracuje s indukčnosťami od zlomkov mikrohenry (μH), akými sú vysokofrekvenčné cievky, až do desiatok henry, ktoré predstavujú vinutia výkonných generátorov a elektrických motorov, prípadne ťažkých elektromagnetov. Indukčnosti sú spravidla realizované zvinutými prúdovodičmi, teda cievkami, avšak indukčnosť predstavuje každý kúsok aj nezvinutého prúdovodiča (pozri úlohu 205). Vo vysokofrekvenčnej prenosovej elektrotechnike majú osobitný význam indukčnosti (na jednotku dĺžky) dlhých dvojvodičových prenosových vedení, ktoré spolu s ich kapacitami (na jednotku dĺžky) určujú základné prenosové parametre vedenia (pre koaxiálny kábel bude indukčnosť vypočítaná v nasledujúcom odseku). Indukčnosti sú súčasťou každého rezonančného LC obvodu a sú dôležitou súčasťou elektrických filtrov.

Druhým dôležitým javom, ktorý treba osobitne analyzovať, je **vzájomná indukcia**. Na obr. 7.12 sú znázornené dva obvody I a II, ktoré sú vo vzájomnej magnetickej väzbe. V obvode I pôsobí zdroj EMN \mathcal{E} , ktorý vytvára prúd I_1 a následne indukčný tok Φ_1 . Časť Φ_{21} tohto toku preniká druhým obvodom II. Na ploche S_2 druhého obvodu je magnetická indukcia B_1 daná integráciou podľa Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona. Indukčný tok Φ_{21} , ktorý preniká plochou S_2 obvodu II je potom

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \cdot d\mathbf{S}_2 \right) I_1 \quad (7.22a)$$

kde význam symbolov je jasný z obr. 7.12. Rovnakú úvahu možno urobiť, ak napäťový zdroj \mathcal{E} preložíme z obvodu I do obvodu II. Prúd I_2 v obvode II vyvolá podobný indukčný tok Φ_{12} v obvode I

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \cdot d\mathbf{S}_1 \right) I_2 \quad (7.22b)$$



Obr. 7.12

Výrazy pre indukčné toky sú na výpočet takisto veľmi zložité, ale tiež majú jednoduchú vnútornú štruktúru.¹ Indukčný tok Φ_{21} druhým obvodom je priamo úmerný prúdu I_1 v prvom obvode a podobne tok Φ_{12} prvým obvodom je úmerný prúdu I_2 v druhom obvode. Konštanty úmernosti v zátvorkách závisia iba od formy a vzájomného rozloženia vodičov prvého a druhého obvodu, t. j. od dĺžky obvodov, od plôch obvodov a vzdialeností r elementov $d\mathbf{l}$ a $d\mathbf{S}$, ako aj vlastností prostredia, v ktorom sú obvody uložené (v danom prípade vákua sú tieto vlastnosti vyjadrené konštantou μ_0). Ak označíme

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \cdot d\mathbf{S}_2 \quad (7.23a)$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \cdot d\mathbf{S}_1 \quad (7.23b)$$

potom výrazy pre toky prijímú jednoduché tvary

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1 \quad (7.24a)$$

$$\Phi_{12} = L_{12}I_2 \quad (7.24b)$$

Ukazuje sa, že koeficienty úmernosti L_{21} a L_{12} sú rovnaké. Môžeme sa o tom presvedčiť jednoduchou úvahou. Ak vyjadríme magnetickú indukciu \mathbf{B}_1 pomocou vektorového potenciálu, možno pre indukčný tok Φ_{21} napísať

¹ V reálnych magneticky viazaných obvodoch sa výpočet toku komplikuje aj skutočnosťou, že "cesty" pre indukčné toky sú tvorené feromagnetickými materiálmi, takže μ_0 treba nahradiť s $\mu_0\mu_r$, kde μ_r (relatívna permeabilita) je veličina silne nelineárna a závislá od intenzity magnetického poľa H (pozri napr. obr. 7.1 a odsek 8.4 o feromagnetizme).

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S_2} \text{rot } \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint_{l_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$$

kde sme využili Stokesovu vetu. Čitateľovi odporúčame do pozornosti skutočnosť vyjadrenú posledným výrazom, že dôležitá fyzikálna veličina – magnetický indukčný tok plochou S – sa dá vyjadriť aj pomocou vektorového potenciálu ako jeho dráhový integrál po obvode l plochy S , teda

$$\Phi = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.25)$$

Vektorový potenciál \mathbf{A}_1 možno s ohľadom na výraz (6.37) vyjadriť tvarom

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{r_{21}}$$

takže

$$\Phi_{21} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{21}} \right) I_1 \quad (7.26)$$

Výraz (7.26) je iným vyjadrením indukčného toku podľa (7.22a). Zátvorka výrazu (7.26) musí predstavovať koeficient L_{21} , ale vzhľadom na jej úplnú matematickú symetriu vzhľadom na obvody I a II musí súčasne predstavovať aj L_{12} , teda

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{r_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{21}} = L_{21} = L_{12} = M \quad (7.27)$$

Koeficient $L_{21} = L_{12} = M$ sa nazýva **koeficient vzájomnej indukcie** alebo jednoducho **vzájomná indukčnosť**. Výrazy (7.19) pre indukčný tok možno teda napísať v tvaroch

$$\Phi_{21} = MI_1 \quad (7.28a)$$

$$\Phi_{12} = MI_2 \quad (7.28b)$$

Vzájomná indukčnosť obvodov je rovnako dôležitý elektrotechnický parameter obvodov ako je indukčnosť samostatného obvodu. Jej statický definičný vzťah je

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} \quad (7.29)$$

Podľa tejto definície dva magneticky viazané obvody majú vzájomnú indukčnosť M danú výrazom (7.29), ak prúd I jedným z obvodov vytvorí magnetický indukčný tok Φ druhým obvodom. V praxi sú viazané obvody väčšinou statické, t. j. M nezávisí od času a je pre obvody konštantnou kladnou veličinou. Vzájomná indukčnosť sa rovnako ako indukčnosť meria v jednotkách henry.

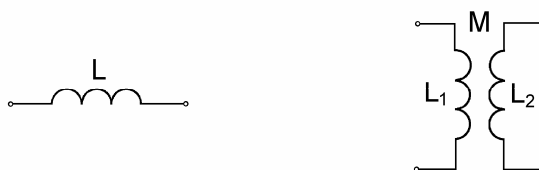
Ak prúd I_1 je časovo premenný a obvod II je otvorený, potom sa v ňom indukuje napätie

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt}(MI_1) = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (7.30)$$

Výraz (7.30) umožňuje napísať dynamickú definíciu vzájomnej indukčnosti výrazom

$$M = \frac{|\mathcal{E}_{21}|}{\left| \frac{dI_1}{dt} \right|} \quad [\text{H}] \quad (7.31)$$

Typickými vzájomnými indukčnosťami sú v praxi rôzne typy transformátorov. V elektrotechnických schémach sa indukčnosti L a vzájomné indukčnosti M zakresľujú symbolmi podľa obr. 7.13.



Obr. 7.13

Na záver tohto odseku dokážeme vzájomnosť koeficientov L_{21} a L_{12} na jednoduchom príklade. Na obr. 7.14a,b sú znázornené dva prúdovodiče v tvare kruhových koncentrických závitov I a II ležiacich v jednej rovine. Závity majú polomery R_1 a R_2 , pričom platí že $R_1 \gg R_2$. Prúd I_1 závitom I (obr. 7.14a) vytvorí na osi v jeho strede a blízkom okolí magnetickú indukciu

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}$$

Magnetický indukčný tok malým závitom polomeru R_2 s plochou $S_2 = \pi R_2^2$ je

$$\Phi_{21} \approx B_1 S_2 = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} I_1$$

Z tohto výrazu vidíme, že

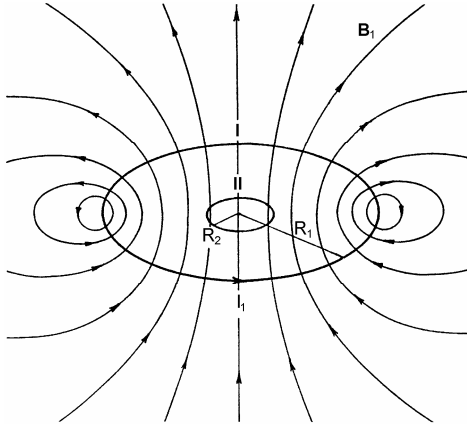
$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$$

Ak tečie prúd I_2 v závite II (obr. 7.14b) je situácia pri určení toku závitom I trochu zložitejšia. Na závit II sa však z veľkej diaľky $r \geq R_1$ možno dívať ako na prúdový závit s magnetickým momentom

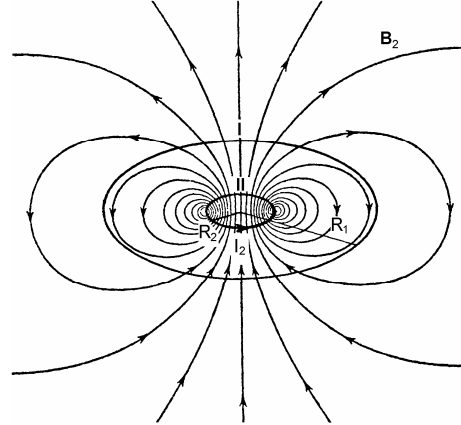
$$m = \pi R_2^2 I_2$$

Indukčný tok rovinou závitov možno rozdeliť na dve časti. Prvú časť toku tvoria indukčné čiary, ktoré sa uzatvárajú vo vnútri závitov I (pozri obr. 7.14b), neobopínajú závit I, a preto sa nepodieľajú na celkovom hľadanom toku Φ_{12} . Druhá časť toku tvoria indukčné čiary, ktoré obopínajú závit I, teda indukčné čiary, ktoré rovinu závitov pretínajú vo vzdialenostiach $r \geq R_1$. Je to dipólové pole v jeho ekvatoriálnej rovine

$$B_{\vartheta} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 I_2}{4\pi r^3}$$



Obr. 7.14a



Obr. 7.14b

pre $\vartheta = \pi/2$ [pozri výrazy (6.59)]. Toto pole treba integrovať po medzikružiaciach $dS = 2\pi r dr$ v hraniciach $R_1 \leq r \leq \infty$ a dostaneme hľadaný indukčný tok, teda

$$\Phi_{12} = \int_{S_1} B_{\vartheta} dS_1 = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 I_2}{2} \int_{R_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} I_2$$

Z tohto výrazu plynie, že

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} = L_{21}$$

Vzájomná indukčnosť dvoch prúdovodičov v tvare koplanárnych koncentrických kruhových závitov, ktorých polomery spĺňajú podmienku $R_1 \gg R_2$ je teda

$$M = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \quad (7.32)$$

7.5.1 Výpočet indukčností a vzájomných indukčností

K výpočtu indukčnosti možno využiť vzťahy (7.18) a (7.20), k výpočtu vzájomných indukčností vzťahy (7.27) a (7.29). Možnosť využitia vzťahov (7.18) a (7.27) je vo väčšine prípadov iba teoretická, pretože nevieme vypočítať príslušné integrály. Druhým problémom je otázka relevantného indukčného toku. Výrazy (7.18) a (7.27) v podstate vychádzajú z BSL zákona a ten je formulovaný pre nekonečne tenké vodiče, takže magnetická indukcia priamo na povrchu takého vodiča je nekonečne veľká. Reálne prúdovodiče však majú nenulový polomer, čo znamená, že prúd je rozložený na priereze vodiča a magnetické pole vo vnútri nie je nekonečné, ale narastá lineárne od nuly na osi vodiča k jeho konečnej hodnote na povrchu [pozri výraz (6.66)]. Indukčný tok potrebný na výpočet indukčnosti je potom daný tokom vo vonkajšom priestore a tokom vo vnútri vodiča. Vnútrotný tok vo vnútri prúdovodiča je vo väčšine prípadov nepatrný, a preto sa často zanedbáva. Pri výpočte toku sa vnútrajšok vodiča vylučuje, a tým sa súčasne vylúči problém singularitu poľa na osi.

