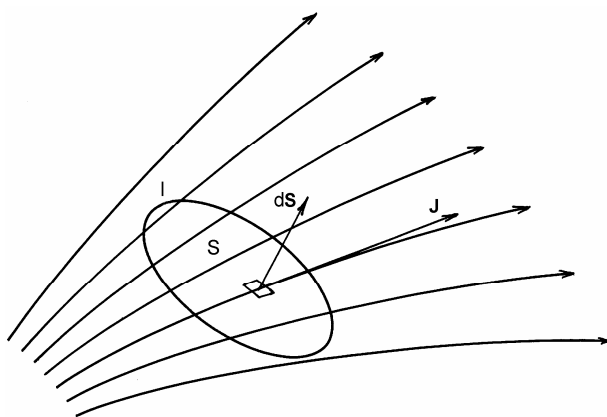


5 ELEKTRICKÝ PRÚD

5.1 POHYB ELEKTRICKÝCH NÁBOJOV. ELEKTRICKÝ PRÚD

5.1.1 Vlastnosti elektrických prúdov. Klasifikácia prúdov

Pod pojmom "elektrický prúd" rozumieme usmernený kolektívny pohyb elektrických nábojov, pričom pohybovať sa môžu elektróny, menej často protóny, prípadne iné elementárne častice, alebo aj kladné, resp. záporné ióny. Náboje sa môžu pohybovať vo vákuu, alebo v materiálnom prostredí tvorenom tuhou, kvapalnou, alebo plynnou látkou. V polovodičoch sa môžu popri elektrónoch pohybovať aj diery – kladné vakancie nenasýtených väzieb. Pri takej rozmanitosti prúdiacich nabitých objektov v rôznych prostrediach je len prirodzené, že elektrický prúd môže mať množstvo charakteristických vlastností. Prv než sa nimi začneme zaoberať, zavedieme niektoré všeobecné veličiny, ktoré elektrický prúd charakterizujú.

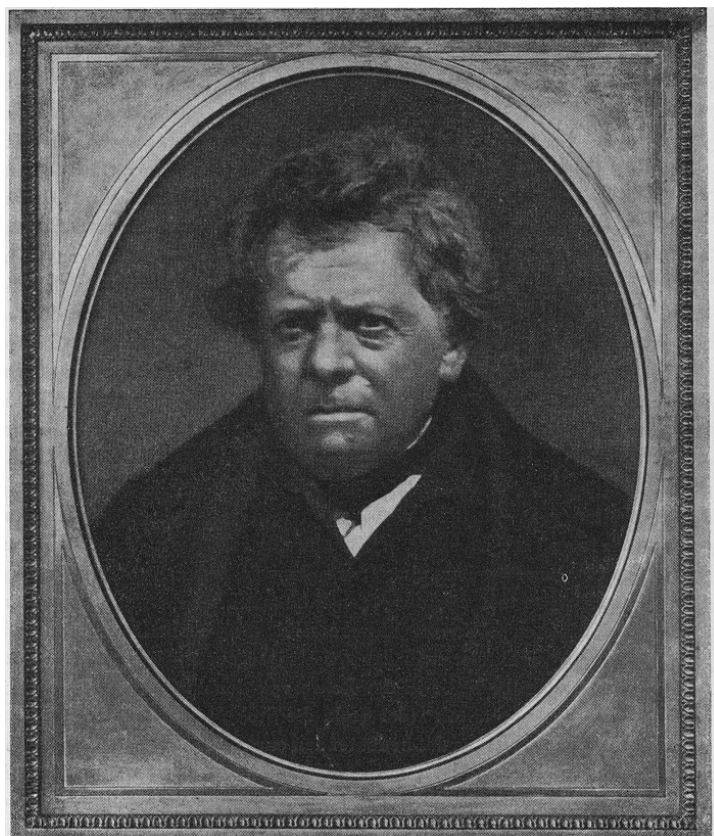


Obr. 5.1

Pre opis prúdového poľa identických elektrických nábojov q sa zavádza vektorová veličina nazývaná **objemová prúdová hustota** (mikroskopická definícia), daná výrazom

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v} = \rho\mathbf{v} \quad [\text{A}\cdot\text{m}^{-2}] \quad (5.1)$$

kde n je koncentrácia pohybujúcich sa nabitých objektov (elektrónov, iónov a i.), \mathbf{v} je ich rýchlosť v prúdovom poli, a $\rho = nq$ je objemová hustota náboja. Treba si všimnúť, že



Georg Simon OHM
(1789 Erlangen – 1854 Mníchov)

Maľba v Deutsches Museum, Mníchov

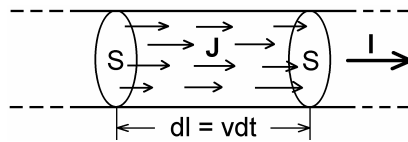
prúdová hustota kladných nábojov má rovnaký smer ako smer ich rýchlosti, pre záporné náboje sú obidva vektory navzájom opačné. Podľa uvedenej definície je veľkosť prúdovej hustoty v nejakom bode prúdového poľa daná nábojom, ktorý prejde za jednotku času jednotkovou plochou kolmou na smer rýchlosti. Čiary, ku ktorým vektor prúdovej hustoty má smer dotýčnice, sa nazývajú prúdočiary (pozri obr. 5.1). Ak si v prúdovom poli vymedzíme nejakú plochu S s hraničnou čiarou l , potom celkový tok nábojov cez túto plochu je daný integrálom prúdovej hustoty plochou S , teda

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad [\text{A}] \quad (5.2)$$

Tok nábojov vymedzený plochou S a daný výrazom (5.2) sa nazýva elektrický prúd I . Vzťah (5.2) umožňuje zaviesť inú, makroskopickú definíciu prúdovej hustoty, ako pomer nekonečne malého prúdu dI , ktorý pretečie ploškou dS kolmou na smer prúdenia kladných nábojov, teda

$$\mathbf{J} = \frac{dI}{dS} \mathbf{n}_0 \quad [\text{A} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (5.3)$$

kde \mathbf{n}_0 je jednotkový vektor v smere prúdenia kladných nábojov.



Obr. 5.2

V praxi je častý prípad, že prúd tečie vymedzenou prúdovou trubicou prierezu S , napr. prierezom relatívne tenkého vodiča (pozri obr. 5.2), a na tomto priereze má konštantnú prúdovú hustotu, kolmú na prierez. Ak vyjadríme rýchlosť pohybujúcich sa nábojov ako $v = dl/dt$, kde dl je posunutie náboja v trubici za čas dt a $d\tau = Sdl$ elementárny objem, v ktorom sa náboj $dQ = nqd\tau$ za čas dt posunie o dl , potom veľkosť prešlého prúdu v uvažovanej prúdovej trubici s ohľadom na výraz (5.2)

$$I = JS = nqvS = nq \frac{Sdl}{dt} = \frac{nqd\tau}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad (5.4)$$

V niektorých prípadoch tečú elektrické prúdy po povrchoch vodivých telies, majú teda plošný charakter. Takými sú napr. vysokofrekvenčné prúdy so skinefektom, keď amplitúda prúdu smerom do vnútra vodiča rapídne ubúda a prúd možno považovať za povrchový, teda plošný. **Plošná prúdová hustota** sa dá zaviesť výrazom

$$\mathbf{J}_s = \sigma \mathbf{v} = \frac{dI}{dl} \mathbf{n}_0 \quad [\text{A} \cdot \text{m}^{-1}]$$

kde σ je plošná hustota náboja pohybujúceho sa rýchlosťou \mathbf{v} , dl je šírka elementárnej prúdnice na pásiku, ktorým tečie prúd dI a \mathbf{n}_0 je jednotkový vektor v smere pohybu kladných

nábojov. Celkový prúd tečúci pásikom šírky l je daný integrálom tejto prúdovej hustoty po šírke pásika, teda

$$I = \int_l J_s dl$$

Podľa výrazu (5.4) elektrický prúd môžeme definovať ako množstvo náboja, ktoré pretečie prierezom prúdovej trubice (prierezom vodiča) za jednotku času. Z danej definície vidíme, že elektrický prúd je skalárna veličina, avšak vzhľadom na dva druhy elektrického náboja môže mať dve znamienka podľa znamienka nábojov tečúcich v danom smere. V súhlase s konvenciou za kladný považujeme prúd kladných nábojov. V kovoch sa môžu pohybovať iba (záporné) elektróny, no napriek tomu za kladný považujeme prúd neskutočných kladných nábojov tečúcich v opačnom smere. Ak sa v uvažovanom priestore pohybujú kladné aj záporné náboje (napr. v elektrolytoch kladné a záporné ióny), výsledný prúd je daný algebraickým súčtom prítomných prúdov.

Ak prierezom vodiča pretečie za rovnaký čas rovnaké množstvo náboja, je prúd v čase konštantný alebo stály, v opačnom prípade je časovopremenný. Význačnou skupinou prúdov sú v čase periodické harmonické prúdové priebehy, ktoré sa nazývajú striedavé prúdy. Sú dôležité v elektrickej energetike, v nízkofrekvenčnej i vysokofrekvenčnej elektronike. Z časovopremenných prúdov si pozornosť zasluhujú tiež rôzne nestacionárne, prechodové prúdy. V tejto časti sa budeme zaoberať predovšetkým vlastnosťami v čase stálych, konštantných prúdov a v závere opíšeme nestacionárny, prechodový prúd v RC -obvode. Striedavým harmonickým prúdom sa budeme venovať neskôr v osobitnej kapitole.

Z praktického hľadiska je dôležitá otázka merania elektrických prúdov. Jednotka prúdu by sa dala stanoviť pomocou doteraz zavedených jednotiek pre náboj a čas, teda za jednotkový by sa mohol považovať prúd množstva nábojov 1 coulomb (C) za jednu sekundu, teda $1 \text{ C}\cdot\text{s}^{-1}$, samozrejme za predpokladu, že by sme tieto veličiny dokázali jednoducho a presne merať. Aj keď čas vieme merať s veľmi vysokou presnosťou, nemôžeme to isté povedať o množstve pretečeného náboja prierezom vodiča. Do zavedenia sústavy jednotiek SI sa určoval jednotkový náboj ako náboj potrebný na vylúčenie istého množstva látky (striebra) pri elektrolýze, avšak pre nepresnosť a nepohodlnosť určovania náboja sa od takého stanovenia jednotky nakoniec upustilo a dnes sa jednotka prúdu určuje zo špecifického silového pôsobenia pohybujúcich sa nábojov, ktoré nazývame magnetickým silovým pôsobením. Sila medzi dvoma elektrickými prúdmi sa dá merať s vysokou presnosťou, a tak nakoniec etalónom v elektrickej meracej technike nie je etalón náboja, ale elektrického prúdu. Jednotkou elektrického prúdu je 1 ampér (1 A) a jej stanovenie bude vysvetlené v časti 6.4.2. Ampér patrí medzi základné meracie jednotky SI-sústavy a až na jej základe je určená jednotka elektrického náboja $1 \text{ C} = 1 \text{ A}\cdot\text{s}$, hoci náboj je primárnym pojmom elektromagnetizmu. Na túto skutočnosť sme upozornili už na začiatku tejto učebnice, v odseku 2.1.

Pohyb elektrických nábojov, teda elektrický prúd, má v závislosti od svojho charakteru rôzne fyzikálne účinky. Je všeobecne známe, že ak nedokonalým vodičom tečie elektrický prúd, vodič sa ohrieva. Túto skutočnosť môžeme vysvetliť tým, že pohybujúce sa nosiče elektrického náboja, ktorými v prípade kovov sú elektróny, narážajú na ióny kovovej mriežky, tým zvyšujú jej energiu, čo sa prejaví vyššou teplotou materiálu. V danom prípade prúd má tepelné účinky. Prechod prúdu odporovým vodičom je najbežnejší spôsob premeny elektrickej energie na teplo. Samotnú skutočnosť, že nosičmi elektrického

prúdu v kovoch sú elektróny, experimentálne dokázali v roku 1917 Tolman a Stewart¹ a neskôr, v roku 1944 Kettering a Scott². Meraním na medi a hliníku sa takto zistilo, že pre obidva materiály pohyblivé nosiče náboja majú merný náboj $-1,757 \cdot 10^{11} \text{ C.kg}^{-1}$, čo je vo veľmi dobrom súhlase s najpresnejšími meraniami merného náboja elektrónu $e/m_e = -1,758\,820\,174 \cdot 10^{11} \text{ C.kg}^{-1}$.

Elektrický prúd elektrónov, prípadne iných nabitých častíc vo vákuu sa líši od prúdu vo vodičoch napríklad tým, že rýchlosť prúdiacich častíc môže dosahovať hodnôt blízkych rýchlosti svetla (napr. prúdy častíc v urýchľovačoch), zatiaľ čo vo vodičoch sú tieto rýchlosti aj pri veľmi vysokých prúdových hustotách zriedka väčšie ako cca 1 cm/s. Súvisí to s enormne vysokou koncentráciou prúdiacich nábojov vo vodičoch. K energetickým premenám v prúdovom zväzku vo vákuu nedochádza, iba pri prechode prúdu do vodivého prostredia – do elektródy sa odovzdáva vysoká kinetická energia elektrónov vo forme tepla.

Iný charakter má elektrický prúd v elektrolytoch. V nich sú pohyblivými nosičmi elektrického náboja ióny a pri ich prenose sa prenáša aj látka, ktorá sa na elektródach vylučuje vo forme galvanických povlakov. Množstvo vylúčenej látky na elektróde závisí od prejdeného náboja, od mocnenstva a molekulovej hmotnosti vylučovanej látky. Tieto zákonitosti sformuloval Faraday a vo fyzikálnej chémii sú známe ako zákony o elektrolyze. Moderný pohľad na problematiku možno nájsť v literatúre³.

Prenos elektrického náboja v plynch má tiež svoje osobitosti a jeho opis je veľmi zložitý. Vodivý ionizovaný plyn sa nazýva fyzikálnou plazmou a predstavuje zmes iónov obidvoch druhov, prípadne aj voľných elektrónov a protónov. Prúdy v takýchto prostrediach sú vysoko nelineárne a podliehajú zvláštnym zákonitostiam. Ich štúdiom sa zaoberá fyzika plazmy.⁴

Všetky druhy elektrických prúdov majú jednu spoločnú vlastnosť. V priestore, v ktorom tečú, vytvárajú zvláštny typ silového poľa, ktoré nazývame **magnetické pole**. Tomuto poľu budeme venovať veľkú časť našich neskorších úvah.

Na vytvorení magnetického poľa sa podieľa ešte jeden prúd, ktorý v skutočnosti ani nie je prúdom, pretože ho necharakterizuje prenos elektrických nábojov. Nazýva sa **posuvný prúd** a spája sa s posúvaním nábojových centier v rámci jedného elektrického dipólu (v rámci jednej molekuly alebo atómu). Existuje aj vo vákuu, kde sa však nič neposúva. Jeho prúdová hustota J_p je daná výrazom

$$J_p = \frac{\partial D}{\partial t} \quad [\text{A.m}^{-2}]$$

kde D je vektor elektrickej indukcie. Vidíme, že J_p nemôže existovať v statických elektrických poliach. Tento prúd je zodpovedný za existenciu elektromagnetických vln. Názov "posuvný prúd" (displacement current) zaviedol tvorca elektromagnetickej teórie James Clerk Maxwell. Je známy tiež pod názvom "Maxwellov prúd". Jeho podstata bude objasnená v odseku 6.3.

¹ Tolman, R. C., Stewart, T. D., Phys. Rev., **9**, 64 (1917)

² Kettering, C. F., Scott, G. C., Phys. Rev., **66**, 257 (1944)

³ Atkins, P. W.: Fyzikálna chémia 3, Vydavateľstvo STU Bratislava 1999

⁴ Chen, F. F.: Úvod do fyziky plazmatu, Academia Praha 1984

Lieberman, M. A., Lichtenberg, A. J.: Principles of Plasma Discharges and Materials Processing, J.Wiley, New York 1994

5.1.2 Zákon zachovania elektrického náboja. Rovnica spojitosti elektrického prúdu

Predpokladajme, že v nejakej oblasti priestoru existuje prúdové pole dané vektorom prúdovej hustoty \mathbf{J} ako funkcia polohy. Vypočítajme tok nábojov nejakou uzavretou plochou S , teda v podstate elektrický prúd uzavretou plochou. Ak si spomínate, otázkou toku vektorovej veličiny uzavretou plochou sme sa zaoberali už pri formulácii Gaussovho zákona, kde sme konštatovali, že tok intenzity elektrického poľa je istá užitočná matematická fikcia. Tok vektora prúdovej hustoty ale nie je fikcia. Je to reálny prenos nábojov ako materiálnych objektov a cez uzavretú plochu môže byť nulový, ale aj nenulový. Nulový je vtedy, ak vo zvolených časových intervaloch vtečie do objemu rovnaké množstvo nábojov, ako z neho vytečie, pričom predpokladáme, že náboje sa zachovávajú. V tomto stacionárnom prípade na základe vzťahu (5.2) platí

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.5)$$

Ak je tok nenulový, tak pri jeho kladnej hodnote musí celkový náboj Q v objeme τ uzavretou plochou S s časom ubúdať, a naopak, ak celkový tok je záporný, musí náboj v objeme τ s časom narastať. V takomto všeobecnom a nestacionárnom prípade musí teda pre tok platiť

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{dQ}{dt} \quad (5.6)$$

Rovnica (5.6) je jednou zo základných rovníc elektromagnetizmu a nazýva sa **rovnica spojitosti** (kontinuity) elektrického prúdu napísaná v integrálnom tvare. V podstate vyjadruje zákon zachovania elektrického náboja. Matematicky plynie z Maxwellových rovníc, ale pre jej principiálny význam zákona zachovania hovoríme, že je s týmito rovnicami konzistentná. Z rovnice (5.6) pri $dQ/dt = 0$, teda pre $Q = \text{konšt.}$ plynie stacionárny tvar rovnice spojitosti (5.5).

Ak uvážime, že celkový náboj uzavretý plochou S v objeme τ je objemovým integrálom nábojovej hustoty ρ v priestore, teda

$$Q = \int_{\tau} \rho \, d\tau$$

potom rovnicu (5.6) pri časovo nepremennnej ploche S možno prepísať do tvaru

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau$$

Integrál na ľavej strane výrazu možno pomocou Gaussovej vety premeniť na objemový integrál divergencie prúdovej hustoty a poslednú rovnicu prepísať do tvaru

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{J} \, d\tau = - \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau$$

Vzhľadom na rovnaký obor integrácie na oboch stranách musí platiť

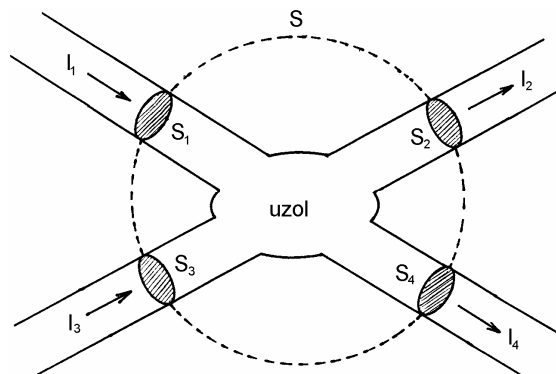
$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (5.7)$$

Výraz (5.7) je **rovnica spojitosti v diferenciálnom tvare**. Jej stacionárna podoba, v prípade keď $\partial \rho / \partial t = 0$, má tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (5.8)$$

5.1.3 Prvý Kirchhoffov zákon (Kirchhoffov zákon pre prúdy)

Rovnica spojitosti okrem svojho principiálneho vyjadrenia zákona zachovania elektrického náboja umožňuje sformulovať jedno z dvoch praktických pravidiel, na ktorých je založená analýza elektrických obvodov. V elektrickej sieti, ktorá je istým účelným spojením elektrických prvkov, ako sú zdroje, rezistory, kondenzátory a cievky (indukčnosti), sú miesta, v ktorých sa spojovacie vodiče prvkov stretávajú v uzloch, a tam sa prúdy do jednotlivých vodičov vetvia. Súvis medzi rozvetvenými prúdmi plynie z rovnice spojitosti. Predpokladajme, že sa v nejakom mieste siete spájajú viac ako dva vodiče (drôty), ktorými tečú prúdy, ako na *obr. 5.3*. Obaľme uzol vodičov myslenu uzavretou plochou S , ktorá na prierezoch jednotlivých vodičov vytína plôšky S_1 , S_2 , S_3 a S_4 . Prierezom každého z vodičov tečú odpovedajúce prúdy I_1 až I_4 ako integrály prúdovej hustoty cez jednotlivé plôšky. Tok nábojov uzavretou plochou S je daný algebraickým súčtom tokov cez jednotlivé plôšky, teda súčtom prúdov. Pri stacionárnom prúde na základe vzťahu (5.5) je celkový tok nulový, teda súčet jednotlivých prúdov do uzla a von z uzla sa rovná nule. Matematicky



Obr. 5.3

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \dots + \int_{S_4} \mathbf{J}_4 \cdot d\mathbf{S}_4 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

Na základe uvedeného možno sformulovať všeobecné pravidlo pre n stacionárnych prúdov: **algebraický súčet všetkých prúdov v uzle elektrickej siete sa rovná nule**, teda

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (5.9)$$

pre $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Pravidlo (5.9) je známe ako **prvý Kirchhoffov zákon** (Kirchhoffov zákon pre prúdy). Zrejme pri nenulových hodnotách prúdov niektoré musia tečť z uzla, a iné naopak. Je zvykom považovať prúdy, ktoré z uzla vytekajú za kladné a naopak, prúdy vtekajúce do uzla za záporné. Treba zdôrazniť, že prvý Kirchhoffov zákon platí iba pre stacionárne prúdy, keď sa náboj v uzle nehromadí alebo z neho neubúda.

