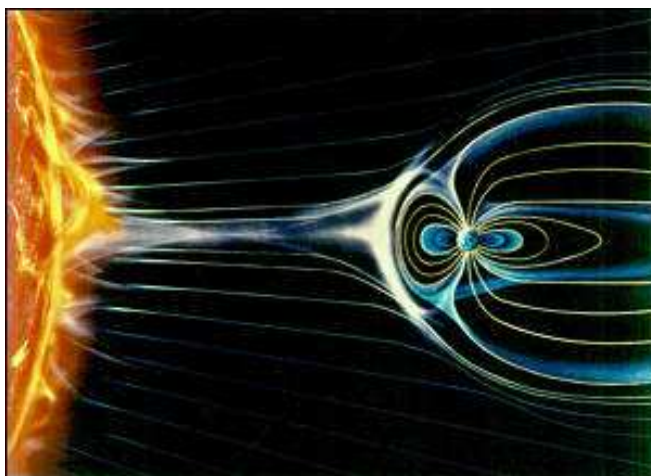


6 MAGNETIZMUS ELEKTRICKÝCH PRÚDOV

Few subjects in science are more difficult to understand than magnetism

Encyclopedia Britannica, Pätnáste vydanie 1989

Máloktorý z fyzikálnych javov fascinuje človeka tak, ako magnetizmus. Už v dávnej minulosti pastier z okolia antického mesta Magnésia (dnešná Manisa v Turecku) s úžasom pozoroval čudesné kúsky minerálov, ktoré sa niekedy priťahovali, inokedy sa úporne odpuzovali. Starogrécky filozof Thales z Milétu už v 6. storočí pred naším letopočtom napísal, že "tieto podivné predmety (išlo o prírodné sa vyskytujúce kysličníky železa FeO a Fe₂O₃ dnes známe pod menom magnetit alebo magnetovec) majú silu priťahovať železo". Uvádza sa, že Číňania už v 3. tisícročí pred n. l. v nejakej podobe poznali a na pozemnú navigáciu používali najjednoduchší magnetický prístroj – magnetku. Prvé predmety v histórii, na ktoré človek potreboval železo, bola zrejme magnetka a meč. Sokrates sa vo svojich filozofických dielach zmieňuje, že "sú v prírode také predmety (ide o magnetit), ktoré majú schopnosť vyvolať v železe vlastnosť priťahovať iné železné predmety", t. j. indukovať v ňom magnetické vlastnosti. Permanentný (stály) a indukovaný (vyvolaný) magnetizmus teda patria medzi prvé vedecké objavy v histórii ľudstva.



Obr. 6.1. Vplyv slnečného vetra na magnetosféru Zeme

Hoci sa starí grécki filozofi domnievali, že elektrické a magnetické sily majú spoločnú podstatu, ich domnienka sa dlhé stáročia ignorovala. Možno to súviselo s tým, že záujem o magnetické javy sa obmedzoval iba potrebami súvisiacimi s konštrukciou magnetických

kompasov pre námornú plavbu. Samotný princíp činnosti kompasov bol ich tvorcom absolútne neznámy. Dôkazom toho je skutočnosť, že zemský magnetizmus bol objavený až v 16. storočí anglickým učencom Wiliamom Gilbertom (1564 – 1603) v čase, keď sa kompas už dlhé stáročia používal. Gilbert svoje magnetické experimenty a pozorovania publikoval v roku 1600 v rozsiahlom šesťzväzkovom diele "De Magnete ..."¹ (O magnete...), ktoré na dlhé roky upadlo do zabudnutia, a v tom čase veda o magnetizme nepokročila ani o krok. K dielu Gilberta sa až o viac ako 200 rokov neskôr vrátili Gauss a Ampère, ktorým poslúžilo ako základ pre stavbu modernej teórie magnetizmu.

Druhým faktorom, ktorý nepriaznivo ovplyvňoval rozvoj náuky o magnetizme bola skutočnosť, že magnetické javy sa tvrdošijne oddeľovali od javov elektrických. Bádatelia 16. storočia svojím scholastickým hodnotením pozorovaných prírodných javov usúdili, že elektrina a magnetizmus navzájom nesúvisia, pretože elektricky nabitý predmet silovo nepôsobí na permanentný magnet ("magnet a elektrizovaný jantár na seba silovo nepôsobia"). Tento súvis prostredníctvom silového pôsobenia medzi pohybujúcimi sa (a pohyb je tu záležitosť zásadného významu) elektrickými nábojmi a magnetom sa viac-menej náhodne podarilo objaviť až v roku 1820 dánskemu profesorovi fyziky Hansovi Christianovi Oerstedovi (1777 – 1851).²

Oersted na konci jednej zo svojich prednášok z fyziky konaných v zime rokov 1819/20 na Kodanskej univerzite chcel predviesť študentom experiment o tepelných účinkoch elektrického prúdu. Všimol si pritom, že magnetka nachádzajúca sa v blízkosti prúdom rozžeraveného drôtu sa pod účinkom prúdu pohla. Zo začiatku to pripisoval tepelnému účinku, neskôr nad magnetku, kolmo na jej smer umiestnil prúdovodič a čakal čo sa stane, či elektrický prúd náhodou neotočí magnetku do svojho smeru. Po zapnutí prúdu vodičom sa očakávaný účinok na magnetku neobjavil. Pred odchodom z prednášky niečo Oersteda napadlo a otočil prúdovodič nad magnetkou do jej smeru. Podľa slov jedného z jeho žiakov "po zapnutí prúdu v okruhu bol Oersted doslova šokovaný, keď uvidel ako magnetka pri zapínaní a vypínaní prúdu vykonávala veľké kmity a pri stálom prúde sa ustálila kolmo na smer prúdu, pričom sa otočila o 180°, ak sa smer prúdu zmenil".

Dnes sme presvedčení, že **všetky magnetické efekty sú dôsledkom usmerneného pohybu elektrických nábojov, teda prúdov**, bez ohľadu na to, či ide o prúdy v tuhých látkach, kvapalinách, plynch, alebo vo vákuu. Magnetizmus je len jednou neoddeliteľnou časťou všeobecnejšieho prírodného fenoménu – elektromagnetizmu. Silný magnetizmus permanentných magnetov (feromagnetizmus) je tiež spôsobený pohybom elektrónov v atóme železa po orbitách, ale hlavne ich rotačným pohybom okolo vlastnej osi – ich spinom, teda ich momentom hybnosti. (Táto interpretácia spinu elektrónu ako bodového objektu nezodpovedá predstavám kvantovej fyziky, umožňuje však vysvetliť dostatočne presne mnohé atómové javy). Feromagnetizmus je natoľko tajuplný a zložitý jav, že ani dodnes jeho teória nie je uzavretá. Vysvetlenie javov feromagnetizmu v svojej podstate spadá do oblasti štatistickej a kvantovej fyziky.

Ešte záhadnejšie sú pre nás účinky magnetických polí na biologické objekty. Experimentálne bolo zistené, že silné nehomogénne magnetické pole ovplyvňuje rast rastlín, avšak príčina a mechanizmy pôsobenia sú zatiaľ neznáme. Takmer nič nevieme napríklad o fyziologických účinkoch magnetizmu a o magnetických poliach produkovaných bioprúdmi.

¹ De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure – O magnete, magnetických telesách a veľkom magnete Zeme

² Oersted, H. C.: Experiment on the effects of a current on the magnetic needle, Annals of Philosophy **16** (1820)



Hans Christian OERSTED
(1777 Rudkjöbing v Dánsku – 1851 Kodaň)
Maľba v Preußische Staatsbibliothek, Berlin

Nedostatok exaktných vedomostí o tajoch magnetizmu okamžite zneužívajú rôzni podvodníci a šarlatáni, ktorí sľubujú dôverčivým ľuďom svojím "magnetickým" pôsobením odstrániť ich telesné trápenia. Doba im praje – svojho času boli napríklad veľmi populárne "liečivé" magnetické náramky. Pojem "magnetizmus" sa takto zneužíva na podvod, ale mnohí ľudia potrebujú byť klamaní.

Z toho mála, čo sme doteraz o magnetizme povedali, môže nás znepokojiť tvrdenie, že magnetizmus je atribút pohybu nábojov, teda že závisí od ich rýchlosti. Keďže rýchlosť je relatívna veličina a vzťahuje sa vždy k istému pozorovateľovi (k istej vzťažnej sústave), vzniká otázka, či aj magnetické účinky sú relatívne. Odpoveď je možno prekvapujúca, ale je kladná – magnetické účinky sú skutočne relatívne, teda rôzne pre rôznych pozorovateľov. Magnetizmus je teda jav relativistický a jeho vysvetlenie treba hľadať v teórii relativity. Z tohoto pohľadu nie je prekvapujúce, že teória relativity naopak, má svoje korene v elektromagnetizme. Priekopnícka práca v tejto oblasti publikovaná Einsteinom¹ v roku 1905 sa nenazýva teóriou relativity, ale "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (K elektrodynamike pohybujúcich sa telies), a dnes je len ťažko posúdiť, či by bola mohla vzniknúť pred vznikom teórie elektromagnetického poľa.

Keďže každá fyzikálna teória musí byť relativisticky invariantná (nezávislá od výberu vzťažnej sústavy), možno sa domnievať, že na základe povedaného tento princíp pre magnetické javy neplatí. Je to pravda, ale magnetické javy sú len jednou stránkou celkového elektromagnetického účinku spojeného s elektrickými nábojmi. Druhou stránkou sú už opisované elektrické javy, ktoré logicky musia byť tiež relativistické. Celkový elektromagnetický účinok je však relativisticky invariantný a odpovedá zásade – ak sa na jednej strane niečo uberie, na druhej strane to treba pridať. Tieto otázky podrobnejšie posúdime v odseku o Lorentzových transformáciách elektromagnetických polí (odsek 6.5). Teraz chceme iba zdôrazniť, že elektromagnetická teória je relativisticky invariantná teória a vznikla skôr ako teória relativity.

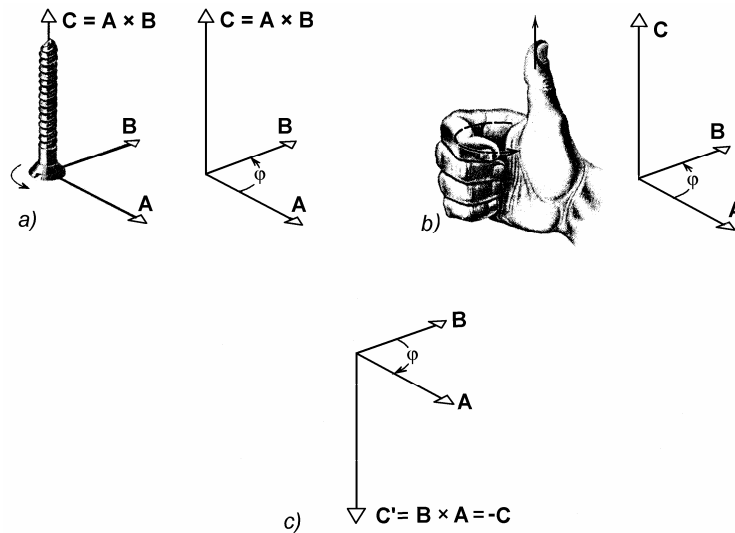
Pri našom výklade magnetických javov nezachováme historický princíp, pretože to, čo bolo známe na začiatku, menovite feromagnetizmus, sa vysvetľuje najťažšie. Naše úvahy o magnetizme a magnetických silových účinkoch začneme opisom magnetického poľa elektrických prúdov.

6.1 MAGNETICKÉ POLE ELEKTRICKÉHO PRÚDU

6.1.1 Magnetické silové pôsobenie dvoch bodových nábojov vo vákuu

Pred začiatkom čítania tohto a ďalších odsekov o magnetických javoch odporúčam čitateľovi zopakovať a ujasniť si význam a vlastnosti vektorovej operácie "vektorový súčin": Vektorovým súčinom dvoch vektorov v poradí $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ je vektor $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, ktorého veľkosť je $C = AB \sin \varphi$ (φ je uhol medzi vektormi \mathbf{A} a \mathbf{B}) a smer je daný pravidlom pravotočivej skrutky (obr. 6.2a), alebo pravidlom pravej ruky (obr. 6.2b). Vektorový súčin zmení znamienko, ak sa zmení poradie vektorov (obr. 6.2c), teda platí $\mathbf{C}' = \mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{C}$.

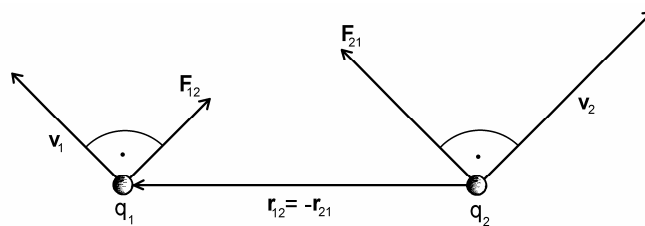
¹ Einstein, A., Ann. d. Physik, Bd. 17 (1905) S. 891



Obr. 6.2

Na obr. 6.3 je zobrazená dvojica bodových nábojov q_1 a q_2 rovnakého znamienka, ktoré v istej súradnicovej sústave spojennej s pozorovateľom, a v istom čase, sú vo vzájomnej vektorovej vzdialenosti $\pm r_{12}$. Náboje sa pohybujú vo vákuu rýchlosťami \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 . Z elektrostatiky je známe, že medzi nábojmi pôsobí sila, ktoré spĺňa Coulombov zákon. Praktická skúsenosť ukazuje, že **pozorovateľ vo zvolenej sústave pozoruje ešte jednu zvláštnu silu, ktorá súvisí s pohybom nábojov v danej vzťažnej sústave**. Nová sila F_{12} pôbiaca na náboj q_1 od náboja q_2 tiež závisí priamo úmerne od veľkosti nábojov a nepriamo úmerne od štvorca vzdialenosti r_{12} (teda podobne ako elektrická sila podľa Coulombovho zákona), ale okrem toho jej veľkosť a smer závisia od obidvoch rýchlostí spôsobom, ktorý sa dá matematicky vyjadriť prostredníctvom vektorovej veličiny

$$\mathbf{v}_1 \times \left(\mathbf{v}_2 \times \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \right)$$



Obr. 6.3

Tieto experimentálne skúsenosti potvrdené mnohými pokusmi a každodennou praxou nám poslúžia ako základ pre budovanie teórie magnetizmu.

Silu F_{12} možno teda vyjadriť vzťahom

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{v}_1 \times \left(\mathbf{v}_2 \times \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \right) \quad (6.1a)$$

Podobne na náboj q_2 od náboja q_1 pôsobí sila

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_2 q_1}{r_{21}^2} \mathbf{v}_2 \times \left(\mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}} \right) \quad (6.1b)$$

kde $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$ ($r_{21} = r_{12}$). Konštanta k v sústave jednotiek SI sa píše v tvare

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (6.2)$$

kde μ_0 je rozmerová konštanta, ktorej hodnota je daná definitorky, určením jednotky prúdu ako jednej zo základných jednotiek sústavy SI (pozri odsek 6.4.2). Konštanta má presnú hodnotu

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \quad (6.3)$$

a nazýva sa **magnetická konštanta** (permeabilita vákua). K jej určeniu sa vrátíme pri definícii jednotky elektrického prúdu.

Vráťme sa však k výrazom (6.1) pre sily pôsobiace na náboje pri ich pohybe. Tieto sily majú dve zvláštnosti, ktoré ich odlišujú od doteraz známych síl pôsobiacich medzi materiálnymi objektami. Predovšetkým tieto sily závisia od rýchlostí obidvoch nábojov. Je zvláštne, že sily vymiznú, ak hoci len jedna z rýchlostí sa rovná nule, ináč povedané, ak je pozorovateľ pevne spojený s jedným z nábojov. V tom spočíva relativita týchto síl. Druhou zvláštnosťou síl je skutočnosť, že na prvý pohľad nespĺňajú tretí Newtonov zákon – ich veľkosť je rôzna a nepôsobia pozdĺž spojnice nábojov.¹ (Čitateľovi odporúčam dokázať, že iba v prípade rovnakých nábojov pohybujúcich sa rovnakými rýchlosťami v jednej rovine sú obidve sily rovnako veľké a pôsobia na spojnici nábojov smerom k sebe. Ak sú náboje opačného znamienka, sily pôsobia od seba). Možno očakávať, že takéto sily, ktoré nazývame **magnetické sily**, budú mať na nabité pohybujúce sa objekty podivuhodné účinky, čoho svedkom sa staneme v ďalších častiach tejto knihy.

Pre naše ďalšie účely je vhodné sily (6.1) prepísať do tvaru

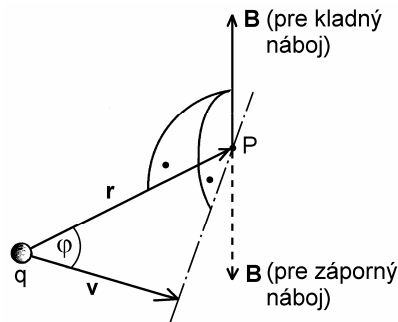
$$\mathbf{F}_{12} = q_1 \mathbf{v}_1 \times \left(k \frac{q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \quad (6.4a)$$

$$\mathbf{F}_{21} = q_2 \mathbf{v}_2 \times \left(k \frac{q_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \right) \quad (6.4b)$$

¹ Zdanlivé porušenie tretieho Newtonovho zákona vyvolalo medzi fyzikmi zdesenie a veľa diskusií. V roku 1945 Page a Adams (Page, L., Adams, N. I., Am. J. Phys. 13, (1945) str. 141) však dokázali, že v skutočnosti tretí Newtonov zákon nie je porušený, pretože elektromagnetické pole dvojice bodových nábojov unáša so sebou hybnosť, ktorej časová zmena sa rovná práve rozdielu obidvoch síl. Pozri tiež Tamm, I. J.: "Osnovy teorii električestva", Gostechizdat Moskva 1957

Z tohoto zápisu vidíme, že každá zo síl na vybraný náboj závisí od jeho hodnoty, jeho rýchlosti a od veličiny v zátvorke, ktorá vyjadruje vlastnosti druhého náboja v interakcii (jeho veľkosť, znamienko, rýchlosť a vektorovú vzdialenosť k prvému náboju). Táto veličina vytvára vektorové pole v priestore, má silový charakter, pretože určuje silu na iný náboj a nazýva sa **magnetická indukcia** alebo presnejšie **vektor magnetickej indukcie** a spravidla sa označuje symbolom \mathbf{B} . Zátvorka vo výraze (6.4a) predstavuje teda vektor magnetickej indukcie náboja q_2 v mieste náboja q_1 a podľa uvedeného mu možno priradiť symbol \mathbf{B}_1 . Podobne zátvorka vo výraze (6.4b) je magnetická indukcia \mathbf{B}_2 v mieste náboja q_2 . Vo všeobecnosti náboj q pohybujúci sa v priestore rýchlosťou \mathbf{v} vytvára vo vektorovej vzdialenosti \mathbf{r} v bode P na obr. 6.4 magnetické pole s magnetickou indukciou

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (6.5)$$



Obr. 6.4

kde konštanta k bola vyjadrená pomocou výrazu (6.2). Vektor magnetickej indukcie \mathbf{B} je kolmý na obidva vektory \mathbf{v} a \mathbf{r} , má veľkosť

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv}{r^2} \sin \varphi$$

a smer vektorového súčinu $q\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ (obr. 6.4). Pre magnetickú indukciu platí zákon superpozície, to znamená že magnetické účinky viacerých pohybujúcich sa nábojov sa vektorovo sčítavajú. Ak sa teraz vo vzdialenosti \mathbf{r} od náboja nachádza iný vybraný náboj q a jeho rýchlosť je tam \mathbf{v} , bude naň pole \mathbf{B} podľa výrazov (6.4) a (6.5) pôsobiť magnetickou silou

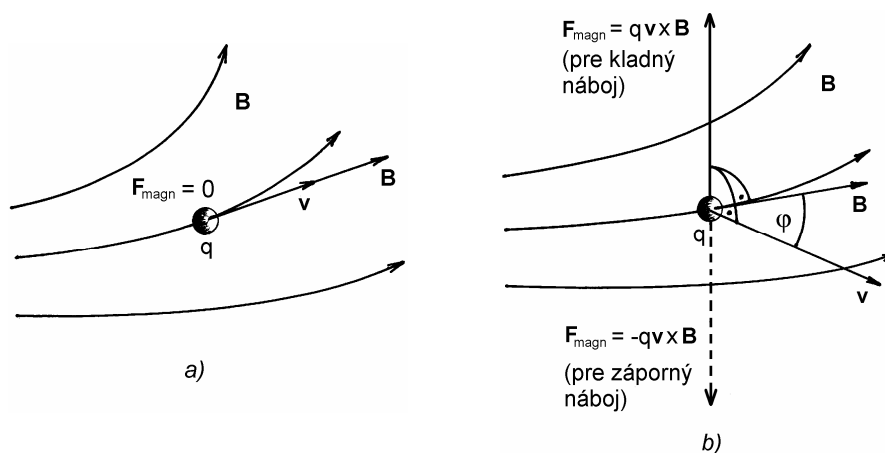
$$\mathbf{F}_{mag} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.6)$$

Táto sila pôsobí na náboj q popri elektrickej sile $\mathbf{F}_{el} = q\mathbf{E}$, kde \mathbf{E} je intenzita elektrického poľa. Celková elektromagnetická sila, ktorá pôsobí na náboj q pohybujúci sa rýchlosťou \mathbf{v} v elektrickom poli \mathbf{E} a magnetickom poli \mathbf{B} , je daná výrazom

$$\mathbf{F}_{elmag} = \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_{magn} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.7)$$

Tento výraz sformuloval v roku 1909 holandský teoretický fyzik Hendrik Antoon Lorentz¹ (1853 – 1928) a podľa neho sa nazýva **Lorentzova sila**. Je to jediná sila, ktorá pôsobí na náboje v elektromagnetickom poli, a výraz (6.7) je jeden zo základných výrazov teórie elektromagnetického poľa. Iné sily v elektromagnetizme nepoznáme.