Indukčnosti a vzájomné indukčnosti sa najčastejšie počítajú z výrazov (7.20) a (7.29) tak, že sa určí tok zo známeho priebehu magnetickej indukcie a výsledok sa vydělí budiacim prúdom. Uvedieme niekoľko príkladov:

1. Indukčnosť na jednotku dĺžky nekonečného solenoidu s hustotou závitov n a polomerom R . V nekonečnom solenoide je magnetické pole homogénne s indukciou

$$B = \mu_0 n I$$

Táto indukcia preniká prierezovou plochou solenoidu $S = \pi R^2$, takže indukčný tok solenoidom je

$$\Phi = BS = \mu_0 n \pi R^2 I$$

Tento indukčný tok preniká každým z n závitov jednotkovej dĺžky solenoidu, teda

$$n\Phi = L'I$$

z čoho indukčnosť na jednotku dĺžky solenoidu

$$L' = \frac{n\Phi}{I} = \pi\mu_0 n^2 R^2 \quad [\text{H/m}] \quad (7.33)$$

Nekonečné solenoidy v praxi samozrejme neexistujú, výraz však možno s istou presnosťou použiť aj v prípade konečného dlhého a tenkého solenoidu. Ak má solenoid dĺžku l a celkový počet závitov $N = nl$ pričom $R \ll l$, potom jeho indukčnosť

$$L \approx L'l = \frac{\pi\mu_0 N^2 R^2}{l} \quad (7.34)$$

Pre ľubovoľne dlhý solenoid je indukčnosť daná výrazom

$$L = k \frac{\pi\mu_0 N^2 R^2}{l} \quad (7.35)$$

kde koeficient k pre rôzne hodnoty $l/(2R)$ je daný v tabuľke 8.

Tabuľka 8

$l/(2R)$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1	2	3	5	50
k	0,200	0,315	0,405	0,525	0,605	0,685	0,82	0,87	0,92	0,99

2. Indukčnosť kruhového závitú. Na prvý pohľad jednoduchý prúdový obvod – kruhový rovinný závit polomeru R vyrobený z valcového vodiča polomeru a – predstavuje pri výpočte jeho vlastnej indukčnosti veľké matematické problémy. Pre $R/a \gg 1$ je indukčnosť závitú daná súčtom vnútornej indukčnosti kruhového vodiča, ktorá podľa riešenia úlohy 205 má hodnotu

$$L_1 = 2\pi RL' = \mu_0 \frac{R}{4} \quad (7.36)$$

a indukčnosti spôsobenej indukčným tokom Φ plochou S kruhu polomeru $R - a$, teda indukčnosti

$$L_2 = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{I} \int_S B_z \, dS$$

kde I je prúd v závitú a

$$B_z = \frac{\mu_0 IR}{\pi(R^2 - r^2)} E(k, \pi/2)$$

je magnetická indukcia v rovine závitú ako funkcia vzdialenosti r od stredu závitú. $E(k, \pi/2)$ je úplný eliptický integrál druhého druhu, kde $k = r/R$ (pozri riešenie úlohy 177). Indukčnosť L_2 potom možno formálne vyjadriť v tvare

$$L_2 = 2\mu_0 R \int_0^{R-a} \frac{r}{R^2 - r^2} E(k, \pi/2) dr \quad (7.37)$$

Výpočet posledného integrálu je možný iba v numerickom tvare. V literatúre¹ sa však uvádza približný empirický výraz pre výpočet indukčnosti kruhového závitú v tvare

$$L_2 = \mu_0 R \left(\ln \frac{R}{a} + 0,329 \right) \quad (7.38)$$

Výrazy (7.36) a (7.38) platia iba pre nízke frekvencie a pre neferomagnetický vodič, ak možno zanedbať skinefekt.

3. Indukčnosť toroidálnej cievky s pravouhlou dutinou. Magnetická indukcia v dutine toroidálnej cievky s N závitmi a s prúdom I , ktorej rez je znázornený na obr. 7.15 je daná výrazom

¹ Napr. Rint, C.: Handbuch für Hochfrequenz- und Elektro-Techniker, Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik GMBH Berlin-Borsigwalde 1952

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

pre $R_1 < r < R_2$. Indukčný tok "okienkom" $h \times (R_2 - R_1)$ toroidu sa vypočíta integráciou príspevkov $d\Phi = BdS$, kde $dS = hdr$, teda

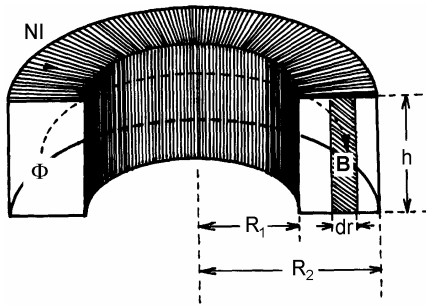
$$\Phi = \int_S BdS = \frac{\mu_0 N h I}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} I \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Indukčnosť toroidálnej cievky je potom

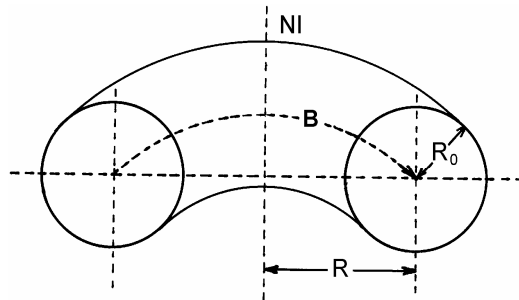
$$L = N \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (7.39)$$

Čitateľovi odporúčam výpočtom dokázať, že indukčnosť toroidálnej cievky s N závitmi, s polomerom toroidu R a s kruhovou dutinou polomeru R_0 , ako na obr. 7.16, je daná výrazom

$$L_2 = \mu_0 N^2 \left(R - \sqrt{R^2 - R_0^2} \right) \quad (7.40)$$



Obr. 7.15



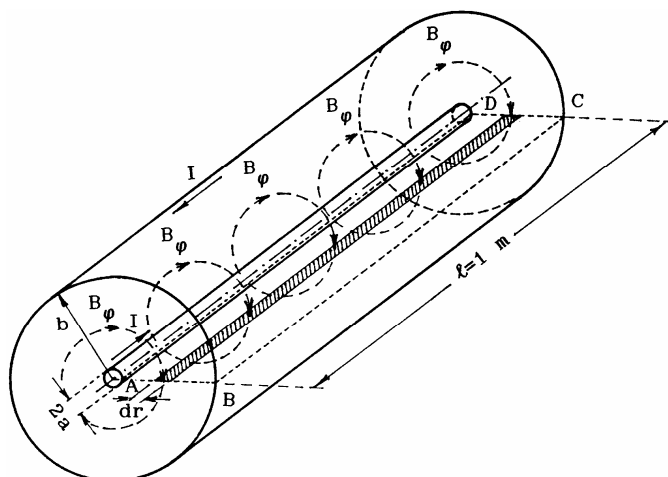
Obr. 7.16

4. Indukčnosť koaxiálneho kábla. Koaxiálny kábel je dvojvodičové vedenie určené predovšetkým na prenos elektromagnetických signálov pre potreby telekomunikácie. Pozostáva z centrálneho valcového vodiča a koaxiálneho plášťa, v ktorých tečie prúd I v protiběžných smeroch. S prúdom je spojený indukčný tok v dutine kábla, teda kábel má indukčnosť, ktorá je jedným z jeho určujúcich prenosových parametrov (druhým parametrom je jeho kapacita). Magnetické pole v dutine kábla (pozri odsek 6.1.9) je jednoduché azimutálne pole s kruhovými indukčnými čiarami a je dané výrazom

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Tok tohto poľa v dutine kábla určuje jeho indukčnosť. Na obr. 7.17 je znázornený úsek koaxiálneho kábla s vyznačenou plochou S obdĺžnika $ABCD$, ktorou treba indukčný tok počítať. Tok vo vnútri centrálneho vodiča a v plášti kábla sa pritom zanedbáva. Integráciou indukcie plochou S obdĺžnika $ABCD$ dostaneme pre tok výraz

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{b}{a}$$



Obr. 7.17

z čoho indukčnosť koaxiálneho kábla na jednotku jeho dĺžky

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad [\text{H/m}] \quad (7.41)$$

Treba si ešte uvedomiť, že z mechanických dôvodov musí byť dutina kábla vyplnená tuhým nevodivým materiálom s relatívnou permitivitou ϵ_r a relatívnou permeabilitou μ_r . Magnetické vlastnosti neferomagnetických materiálov sú v prevažnej miere porovnateľné s vlastnosťami vákua, preto relatívnu permeabilitu použitých materiálov v koaxiálnom kábli možno s dobrou presnosťou považovať za rovnú 1 a teda $\mu = \mu_0 \mu_r \approx \mu_0$.

5. Vzájomná indukčnosť dvoch koaxiálnych solenoidov. Vzájomné indukčnosti sa najčastejšie počítajú tak, že sa vypočíta tok jednej cievky prenikajúcej druhou a výsledok sa vynásobí počtom závitov druhej cievky. Ak napr. v nekonečne dlhom solenoide s polomerom R a s počtom n_1 závitov na jednotku dĺžky tečie prúd I_1 , potom tok Φ_1 jedným závitom druhého koaxiálneho solenoidu s rovnakým polomerom a s n_2 závitmi na jednotku dĺžky je

$$\Phi_1 = \mu_0 n_1 \pi R^2 I_1$$

a tok n_2 závitmi druhého solenoidu

$$\Phi_{21} = n_2 \Phi_1 = \mu_0 n_2 n_1 \pi R^2 I_1 = L_{21} I_1 = M I_1$$

z čoho vzájomná indukčnosť dvojice na jednotku dĺžky

$$M = \mu_0 n_2 n_1 \pi R^2 \quad (7.42)$$

Výraz (7.42) možno využiť na výpočet vzájomnej indukčnosti dvojice konečnej dĺžky rovnako, ako pri výpočte indukčnosti jedného solenoidu. Možno si pritom všimnúť, že

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad (7.43)$$

kde L_1, L_2 sú indukčnosti jednotlivých solenoidov.

6. Vzájomná indukčnosť dvoch toroidálnych cievok. Ak dve cievky s počtami závitov N_1, N_2 sú rovnomerne navinuté na spoločnom toroide ako na obr. 7.15, potom majú vzájomnú indukčnosť

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (7.44)$$

k čomu vedú úvahy podobné ako v bode 3. tohto odseku.