5.2 OHMOV ZÁKON

V rokoch 1825 – 1827 uverejnil nemecký fyzik Georg Simon Ohm sériu prác s ústredným názvom "Stanovenie zákona, podľa ktorého kovy vedú elektrinu",¹ v ktorých opísal výsledky experimentov s elektrickými prúdmi v najčastejšie používaných kovových vodičoch. Pri meraní rozdielu potenciálov (napätia) U na definovanom úseku vodiča v závislosti od pretekaného prúdu I zistil, že pri danej teplote a pre daný materiál je závislosť napätia U od prúdu I vodičom lineárna, a možno ju napísať jednoduchým vzťahom

$$U = RI \quad (5.10)$$

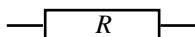
kde R je koeficient úmernosti, závislý od druhu materiálu, od teploty, od dĺžky úseku, jeho priečnej geometrie a nazýva sa **odpor (rezistencia)** vodiča. Vzťah (5.10) je jedným z najznámejších vzťahov elektrodynamiky a nazýva sa podľa svojho objaviteľa **Ohmov zákon** (vo svojej integrálnej forme). Často sa tiež zapisuje v tvare

$$I = GU \quad (5.11)$$

kde $G = 1/R$ je **vodivosť (konduktancia)** vodiča. Odpor alebo vodivosť je integrálna vlastnosť vodiča. Pre potreby elektrotechniky a elektroniky sa priemyselne vyrábajú elektrotechnické súčiastky s odporovými vlastnosťami, pre ktoré slovenská terminologická komisia pred niekoľkými rokmi vymyslela kuriózný názov "odporník", a ktorý odborná komunita dodnes neakceptovala. V praxi len zriedkavo počujete elektroinžiniera alebo fyzika hovoriť o odporníkoch, najčastejšie pre súčiastku a jej elektrickú vlastnosť používajú ten istý názov "odpor". Vhodnejší je asi cudzí názov "rezistor", ktorý jazyková norma tiež pripúšťa. Podrobnosti o priemyselnej výrobe odporníkov alebo rezistorov sa

¹ Ohm, G. S.: Vorläufige Anzeige des Gesetzes nach welchem die Metalle die Kontakt-Elektrizität leiten, Schweizer Jour. (1825) – Bestimmung dieses Gesetzes nebst einem Entwurfe zu einer Theorie des Voltaschen Apparats, tamtiež (1826) – Die Galvanische Kette mathematisch bearbeitet, Berlin (1826)

možno dozvedieť z firemnej a elektrotechnickej literatúry. Podľa našich noriem sa v elektrických schémach rezistory kreslia symbolom



s vyznačením hodnoty odporu prípadne aj prípustného tepelného výkonu (na vyznačenie hodnoty odporu, jej tolerancie a výkonu sa používa aj farebný kód). Jednotkou elektrického odporu vodiča je 1 ohm (1Ω). Je to odpor vodiča medzi jeho koncami, na ktorom pri prúde 1 A vznikne napätie (potenciálový spád) 1 V, teda

$$1 \Omega = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}} = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$$

Jednotkou elektrickej vodivosti je recipročný ohm (Ω^{-1}). Táto jednotka v sústave SI má názov siemens (S).¹ Teda $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$.

Existuje iná, úplnejšia, diferenciálna formulácia Ohmovho zákona, podľa ktorej v lineárnom prostredí pod účinkom prúdovej hustoty \mathbf{J} v každom bode priestoru je nenulová intenzita elektrického poľa \mathbf{E} , a tieto veličiny súvisia vzťahom

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} \quad (5.12)$$

kde ρ je bodová charakteristika odporového prostredia nazývaná **rezistivita** (starší názov merný odpor). Rezistivita je materiálová konštanta prostredia a zo vzťahu (5.12) plynie pre ňu rozmer a jednotka $1 \Omega \cdot \text{m}$.

Druhý spôsob diferenciálnej formulácie Ohmovho zákona je výraz

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.13)$$

kde $\sigma = 1/\rho$ sa nazýva **konduktivita** (starší názov merná vodivosť)² a meria sa v jednotkách $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$.

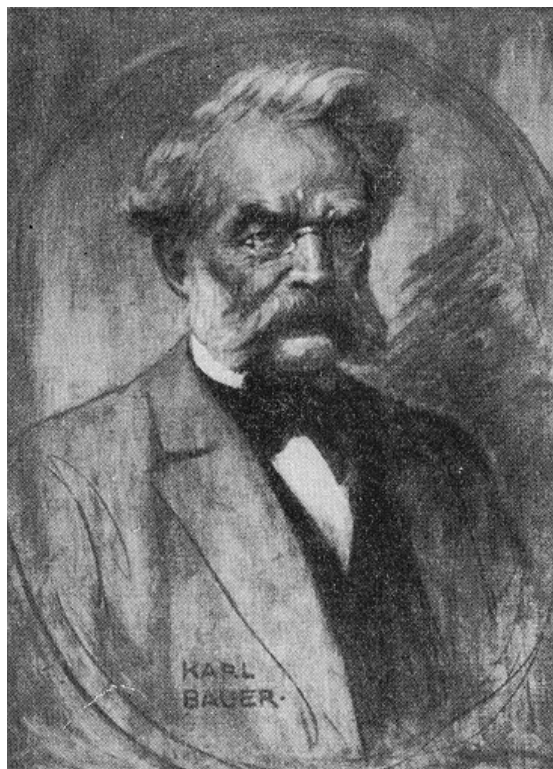
Diferenciálne formulácie Ohmovho zákona sú oproti integrálnym všeobecnejšie, pretože nezávisia od objemu a tvaru uvažovaného vodivého objektu. Treba si všimnúť, že vektory prúdovej hustoty a intenzity elektrického poľa v odporovo lineárnom prostredí majú rovnaké smery, čo v niektorých prípadoch umožňuje modelovať prúdové pole poľom siločiar vhodného elektrostatického problému. Toto tvrdenie možno podporiť aj čisto teoretickou úvahou: V stacionárnom prípade, vo vodivom prostredí, v ktorom konduktivita σ je konštantná, $\text{div} \mathbf{J} = \sigma \text{div} \mathbf{E} = 0$ a $\mathbf{E} = -\text{grad} V$. Využitím vzťahov medzi diferenciálnymi operátormi zistíme, že pre potenciál vo vodivom prostredí platí známa Laplaceova rovnica

$$\Delta V = 0$$

podobne ako v elektrostatickom prípade v nevodivom prostredí, alebo vo vákuu. Ak dve dokonale vodivé elektródy ponoríme do prostredia s konečnou vodivosťou a budeme ich

¹ Jednotka pomenovaná podľa nemeckého elektroinžiniera Wenera von Siemens (1816 – 1892), vynálezcu elektrického stroja – dynamu.

² Doteraz sme symbolmi ρ a σ označovali objemovú a plošnú hustotu elektrických nábojov. V ďalšom texte budeme tieto symboly používať aj na označenie rezistív a konduktív. Z kontextu bude jasné, o ktoré veličiny pôjde. Táto symbolika sa zvykne rovnako používať aj v iných učebniciach.

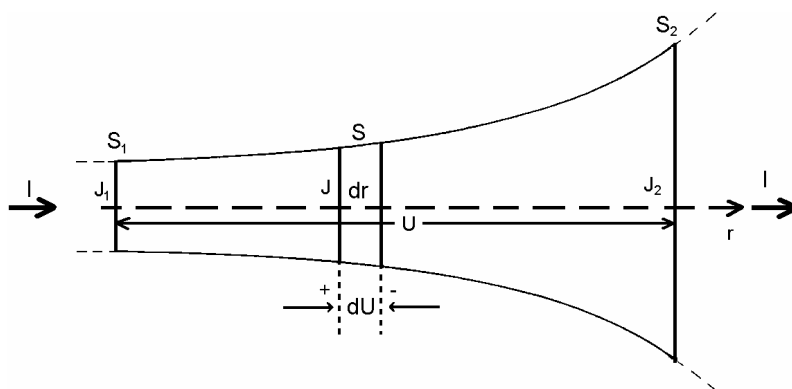


Werner von SIEMENS
(1816 Lenthe – 1892 Charlottenburg)

Maľba v Deutsches Museum, Mníchov

udržiavať na konštantnom potenciálovom rozdiel, bude rozloženie potenciálu a intenzity v priestore také isté ako rozloženie pre tieto elektródy vo vákuu.

Z diferenciálneho tvaru Ohmovho zákona možno jednoducho získať jeho integrálny tvar. Na obr. 5.4 je zobrazený úsek prúdovej trubice tvorenej elektricky vodivým materiálom s konštantnou rezistivitou ρ . Predpokladá sa, že celou plochou S_1 do trubice vstupuje elektrický prúd $I = J_1 S_1$ a plochou S_2 ten istý prúd $I = J_2 S_2$ vystupuje. Vo vnútri trubice sa vytvorí elektrické pole intenzity $E = \rho J$, ktorá pri homogénnom materiále má tú vlastnosť, že na ľubovoľnej prierezovej ploche má konštantnú hodnotu závislú iba od vzdialenosti od vstupnej plochy S_1 . Každá prierezová plocha je ekvipotenciálnou plochou, a na nekonečne krátkom úseku dr medzi dvoma ekvipotenciálnymi plochami vznikne spád napätia



Obr. 5.4

$$dU = E dr = \rho J dr$$

Prúdová hustota J sa pozdĺž trubice mení, na priereze v ľubovoľnej rovine však zostáva konštantná, pretože materiál prúdovej trubice je homogénny. V ľubovoľnej prierezovej rovine je teda prúdová hustota nepriamo úmerná prierezovej ploche S v danej vzdialenosti a pri konštantnom integrálnom prúde I je $J = I/S$. Po dosadení v poslednom vzťahu pre elementárny napät'ový spád dU dostaneme

$$dU = \rho \frac{dr}{S} I$$

Celkový spád napätia pozdĺž prúdovej trubice, teda napätie na nej je

$$U = I \rho \int_0^l \frac{dr}{S} = IR \quad (5.14)$$

Výraz (5.14) je integrálny tvar Ohmovho zákona pre prúdovú trubicu tvorenú vodivým materiálom, do ktorej prúd I plochou S_1 vstupuje a S_2 vystupuje a na trubici vznikne úbytok napätia U . Odpor uvažovanej trubice

$$R = \rho \int_0^l \frac{dr}{S} \quad [\Omega] \quad (5.15)$$

V prípade, ak trubicou je valec dĺžky l s konštantnou prierezovou plochou S , dostaneme pre jeho odpor známy jednoduchý výraz

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad [\Omega]$$

Rezistivita a konduktivita sú materiálové konštanty, ktoré sú pre elektricky izotropné prostredia rozmerové číselné konštanty, pre anizotropné prostredia sú rozmerové tenzorové veličiny. Rozsah hodnôt týchto konštant pre rôzne látky v prírode je obrovský a prekrýva viac ako dvadsať rádov. Konduktivita dobrých vodičov (striebra, medi, hliníka a i.) je rádu 10^8 S/m, konduktivita kvalitných izolantov, ako napríklad tavený kremeň, je rádu 10^{-17} S/m, čo predstavuje odstup až dvadsaťpäť rádov.

Tabuľka 7

Materiál		Rezistivita pri 20 °C [$\Omega \cdot m$]	Teplotný odporový súčiniteľ pri 20 °C [$^{\circ}C^{-1}$]
Čisté kovy	Striebro	$1,63 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$
	Meď	$1,72 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
	Zlato	$2,35 \cdot 10^{-8}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$
	Hliník	$2,83 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
	Wolfram	$5,60 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$
	Nikel	$7,80 \cdot 10^{-8}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$
	Cín	$1,15 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$
	Platina	$1,09 \cdot 10^{-7}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
	Železo	$0,98 \cdot 10^{-7}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$
Zliatiny	Mosadz	$0,75 \cdot 10^{-7}$	$\sim 10^{-3}$
	Konštantán	$0,44 \cdot 10^{-6}$	$\sim 10^{-6}$
	Manganín	$0,48 \cdot 10^{-6}$	$\sim 10^{-6}$
	Nichróm	$0,11 \cdot 10^{-5}$	$\sim 10^{-4}$
Polovodiče	Germánium	$\sim 0,5 \cdot 10^0$	záporný
	Kremík	$\sim 2 \cdot 10^3$	záporný
Dielektriká (izolátory)	Sklo	$2 \cdot 10^{11}$	
	Pečatný vosk	$\sim 10^{14}$	
	Síra	$\sim 10^{15}$	
	Tavený kremeň	$> 5 \cdot 10^{16}$	

Odpor a rezistivita materiálov závisia od teploty. U väčšiny materiálov ich odpor s teplotou vzrastá, u amorfného uhlíka (grafitu) klesá, a klesá aj u zvláštnej skupiny materiálov, ktoré sa nazývajú polovodiče. Pre nepríliš veľké teplotné zmeny v okolí 0 °C zmena odporu materiálov je lineárna a teplotná závislosť odporu je tvaru

$$R = R_0(1 + \alpha\vartheta) \quad [\Omega] \quad (5.16)$$

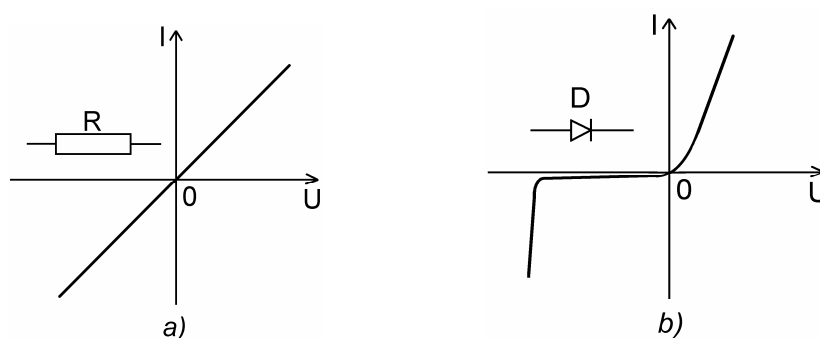
podobne pre rezistivitu

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\vartheta) \quad [\Omega \cdot m] \quad (5.17)$$

R_0 a ρ_0 sú odpor, resp. rezistivita pri 0°C (prípadne pri inej referenčnej teplote), ϑ je teplota v Celsiovej stupnici a

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{d\vartheta} \quad [^\circ\text{C}^{-1}] \quad (5.18)$$

je pomerná zmena rezistivity ($d\rho/\rho_0$) na jednotkovú zmenu teploty ϑ a nazýva sa teplotný odporový súčiniteľ. Pre kovy a ich zliatiny je kladný, pre uhlík (grafit) a polovodiče záporný. V tabuľke 7 sú uvedené niektoré typické materiály, orientačné hodnoty ich rezistív $\rho = 1/\sigma$ a teplotných odporových súčiniteľov α .



Obr. 5.5

Popri lineárnych odporových materiáloch a z nich vyrobených rezistorov sa v praxi stretávame s elektrickými prvkami, ktoré sú nelineárne, a ktorých je hlavne v elektronike podstatne viac ako lineárnych. Na nelineárnych elektrických prvkoch je založená celá obvodová elektronika. Takými prvkami sú všetky polovodičové súčiastky, z ktorých najbežnejšie sú diódy a tranzistory. Linearita prvku sa posudzuje podľa jeho voltampérovej (VA) charakteristiky. Voltampérová charakteristika prvku, ktorý spĺňa Ohmov zákon, je priamka prechádzajúca začiatkom súradníc $I - U$ ako na obr. 5.5a a smernica I/U je konštantná vodivosť prvku. Na obr. 5.5b je znázornená silne nelineárna VA-charakteristika stabilizačnej Zenerovej diódy.

5.2.1 Základy teórie vodivosti kovov a polovodičov

Základy elektrónovej teórie vodivosti kovov položili v roku 1900 P. Drude a H. A. Lorentz vyslovením predstavy, že kovy sú polykryštalické látky s kovovou väzbou. Valenčné elektróny sú len veľmi slabo viazané k ich atómom, a vytvorením kryštalickej mriežky kovu z kladných ionizovaných atómov sa tieto elektróny uvoľnia a pohybujú sa chaoticky s vysokými rýchlosťami. Súbor týchto voľných alebo vodivostných elektrónov tvorí **elektrónový plyn**. V meďi, ktorej atómy majú 29 elektrónov, jeden elektrón je valenčný

a vstupuje do elektrónového plynu, zostávajúcich 28 elektrónov spolu s jadrom tvoria kladný ión, ktorý je súčasťou kryštalickej mriežky medi.

Elektrónový plyn má niektoré vlastnosti reálnych plynov a možno preň zaviesť klasický pojem strednej voľnej dráhy, ktorú elektrón urazí medzi dvoma zrážkami s mriežkou. Pri zvyšovaní teploty kovov sa zvyšuje frekvencia zrážok elektrónov, teda skraca sa doba medzi zrážkami. Plyn takmer neprijíma energiu, pri izbových teplotách je elektrónové merné teplo malé oproti mernému teplu súvisiacemu s kmitaním kryštalickej mriežky kovu. Toto vysvetlila až Sommerfeldova kvantová elektrónová teória. Klasickú teóriu pozmenil Sommerfeld predpokladmi, že energia valenčných elektrónov sa nemení spojito a že hladiny ich energií sú v monokryštáli obsadzované v zhode s Pauliho vylučovacím princípom. Dokonalý opis vodivostných vlastností kovov, ale hlavne polovodičov, však nepodala ani Sommerfeldova teória, a preto v tridsiatych rokoch minulého storočia vznikla pásová teória tuhých látok.¹

Keďže na tejto úrovni nie je možné podať presnú kvantovú teóriu elektrickej vodivosti kovov, uspokojíme sa s teóriou Drudeho a Lorentza (správnou pre niektoré typy polovodičov), ktorá vychádza z predstavy klasického elektrónového plynu, pre ktorý platí Maxwelllovo-Boltzmannovo energetické rozloženie so strednou hodnotou energie

$$W = \frac{3}{2}kT = \frac{m_e \langle v \rangle^2}{2} \quad (5.19)$$

kde m_e je hmotnosť elektrónov a $\langle v \rangle$ je ich stredná tepelná rýchlosť v plyne; pri izbových teplotách ($T \sim 300$ K) dosahuje hodnôt $v \sim 10^5$ m/s. Podobne, ako pri molekulárnych zrážkach, aj tu môžeme opísať elektrónovo-mriežkové zrážky pomocou strednej voľnej dráhy λ , ako strednej vzdialenosti, ktorú elektrón prejde medzi dvoma zrážkami. (Vzájomné zrážky elektrónov sú zriedkavé a prakticky nemajú vplyv na vodivosť materiálu).