Vráťme sa však k opisu vlastností magnetických polí. Toto vektorové pole možno podobne ako elektrické pole graficky mapovať sústavou čiar, ktoré nazývame **indukčné čiary**. Sú to čiary, ku ktorým má vektor magnetickej indukcie v každom bode poľa smer dotýčnice. Ak sa nejaký náboj q v magnetickom poli pohybuje pozdĺž indukčnej čiary (vektory \mathbf{v} a \mathbf{B} sú paralelné, alebo antiparalelné), v tom prípade magnetická sila na náboj je nulová (pozri obr. 6.5a). Ak rýchlosť \mathbf{v} zvierá so smerom vektora \mathbf{B} uhol φ , sila má veľkosť $F_{\text{magn}} = qvB \sin \varphi$ a má smer vektorového súčinu $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (pozri obr. 6.5b). Ak sú vektory \mathbf{v} a \mathbf{B} navzájom kolmé, sila je maximálna a má veľkosť $F_{\text{magn}} = qvB$. Sila je vždy kolmá na obidva vektory \mathbf{v} a \mathbf{B} , a preto nie je správne zamieňať pojem "magnetické indukčné čiary" pojmom "magnetické siločiar", pretože sila nemá smer dotýčnic k týmto čiaram, ale naopak, je na ne kolmá.



Obr. 6.5

Dôležitým pojmom a veličinou v magnetickom poli je pojem **tok vektora magnetickej indukcie** Φ , ktorý je formálne definovaný podobne ako tok intenzity elektrického poľa, teda tok vektora magnetickej indukcie zvolenou neuzavretou plochou S v priestore je (obr. 6.6)

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.8)$$

kde $d\mathbf{S}$ je vektorový element na ploche S . Tento pojem hrá zásadnú úlohu pri takom dôležitom jave ako je elektromagnetická indukcia, ktorá bude predmetom našich úvah v kapitole 7.

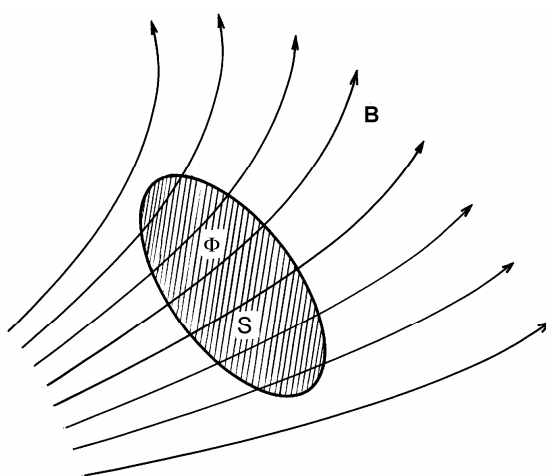
¹ Lorentz, H. A.: The Theory of Electrons, New York, 1909

Meracia jednotka pre magnetickú indukciu plynie z výrazu (6.6) pre magnetickú silu. Využitím výrazu možno napísať rozmerovú rovnicu pre jednotku magnetickej indukcie

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{C}\cdot\text{m}} = \text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{A}^{-1} \quad (6.9)$$

Jednotkou magnetickej indukcie v sústave SI je 1 tesla (T) pomenovanej po americkom inžinierovi chorvátskeho pôvodu Nikola Teslovi (1856 – 1943). Jej definícia spočíva na vzťahoch (6.6) a (6.9), a znie: **Magnetická indukcia v nejakom bode priestoru, v ktorom je magnetické pole, má hodnotu 1 tesla (T), ak na náboj 1 coulombu (C), ktorý sa v danom bode pohybuje rýchlosťou 1 m/s kolmo na indukčné čiary, pôsobí magnetická sila 1 newton (N).** Podľa (6.9)

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{C}\cdot\text{m}} = 1 \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{m}^2} = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{A}^{-1} \quad (6.10)$$



Obr. 6.6

Ak si všimneme výraz (6.8) pre indukčný tok, vidíme, že jeho jednotkou musí byť $1 \text{ T}\cdot\text{m}^2$, čo na druhej strane podľa (6.10) sa rovná $1 \text{ V}\cdot\text{s}$. Jednotka pre indukčný tok má však svoje vlastné meno a nazýva sa weber (Wb) na počesť nemeckého fyzika Wilhelma Eduarda Webera (1804 – 1891) profesora na Univerzite v Göttingene, súčasníka a spolupracovníka K. F. Gaussa, teda

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T}\cdot\text{m}^2 = 1 \text{ V}\cdot\text{s} = 1 \text{ m}^2\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{A}^{-1} \quad (6.11)$$

Jeden weber (1 Wb) je tok magnetickej indukcie veľkosti 1 tesla homogénne a kolmo plochou 1 m^2 .

V niektorých starších učebniciach, ale tiež vo vedeckej a technickej praxi hlavne v USA a v západnej Európe, sa ešte dnes často používa pre jednotku magnetickej indukcie

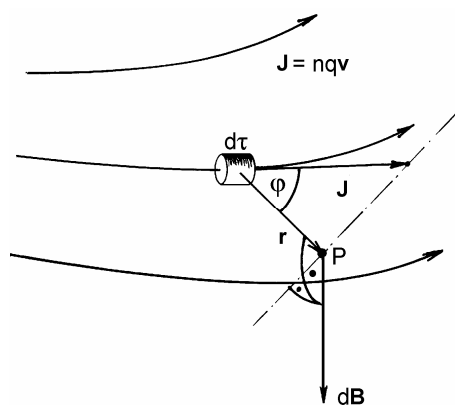
označenie Wb/m^2 , ktoré plynie zo vzťahu (6.11) a samotný vektor \mathbf{B} sa oprávnené nazýva **hustota magnetického indukčného toku** (magnetic flux density).

Magnetická indukcia 1 T predstavuje veľmi silné magnetické pole produkované napr. veľkým elektromagnetom. Pre porovnanie možno uviesť, že prirodzené magnetické pole na povrchu Zeme dosahuje absolútnych maximálnych hodnôt iba cca $6,2 \cdot 10^{-5}$ T (na zemských magnetických póloch).

6.1.2 Magnetické pole prúdu elektrických nábojov

V praxi dôležitejšie ako magnetické pole bodového náboja je pole súboru pohybujúcich sa nábojov, teda magnetické pole elektrického prúdu. Prúd však nemusí byť lokalizovaný na tenký prúdovodič (drôt), ale môže mať priestorový charakter. Predpokladajme teda, že v priestore sa pohybujú identické náboje q rozložené s koncentráciou n , takže v nekonečne malom objeme $d\tau$ je nekonečne malý náboj $dQ = nq d\tau$, ktorý sa v priestore pohybuje rýchlosťou \mathbf{v} (obr. 6.7). Nekonečne malý príspevok k magnetickej indukcii $d\mathbf{B}$, ktorý tento náboj budí vo vektorovej vzdialenosti \mathbf{r} v bode P , musí byť podľa princípu superpozície daný formálne rovnakým výrazom ako je (6.5), teda

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dQ \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$



Obr. 6.7

Ak uvážime, že

$$dQ\mathbf{v} = nq\mathbf{v} d\tau = \mathbf{J}d\tau$$

kde \mathbf{J} je prúdová hustota, možno poslednému výrazu dať tvar

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} d\tau \quad (6.12)$$

Vzťah (6.12) môže aspoň formálne poslúžiť k výpočtu magnetických polí za predpokladu, že je zadaná prúdová hustota ako funkcia polohy v priestore. Výraz (6.12) treba integrovať cez celý objem τ , v ktorom prúdy tečú. Takto dostaneme výraz

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} d\tau \quad (6.13)$$

Vo väčšine praktických prípadov však je výpočet integrálu vo výraze (6.13) veľmi zložitý.

6.1.3 Biotov-Savartov-Laplaceov zákon

Elektrické prúdy, ktoré produkujú magnetické polia, často tečú relatívne tenkými prúdovodičmi (drôťmi), ktoré sú v inak nevodivom prostredí nejakým spôsobom rozložené, veľmi často navinuté do tvaru jednovrstvových husto vinutých cievok (solenoidov) alebo toroidálnych cievok. Magnetické polia v okolí prúdovodičov experimentálne bezprostredne po Oerstedovom objave v roku 1820 skúmali J. B. Biot a F. Savart a na základe svojich meraní spolu s P. S. Laplaceom sformulovali zákon, podľa ktorého elektrický prúd I tečúci krátkym úsekom prúdovodiča dĺžky Δl (pozri obr. 6.8) vytvára vo vzdialenosti r ($r \gg \Delta l$) magnetickú indukciu veľkosti

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta l \sin \varphi}{4\pi r^2} \quad (6.14)$$

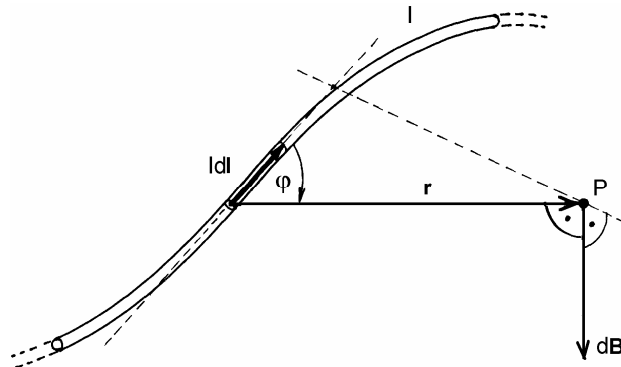
kde φ je uhol medzi smerom r a smerom prúdového elementu $I\Delta l$. Pri takom vyjadrení magnetickej indukcie sa smer vektora $\Delta \mathbf{B}$ určuje ťažkopádne, napr. pomocou pravidla pravej ruky. Ak však využijeme možnosti, ktoré poskytuje diferenciálny a vektorový počet, možno vzťah (6.14) napísať pre elementárne malý príspevok $d\mathbf{B}$ k magnetickej indukcii od nekonečne krátkého prúdového elementu $I d\mathbf{l}$ (vektor $d\mathbf{l}$ má smer pohybu kladných nábojov) vo vektorovej vzdialenosti \mathbf{r} (obr. 6.8). Biotov-Savartov-Laplaceov zákon, ktorý udáva vektorový príspevok $d\mathbf{B}$ k magnetickej indukcii možno napísať v tvare

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (6.15)$$

Prúdový element $I d\mathbf{l}$ je časťou nejakého uzavretého prúdového obvodu, v ktorom sú zaradené zdroje elektromotorických napätí udržiavajúce prúd v obvode, ale žiadne kondenzátory. Prípád s kondenzátorom vyžaduje zvláštny prístup a bude predmetom našich úvah neskôr. Ak chceme vypočítať výslednú magnetickú indukciu \mathbf{B} od celého uzavretého obvodu, treba príspevky (6.15) integrovať pozdĺž celého obvodu. Výsledná indukcia bude potom daná výrazom

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (6.16)$$

kde l je uzavretá čiara pozdĺž prúdového obvodu. Treba si všimnúť, že výraz (6.15) a následne aj (6.16) plynú zo všeobecnejších výrazov (6.12) a (6.13) pre magnetickú indukciu spojitého rozloženia prúdov s prúdovou hustotou J . Ak prúdové pole obmedzíme na vnútrajšok tenkého vodiča prierezu S , potom elementárne objemy $d\tau$ na vodiči môžeme vytvoriť ako krátke úseky dĺžky dl pozdĺž vodiča, teda



Obr. 6.8

$$d\tau = Sdl$$

príčom sa predpokladá, že prúdová hustota na priereze vodiča je konštantná, takže prúd vo vodiči

$$I = JS$$

Na základe uvedeného možno vo výraze (6.12) urobiť zámenu

$$J d\tau \Leftrightarrow I dl$$

a tým prejde na tvar (6.15).

Biotov-Savartov-Laplaceov zákon umožňuje vypočítať magnetickú indukciu v okolí vodičov, ktorými preteká elektrický prúd. V samotnom vodiči, kde pole je tiež nenulové, tento zákon zlyhá. Tam treba použiť iný prístup.

6.1.4 Magnetická indukcia v okolí nekonečne dlhého priameho prúdovodiča

Predovšetkým treba povedať, že nekonečne dlhý priamy prúdovodič je z praktického hľadiska fikcia, pretože každý prúdový obvod musí byť uzavretý. Môžu však existovať obvody, v ktorých nejaký relatívne dlhý úsek je priamočiary a nás môže zaujímať magnetické pole v jeho blízkom okolí. V tom prípade môžeme použiť priblíženie nekonečne dlhého prúdovodiča. Úloha je však dôležitá aj z iného teoretického hľadiska, pretože jej riešenie dokazuje, že magnetické indukčné čiary sú uzavreté a my ho použijeme pri formulácii jednej zo základných rovníc magnetostatiky.

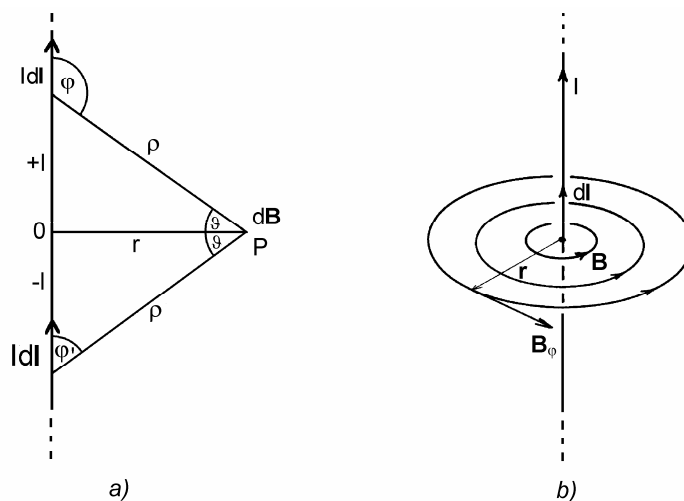
Predpokladajme teda, že v nekonečne dlhom tenkom a priamom prúdovodiči tečie stály elektrický prúd I (pozri obr. 6.9a). Našou úlohou je vypočítať veľkosť a smer magnetickej indukcie v kolmej radiálnej vzdialenosti r od prúdovodiča.

Na vodiči vo vzdialenostiach $\pm l$ zvolíme dva prúdové elementy Idl , ktoré sú v rovnakej vzdialenosti ρ od bodu P , v ktorom treba určiť magneticкую indukciu. Príspevok dB' od horného prúdového elementu má veľkosť

$$dB' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin \varphi}{\rho^2}$$

Z obrázka plynie, že $\varphi = \vartheta + \pi/2$, takže platí $\sin \varphi = \sin \varphi' = \cos \vartheta$. Smer vektora $d\mathbf{B}'$ v bode P je za nákrešňu. V dôsledku symetrie druhý príspevok dB'' od spodného elementu má rovnakú veľkosť a vektor $d\mathbf{B}''$ v bode P smeruje tiež za nákrešňu. Príspevky sa teda sčítavajú a výsledný príspevok od dvoch elementov má veľkosť

$$dB = dB' + dB'' = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{dl \cos \vartheta}{\rho^2} \quad (6.17)$$



Obr. 6.9

Takéto elementy treba pozdĺž prúdovodiča integrovať od 0 po ∞ . Je však výhodné integrovať nie cez dĺžku l , ale cez uhol ϑ od 0 po $\pi/2$. Preto dĺžku

$$l = r \operatorname{tg} \vartheta$$

diferencujeme podľa ϑ a dostaneme

$$dl = \frac{r}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta$$

Ďalej vyjadríme

$$\rho = \frac{r}{\cos \vartheta}$$

a výrazy pre dl a ρ dosadíme do (6.17). Pre dB dostaneme výraz

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \vartheta \, d\vartheta$$

ktorý závisí iba od ϑ . Po jeho integrácii od 0 po $\pi/2$ dostaneme

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \, d\vartheta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Na základe uvedených úvah môžeme prehlásiť, že vektor magnetickej indukcie od nekonečne dlhého priameho prúdovodiča leží v rovine kolmej na prúdovodič, jeho veľkosť závisí iba od prúdu I a vzdialenosti r podľa vzťahu

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (6.18)$$

Na kružniciach polomeru r má B_φ konštantnú hodnotu a vektor magnetickej indukcie \mathbf{B}_φ má azimutálny smer dotyčnice ku kružnici v smere vektorového súčinu $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$ (pozri obr. 6.9b). Všetky sústredné kružnice okolo prúdovodiča sú teda uzavreté indukčné čiary.

Vo vnútri prúdovodiča je tiež nenulové magnetické pole, ktoré však nemožno vypočítať priamou aplikáciou Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona.

Ďalšie aplikácie Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona uvedieme v odseku 6.1.9.

6.1.5 Divergencia magnetického poľa.

Nežriedlosť magnetického poľa ako jedna z jeho základných vlastností

Pri štúdiu vlastností elektrostatických polí sme sa po rozsiahlych analýzach dopracovali k poznaniu, že vlastnosti poľa sú určené jeho divergenciou (Gaussov zákon) a rotáciou (nulovou prácou po uzavretej dráhe). Použijeme tieto princípy aj pre magnetické pole a vypočítajme jeho divergenciu s tým, že využijeme výraz (6.5) pre magnetickú indukciu a princíp superpozície. Pre naše ďalšie účely napíšeme výraz (6.5) pre vektor \mathbf{B} v trochu neobvyklom tvare

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q\mathbf{v} \times \left(-\text{grad} \frac{1}{r} \right) \quad (6.19)$$

čo je skutočne pravda, pretože

$$-\text{grad} \frac{1}{r} = -\nabla \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (6.20)$$

[pozri výraz (2.106)]. Divergencia vektora \mathbf{B} sa potom dá napísať v tvare

$$\text{div} \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \text{div} \left[\mathbf{v} \times \left(-\text{grad} \frac{1}{r} \right) \right]$$

Ak na tento výraz použijeme operátorovú identitu

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot} \mathbf{B}$$

(pozri tabuľku 2), potom prejde na tvar

$$\text{div} \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \text{rot} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{rot} \text{grad} \frac{1}{r} \right) \quad (6.21)$$

Rotácia gradientu ľubovoľnej skalárnej funkcie sa rovná nule [pozri výraz (2.156)], teda druhý člen v zátvorke výrazu (6.21) sa rovná nule. Hodnotu divergencie \mathbf{B} určuje teda súčin $\mathbf{r} \cdot \text{rot} \mathbf{v}$. Ak rozložíme rýchlosť \mathbf{v} na zložku \mathbf{v}_{\parallel} pozdĺž vektora \mathbf{r} a zložku \mathbf{v}_{\perp} priečnu k \mathbf{r} vidíme, že

$$\mathbf{r} \cdot \text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot \text{rot} (\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{r} \cdot \text{rot} \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{r} \cdot \text{rot} \mathbf{v}_{\perp} = 0$$

pretože $\text{rot} \mathbf{v}_{\parallel} = 0$ a $\text{rot} \mathbf{v}_{\perp}$ je kolmá na \mathbf{r} . Zátvorka vo výraze (6.21) sa teda rovná nule, takže môžeme prehlásiť, že **divergencia vektora magnetickej indukcie pohybujúceho sa bodového náboja sa rovná nule** ($\text{div} \mathbf{B} = 0$). Na základe princípu superpozície možno toto tvrdenie rozšíriť na ľubovoľný systém nábojov a tvrdiť, že divergencia každého magnetického poľa sa rovná nule, čo okrem toho platí nielen pre statické magnetické polia, ale dokonca aj pre polia závislé od času. Teda

$$\boxed{\text{div} \mathbf{B} = 0} \quad (6.22)$$

vždy a všade – aj vo vnútri atómov! Rovnica (6.22) je jednou zo základných rovníc elektromagnetického poľa, jednou z Maxwellových rovníc v diferenciálnom tvare vo svojej konečnej podobe. Skutočnosť, že magnetické pole má nulovú divergenciu znamená, že neexistujú analogické zdroje či žriedla tohto poľa, ako sú elektrické náboje zdrojmi a žriedlami elektrického poľa. V tridsiatych rokoch dvadsiateho storočia anglický teoretický fyzik Paul Adrien Maurice Dirac (1902 – 1984) vyslovil podivnú hypotézu o existencii "magnetického náboja" alebo "magnetického monopólu" v snahe o symetrizáciu rovníc elektromagnetického poľa¹. Veľké fyzikálne výskumné centrá na svete sa desiatky rokov snažili o experimentálny dôkaz existencie "magnetického monopólu", avšak všetky tieto pokusy skončili s neúspechom. Existencia magnetického monopólu by nevyhnutne viedla k zásadnej revízii dnešnej elektromagnetickej teórie.

¹ Dirac, P. A. M.: Proc. Roy. Soc. A **133**, 60 (1931)
Dirac, P. A. M.: Phys. Rev. **74**, 817 (1948)

Existuje ešte iný spôsob dôkazu toho, že magnetické pole má nulovú divergenciu, pri ktorom možno využiť vzťah (6.13), a netreba využívať princíp superpozície. Navyše poskytuje výraz pre ďalšiu, ešte nezavedenú veličinu. Výraz (6.13) s využitím (6.20) možno napísať v tvare

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \left(\nabla \frac{1}{r} \times \mathbf{J} \right) d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \nabla \times \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau = \\ &= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau = \nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} \end{aligned} \quad (6.23)$$

kde bola využitá skutočnosť, že vo vodivom prostredí, kde $\mathbf{J} \sim \mathbf{E}$, je $\text{rot } \mathbf{J} = \mathbf{0}$. Podľa výrazu (6.23) je vektor magnetickej indukcie daný rotáciou nejakého nového vektora

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau \quad [\text{Wb.m}^{-1} = \text{T.m}] \quad (6.24)$$

závislého iba od prúdovej hustoty \mathbf{J} a jej rozloženia v priestore. Tento vektor sa nazýva **vektorový potenciál** \mathbf{A} a má podobný význam ako skalárny potenciál V v elektrickom poli. Výsledkom našich úvah sú dve závažné skutočnosti:

1. Magnetická indukcia \mathbf{B} je vždy rotáciou ďalšieho vektora \mathbf{A} , teda

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (6.25)$$

Ak vieme vypočítať vektor \mathbf{A} pomocou vzťahu (6.24), čo je však skôr výnimočný prípad, môžeme z neho pomocou vzťahu (6.25) vypočítať vektor \mathbf{B} .

2. Ak vždy platí výraz (6.25), potom $\text{div } \mathbf{B} = 0$, pretože pre ľubovoľný vektor platí

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

[pozri výraz (2.157)]. K vektorovému potenciálu sa vrátíme v osobitnom odseku.