7. Transformátor ako vzájomná indukčnosť. Ak primárnym obvodom transformátora na obr. 7.9 tečie prúd I_1 , potom pre pomer tokov viazaných s primárnymi N_1 a sekundárnymi N_2 závitmi platí

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_{21}} = \frac{L_1 I_1}{M I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

Podobne, ak prúd I_2 tečie sekundárnym vinutím, platí

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_{12}} = \frac{L_2 I_2}{M I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Z porovnania týchto výrazov plynú pre vzájomnú indukčnosť transformátora zaujímavé a v praxi užitočné vzťahy

$$M = L_1 \frac{N_2}{N_1} = L_2 \frac{N_1}{N_2} \quad (7.45)$$

a tiež vzťah

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} \quad (7.46)$$

Výrazy (7.45) a (7.46) budú využité pri analýze transformátora elektrického napätia ako transformátora odporu alebo presnejšie, impedancie. Treba zdôrazniť, že výrazy platia iba vtedy, ak cievky transformátora majú skutočne spoločný celkový indukčný tok. Ak

však tok jednej cievky nepreniká celý závitmi druhej cievky, vzájomná indukčnosť je menšia ako tá, daná výrazom (7.43), a je

$$M = k\sqrt{L_1L_2} \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (7.47)$$

kde k je koeficient väzby. Koeficient väzby sieťových výkonových transformátorov je blízky 1, pre vysokofrekvenčné transformátory napr. v pásmových filtroch má hodnoty cca 0,01, prípadne aj menej.

Obvody s indukčnosťami a vzájomnými indukčnosťami možno spájať. Spojenia môžu byť veľmi zložité, ak popri galvanickom spojení obvodov dochádza aj k ich magnetickej väzbe. Jednoduché spojenia možno urobiť s indukčnosťami, ktoré sú navzájom magneticky izolované (napríklad toroidálne cievky). Jednoduché úvahy ukazujú, že výsledná indukčnosť L_s sériového spojenia n indukčností má hodnotu

$$L_s = \sum_{i=1}^n L_i \quad (7.48a)$$

a pre indukčnosť L_p paralelného spojenia platí

$$\frac{1}{L_p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i} \quad (7.48b)$$

7.6 VPLYV SEKUNDÁRNEHO PRÚDU NA POMERY V PRIMÁRNOM OBVODE

Pri analýze vzájomnej indukcie sme sa doteraz úzkostlivo vyhýbali prípadu, keď sekundárny obvod, v ktorom sa indukuje napätie z primárneho obvodu, je vodivo uzavretý. Až takýto prípad plne preukáže účinok zákona elektromagnetickej indukcie, Lenzovho zákona a princípov vzájomnej indukcie.

Uvažujme dva obvody s indukčnosťami L_1 a L_2 v magnetickej väzbe vyjadrenej koeficientom M (pozri obr. 7.18). V sekundárnom obvode je spínač P .

Ak je spínač rozopnutý a v primárnom obvode je zapojený zdroj časovopremenného napätia $\mathcal{E}(t)$, potečie v primárnom obvode prúd I_1 , ktorý na svorkách zdroja vytvorí protinapätie

$$\mathcal{E}_{i1} = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

V sekundárnom obvode na kontaktoch spínača je indukované napätie z primárneho obvodu

$$\mathcal{E}_{i2} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

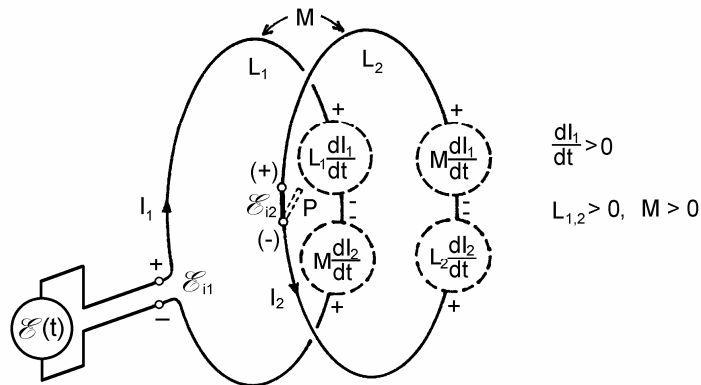
Iná situácia nastane, ak spínač P zapneme (tak ako na obr. 7.18; šípky indukovaných prúdov a polarít indukovaných napätí pozdĺž obvodov zobrazujú okamžitý stav pre

$dI_1/dt > 0$). V sekundárnom obvode potečie prúd I_2 , ktorý podľa Lenzovho pravidla vyvolá v obvode protinapätie

$$L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

a v primárnom obvode indukované napätie

$$M \frac{dI_2}{dt}$$



Obr. 7.18

Výsledné indukované napätie na svorkách primárneho obvodu

$$\mathcal{E}_{i1} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \quad (7.49a)$$

a "výstupné napätie" na skratovaných kontaktoch spínača P

$$\mathcal{E}_{i2} = L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} = 0 \quad (7.49b)$$

Z rovnice (7.49b) dostaneme

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{M}{L_2} \frac{dI_1}{dt}$$

a po dosadení do (7.49a) máme

$$\mathcal{E}_{i1} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{M^2}{L_2} \frac{dI_1}{dt} = -\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right) \frac{dI_1}{dt}$$

alebo
$$\mathcal{E}_{i1} = -L_1' \frac{dI_1}{dt} \quad (7.50)$$

kde
$$L_1' = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) = L_1 (1 - k^2) < L_1 \quad (7.51)$$

a k je koeficient väzby obvodov. Zaujímavé výrazy (7.50) a (7.51) možno interpretovať nasledovne: Ak sa jeden z magneticky viazaných obvodov skratuje, indukčnosť druhého sa zmenší faktorom $(1 - k^2)$, t. j. zmenšia sa jeho induktívne schopnosti, a ak je väzba totálna ($k = 1$), druhý obvod úplne stratí indukčnosť a stane sa z neho obyčajný bezindukčný skrat alebo odpor. Takýto stav môže nastať napr. v sieťovom transformátore, ak vo vinutí vznikne medzizávitový skrat (elektrotechnici poznajú tento stav ako "závit nakrátko"). V skratovanom závite vznikne veľký indukovaný prúd a vzrastie tiež prúd vo zvyšku vinutia, pretože jeho indukčnosť, a tým aj indukované protinapätie sa znížia prakticky na nulu. To vedie k tepelnému preťaženiu a zničeniu transformátora.

V reálnych viazaných obvodoch sekundárny obvod samozrejme nebýva skratovaný, ale je do neho zaradený nejaký odpor, prípadne ďalšie prvky (kapacity, iné indukčnosti a pod.). Aj samotné vinutia majú istý nenulový odpor. Analýza činnosti obvodov je potom zložitejšia a pre harmonické striedavé prúdy bude jeden z prípadov predmetom odseku 9.8.4. V tejto súvislosti pozri tiež príklad 223.

7.7 ENERGETICKÉ ÚVAHY V OBVODE RL. ENERGIA MAGNETICKÉHO POĽA

Magnetické pole je nositeľom energie, čo plynie z jednoduchého faktu, že silovým pôsobením na magnety, solenoidy s prúdom, prípadne na iné cievky, magnetické pole koná prácu. Uvažujme jednoduchý obvod na obr. 7.19, v ktorom je zdroj EMN \mathcal{E} zapojený v sérii s odporom R a cievkou (indukčnosťou) L . V čase $t = 0$ sa v obvode zapne spínač K , čím sa okruh galvanicky uzavrie a v obvode začne tiecť časovopremenný elektrický prúd $I = I(t)$. Na indukčnosti L vznikne samoindukované napätie

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}$$

ktoré spolu s napätím \mathcal{E} pôsobí v obvode. Podľa II. Kirchhoffovho zákona súčet elektromotorických napätí v obvode sa rovná súčtu potenciálových spádov na odporoch (vnútorný odpor zdroja a odpor spojovacích vodičov zanedbáme), takže jednoducho

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = RI$$

alebo po úprave

$$\mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (7.52)$$

Výraz (7.52) je diferenciálnou rovnicou pre prúd v obvode, ale ten nie je predbežne predmetom nášho záujmu. Najprv sa budeme zaujímať o energetickú bilanciu v obvode, t. j. o to, ako sa v obvode spotrebuje energia zdroja. Za tým účelom rovnicu (7.52) vynásobíme s $I dt$, kde dt je nekonečne krátky časový element. Tak dostaneme

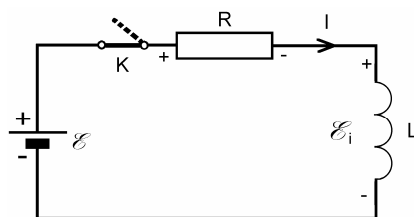
$$\mathcal{E}I dt = RI^2 dt + LI dI \quad (7.53)$$

Ľavá strana rovnice udáva energiu dodanú zdrojom do obvodu za čas dt , teda

$$dW = \mathcal{E}I dt$$

Prvý člen na pravej strane rovnice (7.53)

$$dW_R = RI^2 dt$$



Obr. 7.19

predstavuje energiu, ktorá sa za čas dt spotrebuje v odpore R na teplo. Nakoniec druhý člen na pravej strane rovnice

$$dW_m = LI dI$$

je časť energie, ktorá sa akumuluje v indukčnosti L vo forme magnetického poľa. Energia magnetického poľa závisí iba od indukčnosti (za predpokladu, že neexistuje magnetická väzba s inými indukčnosťami) a od prúdu v nej. Celková konečná energia je daná integrálom príspevkov dW_m od nulového prúdu, po konečný prúd I_0 , teda

$$W_m = L \int_0^{I_0} I dI = \frac{1}{2} LI_0^2$$

Ak využijeme skutočnosť, že $LI_0 = \Phi$, potom energia magnetického poľa sa dá vyjadriť výrazmi¹

$$W_m = \frac{1}{2} LI_0^2 = \frac{1}{2} \Phi I_0 \quad (7.54)$$

¹ Čitateľa upozorňujeme na formálnu podobnosť výrazu (7.54) a výrazu pre elektrickú energiu nabitého kondenzátora (3.37) $w_e = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2$. Stojí za povšimnutie formálna analógia $L \leftrightarrow C$, $I_0 \leftrightarrow U$, $\Phi \leftrightarrow Q$.

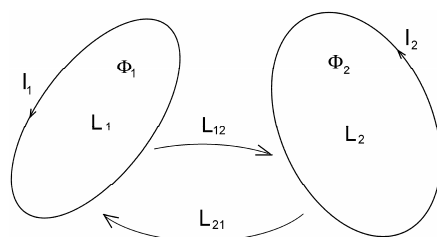
Platnosť posledného výrazu neskôr dokážeme ešte raz "vybíjaním" magnetickej energie cievky do odporu pri analýze prechodového javu v RL obvode.