Ak sa v kove alebo v polovodiči vytvorí elektrické pole, zmení sa chaotický pohyb elektrónov tak, že celý súbor voľných elektrónov sa začne pomaly, driftovou (unášavou) rýchlosťou v_d , pohybovať proti smeru vonkajšieho elektrického poľa pri súčasnom zachovaní chaotického pohybu. Driftová rýchlosť je mnohokrát menšia ako spomínaná stredná tepelná rýchlosť elektrónov a pri bežných prúdoch dosahuje hodnôt rádu 10^{-2} cm/s (pozri napr. úlohu 97). Ak sa obmedzíme na klasické predstavy, možno driftovú rýchlosť vypočítať jednoducho. Ak je v materiále stredná intenzita elektrického poľa E , potom na každý elektrón pôsobí sila eE , a táto sila bude podľa druhého Newtonovho zákona udeľovať elektrónom zrýchlenie

$$a = \frac{eE}{m_e}$$

Driftovú rýchlosť môžeme vypočítať ako súčin tohoto zrýchlenia a strednej doby medzi zrážkami $\tau = \lambda / \langle v \rangle$, teda

$$v_d = a\tau = \frac{e\lambda}{m_e \langle v \rangle} E$$

¹ Sommerfeld, A., Bethe, H.: Elektronentheorie der Metalle, Handbuch der Physik, Band XXIV/II, Springer Verlag, Berlin 1933

Driftová rýchlosť nie je nič iné ako rýchlosť, ktorá vystupuje v definičnom vzťahu (5.1) pre prúdovú hustotu, a ktorý pre naše účely môžeme prepísať do tvaru $J = nev_d$. Ak sem dosadíme posledný výraz, dostaneme

$$J = \frac{ne^2\lambda}{m_e\langle v \rangle} E$$

Porovnaním tohto výrazu s výrazom (5.13) pre Ohmov zákon v diferenciálnom tvare, dostaneme vyjadrenie konduktivity kovu v tvare

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{m_e\langle v \rangle} \quad (5.20)$$

Výraz (5.20) by sme mohli považovať za potvrdenie, že kovy spĺňajú Ohmov zákon za predpokladu, že λ a $\langle v \rangle$ nezávisia od pôsobiaceho elektrického poľa E . Je celkom prirodzené predpokladať, že je to pravda, pretože λ a $\langle v \rangle$ závisia od rýchlostného rozloženia vodivostných elektrónov a toto rozloženie sa nemení ani vo veľmi silných, prakticky realizovateľných poliach, o čom svedčí skutočnosť, že driftová a tepelná rýchlosť elektrónov sa líšia asi o desať rádov. Inak povedané, môžeme si byť istí, že hodnoty λ a $\langle v \rangle$, napr. pre meď pri teplote 20 °C, bez prítomnosti poľa zostanú nezmenené aj v prípade, ak v medí vybudíme elektrické pole. Teda výraz (5.20) nezávisí od E a kovový materiál spĺňa Ohmov zákon. Numerické výpočty konduktív zo vzťahu (5.20) sú obťažné, pretože je ťažké stanoviť λ , avšak takéto výpočty boli predsa len pre mnohé materiály urobené a v prípade niektorých kovov, ale hlavne polovodičov výsledky potvrdili použiteľnosť aj tejto klasickej teórie.

Napriek tomu že Drudeho teória založená na Maxwellovej-Boltzmannovej štatistike dokáže pomerne úspešne vysvetliť elektrickú vodivosť kovov a polovodičov, úplne zlyháva pri vysvetľovaní merného tepla kovov. Molové merné teplo mriežky kovu pri izbových teplotách dané Dulongovým-Petitovým zákonom je $3R$ ($R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ je plynová konštanta) a na základe strednej energie W danej výrazom (5.19) voľné elektróny prispievajú k mernému teplu kovu ešte príspevkom $3R/2$. Takto by bolo merné teplo kovu asi o 50 % väčšie ako merné teplo dielektrika, avšak merania tento rozdiel nepotvrdzujú a merné teploty kovu a dielektrika sa podstatne nelíšia. Táto ťažkosť sa dala odstrániť až predpokladom, že pre elektrónový súbor (plyn) v kove nemožno použiť klasickú Maxwellovu-Boltzmannovu štatistiku, ale musí sa použiť kvantová Fermiho-Diracova štatistika s rozdelením podľa energií W tvaru¹

$$f_{FD} = \frac{1}{e^{kT/W} + 1} \quad (5.21)$$

kde k je Boltzmannova konštanta, T je absolútna teplota a W_F je Fermiho hladina (najvyššia energia, ktorú môžu elektróny dosiahnuť pri teplote $T = 0 \text{ K}$). Elektrón má

¹ Pozri napr. Hrivnák, L., Bezák, V., Foltín, J., Ožvold, M.: Teória tuhých látok, VEDA Vydavateľstvo SAV Bratislava 1985

totiž vlastný moment hybnosti (spin) veľkosti $\hbar/2$ a iba rozdelenie typu (5.21) mu náležito vyhovuje.

Kvantovomechanické výpočty merného tepla C_v vodivostných elektrónov v kove s využitím Fermiho-Diracovho rozdelenia (5.21) vedú k hodnote¹

$$C_v = \frac{1}{2} \pi^2 R \frac{kT}{W_F}$$

Keďže $kT \ll W_F$ pri izbových teplotách, je elektrónové merné teplo iba zlomok predpovedanej klasickej hodnoty $3R/2$. Ťažkosti s veľkým merným teplom elektrónov v klasickej Drudeho teórii sú týmto odstránené.

5.3 ELEKTROMOTORICKÉ NAPÄTIE ZDROJA

V našich úvahách o elektrických prúdoch sme zatiaľ nepoložili otázku o príčinách pohybu elektrických nábojov. Okrem triviálneho, v praxi zriedkavého prípadu, keď sa náboj ako hmotný objekt pohybuje zotrvačnosťou bez vonkajšieho pôsobenia, je k pohybu náboja potrebná vonkajšia hnacia sila, bez ktorej, hlavne v látkovom prostredí, každý pohyb elektrických nábojov veľmi rýchle ustáva. Pre lepšie pochopenie problematiky si predstavme dve kovové vodivé telesá, jedno nenabité a druhé nabité záporne (elektrónmi). Prvé, nenabité teleso, sa oproti druhému nachádza na nejakom kladnom potenciáli (napätí) U_0 . Spojme tieto telesá tenkým vodivým drôtom. Je zrejmé, že záporný náboj z druhého telesa potečie na prvé, nenabité, a teda drôtom tečie elektrický prúd (podľa dohody opačný ako prúd elektrónov). Fyzikálne možno tento prúd vysvetliť tým, že bezprostredne po pripojení drôtu vznikne v ňom, v dôsledku napätia U_0 , nenulové elektrické pole, ktoré núti elektróny k pohybu vo vodiči. Keďže prenosom nábojov bude začiatkový rozdiel potenciálov veľmi rýchle klesať k nule, bude k nule klesať aj intenzita elektrického poľa v drôte a v dôsledku toho prúd v drôte veľmi rýchle zanikne. Tento nestacionárny proces charakterizuje vybíjanie telies, alebo prerozdelenie náboja na nich, a vo väčšine prípadov predstavuje v čase jednoduchý exponenciálny priebeh.

Ak by mal prúd spojovacím vodičom zostať stacionárny, začiatkový potenciálový rozdiel U_0 by sa musel udržiavať, a to tak, že elektróny, ktoré prešli drôtom by sa po inej dráhe (mimo drôtu) prenášali znovu na pôvodne nabitú teleso. Je len samozrejmé, že túto prácu nemôže vykonať vlastné elektrické pole, ale iba nejaká vonkajšia sila. Zariadenia, ktoré sú schopné prenášať náboj proti elektrickému poľu, a tak udržiavať stály rozdiel potenciálov medzi svojimi výstupnými svorkami aj v prípade, ak cez tie svorky tečie elektrický prúd, sa nazývajú zdroje **elektromotorických napätí (EMN)**. Toto napätie sa zvykne označovať symbolom \mathcal{E} . Elektromotorické napätie zdroja možno opísať formálnou vnútenou intenzitou \mathbf{E}_{em} smerujúcou v zdroji od zápornej svorky ku kladnej, ktorá je v rovnováhe so skutočnou intenzitou poľa v zdroji \mathbf{E}_i , teda $\mathbf{E}_{em} = -\mathbf{E}_i$ (pozri tiež odsek 2.11). Veľmi ilustratívnym, v zmysle uvedenej definície zdroja EMN, je známy Van de Graaffov generátor, v ktorom sa sníma z jednej elektródy náboj a mechanicky,

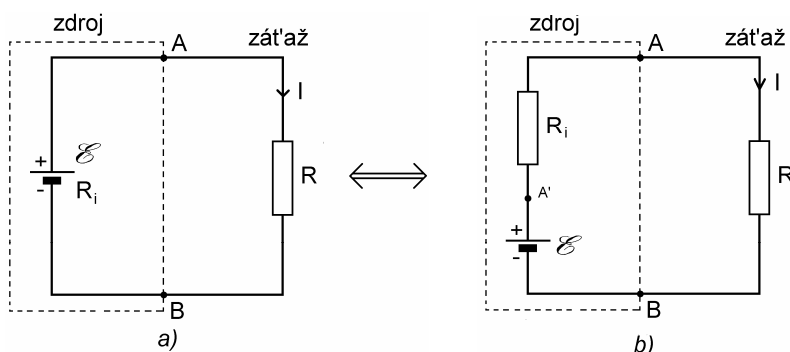
¹ Kittel, C.: Elementary statistical physics, New York J. Wiley & Sons, Inc., London Chapman & Hall, Ltd. 1960

transmisným izolačným pásom, sa prenáša proti sile poľa na druhú elektródu. Iný príklad prenosu elektrického náboja proti silám poľa je galvanický článok, alebo sekundárny článok (akumulátor), v ktorom sa potenciálový rozdiel na elektródach udržiava vďaka elektrochemickým pochodom na elektródach ponorených v elektrolyte. Výkonovými zdrojmi EMN sú rôzne druhy jednosmerných, ale hlavne striedavých generátorov určených na výrobu elektrickej energie v elektrárnach.

5.4 JEDNODUCHÝ ELEKTRICKÝ OBVOD

Každý zdroj elektromotorického napätia charakterizujú dva parametre; je to jeho elektromotorické napätie a jeho vnútorný odpor. Pod elektromotorickým napätím \mathcal{E} rozumieme napätie na svorkách nezaťaženého zdroja, teda v prípade, keď zdroj nedodáva do vonkajšej záťaže elektrický prúd. Elektromotorické napätie zdroja možno vyjadriť integrálom formálnej intenzity \mathbf{E}_{emf} vo vnútri zdroja od jeho zápornej svorky ku kladnej, teda

$$\mathcal{E} = \int_{(-)}^{(+)} \mathbf{E}_{emf} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.22)$$



Obr. 5.6

Vnútorný odpor zdroja R_i je ten odpor, ktorý zdroj kladie vlastnému prúdu, alebo aj prúdu iných zdrojov, ktoré sú zapojené v okruhu. Na obr. 5.6a je znázornený jednoduchý elektrický obvod, v ktorom zdroj elektromotorického napätia \mathcal{E} s vnútorným odporom R_i je pripojený k záťaži reprezentovanej odporom R . Na obr. 5.6b je znázornený náhradný obvod zapojenia, v ktorom zdroj medzi svorkami AB je nahradený sériovým spojením ideálneho bezodporového zdroja \mathcal{E} a jeho vnútorného odporu R_i . V zdroji a v rezistoroch obvodu sú nenulové intenzity elektrického poľa, a pre tieto intenzity platí, že integrál po uzavretej dráhe pozdĺž obvodu sa z nich rovná nule, teda

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A'}^A \mathbf{E}_{R_i} \cdot d\mathbf{l} + \int_A^B \mathbf{E}_R \cdot d\mathbf{l} + \int_B^{A'} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (5.23)$$

kde \mathbf{E}_{R_i} , \mathbf{E}_R a \mathbf{E}_i sú postupne intenzity vo vnútornom odpore zdroja, v záťažovom odpore a intenzita poľa medzi svorkami ideálneho zdroja. Prvý integrál v súčte predstavuje napätie $U_{A'A}$ na vnútornom odpore zdroja R_i a podľa Ohmovho zákona

$$\int_{A'}^A \mathbf{E}_{R_i} \cdot d\mathbf{l} = U_{A'A} = R_i I$$

kde I je prúd, ktorý tečie v obvode. Podobne druhý integrál predstavuje spád napätia U_{AB} na odpore záťaže R , teda

$$\int_A^B \mathbf{E}_R \cdot d\mathbf{l} = U_{AB} = RI$$

Nakoniec tretí integrál predstavuje pozitívny skok napätia vo vnútri zdroja spôsobený spomínanými vnútrenými silami, ktoré udržiavajú potenciálny rozdiel na svorkách zdroja, a v obvode elektrický prúd. Intenzita $\mathbf{E}_i = -\mathbf{E}_{emf}$ je intenzita smerujúca v zdroji od kladnej elektródy k zápornej, teda od A' k B na obr. 5.6b, takže príslušný integrál dá zápornú hodnotu elektromotorického napätia zdroja

$$\int_B^{A'} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \int_B^{A'} \mathbf{E}_{emf} \cdot d\mathbf{l} = -\mathcal{E}$$

Ak dosadíme tieto vyjadrenia integrálov do (5.23) dostaneme jednoduchý vzťah medzi elektromotorickým napätím zdroja \mathcal{E} a potenciálovými spádmi $U_{A'A}$ a U_{AB} na odporoch v obvode

$$U_{A'A} + U_{AB} - \mathcal{E} = 0$$

alebo po dosadení a úprave

$$\mathcal{E} = RI + R_i I \quad (5.24)$$

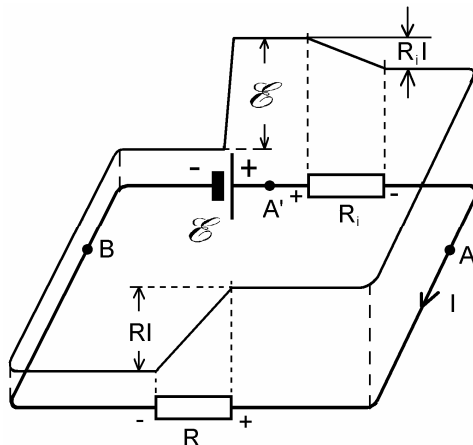
Vzťah (5.24) vyjadruje Ohmov zákon pre jednoduchý uzavretý obvod so zdrojom a odporom. Na obr. 5.7 je priebeh napätia na jednotlivých prvkoch znázornený graficky v cykle pozdĺž obvodu. Priebeh napätia zdroja \mathcal{E} v jeho vnútri nemusí byť nutne lineárny ako na obrázku – to závisí od charakteru a vnútornej štruktúry zdroja (pozri obr. 2.48). Napätie

$$U_{AB} = \mathcal{E} - R_i I < \mathcal{E} \quad (5.25)$$

sa nazýva svorkové napätie zdroja a je vždy menšie ako EMN zdroja (v danom prípade sa súčasne rovná napätiu na záťažovom odpore R). Podľa (5.24) v obvode tečie prúd

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i} \quad (5.26)$$

Podľa vnútorného odporu sa zdroje delia na **tvrdé a mäkké zdroje**. Tvrdý zdroj je taký, ktorý má malý vnútorný odpor vo vzťahu k možným záťažovým odporom. V takom zdroji spád napätia $R_i I$ na jeho vnútornom odpore je malý v porovnaní s \mathcal{E} a svorkové napätie zdroja zostáva aj pri jeho veľkom zaťažení (veľkom prúde) blízke EMN zdroja, čo vidíme zo vzťahu (5.25). Tvrdým zdrojom je napr. akumulátorová batéria používaná v automobiloch. Jej vnútorný odpor v dobrom stave je rádovo $R_i \sim 10^{-3} \Omega$. Ak zoberieme do úvahy, že spúšťač automobila potrebuje prúd $I \sim 200 \text{ A}$, je pri štarte spád napätia na vnútornom odpore zdroja $R_i I \sim 0,2 \text{ V}$, čo pri 12 V-ovej batérii predstavuje pokles jej svorkového napätia asi na 11,8 V, teda asi o 1,7 %. Takýto pokles neovplyvní činnosť spúšťača. Ak je batéria zle ošetrovaná, môže jej vnútorný odpor vzrásť o jeden alebo viac rádov, teda na hodnotu $\sim 10^{-2} \Omega$ alebo aj viac, čo by pri rovnakom prúde znamenalo pokles svorkového napätia o 2 V, teda na 10 V, a to by už nemuselo stačiť na roztočenie spúšťača.



Obr. 5.7

Tvrdým zdrojom je z hľadiska spotrebiteľa aj bytová prípojka (zásuvka) k energetickej sieti 220 V, 50 Hz. Aj pri veľkom zaťažení zásuvky toto napätie, presnejšie jeho amplitúda, resp. efektívna hodnota, zostáva relatívne stále. Proti neprimeranému preťaženiu je elektráreň chránená systémom poistiek a ističov po celej rozvodovej trase. Napätie 220 V je tvrdé a pri skrate napr. cez ľudské telo neklesne, ale elektrickým prúdom zabíja!

Ideálnym napätovým zdrojom je hypotetický zdroj s nulovým vnútorným odporom. Jeho svorkové napätie zostáva stále pri ľubovoľnom zaťažení a rovná sa EMN zdroja.

Medzi mäkké napätové zdroje patrí napr. Van de Graaffov generátor a vôbec všetky elektrostatické generátory napätia. Aj keď ich EMN môže dosahovať stotisíce až milióny voltov, vzhľadom na ich vysoký vnútorný odpor toto napätie pri sebemenšom zaťažení prudko klesá až k nule.

Zdroje EMN možno spájať sériovo a paralelne. **Sériové spojenie zdrojov** poskytne zdroj, ktorého EMN sa rovná súčtu jednotlivých EMN účastných zdrojov, teda

$$\mathcal{E} = \sum_j \mathcal{E}_j$$

a výsledný vnútorný odpor zdroja je súčet sériovo zapojených vnútorných odporov

$$R_i = \sum_j R_{ij}$$

Sériovým spojením dostaneme zdroj s vyšším EMN, ale aj s väčším vnútorným odporom, teda zdroj mäkkší. Príklad sériového spojenia zdrojov je už spomínaná akumulátorová batéria 6 článkov, každý s EMN cca 2 V.

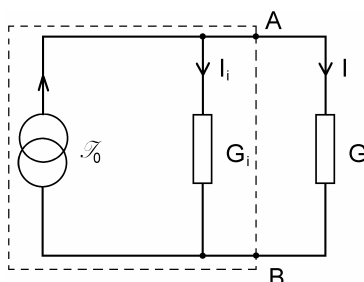
Paralelné spojenie zdrojov je technicky prípustné iba pre identické zdroje, a samozrejme spájajú sa svorky s rovnakou polaritou. Výsledné EMN spojenia je rovnaké ako jedného zdroja, ale výsledný vnútorný odpor R_{iv} je výsledkom paralelného radenia rovnakých vnútorných odporov R_i jednotlivých zdrojov, teda

$$R_{iv} = \frac{R_i}{n}$$

kde n je počet zaradených zdrojov. Výhodou takého spojenia je nižší vnútorný odpor výsledného zdroja, teda tvrdší zdroj. Energetické kapacity zdrojov sa u obidvoch zapojení sčítavajú, nábojové kapacity sa obyčajne udávajú v ampérhodinách (Ah).