Skutočnosť, že magnetické pole má nulovú divergenciu alebo inak povedané, že nemá "žriedla" (neexistujú magnetické monopóly), logicky vedie k záveru, že pole vektora magnetickej indukcie má charakter vírového poľa. Jeho rotácia bude vo všeobecnosti nenulová, čo dokážeme neskôr. Rovnicu (6.22) môžeme integrovať cez ľubovoľný objem τ , teda

$$\int_{\tau} \text{div } \mathbf{B} d\tau = 0$$

a aplikovať na ňu Gaussovu vetu. Dostaneme tak integrálny prepis základnej rovnice magnetickeho poľa (6.22) v tvare

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6.26)$$

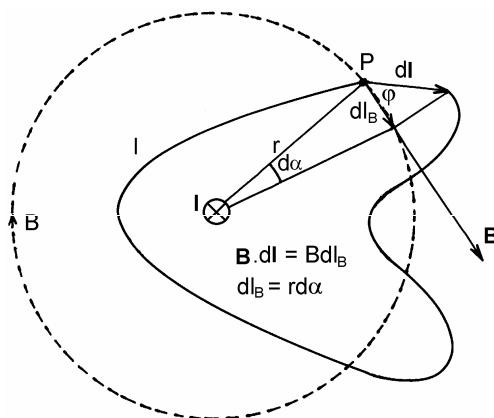


André Marie AMPÈRE
(1775 Polémieux pri Lyone – 1836 Marseille)

**Ma'ba v Corpus imaginum
der Photographischen Gesellschaft, Berlin**

kde S je plocha, ktorá uzatvára objem τ . Z matematického hľadiska má výraz (6.26) význam toku vektorovej veličiny \mathbf{B} z objemu τ uzavretou plochou S .

Tento tok je však v každom prípade nulový. Pokiaľ $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, je to možné iba vtedy, ak tok do vnútra objemu sa rovná toku von. Z hľadiska magnetických indukčných čiar to znamená, že tieto čiary musia byť vždy uzavreté, o čom sa presvedčíme pri výpočte rôznych magnetických polí. Výraz (6.26) sa pre svoju formálnu podobu na Gaussov zákon pre elektrické pole nazýva tiež **Gaussov zákon v magnetizme**.



Obr. 6.10

6.1.6 Rotácia magnetického poľa. Ampérov zákon.

Vírovosť magnetického poľa ako jedna z jeho základných vlastností

Teraz sme pripravení odvodiť druhý základný zákon magnetostatiky, ktorý súvisí s účinkom vektora magnetickej indukcie \mathbf{B} na uzavretej dráhe. Predpokladajme, že v priestore sa nachádza nekonečný priamy prúdovodič s prúdom I . Zvoľme v priečnej rovine ľubovoľnú uzavretú dráhu l , ktorá obopína vodič (pozri obr. 6.10) a položme si otázku, aká je hodnota integrálu

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

po tejto dráhe? Podobná otázka o hodnote integrálu $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ v elektrickom poli poskytla dôležité teoretické informácie o vlastnostiach toho poľa. Na obrázku je zvolený bod vo vzdialenosti r od vodiča, v ktorom je zvolený element dráhy $d\mathbf{l}$, ktorý v danom bode s vektorom \mathbf{B} zvierá uhol φ , takže

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl \cos \varphi = B dl_B$$

kde $dl_B = dl \cos \varphi$ je priemet elementu $d\mathbf{l}$ do smeru magnetickej indukcie, teda na kruhovú indukčnú čiaru. Ak uvážime, že v danom bode P je veľkosť magnetickej indukcie daná vzťahom (6.18), môžeme posledný výraz napísať v tvare

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dl_B}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha$$

Takýto výraz môžeme napísať pre ľubovoľný element dráhy, pričom je dôležité všimnúť si, že ľubovoľný súčin $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ na dráhe nezávisí od polomeru r , na ktorom sa element nachádza, ale je úmerný uhlovému elementu $d\alpha$, pod ktorým vidieť element $d\mathbf{l}$ z miesta, kde sa nachádza prúdovodič. Integrál dráhových príspevkov $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ je úmerný integrálnemu súčtu $d\alpha$ od 0 po 2π , teda

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 I \quad (6.27)$$

Dráhový integrál magnetickej indukcie \mathbf{B} po uzavretej dráhe, na rozdiel od podobného integrálu v elektrickom poli, sa teda nerovná nule, ale je úmerný tomu prúdu, ktorý dráha obopína. Ak by dráha neobopínala žiadny prúd, uvažovaný integrál by sa rovnal nule, o čom sa čitateľ môže ľahko presvedčiť. Naopak, ak dráha obopína n prúdov I_1 až I_n , potom s využitím princípu superpozície môžeme očakávať, že dráhový integrál bude úmerný algebraickému súčtu týchto prúdov, teda

$$\boxed{\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k} \quad (6.28)$$

Súvis dráhového integrálu s obopnutými prúdmi (6.28) je jedna z možných formulácií **Ampérovho zákona** (integrálny tvar). Výraz možno zovšeobecniť na prúdy, ktoré netečú diskretnými prúdovodičmi, ale sú rozložené v priestore spojito s prúdovou hustotou \mathbf{J} ako funkciou polohy v priestore. Ak v prúdovom poli \mathbf{J} zvolíme uzavretú čiaru l , ktorá obopína plochu S , potom dráhový integrál \mathbf{B} po uzavretej dráhe l musí byť, s ohľadom na výraz (6.28), úmerný prúdu

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

ktorý dráha l obopína. Môžeme teda výraz pre Ampérov zákon napísať aj v tvare

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.29)$$

Ak na ľavej strane posledného výrazu aplikujeme Stokesovu vetu [pozri výraz (2.136)], prejde výraz na tvar

$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Integračná plocha S je rovnaká na oboch stranách rovnice a musí spĺňať jediná podmienku, že je "pripnutá" na svoju hraničnú čiaru l , inak je ľubovoľná. Z toho plynie, že integrandy rovnice musia byť rovnaké, teda musí platiť

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (6.30)$$

Rovnica (6.30) je Ampérov zákon v diferenciálnom tvare a vyjadruje lokálnu vlastnosť magnetického poľa – jeho vírovosť. Všade tam, kde tečú prúdy, vytvára magnetické pole víry. V takomto poli nemožno vo všeobecnosti definovať skalárnu funkciu podobnú skalárnemu potenciálu v elektrickom poli, z ktorej by sa magnetická indukcia počítala ako záporný gradient. Platí totiž, že $\text{rot grad} = 0$ pre každú skalárnu funkciu, čo by viedlo k sporu s výrazom (6.30). Skalárny magnetický potenciál V_m však možno zaviesť všade tam, kde netečú prúdy ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$, resp. $I = 0$). V tých miestach $\mathbf{B} = -\text{grad } V_m$. Čitateľovi v tejto súvislosti odporúčam riešiť úlohu 162, z ktorej sa dozvie, ako vyzerá V_m pre jednoduchý prúdový okruh. Pre výpočet magnetickej indukcie sa však skalárny potenciál využíva zriedkavo.

Veličinou zásadnejšieho významu v magnetickom poli je ale vektorový potenciál \mathbf{A} , ktorého vyjadrenie (6.24) sme získali ako "medziprodukt" pri dôkaze nulovej divergencie magnetického poľa. Venujme teraz pozornosť niektorým jeho vlastnostiam!

6.1.7 Vektorový potenciál

Spôsob, ktorým sme získali výraz (6.24) možno nazvať "experimentálny", pretože jeho základom je experimentom potvrdený výraz pre magnetickú silu (6.1), ktorú môžete zmerať napríklad z pohybu elektrónu v obrazovke Vášho televízora (ak ešte má vákuovú obrazovku). V teórii elektromagnetického poľa sa často postupuje naopak, že sa postulujú základné rovnice poľa (Maxwellove rovnice) a skúmajú sa ich dôsledky. Takým spôsobom sa postuluje aj rovnica

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

a skúma sa, aké má vlastnosti pole vektora \mathbf{B} . Ak rovnica platí všeobecne, potom \mathbf{B} musí byť rotáciou iného, už spomínaného vektora \mathbf{A} , teda

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (6.31)$$

pretože

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$$

vždy. Okrem toho podľa vzťahu (6.30) musí platiť, že

$$\text{rot } \mathbf{B} = \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} \quad (6.32)$$

Ak uvážime operátorovú identitu

$$\text{rot rot} \equiv \text{grad div} - \Delta$$

(pozri tabuľku 2), tak rovnicu (6.32) môžeme prepísať do tvaru

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (6.33)$$

Z matematického hľadiska je to zložitá parciálna diferenciálna rovnica pre neznámy vektor \mathbf{A} pri známom rozložení prúdovej hustoty \mathbf{J} . Bez ujmy na všeobecnosti možno rovnicu zjednodušiť. Ak uvažíme, že \mathbf{A} je zdrojom vektora \mathbf{B} prostredníctvom vzťahu (6.31), potom v určení \mathbf{A} je veľká voľnosť bez toho, aby sa zmenilo \mathbf{B} . K vektoru \mathbf{A} možno napr. pripočítať ľubovoľný konštantný vektor a rotácia výsledku, teda \mathbf{B} , sa nezmení (spomeňte si na ľubovoľnú aditívnu konštantu pri skalárnom elektrickom potenciáli). S vektorovým potenciálom si môžeme dovoliť ešte viac; môžeme k nemu dokonca pridať gradient ľubovoľnej skalárnej funkcie Λ a jeho rotácia zostane rovnaká, t. j.

$$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A} + \text{grad } \Lambda) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot grad } \Lambda = \text{rot } \mathbf{A}$$

pretože $\text{rot grad } \Lambda = 0$. Takáto veľká voľnosť vo výbere \mathbf{A} určite ho dovoľuje vybrať tak, aby bola splnená podmienka

$$\text{div } \mathbf{A} = 0^1 \quad (6.34)$$

Ak je podmienka (6.34) splnená, potom sa rovnica (6.33) zjednoduší na tvar

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (6.35)$$

Rovnica (6.35) je parciálna diferenciálna rovnica Poissonovho typu pre vektorovú veličinu \mathbf{A} (v skutočnosti tri diferenciálne rovnice pre tri zložky vektora \mathbf{A}), podobná rovnici (2.154b) pre skalárny potenciál V . Môžeme očakávať, že ak výraz (2.78) je riešením rovnice (2.154b), bude riešením (6.35) formálne rovnaký výraz pre \mathbf{A} , menovite

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau \quad (6.36)$$

Lenže výraz (6.36) pre nás nie je novým, pretože sme ho získali už pri dôkaze nulovej divergencie magnetického poľa [pozri vzťah (6.24)].

Ak elektrický prúd I tečie uzavretým prúdovodičom malého prierezu S , dĺžky l s konštantnou prúdovou hustotou \mathbf{J} , potom na prúdovodiči možno voliť prúdové elementy $Idl = \mathbf{J}d\tau$ a výraz (6.36) pre vektorový potenciál \mathbf{A} v okolí vodiča prejde na tvar

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l}}{r} \quad (6.37)$$

a napr. v zložkách pravouhlého súradnicového systému

$$A_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{dx}{r} \quad A_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{dy}{r} \quad A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{dz}{r} \quad (6.38)$$

¹ Ak by bola $\text{div } \mathbf{A} \neq 0$, potom nevírový vektor \mathbf{A} by sa skladal z vírovej zložky \mathbf{A}' a nevírovej (žriedlovej) zložky \mathbf{A}'' , teda $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}''$. Potom by ale platilo: $\text{div } \mathbf{A}' = 0$ a $\text{rot } \mathbf{A}'' = 0$, a tak $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}'$. Zložka \mathbf{A}'' by nevplyvala na \mathbf{B} , teda by bolo možné položiť $\mathbf{A}'' = 0$ a tak teda platí: $\text{div } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A}' = 0$.

$$\text{kde } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Nakoniec nám zostáva odpovedať na dôležitú otázku: Aký je vlastne význam vektorového potenciálu. Ponúka sa odpoveď, že rovnaký, ako je význam skalárneho potenciálu – pomocou neho vypočítať magnetickú indukciu. Avšak A je vektor, teda nemá tú výhodu akú má skalár V , navyac výrazy pre vektorový potenciál sú nezriedka zložitejšie ako výrazy pre samotnú magnetickú indukciu. Vektorový potenciál môže mať dokonca nenulovú hodnotu tam, kde samotná magnetická indukcia je nulová (napr. v okolí nekonečne dlhého solenoidu – pozri úlohu 178). Teda ponúkaná odpoveď znie dosť nepresvedčivo. Avšak existuje veľmi dôležitá úloha, ktorej jednoduché riešenie bez vektorového, alebo aspoň skalárneho magnetického potenciálu si neviem predstaviť. Je to úloha o magnetickej indukcii v okolí veľmi malej prúdovej slučky (napr. podľa klasickej predstavy magnetická indukcia od cirkulujúceho elektrónu v atóme). Vektorový potenciál pomáha hlavne v zložitejších úlohách magnetických polí, umožňuje prehľadnejší prístup k energetickým otázkam magnetických polí. Jeho význam sa ocení hlavne v časovo premenných elektromagnetických poliach a má priamy fyzikálny význam v rôznych problémoch kvantovej teórie.¹ Vektorový potenciál je dôležitou veličinou elektromagnetickej teórie.

6.1.8 Vektorový potenciál priameho nekonečného prúdovodiča

S akými záludnosťami sa možno stretnúť pri výpočte vektorového potenciálu budeme ilustrovať na nekonečne dlhom priamom prúdovodiči. Predpokladajme, že prúdovodič má polomer a , a tečie ním prúd I s konštantnou prúdovou hustotou $J_z = I/(\pi a^2)$ v smere osi z pravouhlého súradnicového systému x, y, z (pozri obr. 6.11a). Pokúsime sa o výpočet vektorového potenciálu vo vzdialenosti

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

od osi prúdovodiča najprv pre $r > a$. Pri zvolenom smere prúdu má vektorový potenciál nenulovú iba zložku A_z v smere osi z , zvyšné zložky $A_x = A_y = 0$. K výpočtu A_z sa ponúka tretí z výrazov (6.38), v ktorom treba integrovať elementy dz od $-\infty$ po $+\infty$, teda

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Takýto integrál diverguje, to nie je schodná cesta k výsledku.

Inú možnosť ponúka priamo rovnica (6.35), ktorá pre jedinú zložku vektora A prejde na tvar

$$\Delta A_z = -\mu_0 J_z = -\mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \quad (6.39)$$

¹ Pozri napr. Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: Feynmanove prednášky z fyziky 3, str. 333, Alfa Bratislava 1988

vo vnútri prúdovodiča, teda pre $r < a$. Vzhľadom na to, že problém má osovú symetriu, je vhodné ho riešiť v cylindrických súradniciach r, φ, z . Zložka A_z závisí iba od r , preto naň pôsobí iba časť Laplaceovho operátora závislá od r a rovnica nadobudne tvar (pozri tabuľku 23)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z}{dr} \right) = -\mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \quad (6.40)$$

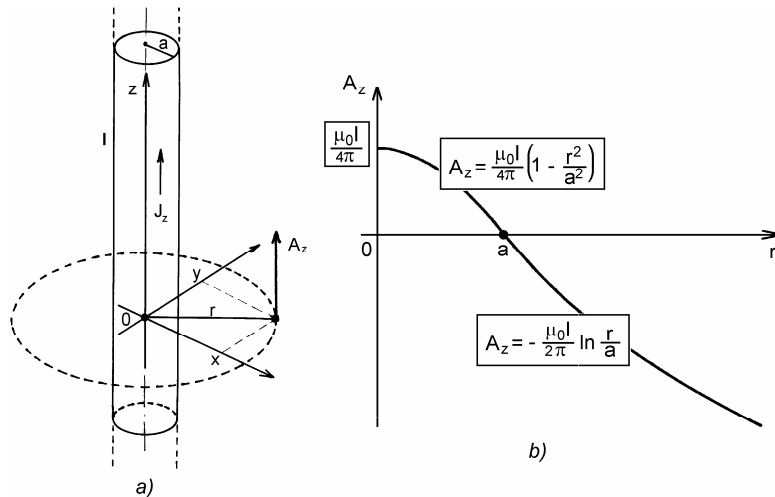
Po vynásobení s r a prvej integrácii dostaneme výraz

$$r \frac{dA_z}{dr} = -\mu_0 \frac{I r^2}{2\pi a^2}$$

Integračnú konštantu sme položili rovnú nule, pretože výraz musí platiť aj pre $r = 0$. Vydelením s r a druhou integráciou dostaneme výraz pre A_z vo vnútri vodiča v tvare

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (6.41)$$

pričom druhá integračná konštantka bola zvolená tak, že $A_z = 0$ pre $r = a$.



Obr. 6.11

Pre okolie vodiča ($r > a$) prejde rovnica (6.40) na tvar

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z}{dr} \right) = 0 \quad (6.42)$$

vynásobením s r a po prvej integrácii dostaneme výraz

$$r \frac{dA_z}{dr} = C_1$$

kde C_1 je integračná konštanta. Vydelením s r a ďalšou integráciou posledného výrazu dostaneme

$$A_z = C_1 \ln r + C_2 \quad (6.43)$$

kde C_2 je ďalšia integračná konštanta. Integračné konštanty C_1 a C_2 treba zvoliť tak, aby vektorový potenciál a tým aj magnetická indukcia boli spojité na povrchu prúdovodiča. To vyžaduje, aby platilo

$$C_2 = -C_1 \ln a$$

čím výraz (6.43) nadobudne tvar

$$A_z = C_1 \ln \frac{r}{a} \quad (6.44)$$

Z výrazu (6.44) vidieť, že pre $r = a$ je $A_z = 0$, výraz (6.41) pre $r = a$ dáva tiež nulovú hodnotu vektorového potenciálu, teda A_z je na povrchu prúdovodiča spojité. Ak tam má byť spojitá aj magnetická indukcia, potom pri $r = a$ musí byť spojitá aj prvá derivácia A_z . To vyžaduje voliť $C_1 = -\mu_0 I / (2\pi)$ a výraz (6.44) nadobudne konečný tvar pre okolie vodiča

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \quad (6.45)$$

Ak zhrnieme naše poznatky o vektorovom potenciáli priameho veľmi dlhého prúdu vidíme, že vektorový potenciál má smer osi prúdu. Na kružniciach polomeru r koncentrických s osou prúdu má pre $r < a$ rovnaké hodnoty dané výrazom (6.41), a pre $r > a$ výrazom (6.45). Čitateľ sa môže presvedčiť, že výpočet $\text{rot}(A_z \mathbf{e}_z)$ s využitím výrazu (6.45) vedie na výraz (6.18) pre magnetickú indukciu v okolí prúdovodiča. Na druhej strane, vo vnútri vodiča je magnetická indukcia daná rotáciou výrazu (6.41), teda

$$\mathbf{B} = \text{rot}(A_z \mathbf{e}_z) = -\frac{dA_z}{dr} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\varphi \quad (6.46)$$

Všimnite si tiež, že výraz (6.45) je formálne podobný výrazu pre skalárny potenciál

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a}$$

v okolí nekonečne dlhého priamkového náboja, ktorý bol odvodený v elektrostatike [pozri výraz (2.79)]. Analogicky s výrazom (6.41) možno tiež spätne pre skalárny potenciál vo vnútri nekonečne dlhého valca polomeru a nabitého objemovým nábojom $\rho = \lambda / (\pi a^2)$ napísať výraz

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

Zložka vektorového potenciálu A_z má konštantné hodnoty na kružniciach ktoré splývajú s magnetickými indukčnými čiarami (pozri obr. 6.11a). Radiálna závislosť $A_z(r)$ je graficky znázornená na obr. 6.11b.

6.1.9 Výpočet niektorých dôležitých magnetických polí

Na výpočet magnetických polí sme v predchádzajúcich odsekoch vypracovali niekoľko metód, ktoré v krátkosti zrekapitulujeme. Sú to:

a) **Biotov-Savartov-Laplaceov zákon** (BSL zákon), ktorý dáva možnosť vypočítať magnetickú indukciu prúdov, ktoré tečú v objeme τ s prúdovou hustotou \mathbf{J} [výraz (6.13)] alebo prúdy I tečú v prúdovodičoch [výraz (6.15)]. V poslednom prípade nemožno počítať magnetickú indukciu vo vnútri prúdovodiča, o ktorom sa predpokladá, že je nekonečne tenký.

b) **Ampérov zákon** v tvare (6.28) alebo (6.29) umožňuje riešiť niektoré, na prvý pohľad zložité úlohy za predpokladu, že pole má vysoký stupeň symetrie a je známy priebeh magnetických indukčných čiar. V tomto ohľade je aplikácia Ampérovho zákona analogická aplikácii Gaussovho zákona pri výpočte elektrických polí. Teoreticky je prostriedkom pre výpočet polí aj Ampérov zákon v diferenciálnom tvare (6.30). V skutočnosti sú to ale tri zložité diferenciálne rovnice pre zložky vektora \mathbf{B} , pre ktoré treba zadať aj okrajové podmienky.

c) **Výpočet magnetických polí z vektorového potenciálu** daného rovnicami (6.35) alebo (6.36) až (6.38). Zo známeho vektorového potenciálu sa magnetická indukcia určí za pomoci výrazu (6.31).

d) **Skalárny magnetický potenciál**

$$V_m = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega \quad [\text{Wb.m}^{-1} = \text{T.m}] \quad (6.47a)$$

ktorý budí jednoduchý prúdový obvod (prúdová slučka) v bode P , z ktorého obvod vidíme pod priestorovým uhlom Ω . Magnetická indukcia v bode P sa vypočíta podľa vzťahu

$$\mathbf{B} = -\text{grad } V_m \quad (6.47b)$$

Výrazy (6.47a,b) sú predmetom dôkazu v úlohe 162.