Výraz (7.54) možno zovšeobecniť pre viac obvodov, ktoré sú magneticky zviazané. Uvažujme najprv dva obvody schematicky znázornené na obr. 7.20. Označme indukčnosti obvodov postupne $L_1 = L_{11}$ a $L_2 = L_{22}$, vzájomnú indukčnosť $M = L_{12} = L_{21}$. Predpokladajme, že obvodmi tečú prúdy I_1 a I_2 . Tieto prúdy vytvoria jednotlivými obvodmi indukčné toky, menovite prvým obvodom indukčný tok

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_{11}I_1 + L_{12}I_2$$

a podobne druhým obvodom tok

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21} = L_{22}I_2 + L_{21}I_1$$



Obr. 7.20

Na základe výrazu (7.54) a platnosti zákona superpozície celkovú magneticкую energiu dvoch obvodov so vzájomnou magneticкую väzbou možno vyjadriť výrazom

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{2}\Phi_1 I_1 + \frac{1}{2}\Phi_2 I_2 = \\ &= \frac{1}{2}(L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1 I_2 + L_{21}I_2 I_1 + L_{22}I_2^2) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 L_{ij} I_i I_j \end{aligned} \quad (7.55)$$

Výraz (7.55) možno zovšeobecniť na n obvodov, teda

$$W_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Phi_i I_i \quad (7.56)$$

kde koeficient L_{ii} je indukčnosť i -tého obvodu, $L_{ij} = L_{ji}$ sú vzájomné indukčnosti i -tého a j -tého obvodu a

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n L_{ij} I_j \quad (7.57)$$

je celkový indukčný tok i -tým obvodom od vlastného prúdu I_i a ostatných $n - 1$ prúdov susedných obvodov. (Čitateľ si môže všimnúť formálnu podobnosť výrazov (7.56), (7.57) a zodpovedajúcich výrazov pre elektrickú energiu a potenciál sústavy bodových nábojov v odseku 3.7.1).

7.7.1 Hustota energie magnetického poľa

Podobne ako v elektrickom poli možno vyjadriť aj objemovú hustotu energie magnetického poľa v priestore. Na tento účel využijeme indukčnosť a magnetickú indukciu nekonečne dlhého solenoidu. Indukčnosť dĺžky l solenoidu prierezu S a hustoty n závitov je podľa výrazu (7.33)

$$L = \mu_0 n^2 S l$$

a magnetická indukcia v dutine solenoidu pri prúde I je

$$B = \mu_0 n I$$

z čoho prúd v solenoide

$$I = \frac{B}{\mu_0 n}$$

Energia magnetického poľa v objeme $\tau = S l$ solenoidu je

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \tau = w_m \tau$$

z čoho hustota energie magnetického poľa

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{B H}{2} \quad (7.58)$$

Magnetické vlastnosti látkových prostredí sú vyjadrené ich permeabilitou μ , ktorá môže byť tenzorom a závisieť od intenzity magnetického poľa \mathbf{H} , prípadne aj od ďalších vplyvov (pozri odsek 6.2). Pre takéto prostredia je hustota energie magnetického poľa daná výrazom

$$w_m = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \quad [\text{J} \cdot \text{m}^{-3}] \quad (7.59)$$

Výraz (7.59) pre hustotu energie magnetického poľa je najvšeobecnejší, pretože platí dokonca aj pre látky s anizotropnými vlastnosťami a samozrejme aj pre vákuum. Svojou formou je podobný výrazu pre hustotu energie elektrického poľa

$$w_e = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2}$$

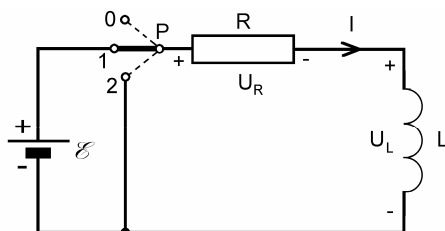
a obidve hustoty v súčte udávajú hustotu energie elektromagnetického poľa, teda

$$w_{elmag} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \quad (7.60)$$

7.8 ELEKTRICKÝ PRÚD V OBVODE RL . PRECHODOVÝ JAV V OBVODE RL

V obvodoch, ktoré obsahujú popri odporoch aj indukčnosti, pôsobia tieto svojím indukovaným napätím proti pôsobiacim napät'ovým zdrojom, a tak aj v prípade, ak je v obvode zaradený zdroj konštantného napätia \mathcal{E} , prúd v obvode po jeho zopnutí nie je v čase konštantný, ale k svojej stacionárnej hodnote sa blíži asymptoticky, a dosiahne ju teoreticky po nekonečne dlhom čase. Takýto proces sa nazýva prechodový jav RL .

Uvažujme obvod podľa obr. 7.21, v ktorom odpor R v sérii s indukčnosťou L možno prepínačom P pripojiť na zdroj konštantného napätia \mathcal{E} . Ak sa prepínač z polohy 0 prepne do polohy 1, zapojí sa do obvodu odpor a cievky zdroj, ak sa prepne do polohy 2, vyradí sa zdroj a obvod sa skratuje.



Obr. 7.21

Ak sa v čase $t = 0$ prepne prepínač z polohy 0 do polohy 1, obvodom začne tiecť prúd, pre ktorý podľa II. Kirchhoffovho zákona vyjadreného rovnicou (7.52), platí vzťah

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E} \quad (7.61)$$

Z rovnice (7.61) pri zadaných pevných hodnotách L , R a \mathcal{E} možno vypočítať prúd I ako funkciu času. V matematickej terminológii je (7.61) obyčajnou nehomogénnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu s konštantnými koeficientmi. K riešeniu treba zadať začiatočnú podmienku pre prúd. V okamihu zopnutia obvodu, pre $t = 0$, na indukčnosti vznikne protinapätie, ktoré je veľkosťou rovné \mathcal{E} a prúd v prvom okamihu v obvode netečie. Metódou variácie konštant dostaneme riešenie v tvare

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right] = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (7.62)$$

kde

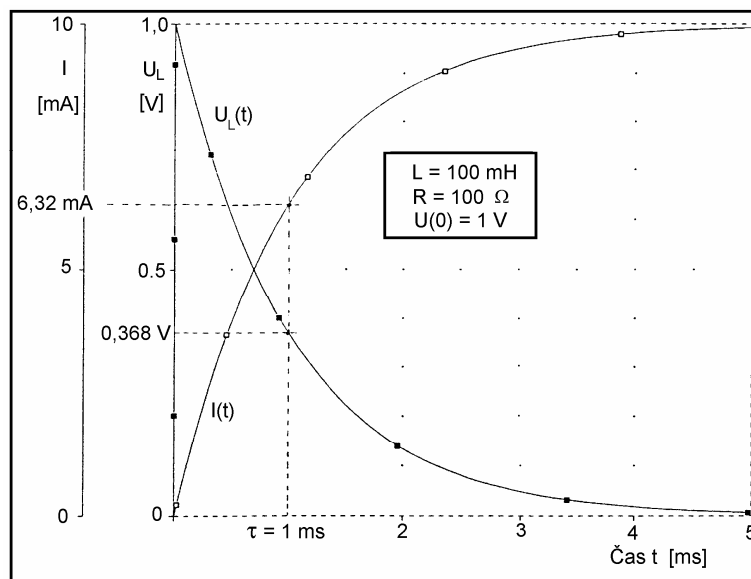
$$\tau = \frac{L}{R} \quad (7.63)$$

je časová konštanta obvodu závislá od jeho parametrov R a L . Čísleno udáva čas, za ktorý prúd v obvode vzrastie z nulovej hodnoty na $(1 - e^{-1}) \approx 0,632$ -tinu svojej ustálenej hodnoty, ktorú teoreticky dosiahne v čase $t \rightarrow \infty$. Veľké časové konštanty majú cievky (indukčnosti) spojené s malými odpormi, do ktorých treba zahrnúť aj odpor prúdovodiča, z ktorého je cievka navinutá.

Na odpore a indukčnosti (cievke) sú pritom napätia

$$U_R(t) = RI(t) = \mathcal{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (7.64)$$

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (7.65)$$



Obr. 7.22

Časové priebehy prúdu v obvode a napätia na cievke sú graficky znázornené na obr. 7.22. Číslené hodnoty parametrov R a L sú udané v grafe, EMN zdroja $\mathcal{E} = U(0) = 1$ V. Časová konštanta obvodu.

$$\tau = \frac{L}{R} = 10^{-3} \text{ s}$$

Z grafov vidíme, že prúd $I(t)$ v obvode s časom exponenciálne stúpa s časovou konštantou $\tau = 1$ ms a podobne stúpa aj napätie U_R (v grafe neznázornené). Napätie na indukčnosti U_L exponenciálne klesá s tou istou časovou konštantou. Asymptotou prúdu $I(t)$ je konštantný prúd $I_0 = \mathcal{E}/R = 10$ mA, aký sa v obvode ustáli teoreticky po nekonečne dlhom čase, prakticky však už po čase $5\tau = 5$ ms. Napätie na indukčnosti U_L sa asymptoticky blíži k nule. (V tejto súvislosti čitateľa upozorňujeme na alternatívny prechodový jav v obvode pozostávajúcom z odporu a kondenzátora – prechodový jav RC , ktorý má veľa formálnych podobností, a ktorý sme analyzovali v odseku 5.8).

Predpokladajme teraz, že obvod bol zopnutý podstatne dlhšie, ako je čas 5τ , keď prechodový jav prakticky doznal a prúd dosiahol svoju stacionárnu hodnotu $I_{st} = \mathcal{E}/R$. Prepnieme v takomto čase prepínač P do polohy 2. V praxi môže viesť proces prepínania k nežiadúcim až tragickým dôsledkom.¹ V procese prepínania, po rozopnutí prúdu I v obvode a pred zopnutím obvodu do skratu, sa na cievke indukuje teoreticky nekonečne vysoké napätie úmerné $dI/dt \rightarrow \infty$. Prakticky však pri rozopínaní vznikne medzi kontaktmi spínača elektrický oblúk, ktorý napätie obmedzí na istú konečnú hodnotu, závislú od veľkosti indukčnosti L . Toto napätie môže byť ešte stále tak vysoké, že sa cievka s veľkou indukčnosťou zničí elektrickým prierazom vinutia.

Nech v okamihu prepnutia prepínača $t = 0$. Okamžite po zopnutí obvodu magnetické pole cievky (ktoré začína klesať) sa snaží udržať prúd v obvode na rovnakej hodnote ako pred prepnutím. Nová začiatočná hodnota prúdu $I_0 = I_{st} = \mathcal{E}/R$, a prúd v obvode sa riadi rovnicou

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0 \quad (7.66)$$

Riešenie tejto diferenciálnej s uvedenou začiatočnou podmienkou rovnice je jednoduché

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (7.67)$$

Prúd v obvode exponenciálne klesá s časovou konštantou τ , a napätie na odpore

$$U_R(t) = RI(t) = RI_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \mathcal{E} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (7.68)$$

klesá takisto. Napätie U_L na indukčnosti sa rovná zápornému indukovanému napätiu, teda

$$U_L = -\mathcal{E}_i = L \frac{dI}{dt} = -RI_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -\mathcal{E} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (7.69)$$

Vidíme, že v každom čase $U_R + U_L = 0$.

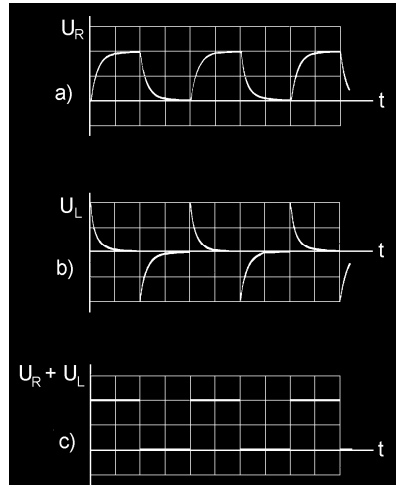
Prúd v obvode, v ktorom niet evidentných zdrojov elektromotorických napätí, okamžite vyvoláva otázku pôvodu energie, ktorá tento prúd vyvoláva. Zdrojom energie tu môže byť jedine magnetické pole, ktorého vonkajším prejavom je začiatočný prúd

¹ Purcell vo svojej učebnici dramaticky konštatuje: "... ľudia často zomierali pri vypínaní obvodov s veľkými indukčnosťami".