V teoretickej elektrotechnike sa popri pojme "zdroj napätia" často pracuje s pojmom "**zdroj prúdu**". Treba povedať, že nejde o nejaký zvláštny zdroj, ide iba o iný, duálny pohľad na zdroj elektrickej energie. Podobne, ako sa elektromotorické napätie zdroja rovná súčtu napätia na vnútornom odpore zdroja a záťaži podľa vzťahu (5.23), tak prúd \mathcal{I}_0 "prúdového zdroja" sa rovná súčtu prúdu I_i cez vnútorný odpor R_i (alebo vodivosť $G_i = 1/R_i$) a prúdu I cez záťaž R (alebo $G = 1/R$), teda

$$\mathcal{I}_0 = I_i + I \quad (5.27)$$



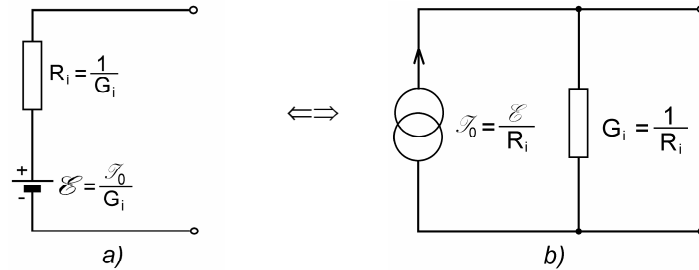
Obr. 5.8

Keďže v tomto "zapojení" sú obidva odpory paralelné, musia na nich byť napätia rovnaké, teda $I_i R_i = IR$, alebo $I_i/G_i = I/G$. Podľa povedaného vhodným schematickým znázornením zapojenia prúdového zdroja a záťaže je schéma na obr. 5.8. Schémy na obr. 5.6b a 5.8 budú z hľadiska záťaže R ekvivalentné, keď medzi prúdom \mathcal{I}_0 a EMN \mathcal{E} bude jednoduchý vzťah

$$\mathcal{I}_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_i} = \mathcal{E}G_i$$

a obidva vnútorné odpory budú rovnaké, teda $R_i = 1/G_i$. Na obr. 5.9 sú znázornené ekvivalentné zdroje napätia a prúdu.

V analógii s ideálnym napät'ovým zdrojom je ideálny prúdový zdroj taký, ktorého prúd nezávisí od záťaže. Takým však v praxi môže byť iba napät'ový zdroj, ktorého vnútorný odpor je nekonečný. Je to kuriózna požiadavka, pretože takýto zdroj s konečným EMN, by do záťaže nedodával žiadny prúd. Aby však pojem ideálneho prúdového zdroja mal predsa nejakú reálnu hodnotu, rozumieme pod ním taký zdroj, ktorého vnútorný odpor je podstatne väčší ako odpor každej do úvahy prichádzajúcej záťaže ($R_i \gg R$).

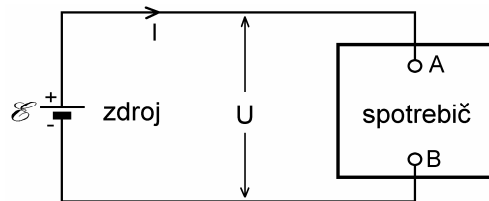


Obr. 5.9

5.5 PRENOS ENERGIE V ELEKTRICKOM OBVODE. JOULOV ZÁKON

Ak k zdroju EMN pripojíme nejaký spotrebič (pozri obr. 5.10), ako je napr. rezistor, elektrický motor, akumulátor a i., potečie vytvoreným elektrickým obvodom prúd, pričom kladné alebo záporné náboje prechodom medzi svorkami A a B cez spotrebič strácajú svoju začiatočnú potenciálnu energiu, ktorá sa v dôsledku platnosti zákona zachovania mení na iné formy energie. V elektrickom motore sa energia mení na mechanickú prácu, v akumulátore sa hromadí ako chemická energia a v rezistore sa energia mení na teplo. Vo všetkých prípadoch zdroj koná prácu, ktorej nekonečne malé množstvo dA , vykonané tým, že zdroj "pretlačí" spotrebičom náboj dQ , sa rovná

$$dA = UdQ$$



Obr. 5.10

kde U je napätie na spotrebiči. Nekonečne malý náboj dQ je daný prúdom I v spotrebiči a časovým intervalom dt , počas ktorého prúd spotrebičom tečie, teda $dQ = Idt$ a vykonaná práca

$$dA = UI dt \quad (5.29)$$

Celková vykonaná práca za čas t sa získa integráciou posledného výrazu. Dôležitejšou veličinou je však práca vykonaná za jednotku času, t. j. výkon

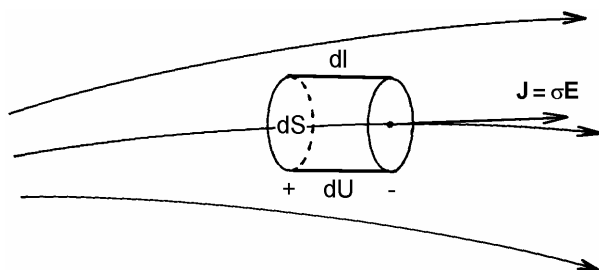
$$P = \frac{dA}{dt} = UI \quad [\text{W}] \quad (5.30)$$

Výkon v záťaži je teda daný súčinom napätia a prúdu v nej a môže to byť veličina stála, ak prúd a napätie sú stále, alebo časovo premenná, ako napr. v prípade striedavých harmonických prúdov. Jednotkou výkonu, ako je známe, je watt (W), pričom v elektromagnetizme $1 \text{ W} = 1 \text{ V} \times 1 \text{ A}$.

Ak je záťažou spotrebič s odporom R , ktorý spĺňa Ohmov zákon (5.10), resp. (5.11), možno výkon v odpore R , resp. vo vodivosti $G = 1/R$ vyjadriť výrazmi

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} = U^2 G = \frac{I^2}{G} \quad (5.31)$$

Výraz (5.31) pre tepelný, termodynamicky ireverzibilný výkon v odporoch sa nazýva **Joulov zákon** (integrálny tvar).



Obr. 5.11

V odporovom lineárnom prostredí s konduktivitou $\sigma = 1/\rho$, v ktorom tečie prúd, možno vybrať elementárny objem $d\tau = dl dS$ pozdĺž prúdočiary, ako na obr. 5.11. Elementárny výkon dP v objeme $d\tau$ v súhlase s (5.30) je daný výrazom

$$dP = dU dI = (Edl)(JdS) = JE d\tau$$

kde dU je nekonečne malé napätie medzi čelnými plochami vybraného valcového objemu a dI je nekonečne malý prúd tečúci kolmo ploškou dS . Integráciou posledného výrazu cez celý uvažovaný objem dostaneme celý spotrebovaný výkon P . Veličina JE má význam objemovej hustoty výkonu. Využitím Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare možno pre objemovú hustotu výkonu p napísať výrazy

$$p = \frac{dP}{d\tau} = JE = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma} = \rho J^2 = \frac{E^2}{\rho} \quad [\text{W.m}^{-3}] \quad (5.32)$$

Výrazy (5.32) sú diferenciálnymi formuláciami Joulovho zákona. Ich objemovou integráciou dostaneme celý výkon v danom objeme.

Objemovú hustotu výkonu možno získať aj na základe mikrofyzikálnych predstáv. Ak je n koncentrácia identických nábojov q v priestore, a ak sa tieto náboje pohybujú rýchlosťou \mathbf{v} v poli intenzity \mathbf{E} , potom na každý náboj pôsobí sila $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ a výkon tejto sily (na jednotku objemu) je

$$p = n\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (5.33)$$

kde $\mathbf{J} = nq\mathbf{v}$ je prúdová hustota. Výraz (5.33) je všeobecnejší ako (5.32), pretože platí aj pre anizotropné prostredia (kryštály), kde smery vektorov \mathbf{E} a \mathbf{J} nemusia byť totožné, dokonca vektory \mathbf{E} a \mathbf{J} môžu mať aj opačný smer. V takom prípade objemová hustota je záporná, čo znamená, že v danej oblasti sa nachádzajú zdroje energie a výkon sa tam generuje.

Vráťme sa teraz k obr. 5.6 a posúďme problém prenosu energie v obvode z inej strany – z hľadiska energetickej bilancie v obvode. Zdroj energie v obvode má nejaký nenulový vnútorný odpor a na ňom vznikajú tiež isté energetické straty (zdroj sa ohrieva). Ak rovnicu (5.24) vynásobíme s prúdom I , dostaneme výraz

$$\mathcal{E}I = R_i I^2 + RI^2$$

ktorý je energeticou bilanciou obvodu: celkový odovzdávaný výkon $P_c = \mathcal{E}I$ zdrojom EMN je súčtom výkonu spotrebovaného samotným zdrojom $P_i = R_i I^2$ a užitočného výkonu spotrebovaného vonkajšou záťažou $P = RI^2$, teda

$$P_c = P_i + P$$

Využijeme výraz (5.26) a pre užitočný výkon P môžeme napísať vyjadrenie

$$P = RI^2 = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + R_i)^2} \quad (5.34)$$

Ak možno meniť záťažový odpor, vidíme, že výkon sa v ňom mení a je nulový, ak $R = 0$ a tiež pre $R = \infty$. Existuje teda taká hodnota odporu záťaže, pre ktorú je výkon extrémny (v danom prípade maximálny). Preskúmaním extrému posledného výrazu pre R zistíme, že zdroj odovzdáva do záťaže maximálny výkon vtedy, ak jej odpor sa rovná vnútornému odporu zdroja, teda pre

$$R = R_i \quad (5.35)$$

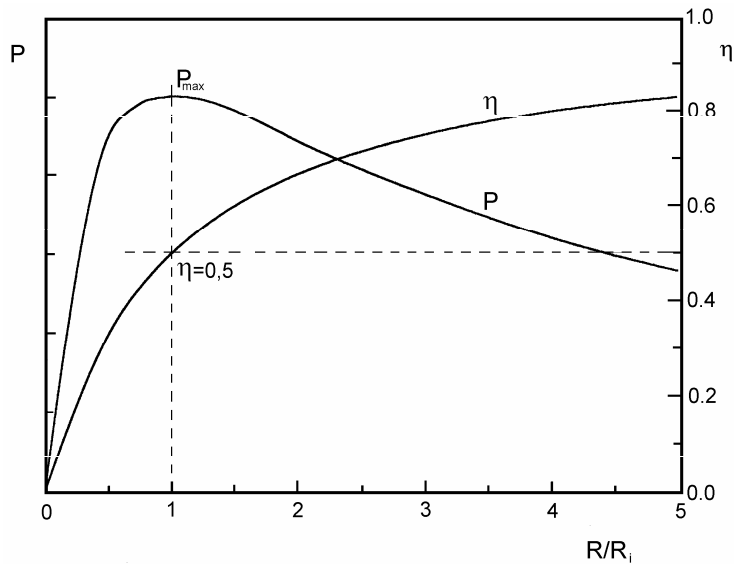
Záťaž, ktorá spĺňa podmienku (5.35) sa nazýva **prispôbená záťaž** (podľa angl. názvu **matched load**). Do nej sa odovzdáva výkon

$$P_{max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R} = \frac{P_c}{2} \quad (5.36)$$

teda iba polovica toho výkonu, ktorý produkuje zdroj. Ak uvažime, že účinnosť zdroja je daná výrazom

$$\eta = \frac{P}{P_i + P} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R}} \quad (5.37)$$

potom v režime prispôsobenia dodáva zdroj do záťaže iba 50 % produkovaného výkonu, a teda aj energie. Druhá polovica výkonu ohrieva zdroj svojím Joulovým teplom. Je zrejmé, že takýto režim činnosti zdroja by bol vrcholne neekonomický, a preto napr. v energetike neprichádza do úvahy. Tam sa vyžaduje vysoká účinnosť energetickej sústavy, teda $\eta \rightarrow 1$, čo podľa výrazu (5.37) vyžaduje záťažový odpor $R \gg R_i$. V režime prispôsobenia pracujú zdroje, ktoré počas krátkeho času majú dodať do spotrebiča veľkú energiu. Je to napr. spomínaný akumulátor pracujúci do spúšťača automobila. V elektronike veľmi vysokých frekvencií sa vo väčšine prípadov vyžaduje prispôbená záťaž vedenia nielen z výkonových dôvodov, ale predovšetkým kvôli zamedzeniu odrazu signálov, ktoré majú za následok nežiadúce interferencie a vznik stojatých vln na dlhých prenosových vedeniach. Na obr. 5.12 sú graficky znázornené závislosti elektrického výkonu v záťaži a účinnosti od pomeru R/R_i .

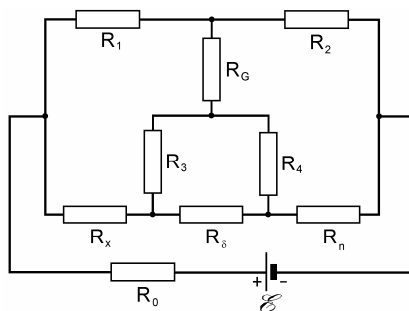


Obr. 5.12

5.6 ELEKTRICKÁ SIĚŤ

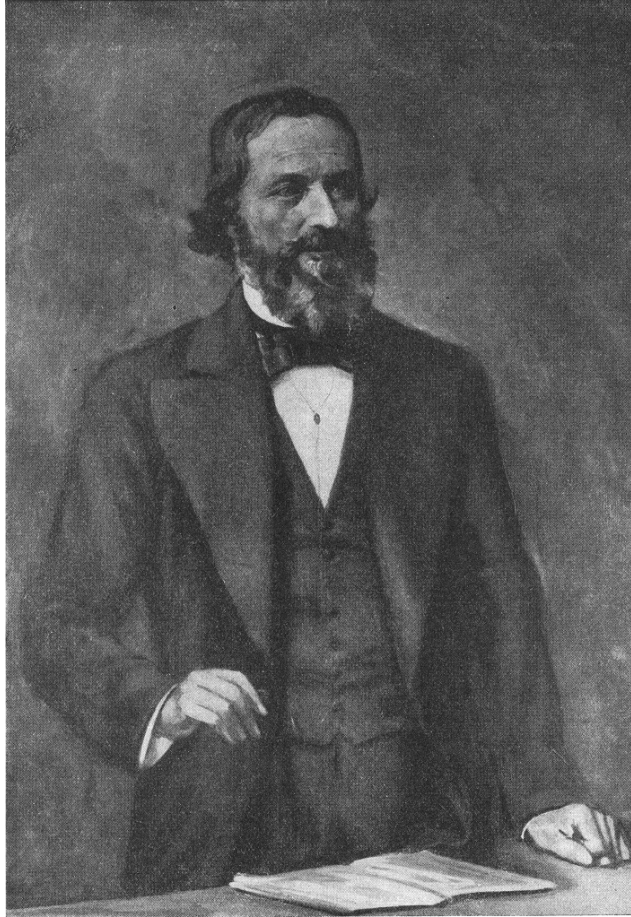
5.6.1 Ohmov zákon pre časť uzavretého obvodu

Zdroje EMN a rezistory možno istým účelným spôsobom spájať a vytvárať zapojenia, ktoré sa v teoretickej elektrotechnike nazývajú elektrické siete. Elektrická sieť môže vo všeobecnosti obsahovať okrem rezistorov a zdrojov EMN aj ďalšie elektrotechnické prvky, ako sú kondenzátory, cievky, prípadne induktívne viazané cievky (vzájomné indukčnosti). Siete so zdrojmi stálych napätí však môžu obsahovať iba rezistory (galvanické alebo odporové siete). Príkladom takej odporovej siete je na *obr. 5.13* známy Kelvinov dvojvrtý most.



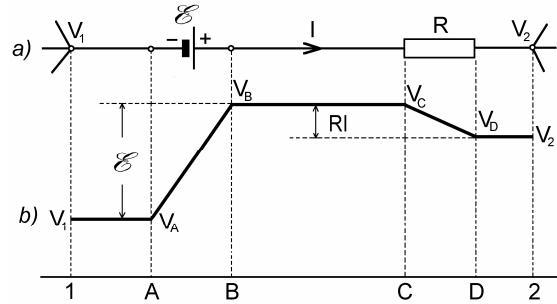
Obr. 5.13

S pojmom elektrickej siete sme sa stretli už aj v odseku 3.6, kde sme analyzovali zapojenia pozostávajúce zo zdrojov a kondenzátorov. Aj v odporovej sieti za uzol budeme považovať miesto spojenia najmenej troch vodičov a za vetvu siete vodivé spojenie medzi dvoma uzlami. Sieť na *obr. 5.13* má šesť uzlov a tie sú pospájané deviatimi vetvami. Vetva môže obsahovať zdroj alebo niekoľko sériovo spojených zdrojov EMN so svojimi (sériovými) vnútornými odpormi a jeden alebo niekoľko sériovo spojených rezistorov. Ak využijeme pravidlá o sériovom spájaní zdrojov a rezistorov, môžeme každú vetvu charakterizovať jedným výsledným zdrojom EMN \mathcal{E} a jedným výsledným odporom R , ako výsledkom sériového spojenia uvažovaných prvkov. Ak sú v sieti dané všetky prvky, možno sieť analyzovať. Pod analýzou elektrickej siete rozumieme výpočet prúdov vo všetkých jej vetvách alebo stanovenie potenciálov všetkých jej uzlov. Prv než k takejto analýze pristúpime, treba stanoviť všeobecný súvis medzi prúdom a koncovými potenciálmi v jednej vybranej vetve. Takáto vetva je zobrazená na *obr. 5.14a*. Potenciály uzlov vetvy sú označené V_1 a V_2 , medzi bodmi $A-B$ je zdroj EMN \mathcal{E} a medzi bodmi $C-D$ je homogénne rozložený odpor R . Potenciál vo vnútri zdroja (medzi bodmi $A-B$) nemusí prebiehať od V_A po V_B lineárne, ako na obrázku, priebeh závisí od charakteru a štruktúry zdroja (pozri odsek 2.11). Úseky $1-A$, $B-C$ a $D-2$ sú tvorené bezodporovými vodičmi, na ktorých sa potenciál nemení. Celý priebeh potenciálu pozdĺž vetvy je znázornený na *obr. 5.14b*. Vidíme, že pre rozdiely potenciálov jednotlivých bodov pozdĺž vetvy platia vzťahy



Gustav Robert KIRCHHOFF
(1824 Königsberg – 1887 Berlín)

Maľba v Deutsches Museum, Mníchov



Obr. 5.14

$$V_1 - V_A = 0$$

$$V_A - V_B = -\mathcal{E}$$

$$V_B - V_C = 0$$

$$V_C - V_D = RI$$

$$V_D - V_2 = 0$$

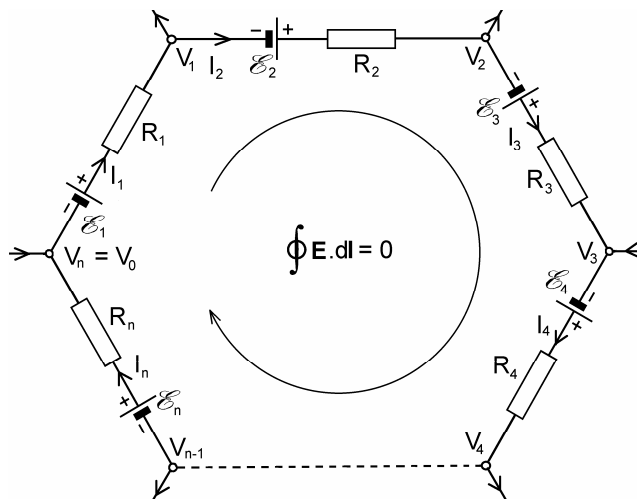
Ak tieto rovnice sčítame, dostaneme výraz

$$V_1 - V_2 = RI - \mathcal{E} \quad (5.38)$$

podľa ktorého rozdiel potenciálov na svorkách vybranej vetvy sa rovná algebraickému súčtu napätia \mathcal{E} a potenciálového spádu RI . Znamienka pri RI a \mathcal{E} závisia od smeru prúdu vo vetve a od polarity zdroja. Príslušné znamienka vo vzťahu (5.38) zodpovedajú situácii na obr. 5.14. Ak sú potenciály na koncoch vetvy rovnaké, teda ak $V_1 = V_2$, vtedy $\mathcal{E} = RI$, t. j. ide o vetvu, ktorá nijako neovplyvňuje elektrické pomery vo zvyšku siete a môže byť zo siete vypustená alebo nahradená skratom. Vzťah (5.38) sa nazýva Ohmov zákon pre časť uzavretého obvodu. Využijeme ho pri formulácii druhého Kirchhoffovho zákona.