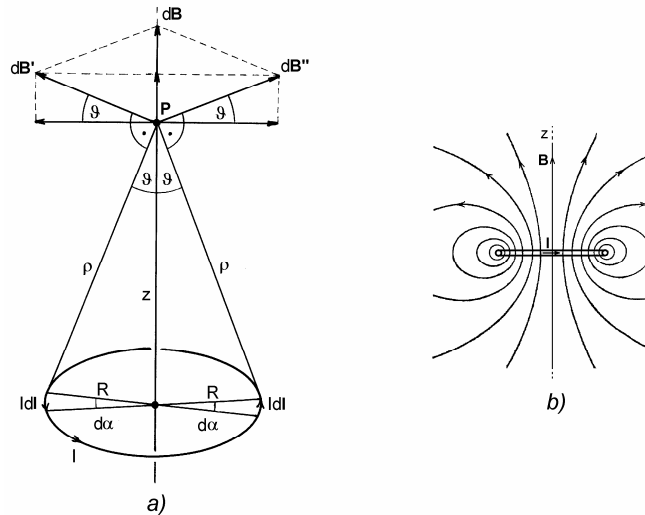
V ďalšom uvedieme niekoľko príkladov na výpočet magnetických polí prúdov jednoduchých konfigurácií:

1. Magnetické pole kruhového prúdu. Dôležitým magnetickým polom je pole budené prúdom I , ktorý tečie po obvode kružnice polomeru R . Prúdovú dráhu môže tvoriť jeden kruhový závit drôtu polomeru R , prípadne tenká prstencová cievka n závitov tenkého drôtu (účinný prúd je potom nI), alebo stredný prúd elektrónu na obežnej dráhe okolo jadra atómu. Ukazuje sa, že pole takého jednoduchého prúdu je vo všeobecnosti zložité. Magnetická indukcia je jednoduchá na osi závitov (pozri *obr. 6.12a*), kde ju možno určiť pomocou skalárneho alebo vektorového potenciálu, avšak najjednoduchšie priamou aplikáciou BSL zákona. Ak na priemere prúdovej kružnice zvolíme dva elementy $I dl$, každý vo vzdialenosti ρ , v bode P na osi z vyvolá magnetickú indukciu veľkosti

$$dB' = dB'' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{\rho^2}$$

Priemety týchto príspevkov na os z sa vektorovo sčítavajú a priemety do roviny kolmej na os z sa rušia. Výsledný príspevok

$$dB = (dB' + dB'') \sin \vartheta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dl}{\rho^2} \sin \vartheta$$



Obr. 6.12

smeruje pozdĺž osi z . Ak uvážime, že $dl = R d\alpha$ a $\rho = R/\sin \vartheta$, môžeme príspevky integrovať po polkružnici (uhol ϑ od 0 po π) a dostaneme

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\sin^3 \vartheta}{R} \int_0^\pi d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \vartheta \quad (6.48)$$

Magnetická indukcia je tu vyjadrená ako funkcia uhla ϑ , ktorý sa môže meniť od $\vartheta = 0$ ($z = +\infty, B = 0$) cez $\vartheta = \pi/2$ [$z = 0, B = \mu_0 I/(2R)$] po $\vartheta = \pi$ ($z = -\infty, B = 0$). Magnetická indukcia má všade smer kladnej osi z a predstavuje priamkovú magnetickú indukčnú čiaru od $-\infty$ po $+\infty$ (pozri obr. 6.12b). Ak uvážime, že

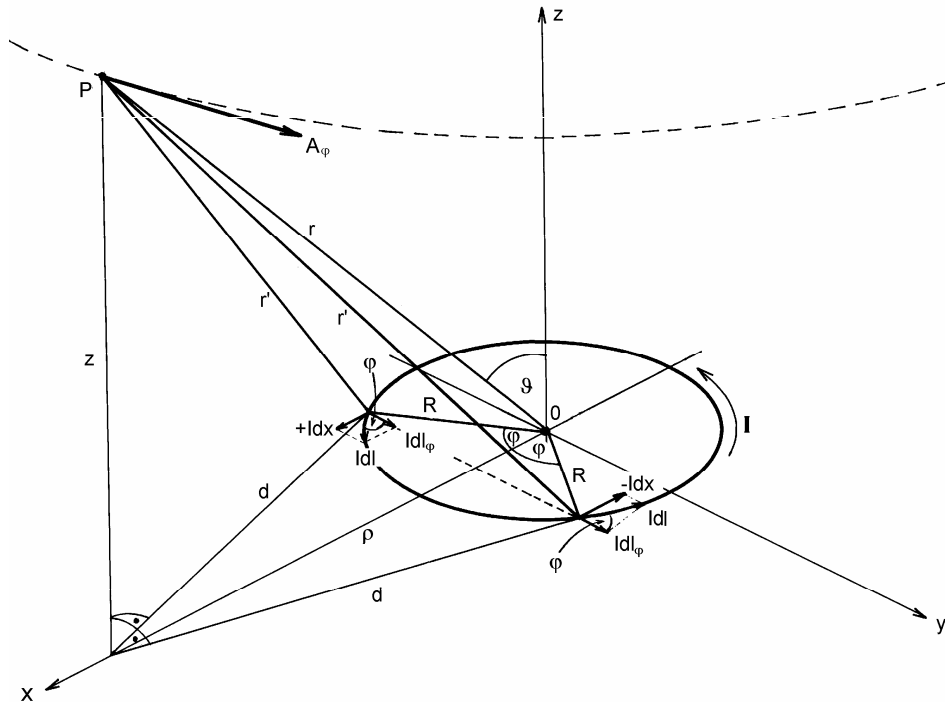
$$\sin \vartheta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

možno výraz (6.48) napísať v tvare

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{3/2}}$$

V priestore mimo osi závit je výpočet magnetickej indukcie zložitý a vedie na eliptické integrály (pozri úlohu 177). Pre ďalšie účely vypočítame však namiesto \mathbf{B} vektorový potenciál \mathbf{A} v okolí kruhového závit. Na obr. 6.13 je znázornený závit s prúdom I a bod P , v ktorom chceme určiť vektorový potenciál. Dva vybrané prúdové elementy Idl sú v rovine závit rozložené na zložky Idx a $Idy = Idl_\varphi$. Keďže vybrané elementy Idx sú protibežné, ich príspevok k vektorovému potenciálu je nulový a v bode P budú prispievať iba zložky Idl_φ každá s príspevkom

$$dA_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl_\varphi}{r'}$$



Obr. 6.13

Výslednú hodnotu A získame integráciou daných príspevkov pozdĺž celého závit, teda

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{dl_\varphi}{r'} \quad (6.49)$$

Hľadaný vektorový potenciál leží v paralelnej rovine nad závitom vo výške z a tvorí dotyčnicu ku kružnici s polomerom ρ . Na výpočet integrálu sú potrebné vyjadrenia

$$dl_\varphi = R \cos \varphi d\varphi \quad (6.50)$$

$$r' = \sqrt{d^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \varphi + z^2}$$

okrem toho položíme

$$\varphi = \pi + 2\alpha$$

takže $d\varphi = 2d\alpha$ a $\cos \varphi = 2 \sin^2 \alpha - 1$. Po takýchto substitúciách výraz (6.49) prejde na tvar

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \varphi}} = \\ &= \frac{\mu_0 IR}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \alpha - 1) d\alpha}{\sqrt{(R + \rho)^2 + z^2 - 4R\rho \sin^2 \alpha}} \end{aligned}$$

Po ďalšej substitúcii

$$k^2 = \frac{4R\rho}{(R + \rho)^2 + z^2}$$

prejde posledný integrál do tvaru

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{\mu_0 IR}{\pi} \frac{k}{\sqrt{4R\rho}} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \alpha - 1) d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi k} \sqrt{\frac{R}{\rho}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K - E \right] \end{aligned} \quad (6.51)$$

kde

$$K = K\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad (6.52a)$$

je úplný eliptický integrál prvého druhu a

$$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \quad (6.52b)$$

je úplný eliptický integrál druhého druhu.¹ Numerické hodnoty integrálov (6.52) sú pre rôzne hodnoty parametra k tabuľované v špecializovaných matematických

¹ Pozri napr. Rektorys, K.: Přehled užité matematiky, str. 490, SNTL Praha 1981

průřezkách.¹ Magnetická indukcia v okolí proudového závitu sa "vypočíta" ako rotácia azimutálneho vektorového potenciálu A_φ daného výrazom (6.51). Magnetické pole v okolí závitu je znázornené na obr. 6.12b.

V praxi je veľmi dôležitý prípad výpočtu magnetickej indukcie vo veľkej vzdialenosti od závitu, alebo ak je polomer závitu veľmi malý, t. j. je splnená podmienka

$$R \ll r \quad (6.53)$$

Vtedy do výrazu (6.49) s ohľadom na podmienku (6.53) možno dosadiť

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi \sin \vartheta}} \approx \\ &\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \cos \varphi \sin \vartheta \right) \end{aligned}$$

čím výraz (6.49) prejde na tvar

$$\begin{aligned} A_\varphi &= 2 \frac{\mu_0 I R}{4\pi r} \int_0^\pi \left(1 + \frac{R}{r} \sin \vartheta \cos \varphi \right) \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{\mu_0 I R}{2\pi r} \int_0^\pi \left(\cos \varphi + \frac{R}{r} \sin \vartheta \cos^2 \varphi \right) d\varphi = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{4\pi r^2} \sin \vartheta \end{aligned} \quad (6.54)$$

V poslednom výraze $\pi R^2 = S$ je plocha kruhu, ktorý je po obode obtekaný prúdom I . Je vhodné túto plochu zaviesť ako plošný vektor \mathbf{S} , ktorý je kolmý na plochu S a smeruje na tú stranu plochy, z ktorej vidieť tiecť prúd proti smeru hodinových ručičiek. Vektorová veličina

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} \quad [\text{A} \cdot \text{m}^2] \quad (6.55)$$

sa nazýva **magnetický moment proudovej slučky**. Uvažovaný vektorový potenciál má podľa vzťahu (6.54) tvar

$$\mathbf{A} = A_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (6.56)$$

kde \mathbf{e}_φ je jednotkový vektor v azimutálnom smere sférických súradníc, ϑ je polárny uhol a \mathbf{r} je polohový vektor bodu P vzhľadom na stred závitu.

Poučný je tiež výpočet skalárneho magnetického potenciálu v okolí malej proudovej slučky (pozri obr. 6.14). Z bodu P vo vzdialenosti $r \gg R$ vidieť slučku pod priestorovým uhlom

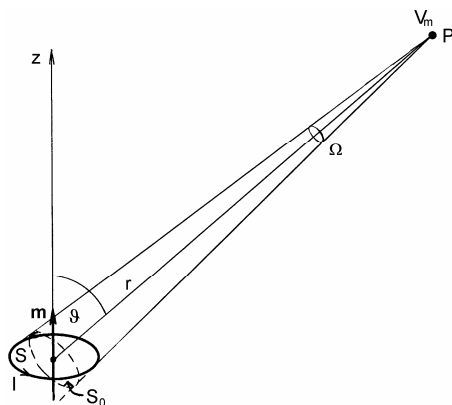
$$\Omega = \frac{S_0}{r^2} = \frac{S}{r^2} \cos \vartheta$$

¹ Pozri napr. Jahnke, E., Emde, F., Lösch, F.: Tafeln höherer Funktionen, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1960. Dnes existujú počítačové programy, ktoré umožňujú hodnoty eliptických integrálov priamo numericky vypočítať.

Skalárny potenciál daný výrazom (6.47a) nadobudne tvar

$$V_m = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega = \frac{\mu_0 IS}{4\pi r^2} \cos \vartheta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \cos \vartheta = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (6.57)$$

Všimnite si, že skalárny magnetický potenciál prúdového závitú je svojou matematickou štruktúrou rovnaký ako výraz pre skalárny potenciál elektrického dipólu [pozri výraz (2.114), v ktorom možno urobiť zámenny $1/\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$ a $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$, a prejde na výraz (6.57)].



Obr. 6.14

Výrazy (6.56) a (6.57) možno konečne využiť na výpočet magnetickej indukcie vo veľkej vzdialenosti od malej prúdovej slučky v ľubovoľnom smere. Výpočtom možno ukázať, že magnetická indukcia v okolí prúdovej slučky je daná výrazom

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} &= -\text{grad } V_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot } \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad } \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \end{aligned} \quad (6.58)$$

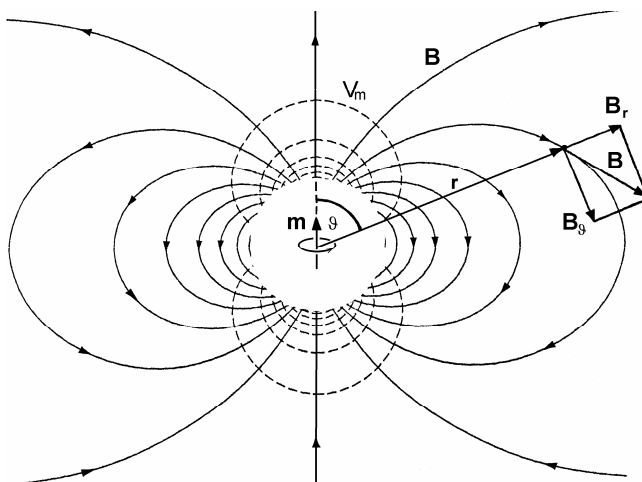
Výraz (6.58) sa svojou štruktúrou podobá na výraz (2.116), ktorý opisuje pole elektrického dipólu. Malá prúdová slučka sa preto často nazýva **magnetický dipól** napriek tomu, že nejde o nijaký dvojpólový objekt. Toto treba mať na pamäti všade, kde v budúcnosti použijeme pojem "magnetický dipól". Robíme tak len z úcty k histórii – sám pojem prináša do elektromagnetizmu viac škody ako osohu, pretože je tendencia spájať ho s neexistujúcimi magnetickými nábojmi. Magnetické pole vo väčšom okolí slučky (magnetického dipólu) vyzerá formálne presne tak, ako elektrické pole elektrického dipólu (pozri obr. 6.15 a porovnaj s obr. 2.43) a jeho zložky v sférických súradniciach sú

$$B_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos \vartheta \quad B_\varphi = 0 \quad B_\vartheta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin \vartheta \quad (6.59)$$

Absolútna hodnota magnetickej indukcie ako funkcia r a ϑ je daná výrazom

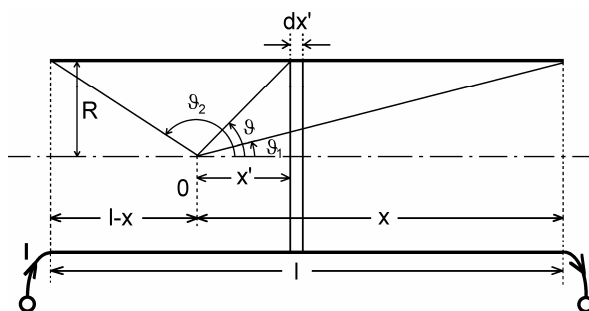
$$B = \sqrt{B_r^2 + B_\vartheta^2} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sqrt{3\cos^2 \vartheta + 1} \quad (6.60)$$

Magnetické pole v bezprostrednom okolí slučky nie je na obr. 6.15 zobrazené, pretože tam nie je dané výrazmi (6.58). Tam na jeho výpočet treba využiť vektorový potenciál podľa výrazu (6.51). Grafický priebeh poľa v blízkom okolí slučky je na obr. 6.12b.



Obr. 6.15

Pojem magnetického momentu má rozhodujúcu úlohu pri štúdiu mikroskopických magnetických vlastností látok. Ako je známe, atómy, z ktorých sa látky skladajú, sú dynamické systémy zložené z elementárnych častíc. Tieto elektricky nabitú častice vykonávajú v atómoch zložitú cirkulačnú a rotačnú pohyby, správajú sa ako magnetické dipóly. K týmto otázkam sa vrátíme v časti o magnetických vlastnostiach látok.



Obr. 6.16

2. Magnetická indukcia na osi solenoidu. Solenoid je husto vinutá jednovrstvová valcová cievka polomeru R a dĺžky l s hustotou n závitov na jednotku dĺžky (pozri obr. 6.16). Ak vodičom solenoidu tečie prúd I , vzniká v jeho dutine a v okolí magnetické pole. Jednoducho sa pole analyzuje iba na osi solenoidu, kde indukcia má smer pozdĺž osi x , a v bode 0 možno veľkosť vektora magnetickej indukcie vypočítať ako superpozíciu polí nekonečne krátkych prstencových cievok dĺžky dx' . Každý takýto prstenec má ndx' závitov a tečie ním prúd $nI dx'$, podobne ako v jedinom závite v predchádzajúcej úlohe.

Prstenec vo vzdialenosti x' od bodu 0, ktorý z tohto bodu vidieť pod uhlom ϑ , vytvorí v bode 0 príspevok k magnetickej indukcii [pozri vzťah (6.48)]

$$dB = \frac{\mu_0 n I dx'}{2R} \sin^3 \vartheta \quad (6.61)$$

Tieto príspevky treba integrovať pozdĺž celého solenoidu. K tomu treba elementy dx' vyjadriť prostredníctvom uhlov ϑ a $d\vartheta$. Z obrázka vidieť, že

$$x' = R \cotg \vartheta$$

a

$$dx' = -\frac{R}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta$$

Dosadením za dx' vo výraze (6.61) po úprave dostaneme výraz

$$dB = -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \vartheta$$

Takéto príspevky treba integrovať pre všetky prstence pozdĺž solenoidu, vymedzené uhlami ϑ_2 až ϑ_1 , takže nakoniec dostaneme

$$B = -\frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2) \quad (6.62)$$

Ak uvážime, že

$$\cos \vartheta_1 = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad \cos \vartheta_2 = -\frac{l-x}{\sqrt{R^2 + (l-x)^2}}$$

možno výraz pre magneticкую indukciu napísať v tvare

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{R^2 + (l-x)^2}} \right] \quad (6.63)$$

Magneticкая indukcia na osi solenoidu je najväčšia v strede solenoidu ($x = l/2$) a klesá k nule pre $x \rightarrow \pm\infty$. Mimo osi solenoidu je výpočet magnetickej indukcie zložitý a vedie k podobným matematickým problémom ako v prípade jediného závit.

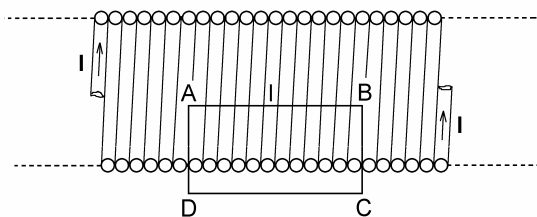
Ak je solenoid veľmi dlhý a tenký, teda ak platí $l \gg R$, možno pre vnútorné body okolo stredu položiť $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$. Pre túto oblasť podľa (6.62) má magneticкая indukcia jednoduchý výraz

$$B = \mu_0 n I \quad (6.64)$$

Čím je solenoid dlhší, tým presnejšie platí výraz (6.64) a pole v dutine solenoidu sa stáva homogénnejším. Pre nekonečne dlhý solenoid výraz (6.64) platí presne a dokonca nielen na osi, ale všade v dutine. Pole je homogénne, hoci to z našej doterajšej analýzy nevyplýva. Na výpočet magnetickej indukcie v nekonečne dlhom solenoide možno využiť Ampérov zákon (metóda b), ak prijme logický predpoklad, že pole vo vnútri nekonečného solenoidu je homogénne, s priamkovými indukčnými čiarami pozdĺž osi solenoidu začínajúcimi a končiacimi v nekonečnách. Z vonkajšej strany solenoidu musí byť pole nulové. Za týchto okolností možno pre integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ na solenoide vybrať integračnú dráhu po obdĺžniku $ABCD$ podľa obr. 6.17. Dráha obojína nl závitov a hodnota integrálu je

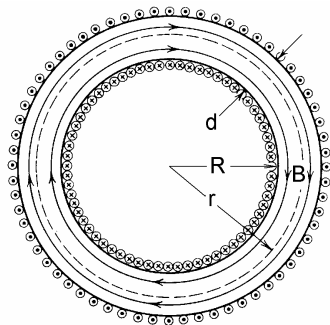
$$\oint_{ABCD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bl = \mu_0 n l I$$

z čoho plynie výraz (6.64).



Obr. 6.17

Cievky v tvare solenoidov sú veľmi častým prúdovým zdrojom magnetických polí.



Obr. 6.18

3. Magnetické pole toroidálnej cievky. Toroidálna cievka (toroid) je husto a radiálne navinutá cievka na prstenci ľubovoľného, obyčajne však kruhového prierezu. V priečnom reze je takýto toroid zobrazený na obr. 6.18, rozmery sú zrejmé z obrázka. V našich úvahách budeme predpokladať, že dutina toroidu je prázdna.

Na prvý pohľad sa zdá, že výpočet magnetického poľa je úloha veľmi zložitá, najmä ak by sa mala riešiť pomocou BSL zákona. Avšak magnetické pole toroidu je celé uzavreté

v dutine toroidu, indukčné čiary sú koncentrické kružnice s osou toroidu a ich polomery r spĺňajú podmienku

$$R < r < R + d$$

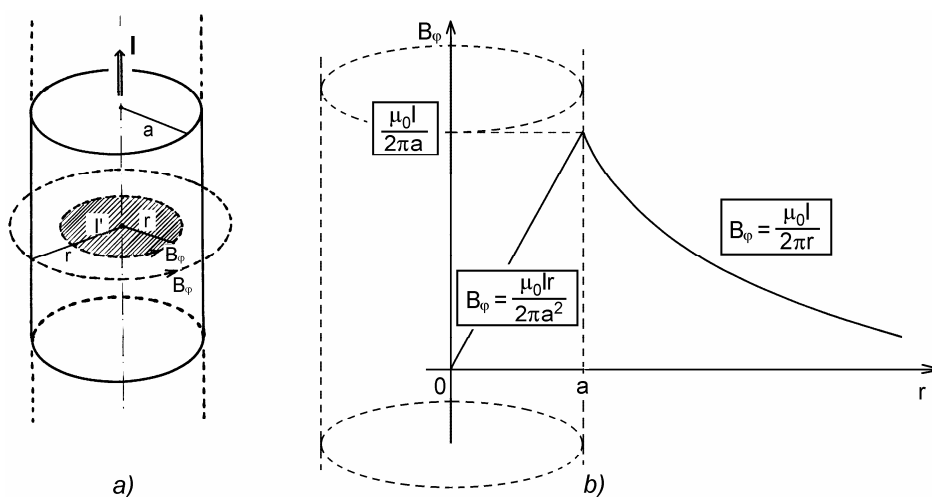
a to umožňuje na riešenie problému využiť Ampérov zákon. Pre každú indukčnú čiaru s polomerom r a s dĺžkou $l = 2\pi r$ môžeme podľa Ampérovho zákona písať

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 N I$$

N je celkový počet závitov toroidu, takže obopnutý prúd každou indukčnou čiarou je NI . Magnetická indukcia v dutine toroidu podľa posledného vzťahu je teda

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad (6.65)$$

V okolí toroidu je – prísne vzaté – tiež magnetické pole spôsobené pohybom nábojov po obvodě toroidu v dôsledku špirálového stúpania závitov (pozri úlohu 159). Toto pole je podobné ako pole jedného závitú, avšak v porovnaní s poľom v dutine je veľmi slabé.