$I_0 = \mathcal{E}/R$ v čase $t = 0$. Tak, ako s časom zaniká prúd v obvode podľa výrazu (7.67), tak postupne zaniká aj s ním zviazané magnetické pole. Svoju energiu odovzdáva prostredníctvom prúdu do odporu R vo forme tepla. Presvedčíme sa o tom integráciou výkonu RI^2 v čase od $t = 0$ až do $t \rightarrow \infty$. Energia spotrebovaná v odpore R na teplo je

$$W_R = \int_0^{\infty} RI^2(t) dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} LI_0^2$$

Vidíme, že je to tá istá energia, ktorú malo magnetické pole na začiatku procesu, v čase $t = 0$.



Obr. 7.23

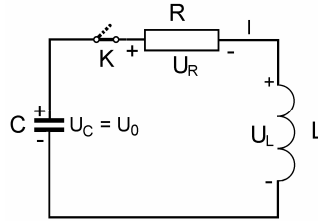
Na obr. 7.23 sú znázornené oscilografické záznamy napätí U_R , U_L a $U_R + U_L$ na prvkoch obvodu podľa obr. 7.21, ak zdroj jednosmerného napätia je nahradený generátorom obdĺžnikového napätia (pozri tiež odsek 5.8 a obr. 5.29, resp. 5.30).

RL obvody sa podobne ako obvody RC využívajú v elektrotechnike predovšetkým ako sekcie reťazcových filtrov, menej často ako väzbové členy, integračné, resp. derivačné obvody a i. Treba mať na pamäti, že každá, hlavne väčšia indukčnosť, je navinutá dlhým prúdovodičom (drôtom), ktorý predstavuje i nezanedbateľný odpor a treba ju považovať za sériové spojenie R a L .

7.9 PRECHODOVÝ JAV V OBVODE RLC . VOLNÉ KMITY V OBVODE RLC

Zaujímavé a z praktického hľadiska závažné elektrické javy vzniknú v obvode zostavenom sériovým spojením kapacity C , indukčnosti L a odporu R ako na obr. 7.24. Odpor môže byť do obvodu zaradený, ale častejšie predstavuje odpor vinutia cievky. Dielektrikum

kondenzátora má tiež nejakú konečnú nenulovú vodivosť, obyčajne je však tak malá, že ju považujeme za nulovú. Ak je to však potrebné, vodivostné vlastnosti dielektrika sa vyznačujú paralelným odporom ku kondenzátoru, čo však riešenie obvodu skomplikuje.



Obr. 7.24

Predpokladajme, že kondenzátor C je pred zopnutím spínača K nabitý na napätie U_0 . Ak v čase $t = 0$ zopneme spínač, začne sa v obvode rozvíjať prúd $I(t)$ a na jednotlivých prvkoch obvodu vznikajú napäťové spády (označená polarita napätí na obr. 7.24 zodpovedá stavu ihneď po zapnutí spínača):

– na kondenzátore je náboj

$$Q(t) = U_0 C - \int_0^t I dt$$

ktorý bezprostredne po zopnutí začína klesať a na kondenzátore je napätie

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_0 - \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt$$

– na indukčnosti sa začína indukovať napätie a napäťový spád na nej je

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt}$$

– na odpore je napäťový spád podľa Ohmovho zákona

$$U_R(t) = RI$$

Algebraický súčet týchto napätí v obvode sa musí podľa II. Kirchhoffovho zákona rovnať nule, pretože v obvode nepôsobí nijaký zdroj napätia, teda

$$U_C - U_L - U_R = 0 \quad (7.70)$$

alebo

$$U_0 - \frac{1}{C} \int_0^t I dt - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

Po jednej časovej derivácii a po úprave rovnica nadobudne tvar

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (7.71)$$

Je to rovnica pre prúd $I(t)$ v obvode po zopnutí kľúča K . Zaveďme v rovnici (7.71) substitúcie

$$\frac{R}{L} = 2\alpha \qquad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

čím prejde do tvaru

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0 \quad (7.72)$$

Rovnice (7.71), resp. (7.72) sú obyčajné homogénne diferenciálne rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientmi a riešenie poslednej možno hľadať v tvare

$$I(t) = Ae^{\gamma t}$$

kde A je integračná konštanta a γ je riešenie charakteristickej rovnice

$$\gamma^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0$$

t. j.

$$\gamma_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \beta \quad (7.73)$$

kde

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (7.74)$$

Všeobecné riešenie rovnice (7.72) má tvar

$$I(t) = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t} \quad (7.75)$$

kde A_1 a A_2 sú integračné konštanty, ktoré treba určiť zo začiatočných podmienok. V čase $t = 0$ je

$$I(0) = A_1 + A_2 = 0 \quad (7.76)$$

a tiež $U_R = 0$, takže podľa rovnice (7.70)

$$U_L(0) = L \left(\frac{dI}{dt} \right)_{t=0} = U_C(0) = U_0$$

z čoho

$$\frac{dI}{dt} = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 = \frac{U_0}{L} \quad (7.77)$$

Riešením rovníc (7.76) a (7.77) s ohľadom na výrazy (7.73) a (7.74) pre integračné konštanty dostaneme

$$A_2 = -A_1 = \frac{U_0}{2\beta L}$$

a riešenie (7.75) prijme tvar

$$I(t) = \frac{U_0}{\beta L} e^{-\alpha t} \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \quad (7.78)$$

Charakter prúdu $I(t)$ závisí od vzájomného pomeru parametrov R , L a C obvodu. Podľa toho treba rozlišovať tri špeciálne prípady:

1. Prípad, ak odpor R v obvode je veľký, taký že

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{kr}$$

čo zodpovedá podmienke

$$\alpha > \omega_0$$

a β je reálne, kladné. V takom prípade sa výraz pre prúd $I(t)$ dá napísať v tvare

$$I(t) = \frac{U_0}{\beta L} e^{-\alpha t} \sinh \beta t \quad (7.79)$$

2. Prípad, ak odpor spĺňa podmienku

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{kr}$$

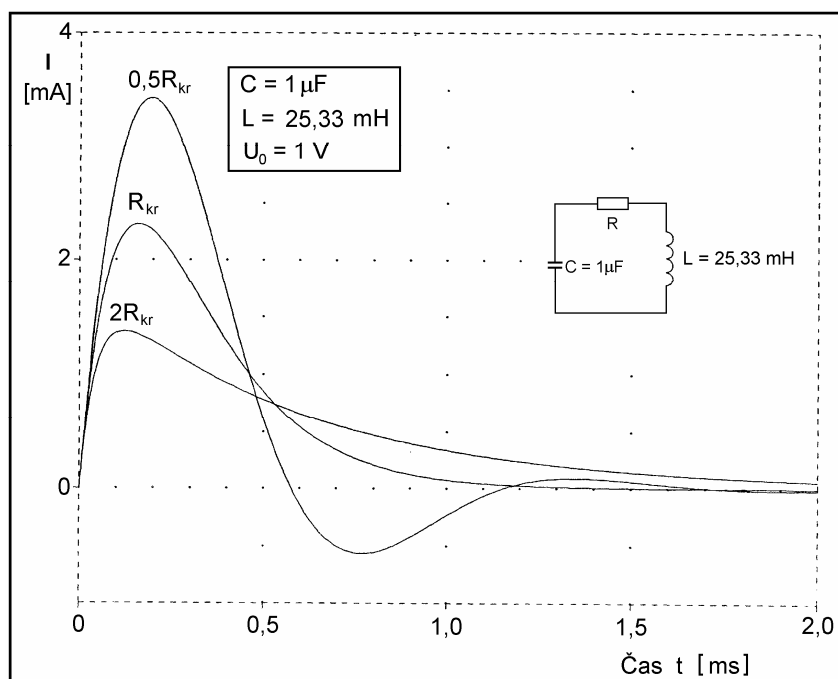
alebo ak $\alpha = \omega_0$, t. j. $\beta = 0$. Limitným prechodom $\beta \rightarrow 0$ vo výraze (7.78) dostaneme pre prúd výraz

$$I(t) = \frac{U_0}{\beta L} e^{-\alpha t} t \quad (7.80)$$

Prípady 1. a 2. prúdových priebehov, keď $R \geq R_{kr}$ sa nazývajú aperiodický (neperiodický) a aperiodický kritický priebeh. Vyznačujú sa prúdovým nábehom s maximom prúdu a následným relaxačným útlmom prúdu k jeho nulovej hodnote. Na obr. 7.25 sú pre dané číselné hodnoty parametrov C , L a začiatočného napätia na kondenzátore $U_C(0) = 1$ V graficky znázornené časové priebehy prúdu pre $R = 2R_{kr}$ (aperiodický) a $R = R_{kr}$ (aperiodický kritický). Vidieť, že kritický priebeh je priebeh s najrýchlejším útlmom bez toho, aby prúd zmenil smer. V grafe je aj priebeh prúdu pre $R = 0,5R_{kr}$, ktorý už nie je daný výrazmi (7.79), resp. (7.80), pretože preň $R < R_{kr}$. Vyznačuje sa prúdovým prekmitom v opačnom smere.

3. Posledný, najdôležitejší prípad nastáva, ak odpor R je tak malý, že je splnená podmienka

$$R < R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$



Obr. 7.25

takže $\alpha < \omega_0$, a tým pádom β je imaginárne číslo, teda

$$\beta = j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j\omega$$

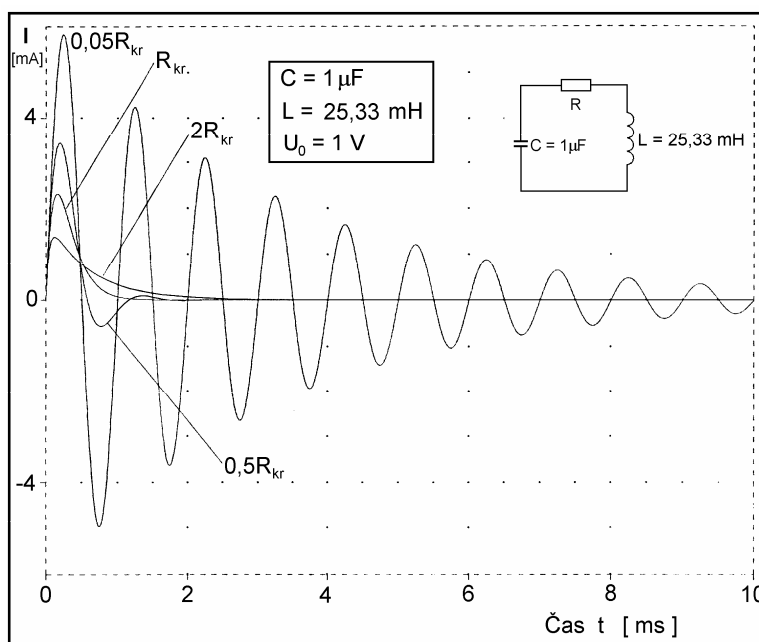
V takom prípade prúd v obvode je daný výrazom

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\alpha t} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t \quad (7.81)$$

kde

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (7.82)$$

Podľa vzťahu (7.81) prúd má charakter tlmených kmitov s kruhovou frekvenciou ω danou zložitou závislosťou (7.82) od všetkých parametrov obvodu. Je to periodický priebeh prúdu v obvode. Na obr. 7.26 sú znázornené časové priebehy prúdov v obvode pre niekoľko hodnôt odporu R . Dva priebehy pre odpory $R = 0,5R_{kr}$ a $R = 0,05R_{kr}$ sú periodické priebehy s exponenciálne zanikajúcou amplitúdou, zvyšné dva sú aperiodické, už analyzované v predchádzajúcom bode.