5.6.2 Druhý Kirchhoffov zákon (Kirchhoffov zákon pre napätia)

Druhý Kirchhoffov zákon je v podstate vyjadrením skutočnosti, že integrál intenzity elektrického poľa po uzavretej dráhe, ktorá prebieha v sieti pozdĺž vetiev ľubovoľného vybraného okruhu sa rovná nule. Na obr. 5.15 je znázornený takýto okruh pozostávajúci z n vetiev, pričom k -tá vetva ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) vo všeobecnosti obsahuje zdroj \mathcal{E}_k a odpor R_k (v odpore R_k sú zahrnuté aj vnútorné odpory zdrojov v uvažovanej vetve). Vo vetve tečie prúd I_k a na jej priľahlých uzloch sú potenciály V_{k-1} a V_k . Potenciálové rozdiely medzi uzlami v uzavretom obvode, počítané v smere vyznačenej dráhy, sú v súhlase s výrazom (5.38) dané vzťahmi:



Obr. 5.15

$$\begin{aligned}
 V_0 - V_1 &= -\mathcal{E}_1 + R_1 I_1 \\
 V_1 - V_2 &= -\mathcal{E}_2 + R_2 I_2 \\
 \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\
 V_{k-1} - V_k &= -\mathcal{E}_k + R_k I_k \\
 \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\
 V_{n-1} - V_n &= -\mathcal{E}_n + R_n I_n
 \end{aligned}$$

Ak tieto rovnice sčítame a uvážime, že $V_0 = V_n$ je potenciál toho istého uzla, dostaneme po úprave rovnicu

$$\sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k = \sum_{k=1}^n R_k I_k \quad (5.39)$$

Rovnica (5.39) je matematickým vyjadrením **druhého Kirchhoffovho zákona**,¹ ktorý možno vyjadriť slovne:

Algebraický súčet elektromotorických napätí zdrojov $\pm \mathcal{E}_k$ v uzavretom obvode elektrickej siete sa rovná súčtu potenciálnych spádov $\pm R_k I_k$ na jednotlivých odporoch obvodu.

Toto vyjadrenie je ekvivalentné tvrdeniu, že algebraický súčet všetkých napätí (napätí zdrojov a napätíových spádov na odporoch) v uzavretom obvode sa rovná nule a odpovedá formálnemu tvrdeniu, že integrál intenzity poľa po uzavretej dráhe vybraného obvodu sa rovná nule.

¹ Kirchhoff formuloval svoje zákony v roku 1845 ešte ako mladý 21 ročný študent na univerzite v Königsbergu (terajší Kaliningrad)

5.7 PRINCÍPY ANALÝZY ELEKTRICKÝCH SIETÍ

Každá elektrická sieť z topologického hľadiska pozostáva z m vetiev (vetiev v zmysle definície), ktoré sú pospájané p uzlami. V každej vetve tečie istý prúd a každý uzol má istý potenciál. Pri analýze elektrickej siete treba určiť m vetvových prúdov alebo p uzlových potenciálov. Priamočiary, aj keď nie najjednoduchší spôsob analýzy siete je výpočet jej m vetvových prúdov s využitím I. a II. Kirchhoffovho zákona. Kirchhoffove zákony (5.9) a (5.39) sú z matematického hľadiska lineárne vzťahy medzi vetvovými prúdmi, napätiami zdrojov a odpormi siete. Pre m prúdov vo vetvách treba zostaviť m takýchto lineárnych rovníc a umenie analýzy spočíva vo výbere rovníc tak, aby systém bol úplný, lineárne nezávislý a spôsob riešenia bol čo najjednoduchší. Pri výbere rovníc sa odporúča dodržiavať nasledovné pravidlá, ktoré plynú z teoretickej elektrotechniky:

1. V analyzovanej sieti ľubovoľným spôsobom zvolíme smery prúdov v jednotlivých vetvách. Ak bude na konci analýzy číselná hodnota prúdu kladná, smer príslušného prúdu bol zvolený správne, ak hodnota je záporná, skutočný prúd má opačný smer.

2. Pre ľubovoľných $p - 1$ uzlov napíšeme rovnice dávajúce do súvisu prúdy podľa prvého Kirchhoffovho zákona, pričom rešpektujeme zvolené smery prúdov (vytekajúce prúdy sú kladné, vtekajúce záporné). Ďalšia rovnica pre p -tý uzol by už bola lineárnou kombináciou predchádzajúcich, a preto do systému nepatrí.

3. V sieti nájdeme nezávislé uzavreté obvody, ktorých počet je

$$n = m - (p - 1) = m - p + 1$$

Tento počet je jednoznačný, avšak spôsobov výberu obvodov je viac. Každý nový obvod je nezávislý, ak sa nedá vytvoriť z už zostavených nezávislých obvodov. Nezávislé obvody možno vytvárať napr. tak, že každý nový musí obsahovať jednu novú vetvu. Pre zložité siete boli vypracované špeciálne metódy výberu nezávislých obvodov, z ktorých najznámejšia je metóda nazývaná "metóda úplného stromu".

4. V každom nezávislom obvode zvolíme smer obehu, alebo "smer integrácie". Tento smer je ľubovoľný, a to v rovine pravotočivý alebo ľavotočivý. Je však dobre dodržať jeden zvolený smer.

5. Pre každý z $n = m - p + 1$ nezávislých obvodov napíšeme rovnice podľa druhého Kirchhoffovho zákona, a to tak, že na jednej strane rovnice je súčet napätí zdrojov v obvode (s kladným znamienkom v súčte budú tie napätia, kde smer obehu smeruje od $-$ ku $+$), a na druhej strane rovnice sa sčítavajú príspevky RI , ktoré sú kladné, ak vyznačený smer prúdu a smer obehu sú rovnaké. V opačnom prípade sú záporné.

6. Získaný systém $p - 1 + n = m$ rovníc pre neznáme prúdy riešime bežnými metódami lineárnej algebry.

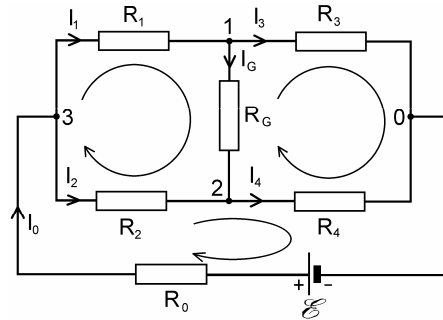
5.7.1 Wheatstonov most

Na ilustráciu uvedenej procedúry analyzujeme zariadenie, známe z oblasti elektrickej meracej techniky, nazvané Wheatstonov most. Elektrická schéma jeho zapojenia je znázornená na obr. 5.16. Zariadenie sa používa na meranie neznámych odporov a v elektrickej regulačnej technike. Základ mostu tvoria štyri odpory R_1 až R_4 , ktoré sú premostené indikátorom (napr. galvanometrom), v schéme reprezentovaným jeho vnútorným

odporom R_G . Ak jeden zo štvorice odporov $R_1 - R_4$ je premenný a kalibrovaný, potom jeho nastavením môžeme dosiahnuť toho, že potenciály uzlov 1 a 2 budú rovnaké, a vetvou indikátora prúd nepotečie. Tento stav nastane, ak bude splnená podmienka

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (5.40)$$

Ak jeden z ďalších troch odporov je neznámy, jeho hodnotu možno určiť z rovnice (5.40). Dôkaz podmienky (5.40), ktorú nazývame podmienkou rovnováhy mostu, plynie z výsledkov analýzy mostu.



Obr. 5.16

Ako vidíme z obr. 5.16, most pozostáva zo šiestich vetiev, ktoré sú pospájané štyrmi uzlami. Pri danej voľbe smerov prúdov možno pre tri uzly (napr. uzly 1, 2 a 3) napísať rovnice

$$\begin{aligned} -I_1 + I_3 + I_G &= 0 \\ -I_2 + I_4 - I_G &= 0 \end{aligned} \quad (5.41a)$$

$$-I_0 + I_1 + I_2 = 0$$

Rovnica pre uzol 0

$$I_0 - I_3 - I_4 = 0$$

je viditeľne lineárnou kombináciou rovníc (5.41a), a preto do daného systému nepatrí. Samozrejme systém rovníc možno vybrať aj ináč, napr. pre uzly 0, 1 a 2.

Počet nezávislých obvodov v sieti je

$$n = 6 - (4 - 1) = 3,$$

a možno ich vybrať napríklad tak, ako je to vyznačené na obrázku. Sú to obvody prechádzajúce uzlami 1→2→3, 1→0→2 a 0→3→2. Odpovedajúce rovnice podľa druhého Kirchhoffovho zákona majú tvar

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_G I_G - R_2 I_2 &= 0 \\ R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_G I_G &= 0 \end{aligned} \quad (5.41b)$$

$$R_0 I_0 + R_2 I_2 + R_4 I_4 = \mathcal{E}$$

Obvody možno samozrejme vybrať aj inak, napríklad prechodom uzlami 0→1→3→2 a napísať pre obvod rovnicu

$$-R_3I_3 - R_1I_1 + R_2I_2 + R_4I_4 = 0$$

ale táto rovnica je evidentne súčtom prvých dvoch rovníc systému (5.41b) a výsledok je vynásobený s -1 . V danej sieti možno vybrať trojice nezávislých obvodov celkovo šiestnástimi spôsobmi.

Systém rovníc (5.41) pre 6 neznámych prúdov je úplný a lineárne nezávislý. Teoreticky umožňuje vypočítať ľubovoľný prúd, prakticky je najzaujímavejší prúd I_G indikátorom mostu, z ktorého pri podmienke $I_G = 0$ možno dostať podmienku rovnováhy mostu (5.40). V prípade, keď sa má určiť odpor Wheatstonovho mostu zo strany napájacieho zdroja, potom treba vypočítať prúd I_0 a odpor mosta R_{03} medzi uzlami 0 a 3 sa vypočíta z výrazu

$$R_{03} = \frac{\mathcal{E}}{I_0} - R_0$$

Je zrejmé, že odpor mosta R_{03} sa nedá určiť s využitím jednoduchých pravidiel o sériovom a paralelnom radení odporov.

Uvedený príklad dokazuje, že elektrickú sieť možno analyzovať s priamym využitím Kirchhoffových zákonov, ale ako z postupu vidieť, je to metóda veľmi prácna, pretože aj pri takej relatívne jednoduchej sieti, akou je Wheatstonov most treba riešiť systém šiestich algebraických rovníc. Existujú však dve duálne metódy analýzy sietí, z ktorých jedna sa nazýva **metóda obvodových prúdov** a druhá **metóda uzlových potenciálov**. Každá z týchto metód znižuje počet rovníc, ktoré treba pri analýze elektrickej siete riešiť. Žiadna z metód nemá osobitné priority; metóda uzlových potenciálov obyčajne vyžaduje menej východných rovníc pre potenciály, ale ak z tých treba nakoniec určiť vetvové prúdy, potom prednosť metódy môže byť iba zdanlivá.

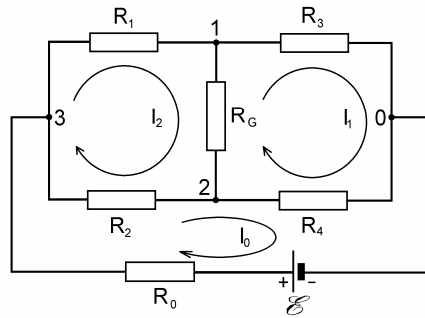
5.7.2 Metóda obvodových prúdov

Metóda obvodových prúdov spočíva vo využití druhého Kirchhoffovho zákona pre špeciálne volené prúdy v sieti tak, že prvý Kirchhoffov zákon je pre ne automaticky splnený. Takýmito prúdmi sú formálne cirkulujúce prúdy v nezávislých obvodoch siete. Skutočný prúd vo vetve je daný algebraickým súčtom všetkých prítomných obvodových prúdov. Počet potrebných rovníc systému sa rovná počtu nezávislých obvodov, teda

$$n = m - p + 1$$

Obvodové prúdy pre Wheatstonov most možno zvoliť tak, ako je to na *obr. 5.17*. Pre slučky s obvodovými prúdmi I_0 , I_1 a I_2 možno potom písať rovnice

$$\begin{aligned} R_0I_0 + R_2(I_0 - I_2) + R_4(I_0 - I_1) &= \mathcal{E} \\ R_3I_1 + R_4(I_1 - I_0) + R_G(I_1 - I_2) &= 0 \\ R_1I_2 + R_G(I_2 - I_1) + R_2(I_2 - I_0) &= 0 \end{aligned} \tag{5.42}$$



Obr. 5.17

Po úprave možno sústavu rovníc vyriešiť pre obvodové prúdy. Z obr. 5.17 vidieť, že prúdy v odporoch R_0 , R_1 a R_3 sa rovnajú príslušným obvodovým prúdom, skutočný prúd indikátorom (odporom R_G) je

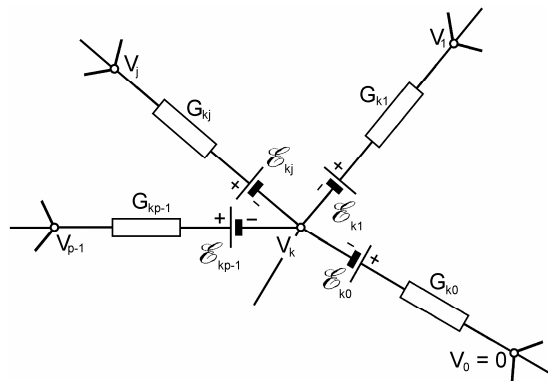
$$I_G = I_2 - I_1 \quad (5.43)$$

5.7.3 Metóda uzlových potenciálov

Metóda uzlových potenciálov je alternatívou k metóde obvodových prúdov a je založená na platnosti prvého Kirchhoffovho zákona. V sieti s p uzlami sa potenciál jedného ľubovoľného uzla (napr. uzla s označením 0) položí rovný nule, teda $V_0 = 0$. Tento uzol je referenčný a potenciály ostatných $p - 1$ uzlov sú v skutočnosti napätia týchto uzlov oproti referenčnému a budú výsledkom analýzy siete.

Na obr. 5.18 je znázornená časť siete s vybraným uzlom k . Pre tento uzol podľa prvého Kirchhoffovho zákona platí, že

$$\sum_{j=0}^{p-1} I_{kj} = 0 \quad j \neq k \quad (5.44)$$



Obr. 5.18

kde I_{kj} je prúd, ktorý tečie vetvou z uzla k do uzla j (platí $I_{jk} = -I_{kj}$). Potenciály uzlov k a j sú V_k a V_j . Pre uvažovanú vetvu v súhlase s rovnicou (5.38) možno napísať

$$V_k - V_j = R_{kj} I_{kj} - \mathcal{E}_{kj} \quad j \neq k$$

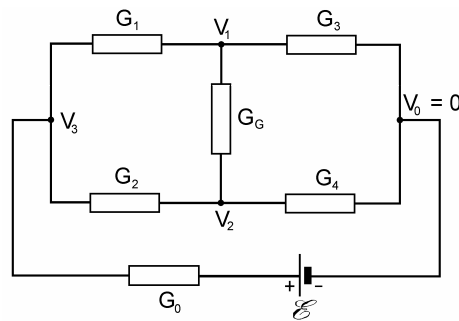
kde R_{kj} je celkový odpor vetvy a \mathcal{E}_{kj} je celkové elektromotorické napätie sériových zdrojov vo vetve. Z tejto rovnice plynie pre prúd vo vetve výraz

$$I_{kj} = \frac{V_k - V_j + \mathcal{E}_{kj}}{R_{kj}} = G_{kj}(V_k - V_j + \mathcal{E}_{kj}) \quad j \neq k \quad (5.45)$$

kde $G_{kj} = 1/R_{kj}$ je vodivosť uvažovanej vetvy. Prúd I_{kj} z uzla k vyteká. Ak výrazy (5.45) dosadíme do (5.44), dostaneme lineárny matematický vzťah

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{p-1} (V_k - V_j + \mathcal{E}_{kj}) G_{kj} = 0 \quad (5.46)$$

v ktorom sú neznámymi veličinami potenciály V_1 až V_{p-1} . Takých lineárne nezávislých rovníc možno napísať $p - 1$. Rovnica pre posledný, p -tý uzol by už bola lineárnou kombináciou predchádzajúcich. Matematickým riešením systému je analýza siete metódou uzlových potenciálov ukončená. Ak treba vypočítať prúdy vo vetvách, tie poskytuje výraz (5.45) zo známych uzlových potenciálov. V prípadoch, v ktorých numerická hodnota prúdu je záporná, prúd tečie do uzla.



Obr. 5.19

Na ilustráciu použitia metódy uzlových potenciálov budeme analyzovať Wheatstonov most ešte raz. Na obr. 5.19 sú vyznačené uzlové potenciály $V_0 = 0$, V_1 až V_3 , odpory vetiev sú nahradené ich vodivosťami. Pre uzly 1 až 3 môžeme postupne písať rovnice

$$\begin{aligned} G_3 V_1 + G_1(V_1 - V_3) + G_5(V_1 - V_2) &= 0 \\ G_4 V_2 + G_2(V_2 - V_3) + G_5(V_2 - V_1) &= 0 \\ G_1(V_3 - V_1) + G_2(V_3 - V_2) + G_0(V_3 - \mathcal{E}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Možno napísať rovnicu aj pre uzol O , ktorá v danom prípade má tvar

$$G_3V_1 + G_4V_2 + G_0(V_3 + \mathcal{E}) = 0$$

ale tá je lineárnou kombináciou (tu súčtom) rovníc systému (5.47). Prúd I_G indikátorom podľa vzťahu (5.45) je

$$I_G = G_G(V_1 - V_2) = \frac{V_1 - V_2}{R_G} \quad (5.48)$$

V našom stručnom prehľade metód analýzy elektrických odporových sietí boli uvedené iba tie, ktoré sa najčastejšie používajú. Všetky boli ilustrované úmyselne jedinou elektrickou sieťou – Wheatstonovým mostom. Trpezlivý čitateľ sa môže presvedčiť, že metóda Kirchhoffových zákonov riešením rovníc (5.41), metóda obvodových prúdov riešením rovníc (5.42) s použitím výrazu (5.43) a metóda uzlových potenciálov riešením rovníc (5.47) s využitím výrazu (5.48) poskytujú pre prúd I_G indikátorom mosta rovnaký výsledok, ktorý má takýto elegantný tvar:

$$I_G = \mathcal{E} \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4(R_1 + R_2) + R_0(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_G[R_0(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)]} \quad (5.49)$$

(výraz sa značne zjednoduší ak $R_0 = 0$, čím sa fyzikálne vlastnosti mostu nezmenia). Z výrazu (5.49) vidieť, že prúd indikátorom sa bude rovnať nule vtedy, keď bude splnená podmienka

$$R_2R_3 - R_1R_4 = 0$$

čo je podmienka rovnováhy mostu (5.40). Podmienka rovnováhy plyní aj z porovnania potenciálov uzlov 1 a 2. Ak sú odpory mostu volené tak, že

$$V_1 = V_2$$

vtedy je podľa (5.48) $I_G = 0$, a teda platí vzťah (5.40).