Obr. 6.19

4. Magnetické pole vo vnútri valcového prúdovodiča. Pretože prúdová hustota je vo vnútri prúdovodiča nenulová, možno očakávať, že tam bude nenulové aj magnetické pole. V priamom vodiči polomeru a , v ktorom tečie prúd I s prúdovou hustotou $J = I/(\pi a^2)$, a ktorého časť je zobrazená na obr. 6.19a, budú magnetické indukčné čiary koncentrické kružnice s polomerom $r < a$. Ampérov zákon aplikovaný na takúto kružnicu vedie k výrazu

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B_\phi = \mu_0 I'$$

kde I' je prúd obopnutý uvažovanou indukčnou čiarou a jeho veľkosť je

$$I' = \pi r^2 J = \frac{r^2}{a^2} I$$

Dosadením do predchádzajúceho výrazu dostaneme

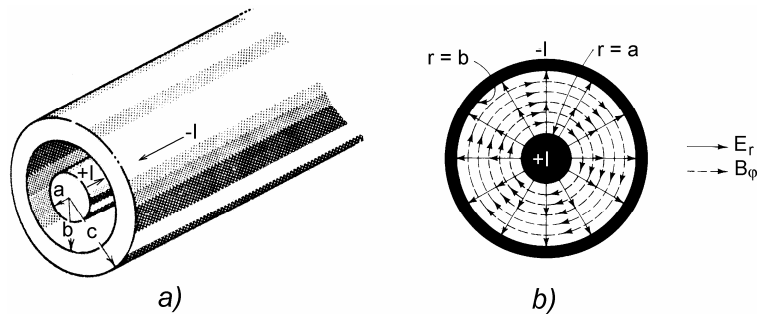
$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \quad (6.66)$$

Vo vnútri prúdovodiča je teda azimutálne magnetické pole, ktorého veľkosť narastá na osi vodiča od nuly k hodnote $B = \mu_0 I / (2\pi a)$. Výraz (6.66) sme už získali ako rotáciou vektorového potenciálu (6.41) v odseku 6.1.8. Na obr. 6.19b je graficky zobrazená závislosť B_φ od r v celom priestore – vo vnútri prúdovodiča a v jeho okolí.

Zaujímavý a dôležitý je prípad, ak prúdovodič má vo svojom vnútri koaxiálnu dutinu polomeru $a_0 < a$. Ak vodičom tečie prúd I , bude v jeho okolí magnetická indukcia podobne ako v prípade plného vodiča, vo vodiči bude indukcia klesať až na nulovú hodnotu pre $r = a$, a v dutine je magnetická indukcia rovná nule. Plyní to napr. z Ampérovho zákona, pretože ak zvolíme akúkoľvek uzavretú dráhu l v dutine, dráha neobopne žiadny prúd a

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

pre každé l . To je možné iba vtedy, ak v dutine $B = 0$.



Obr. 6.20

5. Magnetické pole v dutine koaxiálneho kábla. Ak sa do cylindrickej dutiny polomeru b prúdovodiča koaxiálne vloží druhý valcový vodič polomeru a , vznikne koaxiálny kábel alebo koaxiálne vedenie (pozri obr. 6.20a), ktoré sa dnes používa na prenos elektrických signálov do frekvencií až takmer 100 GHz ($1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$). Ak na vstupe kábla je pripojený ideálny zdroj EMN \mathcal{E} a na jeho vzdialenom konci odpor R , potečie káblom prúd $I = \mathcal{E}/R$, napríklad tak, ako je to na obr. 6.20a. Okolo vnútorného vodiča v dutine vznikne azimutálne magnetické pole s indukciou

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (6.67)$$

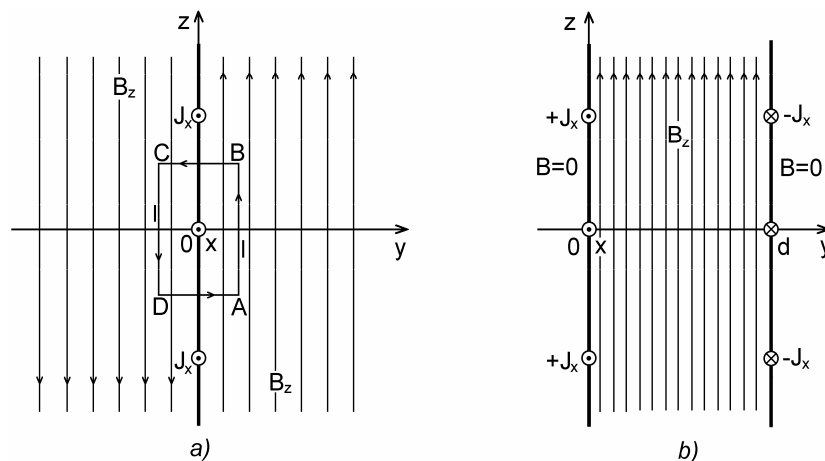
a v dôsledku rozdielu potenciálov valcov, ktorý je rovný napätiu IR , aj radiálne elektrické pole intenzity (obr. 6.20b).

$$E_r = \frac{\mathcal{E}}{r \ln \frac{b}{a}}$$

(pozri úlohu 39).

Z vonkajšej strany koaxiálneho kábla neexistuje ani elektrické ani magnetické pole, čo je dôsledok platnosti Gaussovho a Ampérovho zákona. Koaxiálny kábel je vhodným prostriedkom na prenos signálov bez vyžarovania, pretože elektromagnetické pole je uzavreté v dutine kábla, a takisto vonkajšie rušivé elektromagnetické polia nemôžu ovplyvniť signály v dutine kábla.

6. Magnetické pole v okolí nekonečnej prúdovej roviny a pole dvoch prúdových planoparalelných rovín. Ak v rovine xz ($y = 0$) pravouhlého súradnicového systému tečie plošný prúd J_x (v A/m) v smere osi x (pozri obr. 6.21a), v okolí roviny bude homogénne magnetické pole v smere osi $+z$ pre y kladné a v smere osi $-z$ pre y záporné.



Obr. 6.21

Na toto pole možno aplikovať Ampérov zákon s uzavretou obdĺžnikovou dráhou $ABCD$ podľa obrázka. K integrálu $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ prispievajú iba strany AB a CD obdĺžnika, teda

$$\oint_{ABCD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_z l + B_z l = \mu_0 J_x l$$

z čoho

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} J_x$$

a vo vektorovom tvare

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_x}{2} \frac{y}{|y|} \mathbf{k} \quad (6.68)$$

kde \mathbf{k} je jednotkový vektor v smere osi z . Takéto pole je homogénne na obidvoch stranách prúdovej roviny. Ak vo vzdialenosti d od tejto roviny ($d > 0$) umiestnime planoparalelne druhú rovinu s plošnou hustotou prúdu $-J_x$ (pozri obr. 6.21b), bude tento prúd prispievať tiež svojím magnetickým poľom a výsledné pole medzi rovinami ($0 < y < d$) bude

$$\mathbf{B} = \mu_0 J_x \mathbf{k} \quad (6.69a)$$

a v okolí dvojice bude pole nulové. Ak prúdy v obidvoch rovinách majú rovnaký smer, medzi rovinami je pole nulové a v okolí dvojice je pole s veľkosťou danou výrazom (6.69a), smery poľa na oboch stranách dvojice sú opačné. Keďže plošný prúd $J_x = \sigma v_x$, kde σ je plošný náboj na rovine a v_x jeho rýchlosť pozdĺž osi x , tiež platí

$$\mathbf{B} = \mu_0 \sigma v_x \mathbf{k} \quad (9.69b)$$

Možno si položiť otázku, aký má táto úvaha zmysel, keď nekonečné prúdové roviny neexistujú. Odpoveď je rovnaká ako v mnohých iných podobných prípadoch. Výraz (6.68) platí približne aj pre prúdové roviny konečných rozmerov, ak sa zaujímame o pole blízko roviny a ďaleko od jej okrajov. V prípade dvoch rovín konečnej šírky uložených veľmi blízko seba je magnetická indukcia v strednej oblasti daná približne výrazom (6.69). Ako príklad môžeme uviesť tzv. páskové vedenie (dva rovnobežné kovové pásiky s dielektrikom uprostred) určené na prenos signálov veľmi vysokých frekvencií až do mikrovlnovej oblasti (rádovo do 10 GHz). Možno ho vyrobiť z obojstranne plátovanej dosky plošných spojov. Ak je pomer šírky k hrúbke páskového vedenia dostatočne veľký, magnetické pole v jeho vnútri je približne homogénne a dané výrazmi (6.69). Pole leží v rovine dosky a je kolmé na smer prúdov vo vedení.

6.2 INTENZITA MAGNETICKÉHO POĽA

Pre opis magnetického poľa sa zavádza ešte jedna vektorová veličina – **vektor intenzity magnetického poľa \mathbf{H}** . Táto veličina sa dlhý čas vydávala za základný magnetický vektor (namiesto vektora \mathbf{B}). Dôvodom takého prístupu bolo dobové chápanie magnetických javov, keď bola snaha vysvetľovať magnetické pole ako produkt "magnetických nábojov". Istým dôvodom takého chápania bola aj stará, Gaussova sústava meracích jednotiek, v ktorej vektory \mathbf{B} a \mathbf{H} majú rovnaký rozmer, a nakoniec aj skutočnosť, že najviac študovanými magnetickými javmi bol magnetizmus permanentných magnetov, ktorých vonkajšie polia majú veľa spoločného s elektrostatickými poliami. Dnes vektor \mathbf{H} považujeme za pomocný magnetický vektor, vhodný a užitočný pri opise magnetických javov predovšetkým v látkových prostrediach, hlavne vo feromagnetikách.

Pojem intenzity magnetického poľa je pracovným pojmom predovšetkým feromagnetikov – technológov.

Pozrime sa na logické dôvody, ktoré vedú k zavedeniu vektora intenzity magnetického poľa \mathbf{H} . Z Ampérovho zákona v jeho integrálnej formulácii (6.27) až (6.29) plynie, že dráhový integrál magnetickej indukcie je úmerný iba dráhou obopnutému prúdu, kde konštanta úmernosti je magnetická konštanta poľa (permeabilita vákuu). Ak napr. rovnicu (6.27) vydělíme s μ_0 , dostaneme výraz

$$\oint_l \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} = I$$

Dráhový integrál nového **vektora intenzity magnetického poľa** (názov má historické korene)

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad [\text{A.m}^{-1}] \quad (6.70)$$

(a nie $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, ako sa to často píše), sa skutočne rovná iba obopnutému prúdu. Možno teda za definičný vzťah pre vektor intenzity magnetického poľa považovať výraz

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (6.71)$$

kde I je algebraický súčet všetkých prúdov vo vodičoch obopnutých dráhou l , prípadne integrálny prúd prúdovej hustoty prenikajúcej plochou S ohraničenou čiarou l (pozri obr. 6.11). Výraz (6.71) sa niekedy nazýva **zákon celkového prúdu**, pretože prúd I v najvšeobecnejšom prípade zahŕňa aj spomínaný, ale zatiaľ nezavedený posuvný prúd. Zákonu možno dať aj diferenciálny tvar

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (6.72)$$

kde \mathbf{J} je hustota celkového prúdu. Rozmer a jednotka A.m^{-1} pre vektor \mathbf{H} plynie z výrazu (6.71). Vo vákuu sa vektory \mathbf{B} a \mathbf{H} líšia iba multiplikatívnou rozmerovou konštantou $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ a preto je na mieste otázka, aký je vôbec zmysel vektora \mathbf{H} . Vo vákuu v statických poliach, pravdu povediac, žiadny! Zatiaľ čo \mathbf{B} je silový vektor, fyzikálny význam vektora \mathbf{H} nie je na prvý pohľad jasný. V tejto súvislosti si spomeňte, že s podobnými rozpakmi sme zavádzali v elektrostatike vektor elektrickej indukcie \mathbf{D} (pozri odsek 4.2). S interpretáciou vektora \mathbf{H} vznikajú vážne problémy v permanentných magnetoch, kde $I = 0$. Vektor \mathbf{H} zavádzame na tomto mieste iba kvôli kontinuite výkladu. **Magnetickú intenzitu doteraz analyzovaných polí môžeme získať, ak všetky odvodené výrazy pre magnetickú indukciu jednoducho vydělíme s μ_0 .**

Iná situácia je v látkových prostrediach. Ampérov zákon (6.29) a (6.30) aplikovaný v látkovom prostredí musí svojou pravou stranou odrážať aj magnetické vlastnosti uvažovaného prostredia. Vlastnosti prostredia môžu byť mnohoraké. V takom prostredí je dobre definovať vektor, ktorý závisí iba od magnetizujúceho (voľného) prúdu, teda vektor \mathbf{H} . Makroskopický parameter, ktorý odráža magnetické vlastnosti látky, sa nazýva permeabilita prostredia

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (6.73)$$

kde μ_r je relatívna permeabilita, ktorá môže byť číselnou bezrozmernou konštantou, tenzorom, môže závisieť od \mathbf{B} resp. \mathbf{H} , prípadne môže byť aj funkciou súradníc a času. Závisí to od druhu látky a od jej magnetického stavu. V jednoduchých látkových prostrediach má Ampérov zákon tvar

$$\oint_l \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (6.74)$$

a vektor intenzity magnetického poľa

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (6.75)$$

Výrazom (6.74) a (6.75) bude venovaná väčšia pozornosť v kapitole 8 o magnetizme látkových prostredí. Rovnice (6.71) a (6.72) platia univerzálne, bez ohľadu na prostredie, \mathbf{H} teda závisí od prúdu a veličiny \mathbf{B} a μ závisia od magnetických vlastností prostredia. Pod uvažovaným prúdom sa tu rozumie iba nami kontrolovaný (voľný) prúd, prípadne aj posuvný prúd a nie napríklad atomárne, prípadne molekulárne (viazané) prúdy v látkach. V tom spočíva význam vektora intenzity magnetického poľa v látkových prostrediach.

6.3 MAXWELLOV POSUVNÝ PRÚD

Pri tvorbe jednotnej teórie elektromagnetického poľa v šesťdesiatych rokoch minulého storočia si jej tvorca James Clerk Maxwell všimol, že Ampérov zákon pre statické prúdy vyjadrený vo vákuu napr. rovnicou

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (6.76)$$

(pozri odsek 6.1.6) nie je konzistentný so zákonom zachovania elektrického náboja, ktorý možno vyjadriť rovnicou spojitosti elektrického prúdu

$$\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (6.77)$$

(pozri odsek 5.1.2). Ak sa totiž na rovnicu (6.76) aplikuje divergencia, výsledok je v rozpore s rovnicou (6.77). Platí totiž

$$\text{div rot } \mathbf{B} = \mu_0 \text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (6.78)$$

pretože divergencia rotácie akéhokoľvek vektora sa rovná nule. Rovnica (6.78) platí iba pre stacionárne prúdy. Maxwell intuitívne cítil, že na pravej strane rovnice (6.76) k prúdovej hustote \mathbf{J} treba pripočítať nejakú rozmerovo rovnakú veličinu, a až divergencia súčtu týchto veličín sa rovná nule. Takáto možnosť sa ponúkla, keď uvážil, že podľa Gaussovho zákona

$$\rho = \text{div } \mathbf{D} \quad (6.79)$$

(pozri odsek 4.2). Vyjadrenie (6.79) dosadil do (6.77) a dostal

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

alebo po úprave

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.80)$$

Výraz v zátvorke je tou hľadanou veličinou – je to celková prúdová hustota

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_p \quad (6.81)$$

ktorá musí v rovnici (6.76) nahradiť prúdovú hustotu \mathbf{J} . Veličina

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6.82)$$

sa nazýva **hustota posuvného (Maxwellovho) prúdu**. Ak dosadíme vyjadrenie (6.81) do (6.76), dostaneme

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (6.83)$$

Ak sa divergencia aplikuje na túto rovnicu, bude splnený zákon zachovania náboja, a aj Gaussov zákon. Rovnica (6.83) sa obyčajne píše pre vektor intenzity magnetického poľa \mathbf{H} , teda

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6.84)$$

a často sa nazýva **zákon celkového prúdu v diferenciálnom tvare**. Je to ďalšia zo série Maxwellových rovníc vo svojom konečnom tvare. Možno ju prepísať do integrálneho tvaru, ak výraz (6.84) integrujeme po ploche S ohraničenej čiarou l a použijeme Stokesovu vetu. Dostaneme

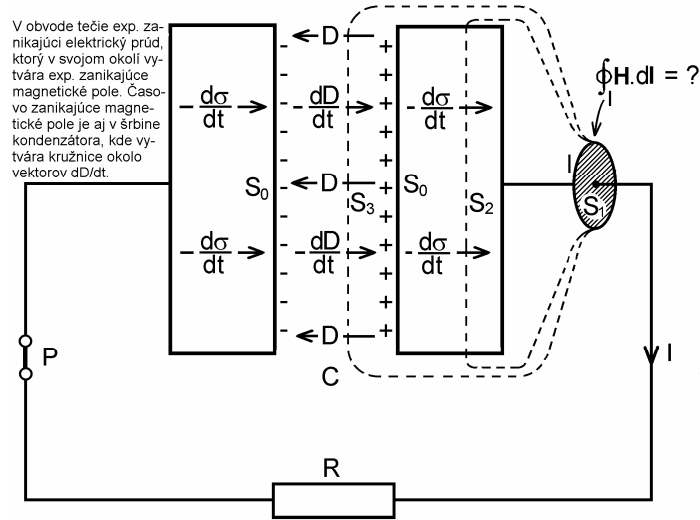
$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = I + I_p \quad (6.85)$$

Prúd I je celkový prúd elektrických nábojov prenikajúci plochou S a ohraničený čiarou l . Podobne

$$I_p = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.86)$$

je **posuvný prúd**. Ako už bolo spomínané, pojem "posuvný prúd" má historický pôvod. Zaviedol ho ešte Maxwell na vyjadrenie posuvu nábojových centier dipólov pri polarizácii dielektrík. Význam pojmu sa však stráca vo vákuu, kde niet dipólov, ale napriek tomu môže existovať nenulové $\partial \mathbf{D} / \partial t = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$.

Z rovnice (6.84) vidíme, že na produkcii magnetického poľa sa v istom pomere zúčastňujú obidve prúdové hustoty. Vo vákuu, bez prítomnosti nábojov, je magnetické pole závislé iba od $\partial \mathbf{D} / \partial t$, naopak, v dobrých vodičoch je elektrická indukcia \mathbf{D} obyčajne malá, a ak jej časové zmeny sú pomalé, možno posuvný prúd oproti vodivému zanedbať. V ostatných prípadoch majú obidve prúdové hustoty porovnateľný podiel na tvorbe magnetického poľa.



Obr. 6.22

Pokúsime sa teraz Maxwellov predpoklad o existencii posuvného prúdu dokázať myslenným experimentom. Na obr. 6.22 je znázornený jednoduchý obvod pozostávajúci z kondenzátora C a rezistora R . Kondenzátor pozostáva z masívnych rozmerných ideálne vodivých dosiek s čelnou plochou S_0 uložených v istej vzdialenosti. Celý elektrický odpor obvodu je sústredený v rezistore R . V čase $t = 0$ je na kondenzátore nejaký náboj a zopne sa spínač P . V obvode začne tiecť časovo premenný, exponenciálne zanikajúci prúd

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = S_0 \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

kde $Q(t) = S_0 \sigma(t)$ je okamžitý náboj na kondenzátore a $\sigma(t)$ je plošná hustota náboja na čelných plochách kondenzátora. Prúd v obvode vytvorí v celom priestore, v prúdovodiči, v masívnych doskách (predpokladáme, že nie sú feromagnetické), aj v priestore medzi doskami magnetické pole, ktoré bude s časom takisto zanikať. Vytvorme okolo prúdovodiča uzavretú dráhu l v tvare kružnice a položíme si otázku, čím je daná hodnota integrálu $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ po dráhe l . Podľa výrazu (6.85) je jeho hodnota daná celkovým obopnutým prúdom, presnejšie tým prúdom, ktorý preteká plochou S napnutou na čiaru l . Lenže takých plôch je ľubovoľné množstvo. Môže to byť kruhová plocha S_1 , ktorou prechádza prúdovodič alebo plocha S_2 prechádzajúca masou dosky kondenzátora, ale nie je vylúčená ani plocha

S_3 prechádzajúca vnútro kondenzátora, a tú žiadny vodivý prúd nepretína. Plochou S_1 preteká prúd

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

plochou S_2 rovnaký prúd

$$I = S_0 \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

V treťom prípade plochou S_3 musí tiecť veličina, ktorá s plošnou hustotou náboja σ priamo súvisí. V dutine kondenzátora elektrická je indukcia $D = \sigma$, takže plochou S_3 tečie veličina

$$I_p = S_0 \frac{dD}{dt} = S_0 \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dQ}{dt} = I$$

Treba si všimnúť, že zatiaľ čo vektor \mathbf{D} smeruje sprava doľava (od kladnej elektródy k zápornej), $d\mathbf{D}/dt$ smeruje naopak, pretože prúd I , plošná hustota náboja σ a tým aj \mathbf{D} s časom klesajú. Smer $d\mathbf{D}/dt$ je teda taký istý ako smer prúdu kladných nábojov v obvode.

Hodnota integrálu $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ môže byť skutočne daná buď integrálom prúdovej hustoty

vodivého prúdu $J = d\sigma/dt$ vo vodičoch, alebo prúdovej hustoty posuvného prúdu $J_p = dD/dt$ v dielektriku alebo vo vákuu. Ak tieto prostredia nie sú oddelené (ako je to v uvažovanom obvode), potom sa na tvorbe integrálu podieľajú súčasne obidva prúdy, tak ako to stanovuje rovnica (6.84) alebo rovnica (6.85).