Obr. 7.26

Veličina

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (7.83)$$

sa nazýva konštanta útlmu a určuje rýchlosť zániku kmitov v obvode.

Venujme teraz pozornosť limitnému prípadu prúdu, ak $R \rightarrow 0$. Zo vzťahu (7.83) vidieť, že útlm klesá k nule a tlmený periodický priebeh prúdu v obvode sa zmení na netlmený. Aj keď takýto prípad je prakticky nereálny, vyšetríme ho podrobnejšie, pretože pomôže pochopiť fyzikálne procesy, ktoré v obvode prebiehajú.

Kruhovú frekvenciu kmitov v netlmenom obvode je daná jednoduchým výrazom

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [\text{rad.s}^{-1}] \quad (7.84)$$

alebo frekvencia

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad [\text{Hz}] \quad (7.85)$$

kde T je perióda kmitov. Posledný výraz je známy Thomsonov vzorec. Vzťah pre prúd (7.81) prejde na jednoduchý tvar

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t = \omega_0 C U_0 \sin \omega_0 t = I_0 \sin \omega_0 t \quad (7.86)$$

kde
$$I_0 = \frac{U_0}{\omega_0 L} = \omega_0 C U_0 \quad (7.87)$$

je amplitúda prúdu v obvode. Napätie na indukčnosti

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = \omega_0 L I_0 \cos \omega_0 t = U_0 \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) = U_0 \sin \omega_0 \left(t + \frac{T}{4} \right) \quad (7.88a)$$

a na kapacite

$$\begin{aligned} U_C(t) &= U_0 - \frac{1}{C} \int_0^t I dt = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 \cos \omega_0 t = \\ &= U_0 \sin \omega_0 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) = U_0 \sin \omega_0 \left(t + \frac{T}{4} \right) = U_L(t) \end{aligned} \quad (7.88b)$$

kde U_0 , t. j. začiatkové napätie na kondenzátore, je súčasne amplitúdou napätia na kondenzátore aj cievke. Pomer amplitúdy napätia U_0 a amplitúdy prúdu I_0 je charakteristický parameter obvodu

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R_{kr}}{2} \quad (7.89)$$

ktorý sa nazýva **charakteristický odpor obvodu**.¹

Sledujme teraz fázové pomery napätí a prúdu v obvode. Vidíme, že sínusový prúd $I(t)$ (7.86) zaostáva za napätiami U_L na indukčnosti (7.88a) a U_C na kapacite (7.88b) vo fáze o $-\pi/2$, takže fázový posuv napätia oproti prúdu je $\varphi_L = \varphi_C = \pi/2$, alebo v čase o štvrt'periódu, teda $t_L = t_C = T/4$. Časové priebehy prúdu $I(t)$ (7.86) a napätí $U_L = U_C$ (7.88) sú graficky znázornené na obr. 7.27. Pre dané hodnoty parametrov v grafe je perióda kmitov

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}$$

takže časový posuv priebehov je $t_L = t_C = 250 \mu\text{s}$.

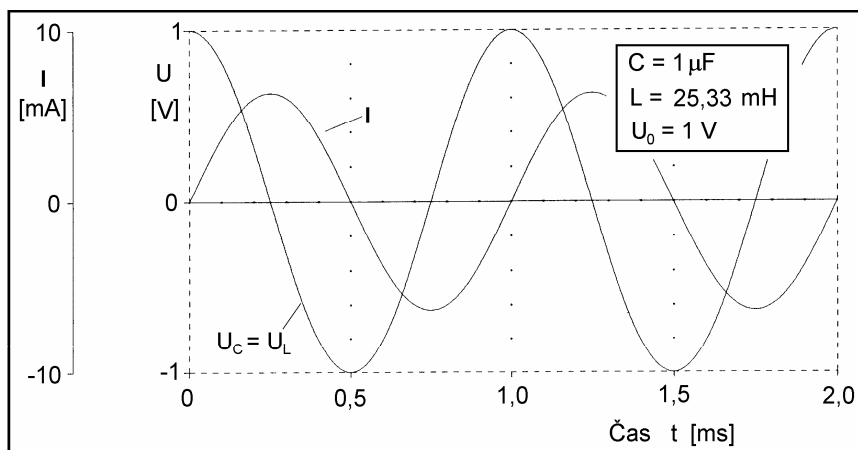
Zaujímavá je tiež analýza energetickej bilancie v obvode. Periodickým prúdom cez indukčnosť sa bude kondenzátor periodicky nabíjať a vybíjať. Energia sa teda bude "prelievať" z kondenzátora do cievky a naopak. Energia magnetického poľa cievky je daná výrazom

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 \sin^2 \omega_0 t = W_0 \sin^2 \omega_0 t \quad (7.90a)$$

a energia elektrického poľa kondenzátora

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C U^2(t) = \frac{1}{2} C U_0^2 \cos^2 \omega_0 t = W_0 \cos^2 \omega_0 t \quad (7.90b)$$

¹ Pojem "charakteristický odpor" sa často nesprávne zamieňa s pojmom "vlnový odpor" dlhého vedenia, ktorý je vyjadrený formálne rovnakým výrazom [pozri odsek 11.6.3, výraz (11.98)].

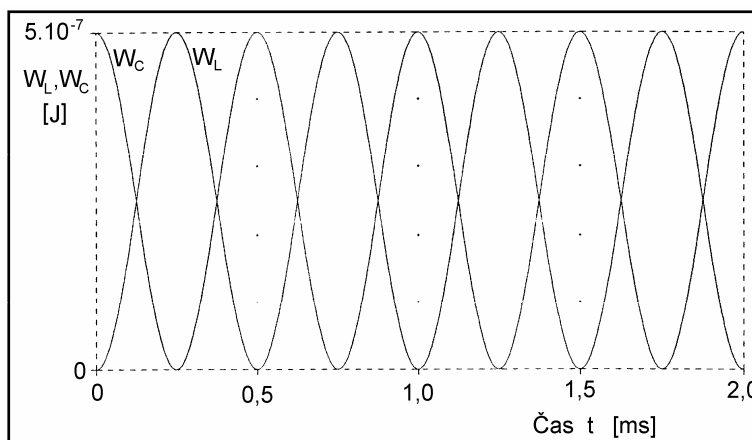


Obr. 7.27

kde $U(t) = U_L(t) = U_C(t)$ a

$$W_0 = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} C U_0^2$$

je maximálna hodnota (amplitúda) energie v cievke a v kondenzátore. Z výrazov (7.90) vidno, že energia sa skutočne každú štvrtperiódu "prelieva" z kondenzátora do cievky a naopak. Energia sa v obvode nespotrebuje a obvod kmitá teoreticky nekonečne dlho. Pre hodnoty parametrov $L = 25,33$ mH a $C = 1$ μ F a so začiatočným napätím na kondenzátore $U_C = 1$ V sú časové priebehy energií na kondenzátore a cievke graficky znázornené na obr. 7.28. Maximálne hodnoty energií na jednotlivých prvkoch sú $W_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ J = 0,5 μ J.



Obr. 7.28

7.9.1 Kvalita kmitavého obvodu

Ak je odpor R nenulový, analýza procesov v RLC obvode je zložitejšia. Amplitúda prúdu v obvode a amplitúdy napätí na jeho prvkoch exponenciálne klesajú v dôsledku postupnej disipatívnej nevratnej premeny časti energie na teplo v odpore. Fázový posuv medzi prúdom a napätiami v obvode už nie je $\pi/2$ a závisí od všetkých parametrov obvodu. V tejto súvislosti odporúčam čitateľovi analyzovať úlohu 221.

Dôležitým druhotným parametrom RLC obvodu popri jeho frekvencii danej výrazom (7.82) a konštante útlmu podľa výrazu (7.83) je bezrozmerný parameter Q , ktorý sa nazýva **činiteľ akosti** alebo **faktor kvality** obvodu (často nazývaný jednoducho **kvalita**). Tieto parametre plne opisujú vlastnosti RLC obvodu a ich význam spočíva v tom, že ich možno elektrotechnickými, resp. elektronickými metódami merať. Kvalita kmitavého obvodu je definovaná ako 2π -násobok pomeru energie W akumulovanej v obvode (v jeho indukčnosti a kapacite) v istej perióde k energii W_R rozptýlenej vo forme tepla vo všetkých odporoch obvodu počas tej istej periódy T , teda

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_R} \quad (7.91)$$

Ak uvážime, že tepelná energia $W_R = P_R T$, kde P_R je stredný tepelný výkon v odpore R , možno výraz pre kvalitu napísať v tvare

$$Q = \frac{2\pi W}{T P_R} = \omega \frac{W}{P_R} \quad (7.92)$$

Kvalita obvodu je priamo úmerná frekvencii kmitov ω akumulovanej energii W v obvode a nepriamo úmerná strednému stratovému výkonu P_R v obvode. Táto definícia kvality nás stavia pred niekoľko problémov, pri riešení ktorých nám pomôže obr. 7.29. Na obrázku sú pre už analyzovaný obvod z obr. 7.24 pri hodnote odporu $R = 0,05R_{kr} = 15,9 \Omega$ znázornené časové závislosti akumulovanej celkovej energie $W(t) = W_C(t) + W_L(t)$ a stratového výkonu $p(t) = RI^2(t)$. Pri pohľade na grafy čitateľa určite napadne otázka: Ktorú hodnotu energie W treba dosadiť do výrazu pre Q , keď sa táto pozdĺž periódy zložito mení? Stredný výkon P_R za periódu je tiež veličina závislá od času a počíta sa integráciou okamžitého výkonu $p(t)$ závislého od prúdu, ktorého amplitúda klesá a za periódu má dve rôzne veľké absolútne maximá. Vidíme však, že amplitúda prúdu v obvode klesá ako funkcia $e^{-\alpha t}$, amplitúda akumulovanej energie musí klesať ako $e^{-2\alpha t}$. Pomer W/P_R vo výraze (7.92) sa bude s dobrou presnosťou rovnať času Δt , za ktorý akumulovaná energia W v obvode klesne na $1/e$ -tinu, teda

$$\frac{W}{P_R} = \Delta t = \frac{1}{2\alpha}$$

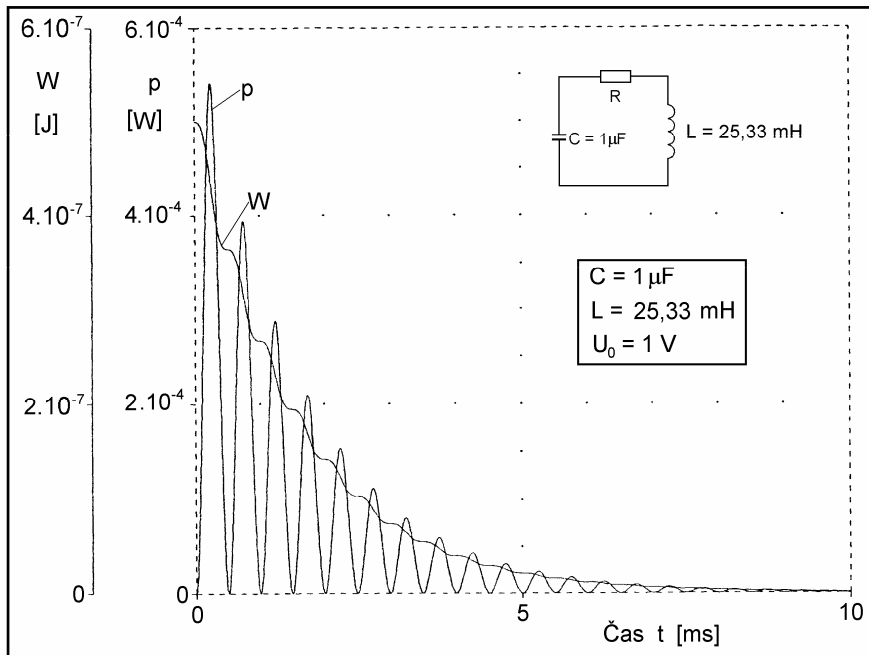
takže kvalita

$$Q = \omega \frac{W}{P_R} = \omega \Delta t = \frac{\omega}{2\alpha} = \omega \frac{L}{R} \quad (7.93)$$

Aj keď takýto postup nezodpovedá celkom presne definícii kvality, umožňuje ju pomerne jednoducho vyjadriť pomocou primárnych parametrov L , C , R a vo všetkých reálnych prípadoch, keď je R dostatočne malé, získať dobré výsledky.