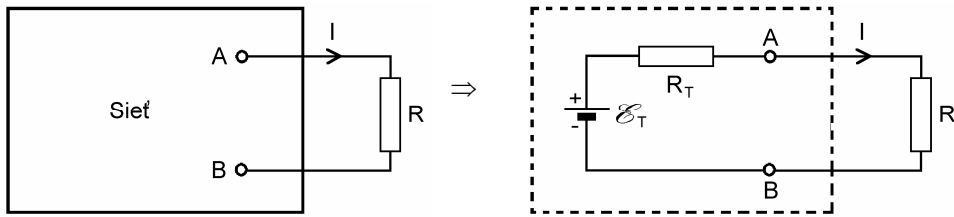
5.7.4 Dve vety z teórie elektrických sietí

Théveninova veta (veta o ekvivalentnom napäťovom zdroji):

"Lubovoľnú elektrickú sieť pozostávajúcu zo zdrojov a rezistorov možno vzhľadom k dvom vybraným uzlom AB (pozri obr. 5.20) nahradit' ekvivalentným zdrojom, ktorého EMN \mathcal{E}_T sa rovná napätiu medzi uzlami naprázdno (t. j. vetva spájajúca uzly je vybraná), a ktorého vnútorný odpor R_T sa rovná odporu medzi uvažovanými uzlami, ak všetky zdroje v sieti sú vybrané a nahradené iba ich vnútornými odpormi".

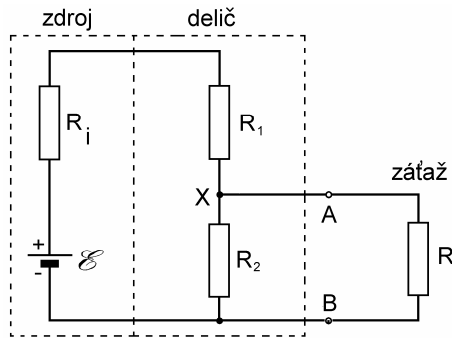
Théveninova veta sa dá s výhodou použiť v sieťach, v ktorých je predmetom záujmu iba jedna vybraná vetva a elektrické pomery na nej. Ako príklad jej použitia uvedieme analýzu činnosti jednoduchej siete, nazývanej **odporový napäťový delič** s odporovou záťažou, ktorého zapojenie je zobrazené na obr. 5.21. Podľa svojho názvu sa také zariadenie používa na získanie časti napätia daného zdroja. Rezistory R_1 a R_2 v praxi často tvoria

jeden rezistor s odporom $R_p = R_1 + R_2$ a spoločný uzol X rezistorov predstavuje klzný vodivý kontakt tak, že pomer odporov R_1/R_2 možno spojito meniť. Takýto elektrický prvok je vlastne premenný odporový delič a je známy pod názvom **potenciometer** (pozri obr. 5.22).

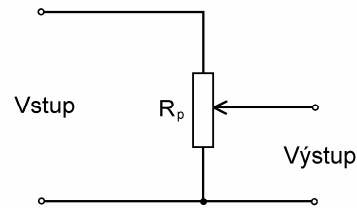


Obr. 5.20

V jednoduchjej elektrickej sieti na obr. 5.21 je obyčajne predmetom záujmu iba napätie na svorkách záťažového odporu R , prípadne prúd záťažou. Tieto veličiny možno samozrejme získať použitím niektorej z uvedených metód teórie sietí, jednoduchšie je však využiť Théveninovu vetu. Podľa nej treba vypočítať ekvivalentné napätie \mathcal{E}_T na svorkách AB , ak je odpor R odpojený (pozri obr. 5.23a), a odpor R_T medzi týmito svorkami, ak sa ideálny zdroj \mathcal{E} nahradí skratom (ako na obr. 5.23b). Prúd tečúci obvodom zdroja na obr. 5.23a ak odpor R je odpojený je



Obr. 5.21



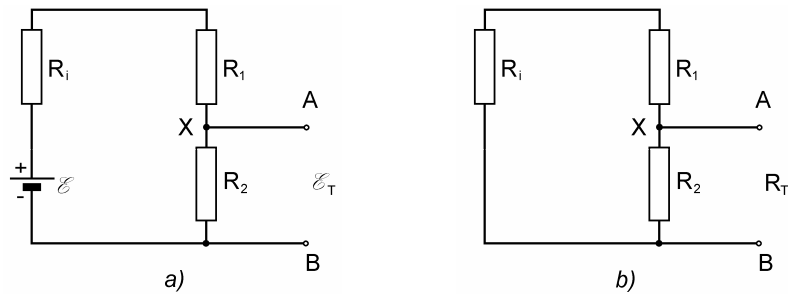
Obr. 5.22

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R_1 + R_2}$$

a napätie na svorkách AB (na odpore R_2)

$$\mathcal{E}_T = R_2 I = \mathcal{E} \frac{R_2}{R_i + R_1 + R_2}$$

Vnútrotný odpor ekvivalentného zdroja R_T plynie zo zapojenia na obr. 5.23b a jeho hodnota je



Obr. 5.23

$$R_T = \frac{(R_i + R_1)R_2}{R_i + R_1 + R_2}$$

Prúd záťažovým odporom R je teda

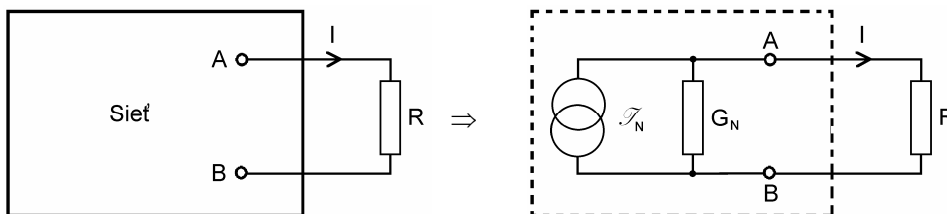
$$I_z = \frac{\mathcal{E}_T}{R_T + R} \quad (5.50a)$$

a napätie na ňom

$$U_z = U_{AB} = RI_z = \mathcal{E}_T \frac{R}{R_T + R} \quad (5.50b)$$

Nortonova veta (veta o ekvivalentnom prúdovom zdroji):

"*Ľubovoľnú elektrickú sieť pozostávajúcu zo zdrojov a rezistorov možno z hľadiska jej dvoch vybraných uzlov AB (obr. 5.24) nahradiť ekvivalentným prúdovým zdrojom, ktorého menovitý prúd \mathcal{I}_N sa rovná skratovému prúdu medzi uzlami AB a vnútorná vodivosť sa rovná celkovej vodivosti G_N medzi uzlami, ak sa všetky zdroje vyradia, a na ich miestach zostanú v sieti iba ich vnútorné vodivosti.*"



Obr. 5.24

Ako príklad použitia Nortonovej vety vypočítame prúd ekvivalentného prúdového zdroja a jeho vnútornú vodivosť pre napäťový delič na obr. 5.21. Ekvivalentný prúdový generátor bude dodávať prúd, ktorý sa rovná skratovému prúdu cez svorky AB na obr. 5.23a a ten je

$$\mathcal{I}_N = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R_1}$$

a ekvivalentná vodivosť $G_N = \frac{1}{R_T}$

Napätie na záťažovej vodivosti G (záťažovom odpore R)

$$U_z = \frac{\mathcal{I}_N}{G_N + G} \quad (5.51a)$$

a prúd záťažou

$$I_z = GU_z = \mathcal{I}_N \frac{G}{G_N + G} \quad (5.51b)$$

Čitateľovi odporúčam dokázať, že výrazy (5.50) a (5.51) poskytujú rovnaké výsledky.

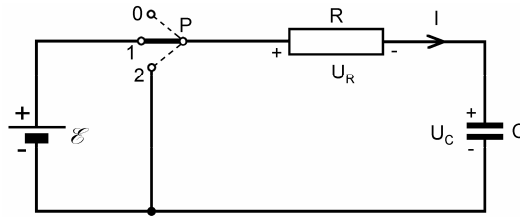
Théveninovu a Nortonovu vetu možno sformulovať i pre harmonické striedavé siete pozostávajúce zo zdrojov a impedancií (pozri časť 9.6).

5.8 ELEKTRICKÝ PRÚD V RC OBVODE. PRECHODOVÝ JAV V RC OBVODE

Naše doterajšie pojednania o elektrických prúdoch sa týkali stacionárnych a predovšetkým časovo stálych elektrických prúdov, ktoré môžu tiecť iba v odporových obvodoch alebo sieťach. Ak je v obvode zaradený kondenzátor, tak sa situácia dramaticky mení. Na prvý pohľad sa zdá, že jednoduchým obvodom pozostávajúcim zo zdroja, odporu R a kondenzátora kapacity C , elektrický prúd netečie, pretože obvod nie je galvanicky uzavretý. Na druhej strane o kondenzátore už vieme, že ak sa pripojí na zdroj elektrického výkonu, nabije sa elektrickým nábojom a bude nositeľom elektrickej energie. Ak sa teda obvod vytvorený zo zdroja, odporu a nenabitého kondenzátora elektricky uzavrie, bude sa kondenzátor nabíjať, takže zdrojom a odporom musí tiecť elektrický prúd. Tento prúd je však nestacionárny, a tak, ako sa kondenzátor postupne nabíja, musí prúd v čase klesať. Ak naopak, nabitý kondenzátor pripojíme paralelne k rezistoru, bude sa kondenzátor vybíjať a obvodom tiež potečie v čase klesajúci elektrický prúd. Pretože uvedené procesy majú zásadný význam v obvodovej elektronike a objavujú sa pri každom zopnutí spínača, v ktorého obvode je kondenzátor, posúdime ich podrobnejšie.

Na obr. 5.25 je zapojenie pozostávajúce z bezodporového – ideálneho napäťového zdroja \mathcal{E} , odporu R v sérii s kondenzátorom C , ktoré možno pomocou trojpolohového prepínača P pripojiť buď k zdroju (poloha 1), alebo sériové spojenie RC skratovať (poloha 2). Budeme pre jednoznačnosť predpokladať, že na začiatku je kondenzátor vybitý, teda je na ňom nulové napätie. V čase $t = 0$ prepínač zapneme do polohy 1. Od tohto okamihu sa kondenzátor začína nabíjať, narastá na ňom napätie a odporom tečie elektrický prúd. Po istom čase t je na kondenzátore náboj $Q(t)$ a odporom tečie prúd $I(t)$. V tomto čase je na kondenzátore napätie

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$



Obr. 5.25

a na odpore napät'ový spád

$$U_R(t) = RI(t)$$

Aj v takomto obvode sa súčet všetkých napätí musí rovnať nule, teda musí platiť

$$U_R + U_C = RI + \frac{Q}{C} = \mathcal{E} \quad (5.52)$$

Keďže prúd v obvode sa podľa definície rovná časovému prírastku náboja Q na kondenzátore, t. j. $I = dQ/dt$, možno v poslednej rovnici urobiť príslušnú substitúciu, čím rovnica prejde na tvar

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E} \quad (5.53)$$

Je to rovnica pre neznámy náboj Q na kondenzátore, ktorého veľkosť je funkciou času. Nie je to algebraická rovnica, ale – ako ju matematici nazývajú – obyčajná diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientmi R , $1/C$ a s pravou stranou \mathcal{E} . Jej riešenie je jednoduché; ak v čase $t = 0$ je na kondenzátore nulový náboj $Q(0) = 0$, riešenie má tvar

$$Q(t) = \mathcal{E}C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (5.54)$$

O správnosti riešenia sa možno presvedčiť jeho dosadením do rovnice (5.53). Na kondenzátore je ale zaujímavejšie napätie U_C , ktoré je úmerné náboju a má vyjadrenie

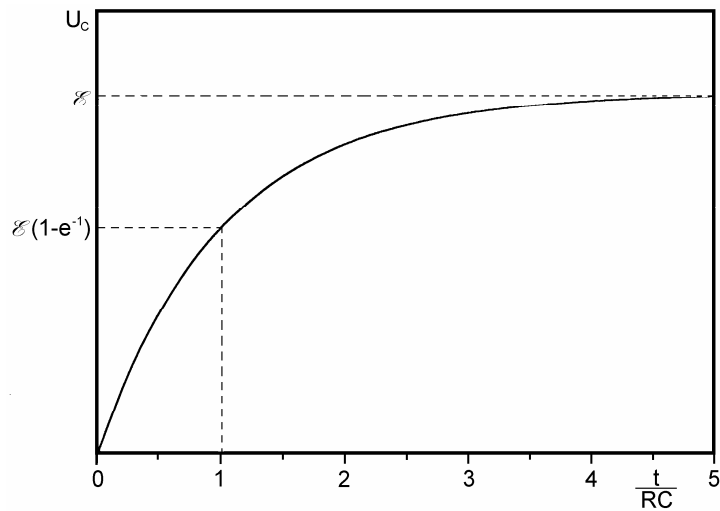
$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (5.55)$$

Prúd cez rezistor R je daný výrazom

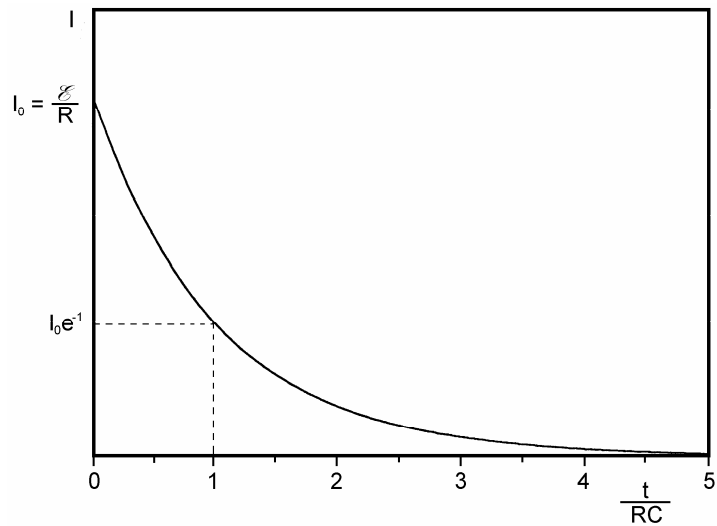
$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.56)$$

a napätie na ňom

$$U_R(t) = RI(t) = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.57)$$



Obr. 5.26



Obr. 5.27

Výrazy (5.54) až (5.57) predstavujú úplný fyzikálny opis elektrických procesov pri nabíjaní kondenzátora cez odpor. Tieto procesy sa často nazývajú prechodové javy z dôvodov ich nestacionarity. Na obr. 5.26 a 5.27 sú graficky znázornené závislosti napätia a prúdu ako funkcie času pre isté hodnoty veličín \mathcal{E} , R a C . Vidieť, že náboj a napätie na kondenzátore v procese jeho nabíjania exponenciálne narastajú, pre $t \rightarrow \infty$ sa náboj blíži asymptoticky k hodnote $C\mathcal{E}$ a napätie k hodnote EMN zdroja \mathcal{E} . Prúd a napätie na odpore, naopak, exponenciálne klesajú, pre $t \rightarrow \infty$ sa obidve veličiny asymptoticky blížia k nule. Je dobre si tiež všimnúť, že začiatočný prúd v obvode je \mathcal{E}/R ,

t.j. taký, aký by tiekol v obvode pri skratovanom kondenzátore (nenabitý kondenzátor sa v začiatočnom okamihu prechodového javu správa ako skrat). Dôležitým parametrom obvodu je súčin RC – veličina, ktorá vystupuje v menovateli exponentu e -funkcie. Táto veličina má očividne rozmer času (už aj preto, že exponent musí byť bezrozmerný), a preto sa nazýva časová konštanta obvodu

$$\tau = RC \text{ [s]} \quad (5.58)$$

Táto konštanta určuje charakter časového priebehu elektrických veličín v obvode. Obvody s veľkými hodnotami R a C , teda s veľkými časovými konštantami sú "pomalé", priebehy náboja, napätia a prúdu sú časovo pozvoľné a naopak, pre obvody s malými časovými konštantami sú priebehy veľmi prudké. Za čas rovnajúci sa časovej konštante obvodu klesne prúd v obvode na

$$e^{-1} \approx 0,368 = 36,8 \%$$

jej začiatočnej hodnoty a napätie vzrastie na

$$1 - e^{-1} \approx 0,632 = 63,2 \%$$

asymptotickej hodnoty napätia (hodnoty EMN zdroja). Prechodový jav sa považuje prakticky za ukončený po uplynutí päťnásobku času časovej konštanty, kedy prúd v obvode poklesne na $e^{-5} \approx 0,007$ – teda asi na 7 promile svojej začiatočnej hodnoty.

Je zaujímavé posúdiť energetické pomery v RC -obvode. Vynásobením rovnice (5.52) s prúdom I dostaneme rovnicu

$$\mathcal{E} = RI^2 + \frac{Q}{C} I$$

ktorá je výkonovou bilanciou RC -obvodu. Súčin $\mathcal{E}I$ predstavuje celkový výkon P dodávaný zdrojom, teda

$$P = \mathcal{E}I$$

Prvý člen na pravej strane

$$P_R = RI^2$$

je disipatívny výkon, s ktorým sa energia zdroja mení na teplo v odpore R a druhý člen

$$P_C = \frac{Q}{C} I$$

je výkon, s ktorým sa energia ukladá v kondenzátore C . Prechodový jav teoreticky trvá nekonečne dlho, čitateľ sa môže presvedčiť, že za tento nekonečný čas zdroj dodá celkovú energiu

$$W = \int_0^{\infty} P dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{RC}} dt = C\mathcal{E}^2 \quad (5.59)$$

ktorej polovica sa uloží v elektrickom poli kondenzátora a druhá polovica sa spotrebuje na teplo v odpore (pozri tiež úlohu 143), teda

$$W_R = W_C = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 \quad (5.60)$$

Predpokladajme teraz, že po dostatočne dlhom (teoreticky nekonečnom) čase, keď napätie na kondenzátore dosiahlo hodnoty EMN zdroja (keď $U_C = \mathcal{E}$), sme prepli prepínač do polohy 2. Vznikol tak jednoduchý uzavretý obvod z rezistora a nabitého kondenzátora, v ktorom teraz potečie vybíjací prúd kondenzátora opačným smerom. Pre obvod platí napäťová rovnica $U_R + U_C = 0$, alebo

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (5.61)$$

Táto jednoduchá diferenciálna rovnica pre náboj Q na kondenzátore dáva pri začiatočnej podmienke pre $t = 0$, $Q(0) = C\mathcal{E}$ nasledovné riešenie

$$Q(t) = C\mathcal{E} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.62)$$

Napätie na kondenzátore

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.63)$$

a prúd v odpore

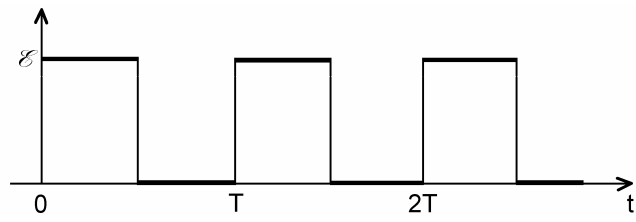
$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.64)$$

Vidíme, že napätie a náboj na kondenzátore exponenciálne klesajú podobne ako prúd na obr. 5.27; elektrický prúd v obvode ale teraz tečie v opačnom smere, pretože kondenzátor sa vybíja. Akumulovaná elektrická energia kondenzátora (5.60) sa celá premení na teplo v odpore.