Dôležitý význam posuvného prúdu ako veličiny úmernej $\partial\mathbf{D}/\partial t$ spočíva v tom, že je spolu s elektromagnetickou indukciou predpokladom pre vznik elektromagnetických vln, ktorých existenciu predpovedal Maxwell v roku 1864.¹ Tie krátko po vzniku Maxwellovej teórie v roku 1888 objavil experimentálne nemecký fyzik H. Hertz.²

6.4 SILOVÉ ÚČINKY MAGNETICKÝCH POLÍ NA PRÚDOVÉ OBVODY

V odseku 6.1.1 sme konštatovali, že v magnetickom poli pôsobí na pohybujúci sa náboj sila. Z praktického hľadiska sú neobyčajne dôležité sily, ktorými magnetické pole pôsobí na náboje pohybujúce sa v prúdovodičoch (drôtoch), teda sily pôsobiace na elektrické prúdy. Takéto silové pôsobenie je totiž základom funkcie každého elektrického motora, magnetoelektrických a elektrodynamických meracích prístrojov, rôznych servoelementov a i. Sila pôsobiaca na náboje sa prenáša na ich nosiče, teda na prúdovodiče. Silové pôsobenie na vodič môže byť veľmi zložitú, závislé od konfigurácie magnetického poľa a od prúdovej cesty, ktorou je obyčajne uzavretý prúdový obvod.

¹ Maxwell, J. C., Phil. Magazine 155 (1864)

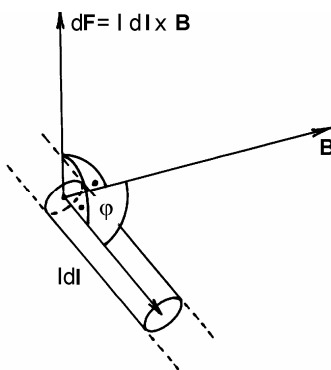
² Hertz, H.: Kräfte elektrischer Schwingungen behandelt nach Maxwellschen Theorie, Ann. d. Physik (1888)

Na obr. 6.23 je znázornený element prúdovodiča Idl , ktorý je v magnetickom poli indukcie \mathbf{B} . Na každý náboj prúdového elementu pôsobí magnetická sila daná výrazom (6.6), a ak je v elemente celkový náboj $dQ = Idt$, ktorý má rýchlosť $\mathbf{v} = dl/dt$, elementárna sila pôsobiaca na element je

$$d\mathbf{F} = dQ\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

alebo

$$d\mathbf{F} = Idl \times \mathbf{B} \quad (6.87)$$



Obr. 6.23

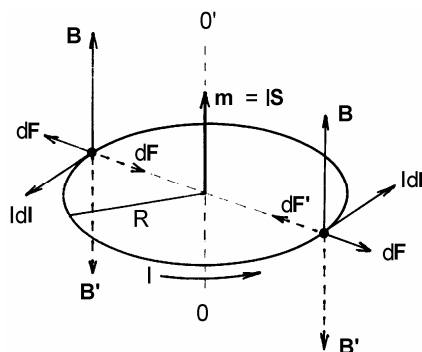
s veľkosťou $dF = IBdl \sin \varphi$, kde φ je uhol medzi $d\mathbf{l}$ a \mathbf{B} . Ako vidíme, magnetická sila na vodič je úmerná prúdu I , magnetickej indukcii \mathbf{B} v mieste elementu a rozhodujúcim spôsobom závisí od uhla medzi $d\mathbf{l}$ a \mathbf{B} . Ak element $d\mathbf{l}$ je kolmý na \mathbf{B} ($\varphi = \pi/2$) sila je v danom mieste maximálna, má veľkosť $dF = IBdl$ a smeruje kolmo na rovinu vektorov $d\mathbf{l}$ a \mathbf{B} v smere vektorového súčinu $d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. Ak prúdový element smeruje pozdĺž magnetickej indukčnej čiary, sila je nulová (pozri tiež obr. 6.5 a,b).

Silové pôsobenie magnetického poľa na elektrický prúd a jeho prostredníctvom na prúdovodič objavil A. M. Ampère takmer súčasne s Oerstedovými objavmi, a preto sa výraz (6.87) niekedy nazýva **Ampérov silový zákon**.

6.4.1 Prúdová slučka v magnetickom poli

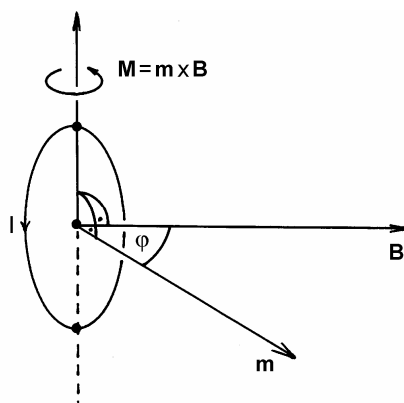
Na kruhovej prúdovej slučke budeme ilustrovať silové účinky magnetického poľa na prúdový obvod. Výsledky, ktoré dosiahneme, majú význam pre pochopenie vlastností sily (6.87), ale súčasne poskytujú informáciu o účinkoch magnetického poľa na magnetický dipól. Najprv predpokladajme, že v homogénnom magnetickom poli indukcie \mathbf{B} sa nachádza jednoduchý kruhový prúdovodič polomeru R s prúdom I ako na obr. 6.24, pričom os závitú splyva so smerom vektora \mathbf{B} . Ak na obvode závitú vyznačíme dva prúdové elementy Idl , potom na každý element pôsobí radiálna sila $d\mathbf{F} = Idl \times \mathbf{B}$ všade rovnako veľká, teda $dF = IBdl$. Výsledná translačná sila na závit je nulová a silový účinok poľa sa prejaví iba radiálnym napínaním prúdovej dráhy (napínaním prúdovodiča).

Prúdový závit v homogénnom poli možno považovať za "magnetický dipól" s magnetickým momentom veľkosti $m = IS = \pi R^2 I$, ktorý pri danej orientácii prúdu smeruje nahor, teda v smere vektora magnetickej indukcie \mathbf{B} (vyznačené plnými šípkami). Magnetické pole má tendenciu zväčšiť magnetický moment, teda zväčšiť plochu S (podobne ako elektrické pole má tendenciu zväčšiť moment elektrického dipólu, t. j. zväčšiť jeho dĺžku d). Ak sa zmení smer prúdu alebo poľa (prerušované šípky), zmení sa smer sily (závit bude stláčaný). Je zaujímavé, že radiálna sila bude pôsobiť na závit aj vtedy, ak vonkajšie pole neexistuje. Vtedy je závit napínaný vlastným magnetickým poľom. Možno povedať, že prúdový závit (magnetický dipól) má svoju vlastnú vnútornú energiu.



Obr. 6.24

Ešte zaujímavejší je prípad, ak os závitu (teda jeho magnetický moment \mathbf{m}) zvierá s vektorom \mathbf{B} nenulový uhol φ (pozri obr. 6.25). Jednoduchým výpočtom pomocou vzťahu (6.87) možno dokázať, že v takom prípade na závit pôsobí magnetické pole silovým točivým momentom



Obr. 6.25

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (6.88)$$

s veľkosťou $M = mB \sin\varphi$, kde φ je uhol medzi \mathbf{m} a \mathbf{B} . Výraz (6.88) môžeme napísať priamo, pretože magnetické pole "magnetického dipólu" je formálne rovnaké ako pole

elektrického dipólu. Výraz (6.88) je analógom výrazu (2.121). Točivý moment (6.88) je maximálny $M_{max} = mB$ vtedy, keď je dipólový moment kolmý na smer poľa a má tendenciu natočiť dipól do smeru magnetickej indukcie \mathbf{B} tak, že vektory \mathbf{m} a \mathbf{B} budú mať rovnaký smer. Vtedy točivý moment (6.88) vymizne ($\varphi = 0$, $M_{min} = 0$) a dipól je v stabilnej polohe.

Vo využívaní analógií možno pokračovať a napísať výraz pre translačnú silu \mathbf{F} , ktorou na magnetický moment pôsobí nehomogénne magnetické pole

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \text{grad})\mathbf{B} \quad (6.89)$$

alebo v zložkách

$$F_x = \mathbf{m} \cdot \text{grad } B_x$$

$$F_y = \mathbf{m} \cdot \text{grad } B_y, \quad (6.90)$$

$$F_z = \mathbf{m} \cdot \text{grad } B_z$$

[porovnaj s výrazom (2.122)]. Takáto sila má tendenciu posúvať dipól do miest, kde je pole homogénne, teda tam, kde sa gradienty zložiek indukcie \mathbf{B} rovnajú nule. Tam sa dipól otočí do smeru \mathbf{B} , a to je jeho stabilná poloha.

Analogickou veličinou je aj potenciálna energia magnetického dipólu v magnetickom poli

$$W = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -mB \cos \varphi \quad (6.91)$$

[porovnaj s výrazom (2.120)]. Podobne ako v elektrickom poli, dipól v magnetickom poli má maximálnu potenciálnu energiu $W_{max} = mB$ ak je otočený proti smeru poľa ($\varphi = \pi$); nulovú $W = 0$ ak dipól leží v poli kolmo na smer \mathbf{B} ($\varphi = \pi/2$); a minimálnu $W_{min} = -mB$ ak je otočený v smere poľa ($\varphi = 0$). Odporúčam čitateľovi do pozornosti skutočnosť, že ak sa na dipól dívame ako na prúdovú slučku s prúdom I , má v magnetickom poli potenciálnu energiu

$$W = -I\Phi \quad (6.92)$$

kde $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ je indukčný tok prenikajúci plochou S obopnutou prúdom I .

Pojem magnetického momentu je základným pojmom, na ktorom je založená mikroskopická teória magnetizmu látok. Spolu s pojmom elektrického dipólu umožňujú vytvoriť celkový elektromagnetický obraz neživej aj živej prírody, pritom tento obraz je dvojjediný, závislý od uhla pohľadu na prírodu.

6.4.2 Vzájomné silové pôsobenie elektrických prúdov

Definícia jednotky ampér (A)

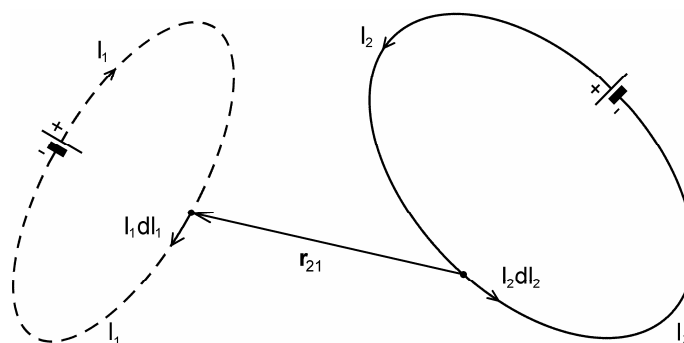
Dôležitý prípad silového pôsobenia je vzájomné pôsobenie prúdov, ak magnetická indukcia vo výraze (6.87) je daná iným prúdom, tečúcim v nejakom uzavretom elektrickom obvode l_2 (pozri obr. 6.26). Magnetická indukcia \mathbf{B}_1 v mieste prúdového elementu $I_1 d\mathbf{l}_1$ od prúdového obvodu l_2 sa dá vypočítať využitím BSL zákona. Spojením výrazov (6.16) a (6.87) dostaneme výraz pre elementárnu silu $d\mathbf{F}_1$ pôsobiacu na prúdový element $I_1 d\mathbf{l}_1$ obvodu l_1 v tvare

$$d\mathbf{F}_1 = I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_1 = I_1 d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \quad (6.93)$$

kde význam symbolov plynie z obr. 6.26. Ďalšia integrácia cez obvod l_1 sa obyčajne nerobí, pretože v pevnom obvode l_1 by sa sčítavali silové účinky s rôznymi pôsobiskami bez uváženia silových momentov na slučku.

Dôležitým prípadom je silové pôsobenie medzi nekonečne dlhými priamymi paralelnými prúdovodičmi s rovnakými prúdmi $I_1 = I_2 = I$, uloženými vo vzájomnej vzdialenosti a . Podľa výrazu (6.18) magnetická indukcia od jedného v mieste druhého prúdovodiča je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$



Obr. 6.26

Táto magnetická indukcia vyvolá na dĺžku Δl druhého vodiča magnetickú silu

$$\Delta F = I \Delta l B = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \Delta l$$

Sila na jednotku dĺžky prúdovodiča má veľkosť

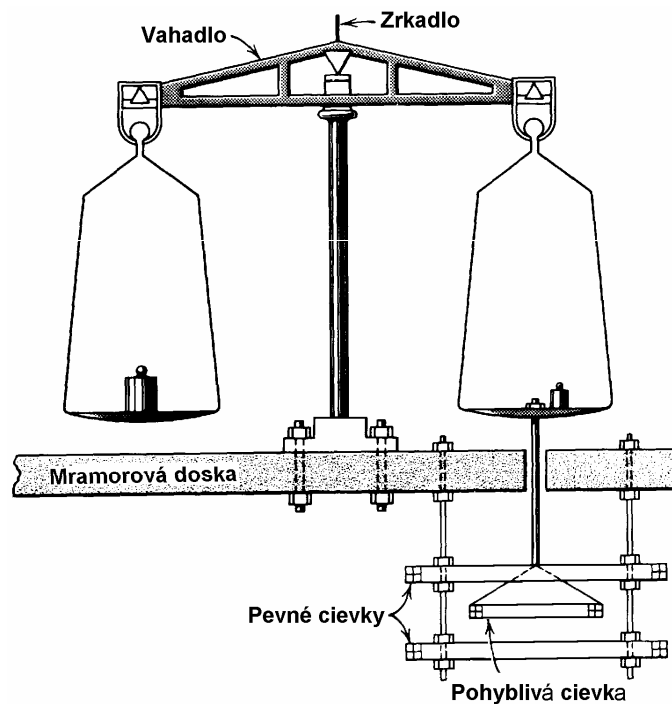
$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \quad (6.94)$$

má príťažlivý alebo odpudivý charakter podľa vzájomnej orientácie prúdov vo vodičoch a závisí iba od veľkosti prúdov I a vzájomnej vzdialenosti prúdovodičov a . Tento vzťah slúži na definíciu jedinej elektromagnetickej základnej jednotky sústavy SI, jednotky pre elektrický prúd. Ak vzdialenosť medzi vodičmi zvolíme pevnú, veľkosť $a = 1$ m, tak vo vzťahu medzi silou a prúdom vystupuje jediná, zatiaľ neurčená konštanta μ_0 , ktorej hodnotu možno vybrať ľubovoľne, napríklad tak, aby zohľadňovala predtým používané jednotky prúdu, požiadavky praxe a aby pri celočíselných hodnotách sily mal prúd takisto celočíselnú hodnotu. S uvažovaním týchto požiadaviek možno číselnú hodnotu μ_0 vybrať takto

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \quad (6.95)$$

kde H je jednotka indukčnosti, ktorá bude určená neskôr. Potom možno výraz (6.94) prepísať na číselný vzťah

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2 \cdot 10^{-7} I^2$$



Obr. 6.27

z ktorého vidieť, že ak sila na jednotku dĺžky medzi prúdovodičmi má hodnotu $\Delta F/\Delta l = 2 \cdot 10^{-7}$ newtonov na jednotku dĺžky (N.m^{-1}), treba hodnotu prúdu považovať za jednotkovú, teda $I = 1$ jednotka. Táto jednotka bola na počesť francúzskeho fyzika a učenca André Marie Ampère nazvaná ampér (A).

Na základe uvedených úvah môžeme vysloviť definíciu jednotky elektrického prúdu:

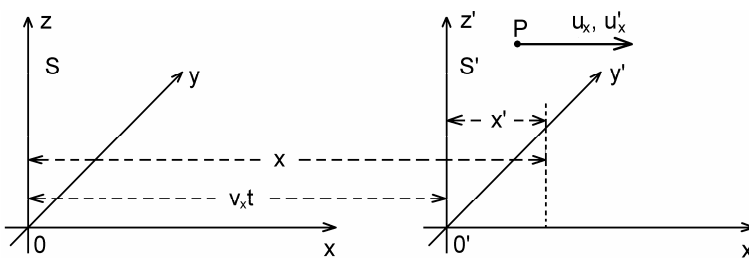
Jeden ampér (1 A) je elektrický prúd, ktorý pri stálom prietoku dvoma paralelnými priamymi nekonečne dlhými vodičmi zanedbateľného kruhového prierezu, umiestnenými vo vákuu vo vzdialenosti 1 m, vyvolá medzi vodičmi silu $2 \cdot 10^{-7}$ N na jeden meter dĺžky.

Meranie sily medzi priamymi veľmi dlhými vodičmi je nepraktické, a preto ako štandard alebo **etalón prúdu**, boli vyvinuté precízne **prúdové (Ampérove) váhy**, určené na kalibráciu prúdových meracích prístrojov (ampérmetrov). Na obr. 6.27 sú znázornené váhy, ktoré sa na meranie prúdu používajú v metrologických centrách na celom svete. Základ váh tvorí trojica precízne vinutých prstencových cievok. Dve cievky sú pevné, uchytené na masívnom mramorovom stole, tretia pohyblivá je zavesená na vahadle dvojramenných váh a zasahuje medzi dve predchádzajúce. Cievky sú zapojené tak, že meraný prúd je spoločný všetkým trom. Váhy sa vyvažujú bežne závažiami a prúd sa z nameranej sily vypočítava zložitými výpočtami.

6.5 LORENTZOVE TRANSFORMÁCIE ELEKTROMAGNETICKÝCH POLÍ

Naše úvahy o magnetických poliach sme začali prekvapujúcim zistením, že magnetické silové pôsobenie má relativistický charakter, že pozorovatelia v rôznych pohybových stavoch pozorujú rôzne silové účinky. Z toho vyplýva, že aj samotné magnetické polia majú relativistický charakter, a pojalo nás podozrenie, že relativistické je aj elektrické pole. Bude preto nanajvýš užitočné podrobnejšie preskúmať, aké polia pozorujú dvaja pozorovatelia – jeden spojený s pevnou sústavou S pravouhlých súradníc x, y, z , a druhý spojený so sústavou S' (čiarkovaných súradníc), ktorá sa voči sústave S pohybuje rýchlosťou v_x pozdĺž súradnice x podľa obr. 6.28. Budeme vychádzať zo všeobecnej platnosti Lorentzových relativistických transformačných vzťahov medzi súradnicami pevnej a pohyblivej sústavy. Ak zavedieme označenie $\beta = v_x/c$ (c je rýchlosť svetla vo vákuu), transformačné vzťahy medzi súradnicami budú mať tvar

$$x' = \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad y' = y \quad z' = z \quad (6.96a)$$



Obr. 6.28

a čas sa transformuje podľa vzťahu

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.96b)$$

Je dobre si uvedomiť, že ak sa zmení v_x na $-v_x$, zmenia sa čiarkované súradnice a čas na nečiarkované, a naopak.

Lorentzove transformácie majú tri zaujímavé a veľmi dôležité dôsledky:

1. Vektorové sčítavanie rýchlostí je neplatné a musí byť nahradené zložitejším vzťahom. Ak sa v sústave S' pohybuje objekt P (častica, bodový náboj a pod., pozri obr. 6.28) rýchlosťou u'_x , potom v sústave S sa ten istý objekt P pohybuje rýchlosťou

$$u_x = \frac{u'_x + v_x}{1 + \frac{u'_x v_x}{c^2}} = \frac{u'_x + v_x}{1 + \beta'_u \beta} \quad (6.97)$$

kde $\beta'_u = u'_x/c$. (Ak $u'_x = c$, potom aj $u_x = c$, zatiaľ čo pri Galileiho transformácii $u_x = c + v_x$).

2. Dĺžka objektu (dráhy) pre pozorovateľa, ktorý sa pohybuje, je vždy kratšia, ako pre pozorovateľa v systéme spojenom s objektom, teda

$$\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - \beta^2} < \Delta l' \quad (6.98)$$

(Lorentzova-FitzGeraldova kontrakcia dĺžok).

3. Časové úseky pre pozorovateľa v pevnej sústave sú vždy dlhšie ako pre pozorovateľa v pohybujúcej sa sústave, teda

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} > \Delta t' \quad (6.99)$$

(Einsteinova dilatácia času).

Tieto základné princípy teórie relativity a skutočnosť že elektrický náboj je relativistický invariant využijeme pri hľadaní odpovede na otázku: Aké elektrické a magnetické polia \mathbf{E}' a \mathbf{B}' bude pozorovať pozorovateľ v sústave S' , ak pozorovateľ v sústave S pozoruje polia \mathbf{E} a \mathbf{B} ?

Pre naše úvahy využijeme najjednoduchšie typy homogénnych elektrických a magnetických polí, ktoré sme spoznali v našich doterajších úvahách. Je to elektrické pole medzi homogénne plošne nabitými, nekonečne veľkými rovinami, dané výrazom (2.48) a magnetická indukcia medzi týmito rovinami daná výrazom (6.69), ak sa náboje pohybujú vybraným smerom. Napríklad

$$\mathbf{E} = E_y \mathbf{j} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{j} \quad \mathbf{B} = B_z \mathbf{k} = \mu_0 J_x \mathbf{k} = \mu_0 \sigma v_x \mathbf{k} \quad (6.100)$$

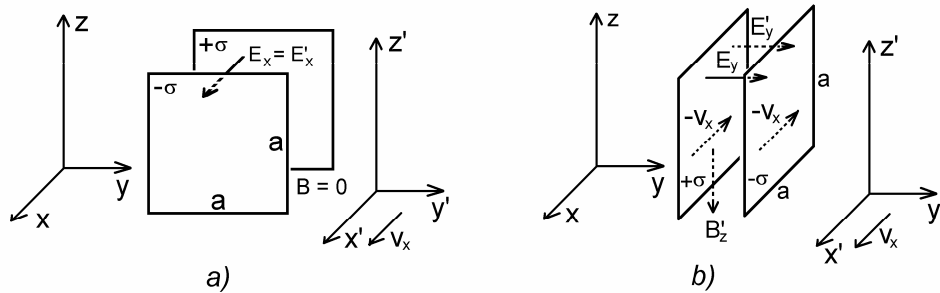
kde σ je plošná hustota náboja, v_x je jeho rýchlosť, \mathbf{j} je jednotkový vektor v smere osi y a \mathbf{k} jednotkový vektor v smere osi z . V uvedenom prípade je dvojica nabitých rovín planoparalelná s rovinou xz . Využitím týchto jednoduchých polí a zákona superpozície možno dokázať transformačné vzťahy medzi zložkami polí v sústavách S a S' , ktoré sú ináč výsledkom nie jednoduchých úvah teórie elektromagnetického poľa. Využijeme pritom tiež skutočnosť, že náboj je relativistický invariant, t. j. jeho veľkosť nezávisí od pohybového stavu.