Ak vo výraze (7.93) za ω dosadíme podľa (7.82) a využijeme (7.89), dostaneme pre kvalitu výraz

$$Q = \omega \frac{L}{R} = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{R_0^2}{R^2} - \frac{1}{4}} \quad (7.94)$$



Obr. 7.29

Pomer charakteristického odporu R_0 k reálnemu odporu obvodu R

$$\frac{R_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = Q_0 \quad (7.95)$$

je kvalita vzťahnutá na frekvenciu kmitov netlmeného obvodu $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, takže

$$Q = \sqrt{Q_0^2 - \frac{1}{4}} \quad (7.96)$$

Na základe definície (7.92) hornou hranicou kvality Q je jej nekonečná hodnota, keď $R \rightarrow 0$, pritom aj $Q_0 \rightarrow \infty$. Taký obvod je netlmený a kmitý sa v ňom zachovávajú nekonečne dlho.

Dolnou hranicou kvality je nula, vtedy $Q_0 = 1/2$ a $R = 2R_0 = R_{kr}$. Je to kritická hodnota odporu, nad ktorou obvod prestáva kmitať. Popri kvalite sa niekedy zavádza aj jej prevrátená hodnota

$$d = \frac{1}{Q} \quad (7.97)$$

nazývaná **stratový faktor** obvodu. Konštanta útlmu α obvodu sa pomocou kvality dá vyjadriť výrazmi

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{\omega}{2Q} = \frac{\omega_0}{2Q_0} = \frac{\omega}{2} d \quad (7.98)$$

Zo vzťahu vidieť, že konštanta útlmu klesá k nule vtedy, ak kvalita rastie do nekonečna a naopak, rastie nad všetky medze, ak kvalita klesá k nule.

Obvody *LCR* sa používajú v elektronike ako rezonančné systémy v oscilátoroch kmitov vysokých a veľmi vysokých frekvencií, sú súčasťami rôznych filtrov, ich kvality môžu byť do $\cong 4 \cdot 10^2$. V oblasti centimetrových elektromagnetických vln, ktorým zodpovedajú frekvencie z pásma okolo $f \cong 10^{10}$ Hz = 10 GHz sa ako kmitavé systémy používajú dutinové rezonátory s kvalitami až niekoľko tisíc.

Ako príklad vypočítame kvalitu a frekvenciu obvodu na obr. 7.24. Pre číselnú hodnotu

$$R = 0,05R_{kr} = 0,05 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 0,05 \cdot 318 \Omega = 15,91 \Omega$$

má obvod kvalitu zodpovedajúcu frekvencii kmitom netlmeného obvodu

$$Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 10$$

a skutočnú kvalitu

$$Q = \sqrt{Q_0^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{10^2 - 0,25} = 9,991 \approx Q_0$$

Frekvencia kmitov netlmeného obvodu

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1\,000 \text{ Hz}$$

a frekvencia reálneho obvodu

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 998,76 \text{ Hz}$$

V elektronike sa zriedkakedy pracuje z obvodmi, ktorých kvalita je nižšia ako vypočítaných 10. Na základe vzťahov (7.94) až (7.96), ako aj posledného číselného príkladu v takých prípadoch s dobrou presnosťou platí

$$Q \approx Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R} \quad (7.99)$$

Frekvencia kmitov obvodu je pritom $\omega \approx \omega_0$.

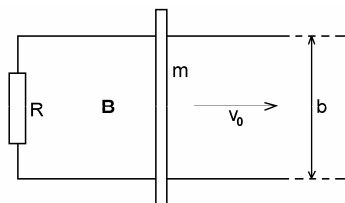
Úlohy 194 – 223

194. Kovová tyč dĺžky $l = 1$ m sa otáča okolo osi, ktorá je kolmá na tyč a prechádza 1/3-nou jej dĺžky, uhlovou rýchlosťou $\omega = 4$ rad/s. V smere osi otáčania je naložené magnetické pole s indukciou $B = 0,1$ T. Vypočítajte indukované napätie medzi koncami tyče.

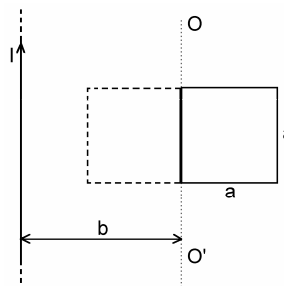
195. Kovová tyč dĺžky l_0 upevnená na jednom konci, vykonáva precesný pohyb s kruhovou frekvenciou ω okolo smeru homogénneho magnetického poľa indukcie B , pod uhlom precesie ϑ . Vypočítajte indukované elektromotorické napätie medzi koncami tyče.

196. Kovová tyč s hmotnosťou m sa môže bez trenia pohybovať po dvoch paralelných vodičoch uložených vo vzdialenosti b a na jednom konci spojených odporom R (obr. 196). Odpor vodičov a tyče je zanedbateľný. Kolmo k rovine vodičov je naložené homogénne magnetické pole indukcie B . V čase $t = 0$ je tyči udelená rýchlosť v_0 .

- Určite dobu, počas ktorej sa tyč bude pohybovať.
- Akú dráhu pritom tyč prejde?
- Na čo sa premení začiatočná kinetická energia tyče? Riešte číselne pre $m = 0,01$ kg, $b = 0,1$ m, $R = 10 \Omega$, $B = 1$ T, $v_0 = 0,1$ m/s.



Obr. 196



Obr. 197

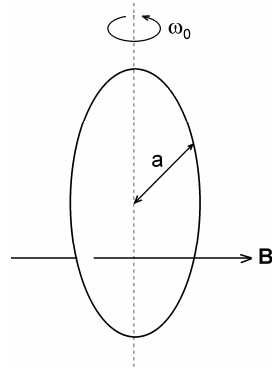
197. Štvorcový kovový rámček so stranou a a nekonečne dlhý vodič s prúdom I ležia v jednej rovine ako na obr. 197. Rámček sa otočil okolo osi OO' o 180° . Nájdite celkový náboj Q , ktorý pretečie rámčekom, ak jeho odpor je R .

198. Medený prstenec s polomerom a je uložený v stálom magnetickom poli s indukciou B (obr. 198). V čase $t = 0$ bola prstencu udelená uhlová rýchlosť ω_0 . Nájdite čas, za ktorý uhlová rýchlosť prstenca klesne na 1/e-tinu začiatočnej hodnoty! Konduktivita medi je $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ S/m, jej hustota $\rho = 8\,900$ kg/m³, magnetická indukcia $B = 2 \cdot 10^{-2}$ T.

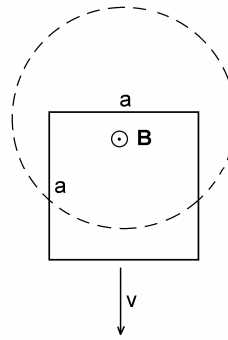
199. Štvorcový kovový rámček so stranou a sa nachádza medzi pólmi magnetu v magnetickom poli indukcie B podľa obr. 199. Spodná strana rámčeka je mimo magnetického poľa. V istom

okamihu je rámček uvoľnený a začne padať smerom dole. Nájdite časovú závislosť rýchlosti v rámčeka. Ak rýchlosť bude závisieť exponenciálne od času, nájdite charakteristický čas závislosti a limitnú hodnotu rýchlosti, ktorou by sa rámček pohyboval po nekonečne dlhom čase. Všimnite si, že rýchlosť nezávisí od geometrických rozmerov rámčeka, iba od jeho konduktivity, hustoty a magnetickej indukcie B . Riešte číselne pre rámček z hliníka s konduktivitou $\sigma = 3,5 \cdot 10^7$ S/m a hustotou $\rho = 2\,700$ kg/m³ v magnetickom poli $B = 1$ T.

200. Morský prúd má rýchlosť 2 uzlov (približne 1 m/s) v miestach, kde vertikálna zložka magnetickeho poľa Zeme je $3,5 \cdot 10^{-5}$ T. Konduktivita vody v týchto miestach je 0,4 S/m. Predpokladajte, že okrem elektrického poľa viazaného na pohyb vodnej masy inej horizontálnej zložky elektrického poľa vo vode niet. Vypočítajte veľkosť horizontálnej zložky hustoty prúdu vo vode.

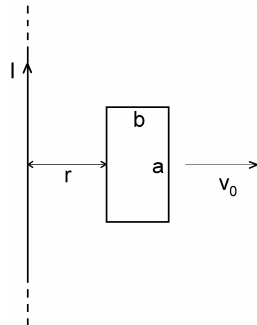


Obr. 198

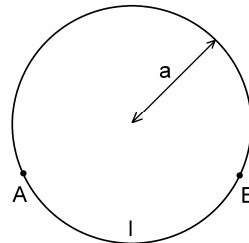


Obr. 199

201. Nekonečným priamym vodičom na obr. 201 tečie prúd I . Od vodiča sa konštantnou rýchlosťou v_0 vzdaluje štvoruholníková slučka o stranách a a b . Za predpokladu, že odpor slučky je dosť veľký, takže prúd v nej možno zanedbať, vypočítajte indukované elektromotorické napätie v slučke ako funkciu vzdialenosti r . Určite smer indukovaného elektromotorického napätia.



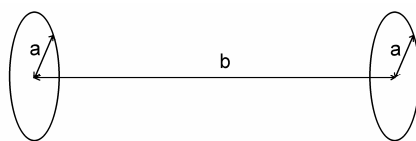
Obr. 201



Obr. 202

202. Kruhovou slučkou na obr. 202 z odporovo homogénneho materiálu s celkovým odporom R preniká časovopremenný indukčný tok $\Phi = -\mathcal{E}t$ (\mathcal{E} – konštanta, t – čas). Mimo slučky je indukčný tok nulový. Aké napätie sa nameria ideálnym voltmetrom na oblúku medzi bodmi A a B?

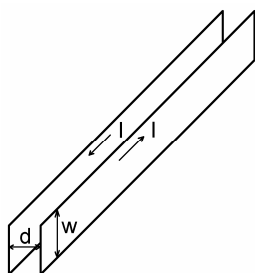
203. Vypočítajte vzájomnú indukčnosť dvoch kruhových závitov s polermi a , uložených paralelne so stredmi na jednej osi vo vzdialenosti b (obr. 203). Predpokladajte, že $a \ll b$.