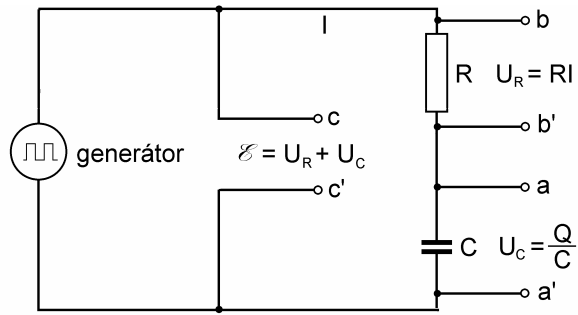
Periodické nabíjanie a vybíjanie kondenzátora možno pozorovať na osciloskope, ak namiesto zdroja konštantného napätia s prepínačom použijeme generátor obdĺžnikového napätia s malým vnútorným odporom ($R_{gen} \ll R$). Časový priebeh napätia na výstupe takého generátora je znázornený na obr. 5.28. Períodu T priebehu napätia generátora treba zvoliť dostatočne dlhú, aby v polovici každého cyklu generátora na odpore a kondenzátore bol stav, ktorý už možno považovať za ustálený (kondenzátor je plne nabitý alebo vybitý, prúd cez odpor je nulový). To vyžaduje, aby bola splnená podmienka

$$\frac{T}{2} \approx 5\tau = 5RC$$

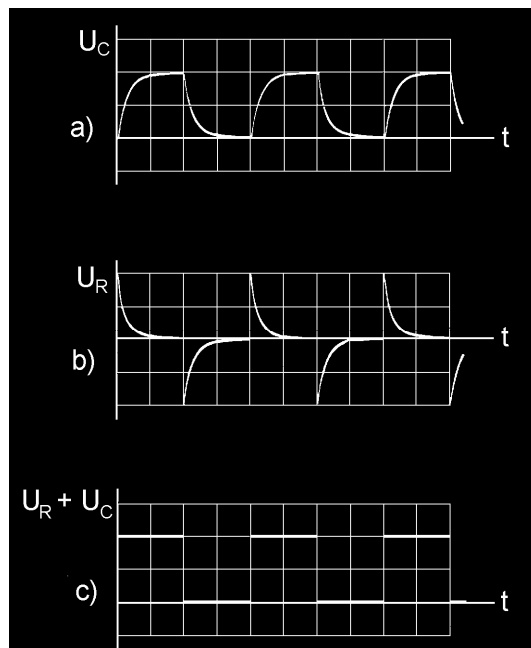
Obvod vhodný na osciloskopické pozorovanie časových priebehov napätí je znázornený na obr. 5.29. Svorky aa' , bb' a cc' môžeme postupne pripájať na vertikálny vstup osciloskopu (alebo pripojiť súčasne na vstup mnohokanálového osciloskopu) a na jeho obrazovke budeme pozorovať priebehy, ktoré sú znázornené na obr. 5.30. Počas prvej



Obr. 5.28



Obr. 5.29



Obr. 5.30

polperiódy napätia generátora napätie na kondenzátore exponenciálne narastá a na odpore klesá, podobne ako na obr. 5.26 a 5.27. Obraz napätia na odpore je súčasne aj obrazom prúdu v odpore. V druhej polperióde sa kondenzátor vybíja a ďalej sa celý cyklus opakuje. Súčet napätí na odpore a kondenzátore je na obr. 5.30c a je skutočne napätím generátora.

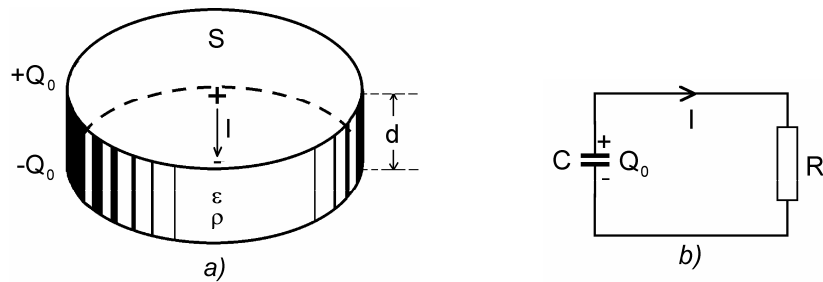
Na záver tohto odseku venujme ešte pozornosť prechodovému javu, ktorý vznikne v nabitom kondenzátore s čiastočne vodivým dielektrikom (kondenzátor so zvodom). Na obr. 5.31a je znázornený doskový kondenzátor s plochou dosiek S a vzdialenosťou d medzi nimi, ktorý je naplnený čiastočne vodivým dielektrikom s permitivitou ϵ a s konduktivitou $\sigma = 1/\rho$ (ρ je rezistivita dielektrika). Kondenzátor má kapacitu $C = \epsilon S/d$ a odpor dielektrika medzi elektródami kondenzátora $R = \rho d/S$. Pre takýto kondenzátor možno nakresliť náhradný obvod podľa obr. 5.31b. Ak je v čase $t = 0$ kondenzátor nabitý nábojom Q_0 , bude sa samovoľne vybíjať a časový priebeh náboja na ňom bude tvaru

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Náboj na kondenzátore teda klesá k nule s časovou konštantou

$$\tau = RC = \rho \epsilon = \epsilon/\sigma \quad (5.65)$$

ktorá sa nazýva **Maxwellov relaxačný čas**.



Obr. 5.31

Vidíme, že kondenzátor s kvalitným dielektrikom ($\sigma \rightarrow 0$) má časovú konštantu $\tau \rightarrow \infty$, t. j. po nabití si náboj udrží veľmi dlho, a naopak kondenzátor so zvodom sa skôr alebo neskôr vybije. Je zaujímavé, že časová konštantu kondenzátora so zvodom nezávisí od jeho geometrie, iba od elektrických parametrov prostredia. Možno teda očakávať, že ak v ľubovoľnom objeme materiálu je v čase $t = 0$ nerovnomerne rozložený náboj $+Q$ a $-Q$, bude začiatočná objemová hustota náboja ρ_0^* v ľubovoľnom bode materiálu klesať s časom podľa výrazu

$$\rho^*(t) = \rho_0^* e^{-\frac{t}{\rho \epsilon}}$$

Toto tvrdenie plynie zo všeobecných rovníc elektromagnetického poľa a je výsledkom riešenia úlohy 104.

Obvody s odporami a kondenzátormi majú dôležitý význam v obvodovej elektronike, kde slúžia ako rôzne väzobné členy, časti elektrických filtrov a sú základom pre derivačné a integračné obvody hojne používané v impulzných a v počítačových zapojeniach.

Úlohy 97 – 151

97. Medeným valcovým vodičom s priemerom 1 mm tečie prúd 1 A.

- Aká je hustota prúdu a driftová rýchlosť vodivostných elektrónov, ak ich koncentrácia v medi je $8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$
- Aká je intenzita elektrického poľa v medi, ak rezistivita medi je $1,72 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$?
- Aký náboj prejde prierezom vodiča za 20 s? Koľko je to elektrónov?
- Aké je napätie medzi dvoma prierezmi vodiča vzdialenými 100 m od seba?

98. V synchrotróne pre urýchľovanie elektrónov na energiu 6 GeV sa asi 10^{11} elektrónov pohybuje prakticky rýchlosťou svetla po 240 metrovej kruhovej dráhe. Vypočítajte elektrický prúd v synchrotróne.

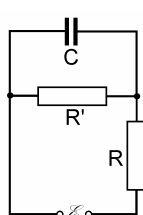
99. Sklenená trubica s prierezom 0,5 cm je naplnená roztokom NaCl a tečie ňou elektrický prúd. Pod vplyvom elektrického poľa sa pohybujú ióny Na^+ rýchlosťou 0,045 cm/s a ióny Cl^- rýchlosťou 0,0677 cm/s.

- Aký elektrický prúd tečie trubicou, ak v každom cm^3 je 10^{20} iónov každého druhu?
- Koľko sodíkových iónov prejde na katódu za jednu minútu? Atómová hmotnosť sodíka je 22,99. Koľko sodíka (vo váhovom množstve) prejde na katódu?

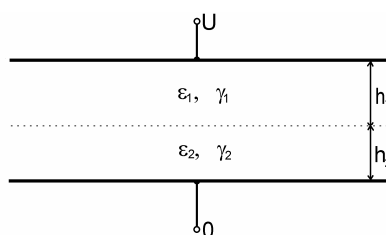
100. Doskový kondenzátor s plochou dosiek $S = 10 \text{ cm}^2$ a ich vzdialenosťou $d = 2 \text{ mm}$ je vyplnený dielektrikom, ktorého permitivita lineárne narastá z hodnoty $\epsilon_{r1} = 3$ pri jednej doske, na hodnotu $\epsilon_{r2} = 4$ pri druhej doske. Podobne vodivosť dielektrika narastá z hodnoty $\sigma_1 = 10^{-7} \text{ S/m}$ na hodnotu $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ S/m}$ v tom istom smere. Vypočítajte celkový voľný náboj v objeme kondenzátora, ak ním tečie prúd $I = 10^{-7} \text{ A}$ v smere nárastu permitivity. Zmení sa náboj, ak ten istý prúd tečie v opačnom smere? Vypočítajte tepelné straty (výkon) v kondenzátore.

101. Rovinné rozhranie dvoch vodivých prostredí, z ktorých jedno má konduktivitu γ a druhé nekonečnú vodivosť, tečie prúd s prúdovou hustotou $\mathbf{J} = J\mathbf{n}_0$, kde \mathbf{n}_0 je jednotkový vektor normálny k rozhraniu a smeruje do vodiča s konduktivitou γ . Vypočítajte plošný náboj na rozhraní.

102. Vzduch v priestore doskového kondenzátora objemu $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ je ionizovaný röntgenovými lúčmi tak, že v 1 cm^3 za 1 s vzniká 10^9 iónov a rovnaký počet voľných elektrónov. Dosky kondenzátora sú pripojené na zdroj EMN $\mathcal{E} = 1300 \text{ V}$ cez odpor $R = 10^{10} \Omega$ a ku kondenzátoru je paralelne pripojený odpor $R' = 10^{10} \Omega$ (obr. 102). Aký prúd tečie cez odpor R ? Predpokladajte, že ióny a elektróny pri pohybe medzi doskami nestačia rekombinovať a že náboj každého iónu je v absolútnej hodnote rovnaký ako náboj elektrónu.

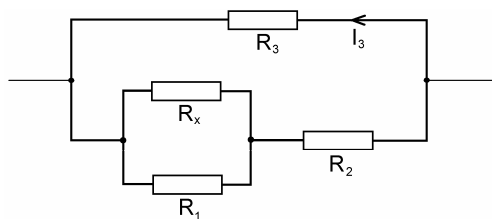


Obr. 102



Obr. 103

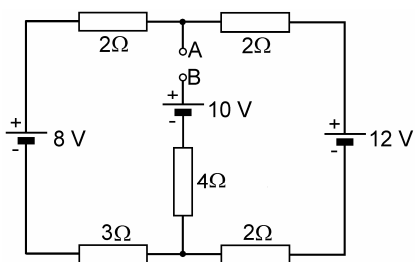
103. Priestor medzi rovinnými doskami kondenzátora je vyplnený čiastočne vodivými materiálmi s konduktivitami γ_1 a γ_2 a permitivitami ϵ_1 a ϵ_2 . Materiály tvoria dve vrstvy s hrúbkami h_1 a h_2 a vyplňujú celý objem kondenzátora (obr. 103). Kondenzátor je udržiavaný na konštantnom napätí U . Vypočítajte intenzitu elektrického poľa, elektrickú indukciu a prúdovú hustotu v oboch materiáloch. Vypočítajte hustoty voľných a viazaných nábojov na všetkých rozhraniach a vo vnútri materiálov. Určite smery vektorov \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{J} . Okrajové efekty možno zanedbať.



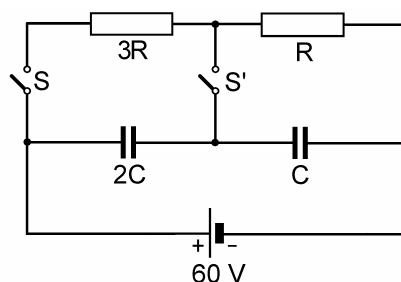
Obr. 105

104. Použitím Ohmovho zákona, Gaussovho zákona a rovnice kontinuity dokážte, že ak v izolovanom vodiči existuje v čase $t = 0$ nenulová objemová hustota nábojov ρ_0 , potom táto hustota v čase exponenciálne zaniká (rozptylom náboja na hraničné plochy vodiča) s charakteristickým (relaxačným) časom, ktorý závisí od permitivity vodiča a jeho konduktivity.

105. Na obr. 105 je časť elektrickej schémy, v ktorej $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $I_3 = 10 \text{ A}$ a napätie na odpore R_2 je 45 V . Vypočítajte odpor R_x .



Obr. 106



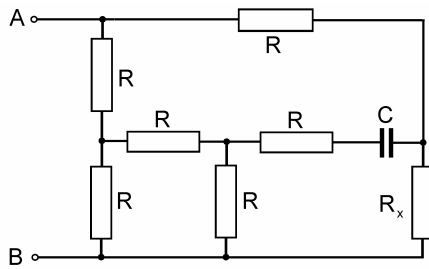
Obr. 107

106. V elektrickom zapojení na obr. 106 nájdite hodnotu napätia medzi svorkami A a B . Aký prúd tečie 12-voltovým zdrojom, ak svorky A a B sú skratované?

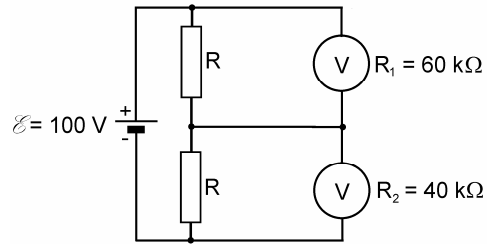
107. V zapojení podľa obr. 107 treba vypočítať napätia na kondenzátoroch v ustálenom stave v nasledujúcich prípadoch:

- spínače S a S' sú zopnuté,
- spínač S je zopnutý a spínač S' rozopnutý,
- spínač S je rozopnutý a spínač S' zopnutý.

108. Ak sa ku svorkám $A-B$ na obr. 108 pripojí zdroj EMN, náboj na kondenzátore C sa rovná nule. Aká je hodnota odporu R_x ?



Obr. 108



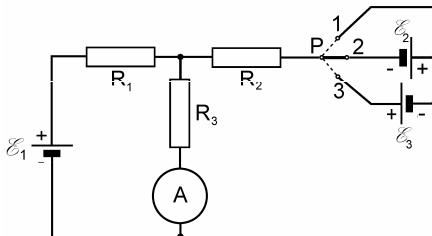
Obr. 109

109. Aké hodnoty napätia ukazujú voltmetre v zapojení podľa obr. 109? R_1 a R_2 sú vnútorné odpory voltmetrov, $R = 50 \text{ k}\Omega$.

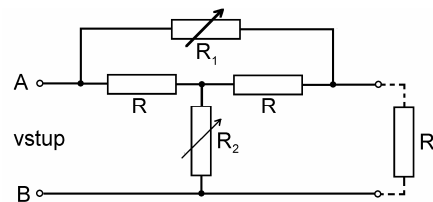
110. Telegrafný kábel dlhý 50 km spájajúci telegrafné stanice A a B je na istom mieste porušený zvodom (v danom mieste sa zníži priečny elektrický odpor). Treba určiť vzdialenosť miesta poruchy od stanice A. Za tým účelom v stanici A bol pripojený ku káblu zdroj napätia 200 V so zanedbateľným vnútorným odporom a v stanici B bolo na kábli namerané 40 V. Potom v stanici B bol ku káblu pripojený 300 V zdroj a v stanici A namerali tiež 40 V. Z týchto údajov vypočítajte vzdialenosť miesta poruchy od stanice A. Materiál kábla má nenulový, konštantný odpor na jednotku dĺžky.

111. Akumulátorová batéria s elektromotorickým napätím \mathcal{E}_0 a s malým vnútorným odporom R_i má dodávať počas dlhej doby konštantný prúd do spotrebiča s odporom R_z . Aby sa batéria šetrila, pripojí sa paralelne so spotrebičom cez odpor R ku generátoru jednosmerného napätia \mathcal{E} . Avšak elektromotorické napätie generátora kolíše v medziach od \mathcal{E}_1 do \mathcal{E}_2 ($\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_0$). Hodnota odporu R sa volí tak, že pri napätí generátora $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ batéria nedodáva prúd.

- Nakreslite schému opísaného zapojenia.
- Aký prúd bude odoberaný z batérie pri napätí generátora $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$?
- Aké prúdy tečú spotrebičom pri obidvoch krajných hodnotách napätí generátora \mathcal{E}_1 a \mathcal{E}_2 ?
- Riešte numericky pre $\mathcal{E}_0 = 6 \text{ V}$, $R_i = 0,1 \Omega$, $R_z = 10 \Omega$, $\mathcal{E}_1 = 120 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 100 \text{ V}$.



Obr. 112



Obr. 113

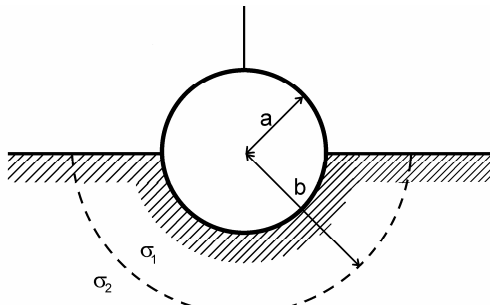
112. Ak je v zapojení na obr. 112 prepínač P v polohe 1, potom ampérmetr registruje 60 mA. Po prepnutí prepínača do polohy 2 prúd ampérmetrom je 40 mA. Aký prúd tečie ampérmetrom, ak sa prepínač prepne do polohy 3? $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ V}$, $\mathcal{E}_3 = 6 \text{ V}$.

113. V meracej technike je niekedy potrebný atenuátor (zoslabovač) elektrického napätia, ktorý má konštantný vstupný a výstupný odpor nezávislý od zoslabenia. Takéto požiadavky splňuje zapojenie na obr. 113 (tzv. premostený T-článok). Predpokladajte, že výstup T-článku je zaťažený odporom R . Aký vzťah musí platiť medzi odpormi R_1 a R_2 , aby vstupný odpor bol tiež R ?

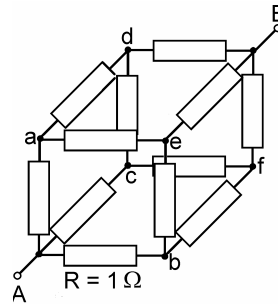
114. Elektrický stožiar vysokého napätia $U = 400$ kV je uzemnený vodivou guľou do polovice zakopanou v zemi. Polomer gule je $r_0 = 30$ cm. Na vedení vznikla porucha tak, že nastal skrat medzi stožiarom a vedením. Vypočítajte pod akým napätím sa ocitne človek, ktorý urobí 80 cm krok vo vzdialenosti a) 100 m, b) 25 m od stožiara (smerom k nemu, alebo od neho). Toto napätie sa nazýva krokovým napätím. Konduktivity zeme je 10^{-2} S/m.

115. Guľový kondenzátor s polermi elektród R_1 a R_2 ($R_1 < R_2$) je vyplnený čiastočne vodivým dielektrikom s rezistivitou $\rho = \text{konšt.}$ Vypočítajte priečný odpor kondenzátora.

116. Uzemnenie pozostáva z vodivej gule s polomerom a , ktorá je do polovice zakopaná v zemi (obr. 116). Vrstva zeme polomeru b okolo gule má umele zvýšenú konduktivitu $\sigma_1 > \sigma_2$, kde σ_2 je konduktivita zeme. Nájdite odpor uzemnenia.



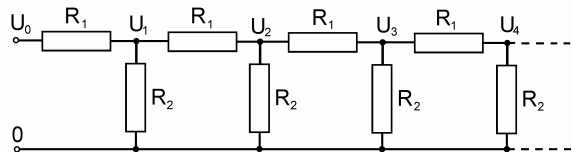
Obr. 116



Obr. 117

117. Kostra kocky sa skladá z rovnakých 1-ohmových odporov pozdĺž každej hrany (obr. 117). Využitím symetrie zapojenia vypočítajte odpor medzi protíahlými vrcholmi A-B.

118. Vypočítajte vstupný odpor nekonečného odporového reťazca na obr. 118. Môžete napr. využiť skutočnosť, že odpor reťazca sa nezmení, ak sa k jeho vstupným svorkám pripojí jedna dvojica R_1 - R_2 . Dokážte, že napätia pozdĺž reťazca (U_1, U_2, U_3, \dots) tvoria geometrickú postupnosť. Ako volíť pomer R_1/R_2 , aby napätia klesali s kvocientom $1/2$?