Predpokladajme, že na nekonečných planoparalelných rovinách sú rozložené náboje s plošnou hustotou $\pm\sigma$. V S – sústave vyjadríme túto hustotu ako pomer náboja Q , ktorý je rozložený na ploche štvorca so stranou a , teda

$$\sigma = \frac{Q}{a^2} \quad (6.101)$$

V ďalšom budeme pracovať s týmto vybraným štvorcovým "kondenzátorom" s plochou $A = a^2$ v S -sústave. "Kondenzátor" budeme otáčať do troch navzájom kolmých smerov, čím budeme postupne vytvárať polia pozdĺž jednotlivých súradníc x , y , z . Na obr. 6.29a je kondenzátor svojimi plochami uložený v rovine yz a vytvára elektrické pole

$$E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.102)$$



Obr. 6.29

V sústave S je náboj na kondenzátore v pokoji, a preto tento pozorovateľ nepozoruje žiadne magnetické pole, teda

$$\mathbf{B} = 0 \quad (6.103)$$

Pre pozorovateľa v sústave S' sa skracujú dĺžky v smere osi x' , teda nabité plochy sa približujú. Keďže pole nekonečného kondenzátora nezávisí od vzdialenosti nabitých rovín, bude aj tento pozorovateľ pozorovať rovnaké pole, teda

$$E'_x = E_x \quad (6.104)$$

V smere pohybu obidvaja pozorovatelia vidia rovnaké elektrické a žiadne magnetické pole.

Otočme teraz kondenzátor do roviny xz ako na obr. 6.29b. V S – sústave teraz existuje elektrické pole

$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.105)$$

a žiadne magnetické pole. Iná situácia však nastala pre pozorovateľa S' . Pre neho sa v smere osi x dĺžky skracujú a pôvodný vybraný štvorec z nekonečného kondenzátora sa redukuje na obdĺžnik s plochou

$$A' = a^2 \sqrt{1 - \beta^2}$$

Keďže náboj je invariantný, musí sa pre pozorovateľa v S' zvýšiť hustota náboja na hodnotu

$$\sigma' = \frac{Q}{a^2 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

a pozorovateľ vidí v kondenzátore elektrické pole intenzity

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.106a)$$

ktoré je väčšie ako to, čo vidí pozorovateľ v S . Zaujímavé je, že pozorovateľ v S' pozoruje aj magnetické pole, pretože z jeho hľadiska sa náboje $\pm\sigma'$ pohybujú rýchlosťou $-v_x$ a na rovinách vytvárajú plošný prúd $J_x' = \pm\sigma'v_x$. Medzi rovinami v S' je s ohľadom na (6.100) magnetické pole indukcie

$$B'_z = -\mu_0 J_x' = -\mu_0 \sigma' v_x = -\frac{\mu_0 \sigma v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 E_y v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Ak uvážime, že $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, možno pre magnetickú indukciu napísať konečný výraz

$$B'_z = -\frac{v_x E_y}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.106b)$$

Nakoniec otočíme kondenzátor do roviny xy a urobíme podobné úvahy pre novú situáciu. Čitateľ sa môže presvedčiť, že pozorovatelia v S a S' pozorujú nasledovné elektrické a magnetické polia:

– v S – sústave

$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \mathbf{B} = 0 \quad (6.107)$$

– v S' – sústave

$$E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad B'_y = \frac{v_x E_z}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \quad (6.108)$$

Zaved'me označenie

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= E_x \mathbf{i} & E'_{\parallel} &= E'_x \mathbf{i} \\ B_{\parallel} &= B_x \mathbf{i} & B'_{\parallel} &= B'_x \mathbf{i} \end{aligned} \quad (6.109)$$

pre zložky poľa pozdĺžne so súradnicou x , resp. x' , a označenie

$$E_{\perp} = E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \quad E'_{\perp} = E'_y \mathbf{j} + E'_z \mathbf{k} \quad (6.110a)$$

$$B_{\perp} = B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} \quad B'_{\perp} = B'_y \mathbf{j} + B'_z \mathbf{k} \quad (6.110b)$$

pre zložky poľa priečne k súradnici x (vo všeobecnosti priečne k tej súradnici, pozdĺž ktorej sa sústava S' pohybuje). S využitím týchto označení pri superpozícii získaných zložiek polí dostaneme výrazy, podľa ktorých sa elektrostatické pole pevného pozorovateľa v sústave S transformuje na polia pohyblivého v sústave S' . Tieto výrazy sú

$$\boxed{\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} & B'_{\parallel} &= B_{\parallel} = 0 \\ E'_{\perp} &= \frac{E_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}} & B'_{\perp} &= \frac{-(v \times E)_{\perp}}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}} \quad (6.111)$$

Vidíme, že v tomto najjednoduchšom prípade, ak pevný pozorovateľ v S -sústave pozoruje iba elektrostatické pole, pohyblivý spojený so sústavou S' pozoruje okrem elektrického aj magnetické pole. Toto magnetické pole ako dôsledok pohybu v elektrickom poli spájame s pojmom posuvného prúdu.

Zaujímavý a dôležitejší je prípad, ak magnetické pole existuje aj v pevnej sústave S , t. j. v pevnej sústave tečú elektrické prúdy. Vytvorený kondenzátor umiestnime v rovine xz tak, ako na obr. 6.30 a plošný náboj $\pm\sigma$ v pevnej sústave S necháme na ňom tiecť v smere osi x rýchlosťou u_x . V priestore kondenzátora bude elektrické pole

$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.112)$$

a magnetické pole

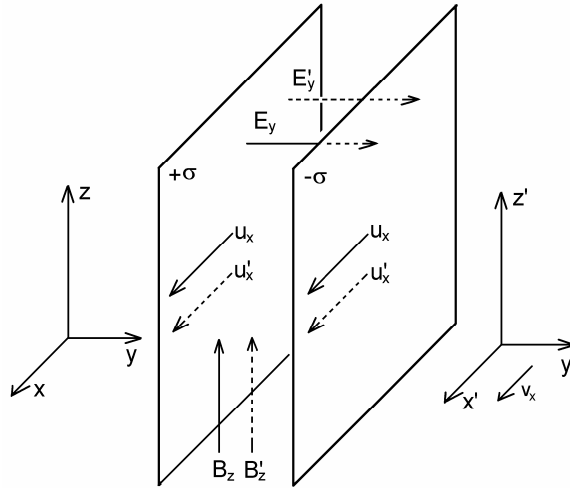
$$B_z = \mu_0 \sigma u_x = \frac{u_x}{c^2} E_y \quad (6.113)$$

V sústave S' sú elektrické a magnetické polia dané výrazmi

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \quad B'_z = \mu_0 \sigma' u'_x \quad (6.114a,b)$$

kde σ' a u'_x je plošný náboj a jeho rýchlosť v sústave S' . Čiarkované veličiny treba teraz vyjadriť cez nečiarkované. Zavedme označenia

$$\beta_u = \frac{u_x}{c} \quad \beta'_u = \frac{u'_x}{c} \quad (6.115)$$



Obr. 6.30

V pevnej sústave sa pre náboje dĺžka v smere osi x skrakuje, a teda platí

$$Q = \sigma a^2 \sqrt{1 - \beta_u^2}$$

a v čiarkovanej sa takisto skrakuje dĺžka x' , teda

$$Q = \sigma' a'^2 \sqrt{1 - \beta'^2_u}$$

Porovnaním týchto výrazov dostaneme plošnú hustotu náboja v sústave S'

$$\sigma' = \sigma \frac{\sqrt{1 - \beta_u^2}}{\sqrt{1 - \beta'^2_u}} \quad (6.116)$$

ktorý sa tam pohybuje rýchlosťou u'_x , a pre ktorú podľa vzťahu (6.97) platí

$$u'_x = \frac{u_x - v_x}{1 - \frac{u_x v_x}{c^2}} \quad (6.117)$$

Rýchlostný faktor $\beta'_u = u'_x/c$ možno pomocou (6.115) a (6.117) vyjadriť v tvare

$$\beta'_u = \frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta\beta_u} \quad (6.118)$$

a nakoniec plošnú hustotu náboja v sústave S' výrazom

$$\sigma' = \sigma \frac{\sqrt{1 - \beta_u^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta\beta_u}\right)^2}} = \sigma \frac{1 - \beta\beta_u}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sigma \frac{1 - \frac{v_x u_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.119)$$

Ak teraz výraz (6.119) pre σ' dosadíme do (6.114a) dostaneme pre y -ovú zložku intenzity elektrického poľa v sústave S' výraz

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{1 - \frac{v_x u_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = E_y \frac{1 - \frac{v_x u_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_y - v_x B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.120a)$$

kde bol tiež využitý vzťah (6.113). Zložku magnetickej indukcie B'_y dostaneme dosadením výrazov (6.117) a (6.119) pre u'_x a σ' do výrazu (6.114b), teda

$$B'_z = \mu_0 \sigma' u'_x = \mu_0 \sigma \frac{u_x - v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Ak zase využijeme vzťahy (6.112) a (6.113), výraz pre magneticкую zložku poľa dostane konečný tvar

$$B'_z = \frac{B_z - \frac{v_x E_y}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.120b)$$

Celú úvahu možno zopakovať pre kondenzátor, ktorého roviny sú planoparalelné s rovinou xy a prúdy majú v sústave S plošné hustoty $\pm\sigma u_x$. Čitateľ sa môže presvedčiť, že transformačné vzťahy pre existujúce priečne zložky polí sú tvaru

$$E'_z = \frac{E_z + v_x B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad B'_y = \frac{B_y - \frac{v_x E_z}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.121)$$

Nakoniec, ak kondenzátor otočíme do roviny yz , vznikne v ňom elektrické pole v smere osi x , ktoré je rovnaké pre obidvoch pozorovateľov z dôvodov uvedených už skôr. V tomto prípade platí

$$E_x' = E_x \quad (6.122a)$$

Treba ešte ukázať, že aj zložky magnetického poľa v smere pohybu sú pre obidvoch pozorovateľov rovnaké. Za tým účelom možno uvažovať páskové vedenie šírky a uložené v smere osi y v rovine xy , ktorým tečie prúd I_y pozdĺž súradnice y ako na obr. 6.31. Magnetická indukcia od takého prúdu má medzi páskami smer osi x . Prúd vo vedení

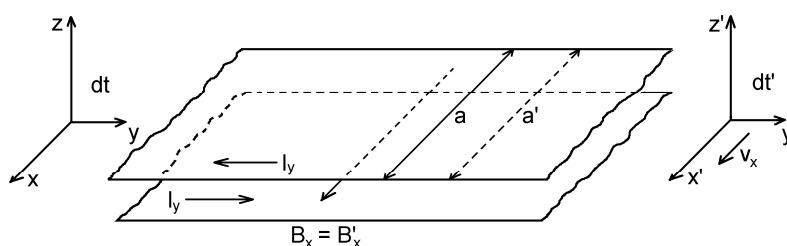
$$I_y = \frac{dQ}{dt} = \sigma v_y a$$

a zložka magnetickej indukcie v S – sústave je

$$B_x = \mu_0 \sigma v_y = \mu_0 \frac{I_y}{a} = \mu_0 \frac{1}{a} \frac{dQ}{dt}$$

Pozorovateľ v sústave S' pozoruje magnetické pole

$$B_x' = \mu_0 \frac{1}{a'} \frac{dQ}{dt'}$$



Obr. 6.31

Pre neho sa ale dĺžka a skraca na veľkosť

$$a' = a\sqrt{1-\beta^2}$$

a časový interval dt sa predlžuje na

$$dt' = \frac{dt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

takže $a' dt' = a dt$ a teda

$$B_x' = B_x \quad (6.122b)$$

Odvođené výrazy možno teraz vyjadriť ako pozdĺžne a priečne zložky poľa pomocou vyjadrení (6.109) a (6.110). Tak pre pozdĺžne zložky elektrického a magnetického poľa dané výrazmi (6.122) platí

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \qquad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \qquad (6.123)$$

Priečna zložka elektrického poľa s využitím výrazov (6.120) a (6.121) je tvaru

$$\mathbf{E}'_{\perp} = E'_y \mathbf{j} + E'_z \mathbf{k} = \frac{E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} + (-v_x B_z \mathbf{j} + v_x B_y \mathbf{k})}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (6.124a)$$

a podobne priečna zložka magnetického poľa

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp}}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (6.124b)$$

Nakoniec prepíšeme transformačné vzťahy do formy:

$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \qquad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}$	(6.125)
$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp}}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	

Výrazy (6.125) sú najvšeobecnejšie transformačné vzťahy medzi poliami v pevnej a v pohyblivej sústave. Možno si všimnúť, že ak $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} = 0$, prechádzajú na výrazy (6.111), keď v pevnej sústave S niet magnetického poľa.

Nechcem, aby u čitateľa vznikol mylný dojem, že tieto transformácie sú dôležité iba pri extrémne vysokých t. j. relativistických alebo ultrarelativistických rýchlostiach blízkyh rýchlostiam svetla, s ktorými sa teória relativity obyčajne spája. Také rýchlosti, časté vo fyzike elementárnych častíc, sa v bežnom živote nevyskytujú. Vzťahy však platia a majú závažné dôsledky aj v reálnom svete bežných nízkych rýchlostí. Ak $v \ll c$, tak $\beta \rightarrow 0$ a menovatele transformačných vzťahov možno považovať za jednotky. V tom prípade

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp} \qquad (6.126)$$

Celkové pole v priestore je súčtom pozdĺžnej a priečnej zložky ($\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp}$, atď.), a tak môžeme tiež napísať

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (6.127)$$

Ak sa v čiarkovanej sústave nachádza napr. bodový náboj q , bude naň pôsobiť sila

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}' = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (6.128)$$

Výraz (6.129) je nám už známa Lorentzova sila, teraz získaná ako dôsledok relativistickej transformácie.

Možný je aj iný veľmi dôležitý pohľad na výraz (6.126), resp. (6.127). V čiarkovanej sústave pozorovateľ vidí dve intenzity elektrického poľa. Jednu obyčajnú \mathbf{E} , ktorú pozoruje aj pozorovateľ v pevnej sústave, a druhú "neobyčajnú" $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, ktorá súvisí s magnetickým poľom a pohybom. Ak sa napríklad pozorovateľ posadí do čiarkovanej sústavy na obr. 6.30 s kovovou tyčou v ruke v smere osi y , vznikne podľa vzťahu (6.120a) pozdĺž tyče popri intenzite E_y dodatočná intenzita elektrického poľa $-v_x B_z$, ktorá na tyči dĺžky l vytvorí elektrické napätie veľkosti $v_x B_z l$. Pretože čitateľ už nejakú fyzikálnu prípravu má, vznik napätia účinkom magnetického poľa a pohybu, musí v ňom evokovať spomienky na elektromagnetickú indukciu. Druhý člen vo výraze pre \mathbf{E}' je skutočne magnetickým poľom indukovaná intenzita elektrického poľa a keby ju nebol v roku 1831 svojimi experimentmi objavil Michael Faraday, bol by ju možno zhruba o tridsať rokov neskôr objavil na písacom stole James C. Maxwell, alebo o ďalšie polstoročie neskôr Albert Einstein.

Všimnime si teraz druhý priečny výraz pre \mathbf{B}'_{\perp} . Ak $\beta \rightarrow 0$, potom

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\perp} - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_{\perp}}{c^2} \quad (6.129)$$

a pre celkovú magnetickú indukciu

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \quad (6.130)$$

Ako vidieť, aj magnetická indukcia v pohyblivej sústave sa skladá z dvoch častí. Z obyčajnej \mathbf{B} a zo "záhadnej" časti $-(\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c^2$. Na prvý pohľad by sa zdalo, že vzhľadom na prítomnosť c^2 v menovateli je to bezvýznamný príspevok k magnetickej indukcii. Ak si ale uvedomíme, že v našom "kondenzátore" rádová veľkosť intenzity elektrického poľa E je σ/ϵ_0 , potom rádová veľkosť tejto indukcie je $\mu_0 \sigma v$, čo už neznie tak presvedčivo o jeho bezvýznamnosti, pretože σ je veľkosť plošného prúdu na doskách. Čo teda možno povedať o jeho fyzikálnom význame? Dôležité je, že podľa toho člena **elektrické pole môže byť príčinou vzniku magnetického poľa**. Ak zároveň vezmeme do úvahy jav elektromagnetickej indukcie, potom môže vzniknúť svojrázny kolotoč – magnetické pole produkuje elektrické pole, to znovu produkuje magnetické pole, to znovu produkuje elektrické ..., čo v konečnom dôsledku vedie na vznik elektromagnetických vln.

V odseku 6.3 sme zaviedli pojem posuvného prúdu, ktorého hustota vo vákuu je daná výrazom

$$\mathbf{J}_p = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Je to nejoullovský prúd, ktorý sa spolu s vodivým prúdom podieľa na tvorbe magnetického poľa a jeho účinok je vyjadrený zákonom celkového prúdu. Druhý člen na pravej strane

výrazu (6.130) je práve vyjadrením účinku tohto posuvného prúdu, o čom sa možno presvedčiť podrobnejšou analýzou.

Na ilustráciu Lorentzových transformácií posúdime elektromagnetické polia základného elektrického objektu – polia bodového náboja q . Predpokladajme, že v sústave S sa náboj pohybuje rýchlosťou $-v_x$ spolu so sústavou S' a v čase $t = 0$ začiatky súradníc splývajú. V sústave S' je náboj nepohyblivý a pozorovateľ v nej vidí iba radiálne elektrické pole

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}$$

ktoré možno rozložiť na tri rovnako veľké zložky v smere súradnicových osí x', y', z' , a žiadne magnetické pole. V pevnej sústave pozoruje pozorovateľ podľa vzťahov (6.111) v smere osi x elektrické pole veľkosti

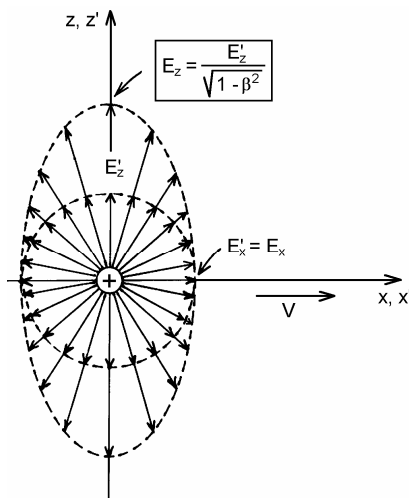
$$E_x = E'_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2}$$

a v priečných smeroch y a z polia

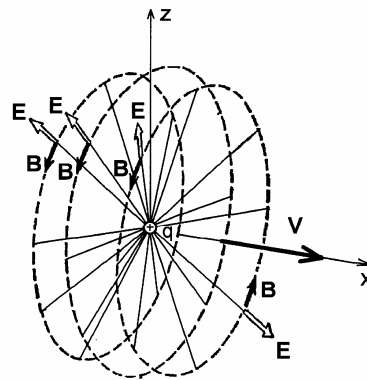
$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Obidve tieto zložky sú rovnaké a väčšie ako E_x , takže pôvodne guľové pole radiálnych siločiar v sústave S' sa zmení na elipsoidálne pole v sústave S ako na obr. 6.32. V sústave S pozorovateľ vidí podľa vzťahov (6.111) aj magnetické pole

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp$$



Obr. 6.32



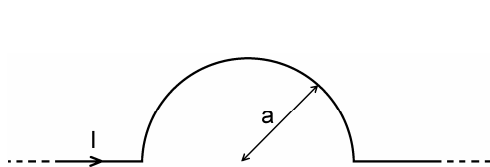
Obr. 6.33

kde $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i}$ je rýchlosť, ktorou sa náboj q pohybuje v sústave S a $\mathbf{E}_\perp = E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}$ je priečne elektrické pole v sústave S . Magnetické pole je v tejto sústave tiež priečne a indukčné čiary majú tvar koaxiálnych kružníc s osou v smere pohybu náboja (pozri obr. 6.33). V súvislosti s týmto príkladom čitateľovi odporúčam riešiť tiež úlohu 187.

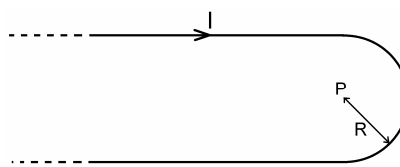
Záverom môžeme konštatovať, že Lorentzove transformácie polí, okrem iného pohľadu na elektrodynamiku nás doviedli k dvom základným princípom elektromagnetizmu – k elektromagnetickej indukcii a k posuvnému prúdu, bez ktorých si nevieme predstaviť dnešnú elektrickú energetiku a modernú komunikáciu prostredníctvom elektromagnetických vln. Nepoužili sme pri tom nič iné, iba Gaussov a Ampérov zákon na vyjadrenie elektrického a magnetického poľa dvojice nábojových plôch a samozrejme Lorentzove transformačné vzťahy pre súradnice a čas.

Úlohy 152 – 193

152. Nekonečný priamy vodič vytvára v istom mieste polkružnicu s polomerom a podľa obr. 152. Vodičom tečie prúd I . Vypočítajte magnetickú indukciu v strede polkružnice.



Obr. 152



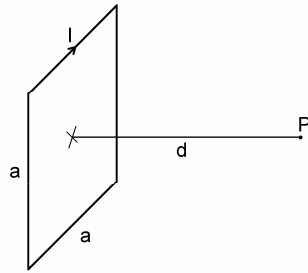
Obr. 153

153. Nekonečný vodič je ohnutý do tvaru U podľa obr. 153. Polomer ohybu je R . Vodičom tečie prúd I . Vypočítajte magnetickú indukciu v bode P (v strede ohybovej kružnice) a určite jej smer.

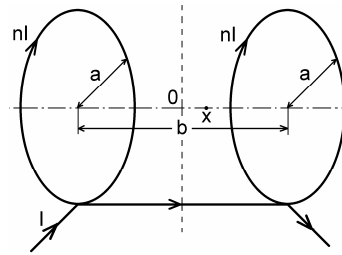
154. Vypočítajte magnetickú indukciu budenú prúdom I v štvorcovej slučke so stranou a , v bode P na osi slučky vo vzdialenosti d od jej stredu (obr. 154).