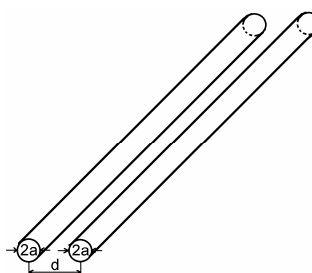
Obr. 203

204. Rovinný závit s plochou S uzavretý galvanometrom s vnútorným odporom R_i sa v homogénnom magnetickom poli indukcie B otočí tak, že plošný vektor S pôvodne v smere poľa bude smerovať kolmo na smer poľa. Aký náboj pretečie galvanometrom pri tomto otočení?

205. Vypočítajte vnútornú indukčnosť na jednotku dĺžky valcového priameho vodiča s permeabilitou $\mu = \mu_0$.



Obr. 206

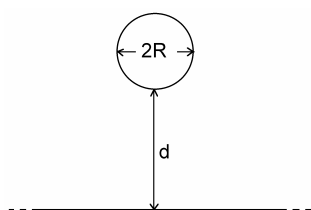


Obr. 207

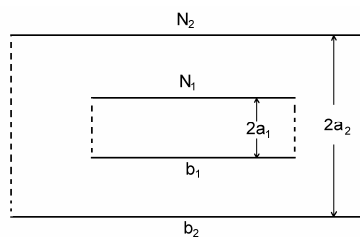
206. Páskové vedenie pozostáva z dvoch vodivých tenkých pásov so šírkou w , uložených paralelne vo vzdialenosti d , pričom $w \gg d$ (obr. 206). Vypočítajte indukčnosť na jednotku dĺžky takého vedenia.

207. Vypočítajte indukčnosť na jednotku dĺžky dvojlinky podľa obr. 207 za predpokladu, že $d \gg a$, takže možno zanedbať indukčný tok vo vnútri vodičov.

208. Vypočítajte indukčnosť na jednotku dĺžky vedenia pozostávajúceho z valcového vodiča o polomere R , umiestneného nad nekonečnou vodivou rovinou vo výške $d \gg R$ (obr. 208). Rovina slúži ako spätný vodič. (Poznámka: použite metódu zrkadiel podobnú ako v elektrickom poli.)



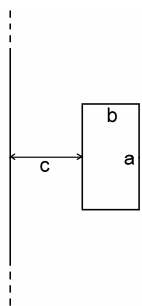
Obr. 208



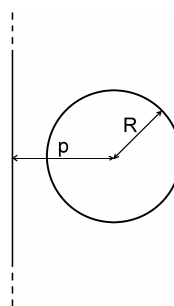
Obr. 209

209. Na obr. 209 je znázornený solenoid s polomerom a_1 a dĺžkou b_1 vložený do veľmi dlhého solenoidu s polomerom a_2 a dĺžkou b_2 . Vnútrošný solenoid má N_1 závitov a vonkajší N_2 závitov. Vypočítajte vzájomnú indukčnosť solenoidov.

210. Vypočítajte vzájomnú indukčnosť nekonečného priameho vodiča a štvoruholníkovej slučky, ktorej rozmery a uloženie sú zrejme z obr. 210.

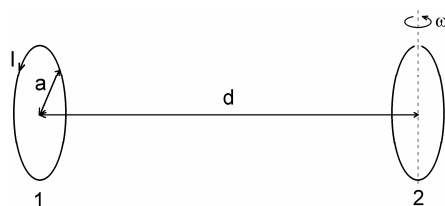


Obr. 210



Obr. 211

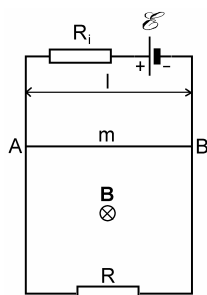
211. Vypočítajte vzájomnú indukčnosť nekonečného priameho vodiča a kruhového závit s polomerom R . Priamy vodič a závit ležia v jednej rovine, pričom kolmá vzdialenosť stredu závit od vodiča je $p > R$ (obr. 211).



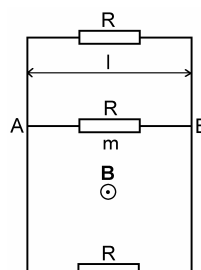
Obr. 212

212. V kruhovom závit 1 s polomerom a tečie prúd I (obr. 212). Druhý taký istý závit 2 je umiestnený na osi prvého vo vzdialenosti d , pričom $d \gg a$. Roviny závitov sú paralelné. Druhý závit sa otáča okolo jedného zo svojich priemerov uhlovou rýchlosťou ω . Vypočítajte indukované elektromotorické napätie v druhom závit za predpokladu, že tento je rozpojený.

213. Po dvoch vertikálnych vodičoch spojených dole odporom $R = 2 \Omega$ a hore zdrojom EMN $\mathcal{E} = 1,9 \text{ V}$ s vnútorným odporom $R_i = 2 \Omega$ kľže bez trenia vodič AB , ktorého dĺžka je $l = 10 \text{ cm}$ a hmotnosť $m = 10 \text{ g}$ (obr. 213). Sústava sa nachádza v magnetickom poli indukcie $B = 1 \text{ T}$, kolmom na rovinu obrazca. Nájdite ustálenú rýchlosť vodiča AB v gravitačnom poli zanedbajúc trenie a odpor pohybujúceho sa vodiča.



Obr. 213



Obr. 214

214. Po dvoch vertikálnych vodičoch spojených hore a dole odporom $R = 0,01 \Omega$ môže bez trenia klzať vodič AB , ktorého dĺžka je $l = 100 \text{ cm}$, hmotnosť $m = 100 \text{ g}$ a odpor $R = 0,01 \Omega$ (obr. 214). Sústava sa nachádza v magnetickom poli s indukciou $B = 1 \text{ T}$. Nájdite maximálnu rýchlosť, ktorú nadobudne vodič pri svojom páde v gravitačnom poli Zeme.

215. Dlhá kovová páska z neferomagnetického materiálu sa pohybuje rovnomerne v magnetickom poli indukcie $B = 0,18 \text{ T}$ rýchlosťou $v = 6,28 \cdot 10^5 \text{ m/s}$. Vektory \mathbf{v} a \mathbf{B} sú navzájom kolmé a ležia v rovine páske. Vypočítajte plošnú hustotu nábojov na páske, ktoré vzniknú v dôsledku jej pohybu v magnetickom poli.

216. Dutý dielektrický valec s vnútorným polomerom r_1 a vonkajším polomerom r_2 sa rovnomerne otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo svojej geometrickej osi. V smere tejto osi je naložené magnetické pole indukcie B . Relatívna permitivita materiálu valca je ϵ_r . Vypočítajte:

- objemovú hustotu viazaných nábojov vo valci,
- celkový objemový viazaný náboj na jednotku dĺžky valca,
- hustotu plošných viazaných nábojov na vnútornej a vonkajšej ploche valca,
- celkový plošný viazaný náboj na jednotku dĺžky,
- súčet nábojov z bodu b) a d).

217. Vo vnútri veľmi dlhého solenoidu je súosovo vložená malá plošná cievočka s počtom závitov $N = 400$ a plochou závitov $S = 10 \text{ cm}^2$, v ktorej tečie prúd $i = 0,5 \sin \omega t$ [A], $\omega = 500 \text{ rad/s}$. Dĺžková hustota závitov solenoidu je $n = 5000 \text{ m}^{-1}$. Vypočítajte napätie indukované v solenoide.

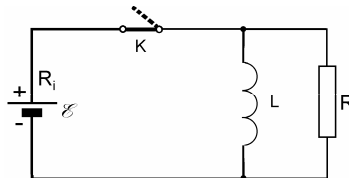
218. Elektróny v betatróne sa pohybujú po kruhovej dráhe s polomerom R pod vplyvom cylindricky symetrického magnetického poľa, kolmého na rovinu dráhy elektrónov. Os symetrie magnetického poľa je totožná s osou symetrie dráhy elektrónov. Elektróny sú urýchľované zvyšovaním hodnoty magnetickej indukcie.

- Nájdite indukované elektrické pole na kruhovej dráhe elektrónov pri časovej zmene magnetického poľa dB/dt . Pre tento prípad považujte magnetické pole za homogénne.
- Dokážte, že k tomu, aby polomer dráhy elektrónov zostal konštantný, je potrebné, aby zmena poľa dB_R na polomere R bola rovná $d\bar{B}/2$, kde \bar{B} je stredná hodnota magnetickej indukcie na ploche obopnutej dráhou elektrónov.

219. Cievka, ktorá má odpor $0,01 \Omega$ a indukčnosť $0,5 \text{ mH}$ je v istom okamihu pripojená na 12 V batériu so zanedbateľným vnútorným odporom.

- Za aký čas prúd v tomto obvode dosiahne 90 % svojej maximálnej hodnoty?
- Aká energia je v tom čase nazhromaždená v magnetickom poli cievky?
- Aká celková energia bola do tohto času dodaná zdrojom?

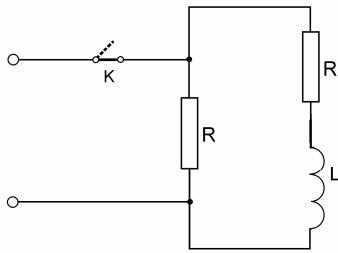
220. Vypočítajte celkový náboj, ktorý prejde odporom R v zapojení na obr. 220 po zapnutí kľúča K .



Obr. 220

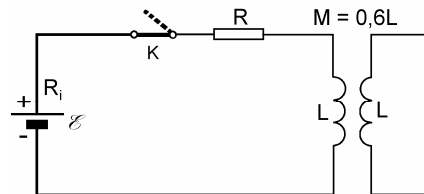
221. Elektromagnet s indukčnosťou $L = 1 \text{ H}$ je napájaný prúdom $I = 10 \text{ A}$. Aby sa predišlo elektrickému prierazu izolácie vinutia (a prípadnému smrteľnému ohrozeniu osôb v blízkosti) v dôsledku vysokého indukovaného elektromotorického napätia, ktoré vznikne pri náhodnom prerušení prúdového obvodu elektromagnetu, pripája sa paralelne k vinutiu magnetu kondenzátor,

ktorý stlmí začiatočný napätový náraz pri prerušení obvodu. Vypočítajte kapacitu kondenzátora, ktorý stlmí začiatočný napätový náraz na svorkách elektromagnetu na 10 kV, za predpokladu, že odpor vinutia možno zanedbať. Aké bude indukované napätie na svorkách elektromagnetu pri danej kapacite, ak odpor vinutia je $R = 1 \Omega$?



Obr. 222

222. Z dôvodov uvedených v úlohe 221 sa niekedy veľké indukčnosti reprezentované čistou indukčnosťou L a jej odporom R_L premošťujú na svorkách zdroja odporom R (obr. 222), ktorý stlmí začiatočné napätie na indukčnosti v prípade odopnutia zdroja. Vypočítajte koľkokrát prevyší maximálne napätie na indukčnosti U_{max} napätie zdroja U_0 v prípade jeho odpojenia.



Obr. 223

223. V zapojení podľa obr. 223 vypočítajte časové závislosti prúdov I_1 a I_2 v primárnom a sekundárnom obvode po zopnutí kľúča K . Sekundárny obvod má nulový odpor.