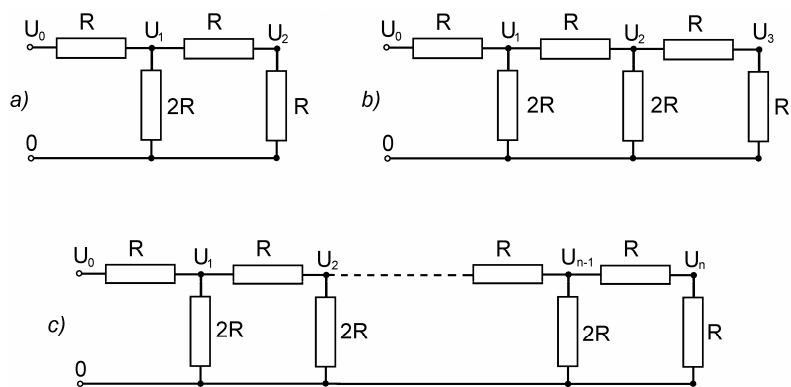


Obr. 118

119. Vypočítajte vstupné odpory zapojení podľa obr. 119a, b. Určite napätia U_1, U_2, U_3 , ak vstupné napätia v oboch zapojeniach sú U_0 . Matematickou indukciou nájdite vstupný odpor reťazca na obr. 119c a napätia U_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Porovnajtie riešenia s výsledkami úlohy 118.

120. Podzemný kábel má konštantný odpor R na jednotku dĺžky. Izolácia kábla je nedokonalá a má priečnu vodivosť G na jednotku dĺžky. Úlohu spätného vodiča kábla hrá okolitá zem. Napíšte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje závislosť prúdu v kábli na vzdialenosti od zdroja. Nájdite súvislosť medzi prúdom v kábli a jeho napätím oproti zemi.

121. Kondenzátor s kapacitou $C = 10$ μF s dielektrikom s permitivitou $\epsilon_r = 4$ a konduktivitou $\sigma = 10^{-14}$ S/m je pripojený na zdroj napätia $U = 1000$ V. Vypočítajte zvodový prúd kondenzátora.

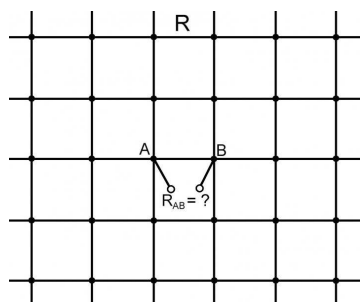


Obr. 119

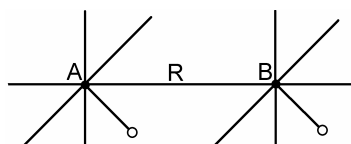
122. Dva kondenzátory s kapacitami $C_1 = 0,2 \mu\text{F}$ a $C_2 = 0,5 \mu\text{F}$ s dielektrikami, ktoré majú relatívne permitivity $\epsilon_{r1} = 2,4$, $\epsilon_{r2} = 4$ a konduktivity $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ S/m}$, $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ S/m}$, sú spojené do série a pripojené na zdroj napätia $U = 1200 \text{ V}$. Vypočítajte napätia na kondenzátoroch v ustálenom stave.

123. Dve kovové gule s polomerami a_1 a a_2 sú ponorené do vody vo veľkej vzdialenosti od seba. Ak sa na gule pripojí pomocou izolovaných káblov zdroj napätia U , potečie obvodom prúd I , ktorého veľkosť je nepriamo úmerná elektrickému odporu vodného prostredia, v ktorom sú gule ponorené. Tento odpor závisí od vodivosti vody a od rozmerov gulí. Nájdite vzťah, ktorý z nameraného odporu medzi gulami (pomeru U/I) a zo známych polomerov gulí dáva možnosť vypočítať konduktivitu vody.

124. Nekonečná štvorcová sieť je zostavená z rovnakých odporov R medzi susednými uzlami (obr. 124). Využitím symetrie zapojenia a zákona superpozície nájdite odpor R_{AB} siete medzi dvoma susednými uzlami.



Obr. 124



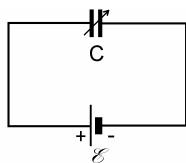
Obr. 125

125. Nekonečná kubická mriežka pozostáva z odporov R medzi susednými uzlami (obr. 125). Nájdite celkový odpor medzi susednými uzlami A-B.

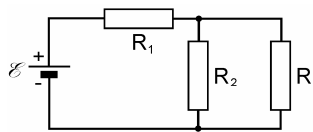
126. V priestore je daných n bodov (uzlov). Všetky uzly sú pospájané odpormi R , každý s každým. Nájdite odpor medzi dvoma uzlami.

127. Desať uzlov je prepojených odpormi $R = 40 \Omega$, každý s každým. K dvom uzlom je pripojený zdroj EMN $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ s vnútorným odporom $R_i = 2 \Omega$. Aké prúdy tečú jednotlivými odpormi?

128. Na kondenzátor premennej kapacity je pripojený zdroj EMN $\mathcal{E} = 10$ V. Aký prúd dodáva zdroj, ak sa kapacita kondenzátora mení rýchlosťou $C_t = 1000$ pF/s?



Obr. 129



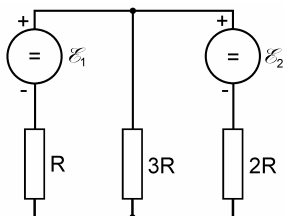
Obr. 130

129. Kapacita kondenzátora na obr. 129 sa zväčšuje tak, že nabíjací prúd kondenzátora je konštantný. Vypočítajte zmenu energie kondenzátora po čase t a energiu dodanú zdrojom. Vysvetlite prípadný rozdiel medzi energiou kondenzátora a energiou dodanej zdrojom.

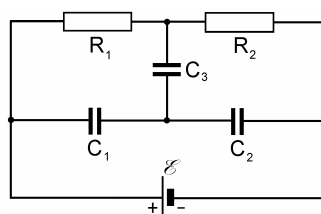
130. Aký musí byť vzájomný súvis medzi odpormi R_1 , R_2 , R_3 v zapojení na obr. 130, aby výkon v odpore R_3 nezávisel od malých zmien tohoto odporu?

131. Pre ohrev miestnosti sa používa elektrická pec na 220 V. V miestnosti sa rozptýľuje $8,65 \cdot 10^7$ J tepla za 24 hodín. Vypočítajte:

- odpor pece,
- dĺžku odporového drôtu s priemerom 1 mm a s rezistivitou $10^{-6} \Omega \cdot m$ potrebného na konštrukciu pece,
- výkon pece.



Obr. 133



Obr. 134

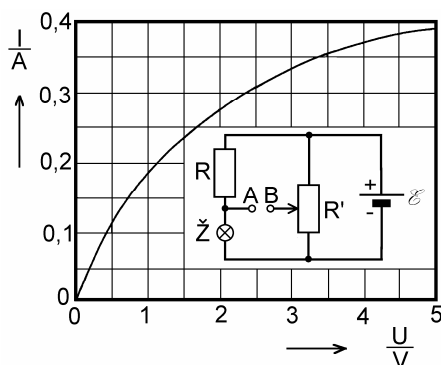
132. Koaxiálny kábel s polomerom vnútorného vodiča 4 mm a vonkajšieho vodiča 8 mm je vyplnený dielektrikom s konduktivitou 10^{-9} S/m. Kábel je dlhý 10 km. Ku káblu je na jeho jednom konci pripojené napätie $U = 600$ V a druhý koniec je nezaťažený. Vypočítajte:

- prúd dodávaný zdrojom,
- hustotu prúdu v dielektriku ako funkciu vzdialenosti od osi kábla,
- hustotu tepelného výkonu v dielektriku,
- celkové tepelné straty v dielektriku kábla vo wattoch.

133. V zapojení na obr. 133 sú \mathcal{E}_1 a \mathcal{E}_2 generátory elektromotorických napätí s nulovým vnútorným odporom. Ak pracuje generátor \mathcal{E}_1 a $\mathcal{E}_2 = 0$, potom výkon dodávaný do zapojenia je 55 W. Ak pracuje generátor \mathcal{E}_2 a $\mathcal{E}_1 = 0$, potom dodávaný výkon je 176 W. Aký výkon je dodávaný do zapojenia, ak obidva generátory pracujú súčasne?

134. V zapojení podľa obr. 134 nájdite náboje na kondenzátoroch C_1 , C_2 a C_3 . V akom vzťahu musia byť R_1 , R_2 , C_1 , C_2 , aby napätie na kondenzátore C_3 bolo nulové? Úlohu riešte pre ustálený stav.

135. Dlhý valcový vodič s polomerom a je vyhotovený z materiálu, ktorého rezistivita je daná výrazom $\rho = \alpha r^2$, kde r je vzdialenosť od osi vodiča a α je konštanta. Vodičom tečie prúd I . Vypočítajte intenzitu elektrického poľa vo vodiči a odpor R na jednotku dĺžky valca.

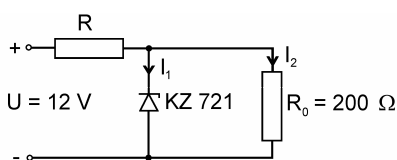


Obr. 136

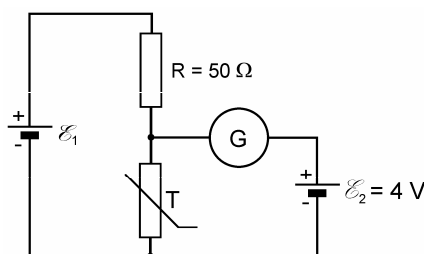
136. Na obr. 136 je znázornená voltampérová charakteristika žiarovky zapojenej v obvode na obrázku. EMN zdroja $\mathcal{E} = 4 \text{ V}$, odpor $R = 10 \Omega$, celkový odpor potenciometra $R' = 40 \Omega$. Nájdiť graficky prúd v žiarovke. V akej polohe musí byť bežec potenciometra, aby sa napätie medzi svorkami A a B rovnalo nule?

137. V zemskej atmosfére dochádza za každú sekundu v priemere k asi sto elektrickým výbojom (bleskom). Každý blesk trvá v priemere 10^{-3} s . Blesk nastáva pri potenciálovom rozdiel okolo 10^9 V a zodpovedajúci prúd blesku je 20 kA . Odhadnite celkovú ročnú energiu bleskov na zeme a porovnajte ju celkovou ročnou produkciou elektrickej energie na svete, ktorá je asi $9,5 \cdot 10^{19} \text{ J}$.

138. Nelineárny odporový prvok má voltampérovú charakteristiku danú výrazom $I = kU^2$, kde $k = 0,02 \text{ A/V}^2$. Tento prvok je spojený do série s odporom $R = 100 \Omega$ a dvojica je pripojená na zdroj EMN $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ so zanedbateľným vnútorným odporom. Vypočítajte výkon v odpore a v nelineárnom prvku.



Obr. 139

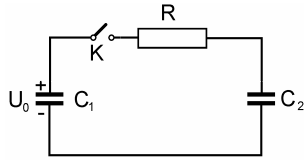


Obr. 140

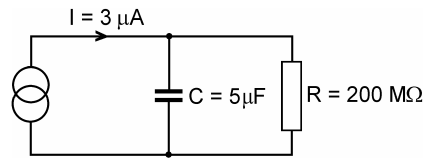
139. Zenerova dióda KZ 721 má byť použitá ako stabilizátor napätia na odpore R_0 v obvode podľa obr. 139. V katalógu súčiastok je uvedené, že maximálny prípustný výkon na dióde je $P_z = 280 \text{ mW}$ a jej stabilizačné napätie $U_z = 7,8 \text{ V}$. Vypočítajte minimálnu hodnotu odporu R , pre ktorú prípustný výkon na dióde ešte nebude prekročený. Predpokladajte, že U_z je konštantné pre celý pracovný interval diódy.

140. V zapojení podľa obr. 140 je nelineárny element, ktorého voltampérová charakteristika je daná vzťahom $I = 0,02 U^2$ [A, V]. Galvanometrom G netečie prúd. Vypočítajte výkon dodávaný zdrojom \mathcal{E}_1 .

141. Vypočítajte časový priebeh prúdu v obvode na obr. 141 a priebeh napätí na kondenzátoroch C_1 a C_2 po zopnutí obvodu. Začiatkové napätie na kondenzátore C_1 je U_0 a kondenzátor C_2 je pred zopnutím nenabitý.



Obr. 141



Obr. 142

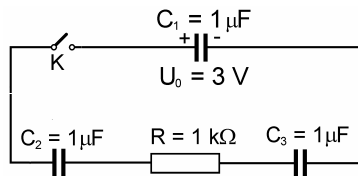
142. RC dvojici na obr. 142 je dodávaný konštantný prúd $3 \mu\text{A}$. Za aký čas sa kondenzátor nabije na 500 V ?

143. Dokážte, že energia kondenzátora nabitého na potenciálny rozdiel U sa pri vybití kondenzátora cez odpor R premení na teplo v tomto odpore.

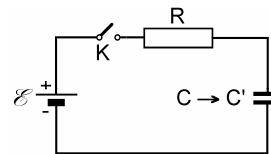
144. Doskový kondenzátor s plochou dosiek S a ich vzdialenosťou d má čiastočne vodivé dielektrikum s permitivitou ε a konduktivitou σ . Ak je takýto kondenzátor nabitý, potom sa samovoľne vybitá. Vypočítajte časovú konštantu kondenzátora.

145. V obvode na obr. 145 je kondenzátor C_1 nabitý na potenciálny rozdiel 3 V a C_2, C_3 sú nenabité. V čase $t = 0$ sa kľúč zopne.

- Nájdite časovú závislosť prúdu v obvode.
- Aké budú napätia na jednotlivých kondenzátoroch po ustálení?
- Aký celkový náboj prejde odporom R ?



Obr. 145

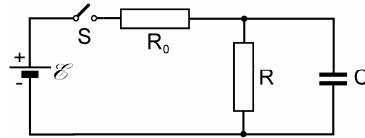


Obr. 146

146. V obvode na obr. 146 má kondenzátor začiatkovú hodnotu kapacity $C = 1\,000 \text{ pF}$, po zopnutí spínača a po dostatočne dlhom čase sa elektrické pomery v obvode ustália. Za časový interval $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$ sa kapacita zmení na hodnotu C' , ktorá zodpovedá polovičnej vzdialenosti dosiek pôvodného kondenzátora.

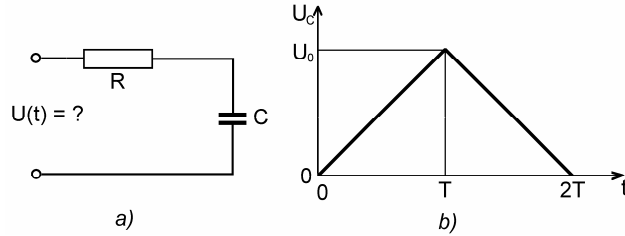
- Aká je hodnota C' ?
- Aká musí byť hodnota odporu R , aby v časovom intervale Δt náboj na kondenzátore zostal prakticky konštantný?
- Aká energia sa vyžiarí na odpore R vo forme tepla od okamihu zmeny kapacity na hodnotu C' až po čas, ktorý zodpovedá novému ustálenému stavu?

147. V zapojení podľa obr. 147 vypočítajte prúdy jednotlivými vetvami a napätia na jednotlivých prvkoch ako funkcie času po zopnutí spínača S .



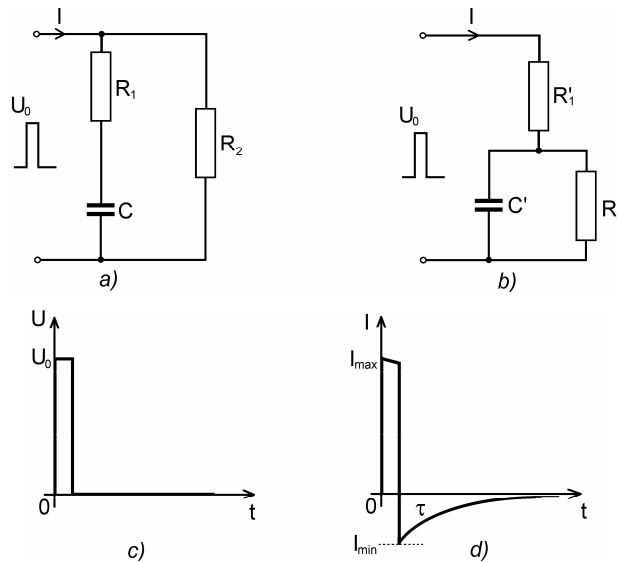
Obr. 147

148. Na kondenzátore C v obvode podľa obr. 148a má byť časový priebeh napätia podľa obr. 148b. Aký musí byť časový priebeh vstupného napätia? Znáznornite graficky.



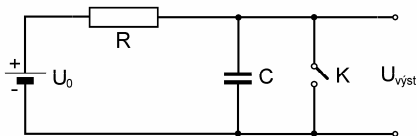
Obr. 148

149. Na obr. 149a a 149b sú znázornené dva obvody pozostávajúce z odporov a kondenzátorov. Pri vhodne zvolených hodnotách odporov a kondenzátorov sú obidva obvody vzhľadom na ich vstupné svorky elektricky identické. Súvis medzi prvkami obvodov pre identické vlastnosti možno získať z porovnania ich impedancií, avšak takýto spôsob je ťažkopádny. Jednoduchšie je porovnať odozvy obvodov na veľmi krátky napäťový impulz (obr. 149c) z generátora s nulovým vnútorným odporom. Tvar prúdovej odozvy v obidvoch obvodoch je na obr. 149d. Obvody budú identické, ak v obidvoch prípadoch I_{max} a I_{min} , ako aj časové konštanty τ sú rovnaké. Na základe analýzy odozvy na napäťový impulz nájdite vzťahy medzi prvkami obvodov pre ich elektrickú identitu.



Obr. 149

150. Jednoduchý relaxačný generátor periodických časových priebehov je na obr. 150. Vo funkcii kľúča K môže slúžiť napr. neónová výbojka so zápalným napätím U_1 a zhášacím napätím U_2 . Po pripojení zdroja U_0 k obvodu sa kondenzátor začne nabíjať a v okamihu, keď napätie na kondenzátore dosiahne hodnotu U_2 , kľúč sa zopne a kondenzátor sa rýchle vybijie na hodnotu napätia U_1 , pri ktorom sa kľúč rozopne. Kondenzátor sa z hodnoty napätia U_1 začne znovu nabíjať až na hodnotu U_2 a celý proces sa opakuje. Napätie zdroja U_0 musí byť vždy vyššie ako U_2 . Vypočítajte periódu kmitov takého generátora, pričom čas, za ktorý sa kondenzátor vybíja cez kľúč, považujte za nulový. Časové priebehy kmitov znázorníte graficky.



Obr. 150

151. Biologickú bunku možno v istom zmysle považovať za kondenzátor tvorený bunečnou membránou (dielektrikum kondenzátora), ktoré oddeľuje dve vodivé kvapaliny (elektrody kondenzátora). Elektrické vlastnosti nervových buniek sú zvlášť dôležité, pretože šírenie nervového impulzu je doprevádzané rýchlymi zmenami rozdielu potenciálov medzi vnútro bunky a prostredím, ktoré ju obklopuje. Je známe, že kapacita bunečnej membrány je $C' = 10^{-2} \text{ F.m}^{-2}$ a jej relatívna permitivita je $\epsilon_r = 3$. Aká je hrúbka bunečnej membrány? Iné elektrické merania ukazujú, že bunečná membrána nie je dokonalý izolátor. Priečna vodivosť bunečnej membrány je $G' = 1/R' = 10 \text{ S.m}^{-2}$. Bunečná membrána je teda kondenzátorom so zvodom, čo je ekvivalentné kondenzátoru s ideálnym dielektrikom, ku ktorému je pripojený paralelne odpor. Aká je časová konštanta takého "bunečného kondenzátora" (ktorá je mimochodom mierou rýchlosti reakcie nervového systému na nervový impulz)? Závaži táto časová konštanta od rozmerov kondenzátora? Aká je rezistivita bunečnej membrány?