155. V laboratórnej praxi je často potrebné vysokohomogénne magnetické pole v relatívne veľkom objeme. Takéto pole možno vytvoriť vo veľmi dlhom solenoide, avšak veľmi dlhý solenoid je nepraktický a okrem toho priestor, kde je maximálna homogenita poľa (stred solenoidu) je zle prístupný. Vysokohomogénne pole možno vytvoriť aj sústavou dvoch tenkých axiálnych cievok (paralelných kruhových prúdov), ktoré sa nazývajú Helmholtzovými cievkami (obr. 155). Každá z cievok má n závitov. Preskúmajte magnetické pole v polovičnej vzdialenosti cievok na ich osi (bod O). Za tým účelom:

- napište výraz pre magnetickú indukciu na osi cievok vo vzdialenosti x od bodu O ,
- predpokladajte, že $x \ll a, b$ (a – polomer cievok, b vzdialenosť cievok). Rozviňte výraz pre magnetickú indukciu do MacLaurinovho radu, v ktorom zanedbajte členy s mocninami vyššími ako x^2 ,
- zistite ako treba voliť vzájomný súvis medzi a a b , aby v danom priblížení pole nezáviselo od x ,
- napište výraz pre magnetickú indukciu v bode O (a v jeho blízkom okolí).



Obr. 154



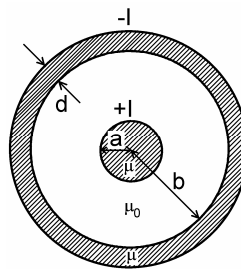
Obr. 155

156. Tenký dielektrický disk (Rowlandov disk¹) s polomerom R , nabitý plošným nábojom σ sa otáča okolo svojej rotačnej osi uhlovou rýchlosťou ω . Vypočítajte magnetickú indukciu na osi rotácie vo vzdialenosti z od stredu disku.

157. Vypočítajte magnetickú indukciu B v okolí dvoch priamych, paralelných, nekonečne dlhých vodičov vo vzájomnej vzdialenosti $2a$, ktorými tečie prúd I :

- v oboch vodičoch v súhlasnom smere,
- v oboch vodičoch v opačnom smere.

158. Koaxiálny kábel pozostáva z vnútorného valcového vodiča s polomerom a a hrubého plášťa s vnútorným polomerom b a s hrúbkou d (obr. 158). Materiál vodičov má permeabilitu $\mu = \mu_r \mu_0$, dutina kábla má permeabilitu $\mu = \mu_0$. Káblom tečie prúd I (vo vnútornom vodiči a v plášti v navzájom opačných smeroch). Vypočítajte magnetickú indukciu ako funkciu vzdialenosti od osi kábla.



Obr. 158

159. V okolí nekonečného solenoidu sa magnetické pole obyčajne považuje za nulové. V skutočnosti – v dôsledku špirálového stúpania závitov – existuje pozdĺžna zložka prúdu v solenoide, ktorá vytvára v okolí solenoidu slabé magnetické pole. Predpokladajte, že solenoid s polomerom a je navinutý z drôtu s polomerom δ , pričom $\delta \ll a$. Odhadnite pomer magnetickej indukcie na povrchu solenoidu a v jeho vnútri za predpokladu, že solenoidom tečie prúd I .

160. Solenoid dlhý 30 cm je zhotovený z drôtu s priemerom 0,2 mm s odporom 0,65 Ω /m. Na jeden milimeter pripadá 5 závitov a priemer solenoidu je 6 cm. Solenoid je pripojený na 24 V zdroj so zanedbateľným vnútorným odporom. Vypočítajte magnetickú indukciu v strede solenoidu a rozptýlený tepelný výkon v solenoide.

¹ Rowland, H. A., Amer. Journ. of Science **3**, XV, 30 – 38, 1878

161. V nekonečnom vodivom valci s polomerom a je vyvŕtaná valcová dutina s polomerom a' ($a > a'$), ktorej os je paralelná s osou valca (obr. 161). Valcom tečie prúd s konštantnou hustotou J . Vypočítajte magnetickú indukciu v dutine.

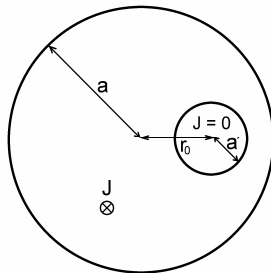
162. Vychádzajúc z Biotovho-Savartovho-Laplaceovho zákona

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

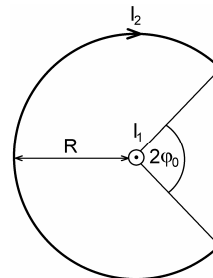
dokážte, že v ľubovoľnom bode P v okolí uzavretej prúdovej slučky I s prúdom I , možno magnetickú indukciu vyjadriť v tvare

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{grad } \Omega = -\text{grad} \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega \right) = -\text{grad } V_m$$

kde Ω je priestorový uhol, pod ktorým slučku vidieť z bodu P .



Obr. 161



Obr. 163

163. V uzavretom obvode tvorenom časťou kružnice s polomerom R a priamym úsekom pod uhlom $2\phi_0$ vzhľadom na stred kružnice (obr. 163) tečie prúd I_2 . Kolmo na rovinu obvodu a stredom kružnice prechádza priamy vodič, ktorým tečie prúd I_1 . Vypočítajte moment dvojice síl, pôsobiaci na obvod.

164. Vypočítajte magnetický moment dutej gule s polomerom R a s nábojom Q rovnomerne rozloženým na jej povrchu, ak sa guľa otáča s uhlovou rýchlosťou ω . Vypočítajte gyromagnetický pomer gule, t. j. pomer magnetického momentu k mechanickému momentu (moment hybnosti), ak celková hmotnosť gule je M .

165. Vypočítajte magnetický moment rotujúcej dielektrickej gule s polomerom R a s nábojom Q , rovnomerne rozloženým v objeme gule. Uhlová rýchlosť rotácie je ω . Vypočítajte gyromagnetický pomer gule, ak jej hmotnosť je M .

166. Zemské magnetické pole má vlastnosti magnetického poľa dipólu. Vypočítajte magnetický moment zemského magnetického dipólu, ak je známe, že na severnom magnetickom póle je magnetická indukcia $6,2 \cdot 10^{-5}$ T. Aký ekvivalentný prúd by musel tiecť na rovníku pre dipól s vypočítaným momentom? Za polomer Zeme považujte hodnotu $6 \cdot 10^6$ m.

167. Podľa jednej zo zavrnutých hypotéz o pôvode zemského magnetizmu je magnetické pole Zeme dôsledkom rovnomerne rozloženého náboja v celom objeme Zeme. Vychádzajúc z tejto hypotézy, vypočítajte objemovú hustotu náboja vo vnútri Zeme, ak magnetické pole na póle má vertikálny smer a veľkosť $6,2 \cdot 10^{-5}$ T. Polomer Zeme je približne $6 \cdot 10^6$ m. Koľko neskompenzovaných

elementárných nábojov by obsahoval 1 m^3 ? Aká by bola intenzita elektrického poľa na povrchu Zeme v dôsledku existencie takýchto nábojov?

168. Koaxiálny kábel pozostáva z vnútorného dutého vodiča s polomerom $D/2 = 1 \text{ cm}$ a vonkajšieho vodiča s polomerom $a = 5 \text{ cm}$. Hrúbka stien vodičov je zanedbateľne malá. Vnútrotný vodič je obalený feritovou vrstvou hrubou $d = 1 \text{ cm}$ s relatívnou permeabilitou $\mu_r = \mu/\mu_0 = 50$. Zvyšok vnútra koaxiálneho kábla je vyplnený materiálom s permeabilitou $\mu_r = 1$ (obr. 168). Koaxiálnym káblom tečie prúd 1 A . Vypočítajte energiu magnetického poľa na meter dĺžky kábla. Koľko percent energie je uskladnených vo ferite? Takáto úprava kábla feritom zvyšuje jeho charakteristickú impedanciu (vlnový odpor).

169. Vypočítajte energiu magnetického poľa Zeme v celom jej nekonečnom okolí. Predpokladajte, že magnetické pole Zeme je poľom magnetického dipólu s indukciou na rovníku $3,1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. Posúďte, či by výbuch atómovej bomby s energiou 1 megatony trinitrotoluénu ($\sim 4,2 \cdot 10^{15} \text{ J}$) vo vysokých vrstvách atmosféry mohol ovplyvniť magnetické pole Zeme.

170. Podľa Bohrovej teórie obieha elektrón v atóme vodíka po kruhovej dráhe s polomerom

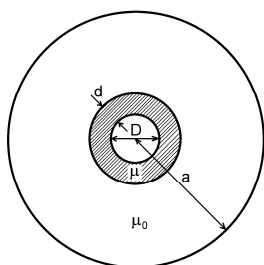
$$a = \frac{h^2}{\pi\mu_0 c^2 m_e e^2} = 5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

a s obežnou rýchlosťou

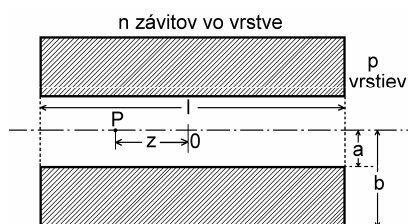
$$v = \frac{\mu_0 c^2 e^2}{2h} = 2,187 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

kde e je náboj a m_e je hmotnosť elektrónu, $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ je Planckova konštanta, μ_0 je magnetická konštanta (permeabilita vákuua) a c je rýchlosť svetla vo vákuu. Vypočítajte:

- aký ekvivalentný prúd zodpovedá obiehajúcemu elektrónu v atóme,
- aká je magnetická indukcia v mieste protónu,
- aký je orbitálny (zviazaný s pohybom elektrónu okolo jadra) magnetický moment elektrónu, ktorý je atomárnou jednotkou magnetického momentu a nazýva sa Bohrov magnetón.



Obr. 168



Obr. 171

171. Hrubá cievka má p vrstiev drôtu, pričom v každej vrstve je n závitov. Cievka má dĺžku l , vnútorný polomer a , vonkajší polomer b (obr. 171). Vypočítajte magnetickú indukciu na osi cievky v bode P , vo vzdialenosti z od jej stredu.

172. Veľmi dlhý solenoid má n závitov na jednotku dĺžky. Nájdite miesto na osi solenoidu, v ktorom sila pôsobiaca na malý objem slabomagnetického materiálu je maximálna.

173. Vektor magnetickej indukcie je daný výrazom

$$\mathbf{B} = k \frac{\mathbf{J}_z \times \mathbf{r}}{r^3}$$

kde \mathbf{J}_z je konštantný vektor v smere osi z , \mathbf{r} je vektor kolmý na os z a k je konštanta. Vypočítajte rotáciu vektora \mathbf{B} .

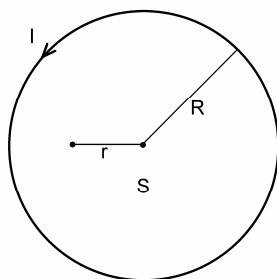
174. Vektor magnetickej indukcie v cylindrických súradniciach je daný výrazom

$$\mathbf{B} = k\mathbf{J}_z \times \mathbf{r}$$

kde \mathbf{J}_z je konštantný vektor v smere osi z a k je konštanta. Vypočítajte rotáciu vektora \mathbf{B} .

175. Veľmi dlhý (nekonečne) solenoid s polomerom 3 cm je navinutý z tenkého drôtu s priemerom 0,3 mm tak, že závitý sú tesne vedľa seba. Vypočítajte aké magnetické pole v solenoide spôsobí roztrhnutie drôtu, ak je známe, že materiál, z ktorého je drôt vyrobený má pevnosť v ťahu $2 \cdot 10^8 \text{ N/mm}^2$.

176. Dielektrická guľa s hmotnosťou M nabitá rovnomerne v celom objeme nábojom Q sa otáča okolo jedného zo svojich priemerov uhlovou rýchlosťou ω . Guľa je umiestnená v magnetickom poli s indukciou \mathbf{B} tak, že smer poľa zvierá s osou rotácie uhol ϑ . Pod účinkom magnetického poľa bude guľa vykonávať precesný pohyb okolo smeru magnetického poľa, podobne ako gyroskop v gravitačnom poli. Vypočítajte uhlovú rýchlosť precesie gule. Pri výpočte využite skutočnosť, že magnetický moment \mathbf{m} rotujúcej gule je zviazaný s jej momentom hybnosti \mathbf{L} vzťahom $\mathbf{m} = \gamma\mathbf{L}$, kde γ je gyromagnetický pomer (pozri úlohu 165).



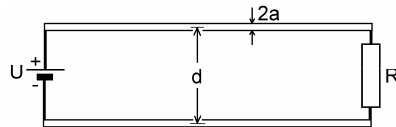
Obr. 177

177. Vypočítajte magnetickú indukciu ako funkciu vzdialenosti r od stredu kruhového závitú, v ktorom tečie prúd I (obr. 177). Porovnajme vypočítanú magnetickú indukciu s indukciou v strede závitú ($\mu_0 I / 2R$).

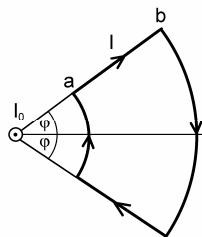
178. Vektorový potenciál \mathbf{A} formálne rovnako súvisí s magnetickou indukciou \mathbf{B} , ako magnetická indukcia s prúdovou hustotou \mathbf{J} , t. j. $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ a $\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$. Aké tvrdenie týkajúce sa \mathbf{A} zodpovedá tvrdeniu, že integrál po uzavretej dráhe l z magnetickej indukcie \mathbf{B} sa rovná μ_0 -násobku celkového prúdu ohraničeného čiarou l ? Preskúmajte magnetickú indukciu od prúdu v nekonečne dlhom valcovom vodiči pri konštantnej prúdovej hustote vo vodiči. Na základe uvedenej analógie nájdite vektorový potenciál nekonečne dlhého solenoidu, v ktorom $\mathbf{B} = \text{konšt. vektor}$ ako funkciu vzdialenosti od osi solenoidu. Všimnite si, že vektorový potenciál sa nerovná nule v oblasti, kde $\mathbf{B} = 0$ (v okolí solenoidu).

179. Dvojvodičové vedenie podľa obr. 179 je zakončené odporom R (polomer vodičov je a , osová vzdialenosť d , $a \ll d$). Na vstup vedenia je pripojený zdroj s napätím U . Aký musí byť odpor R , aby magnetická sila medzi vodičmi bola kompenzovaná elektrickou silou?

180. V magnetickom poli veľmi dlhého priameho vodiča s prúdom I_0 sa nachádza obvod s prúdom I podľa obr. 180. Rovina obvodu je kolmá na vodič. Nájdite moment dvojice síl pôsobiaci na tento obvod.



Obr. 179



Obr. 180

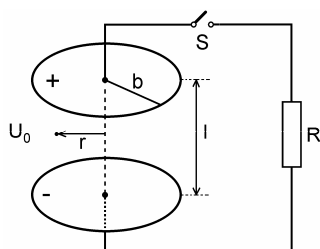
181. Bodový náboj q sa pohybuje vo vákuu priamočiarno rovnomerne s rýchlosťou v . Využitím Maxwellovej rovnice pre cirkuláciu vektora \mathbf{H} nájdite intenzitu magnetického poľa \mathbf{H} v ľubovoľnom bode P . Platí: $v \ll c$.

182. Doskový kondenzátor s doskami v tvare kruhov s polomerom b a vzdialenosťou dosiek l je nabitý na potenciálový rozdiel U a v čase $t = 0$ je prepojený odporom R (obr. 182).

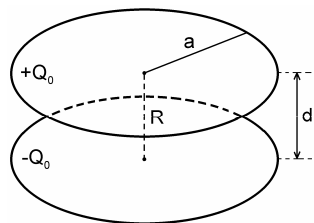
- Nájdite časovú závislosť napätia na kondenzátore.
- Určite časovú závislosť intenzity elektrického poľa medzi doskami.
- Určite časovú závislosť intenzity magnetického poľa medzi doskami vo vzdialenosti r od spojnice stredov dosiek, pričom $r < b$. Výpočet urobte z posuvného prúdu. Systém je vo vákuu a platí $b \gg l$.

183. Kondenzátor pozostávajúci z dvoch kruhových planoparalelných dosiek polomeru a je nabitý nábojmi $\pm Q_0$. V čase $t = 0$ sa stredy dosiek prepoja tenkým vodičom (obr. 183), ktorého odpor R je tak veľký, že možno zanedbať indukčnosť systému. Nájdite časové a priestorové závislosti:

- plošnej hustoty nábojov na doskách kondenzátora,
- celkového náboja,
- prúdu vodičom,
- posuvného prúdu,
- magnetickej indukcie.



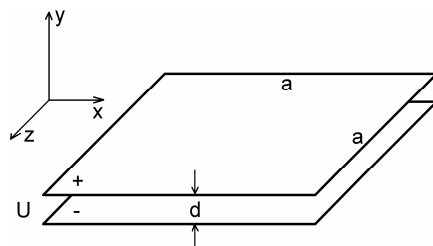
Obr. 182



Obr. 183

184. Kondenzátor pozostáva z dvoch štvorcových dosiek so stranami dlhými $a = 20$ cm, uložených planoparalelne s rovinou xz pravouhlého súradnicového systému podľa obr. 184. Vzdialenosť dosiek je $d = 2$ mm a kondenzátor je nabitý na potenciálny rozdiel $U = 300$ V.

- Vypočítajte počet elektrónov na zápornej doske kondenzátora.
- Pozorovateľ sa pohybuje rýchlosťou $0,6c$ v smere osi x . Vypočítajte v jeho sústave: rozmery kondenzátora, počet elektrónov na zápornej doske a intenzitu elektrického poľa v kondenzátore.
- Odpovedzte na otázku bodu b) ak sa pozorovateľ pohybuje rýchlosťou $0,6c$ v smere osi y .



Obr. 184

185. Elektrické pole v laboratórnej sústave má zložky

$$E_x = E_0 \cos \varphi \quad E_y = E_0 \sin \varphi \quad E_z = 0$$

Nájdite elektrické a magnetické polia v sústave, ktorá sa pohybuje v smere osi y rýchlosťou v .
Riešte numericky pre: $E_0 = 33 \text{ V/m}$, $\varphi = 30^\circ$, $v = 0,6c$.

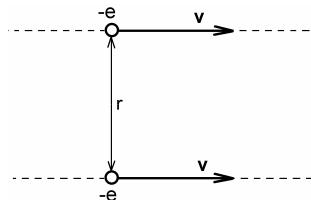
186. Dva elektróny sa pohybujú po paralelných dráhach vo vzdialenosti r rýchlosťou v na jednej úrovni podľa obr. 186. Vypočítajte:

- silu, ktorou elektróny na seba pôsobia v sústave pohybujúcej sa spolu s nimi,
- silu, ktorou na seba pôsobia v laboratórnej sústave. Aká bude sila v laboratórnej sústave pri malých rýchlostiach elektrónov, ak $v \ll c$ a aká bude ak $v \rightarrow c$?

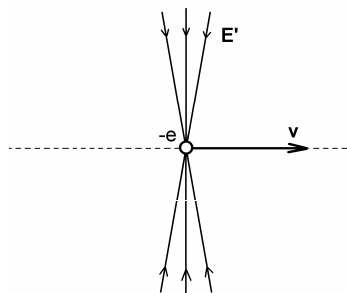
187. Pri ultrarelativistických rýchlostiach elektrónov, t. j. ak

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \gg 1$$

je elektrické pole elektrónu prakticky celé sústredené v rovine kolmej k smeru pohybu a v jeho blízkom okolí podľa obr. 187. Vo výraze pre elektrické pole pohybujúceho sa elektrónu



Obr. 186



Obr. 187

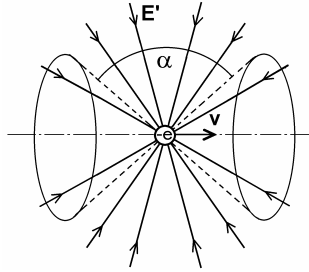
$$E' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2 \vartheta\right]^{3/2}} \quad \{1\}$$

možno v tomto prípade položiť

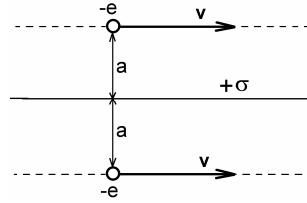
$$\vartheta = \pi/2 \pm \varepsilon$$

kde $|\varepsilon| \ll 1$. Dokážte, že v ultrarelativistickom prípade vzťah {1} prejde na tvar

$$E' = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} \frac{\gamma}{(1 + \gamma^2 \varepsilon^2)^{3/2}} \quad \{2\}$$



Obr. 188



Obr. 192

188. Mierou relativistického "stlačenia" siločiar elektrického poľa pohybujúceho sa náboja je uhol α medzi dvoma kónickými plochami podľa obr. 188, vymedzujúcimi polovicu toku elektrického poľa. Využitím výrazu {2} vypočítajte uhol α v ultrarelativistickom prípade.

189. V sústave xyz je dané elektrické pole a magnetické pole so zložkami E_y a B_z . Nájdite inerciálnu sústavu, v ktorej je:

- elektrické pole nulové,
- magnetické pole nulové.

Vypočítajte zložky polí v týchto sústavách.

190. Bodový náboj q je umiestnený vo vzdialenosti a od nekonečnej priamky nabitaj dĺžkovým nábojom λ . Vypočítajte silu, ktorá pôsobí na náboj v laboratórnej sústave, v ktorej je náboj i priamka v pokoji a v sústave, ktorá sa pohybuje pozdĺž priamky rýchlosťou v . Náboje q a λ sú rovnakého znamienka.

191. Dokážte, že veličiny

- $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$,
- $E^2 - c^2 B^2$

sú invariantné k špeciálnym Lorentzovým transformáciám.

192. Dva elektróny sa pohybujú rýchlosťou v vo vzdialenosti a po oboch stranách nekonečnej roviny nabitaj plošným nábojom $+\sigma$ (obr. 192). Vypočítajte:

- veľkosť plošného náboja, pri ktorom sila pôsobiaca na elektróny je nulová,
- pomer plošných nábojov z prípadu a) pre elektróny s energiou 500 MeV a elektróny v pokoji.

193. Dve nekonečne dlhé paralelné tyče sú nabitaj nábojom s hustotou $\pm\lambda$ na jednotku dĺžky a umiestnené vo vzdialenosti d . Vypočítajte silu, ktorou na seba tyče pôsobia:

- v sústave spojenaj s tyčami,
- v sústave pohybujúcej sa rýchlosťou v pozdĺž tyčí.



Michael FARADAY
(1791 Newington pri Londýne – 1867 Hampton Court)

Maľba v Deutsches Museum, Mníchov