

## 4 ELEKTROSTATICKÉ POLE V DIELEKTRIKU

### 4.1 POLARIZÁCIA DIELEKTRIKA. VEKTOR POLARIZÁCIE

Popri vodivých látkach sa v prírode nachádzajú látky nevodivé, ktoré nazývame **izolanty** alebo **dielektriká**. Sú to látky, v ktorých sa náboje pod účinkom elektrických polí nemôžu pohybovať. Takýmito látkami sú mnohé prírodné materiály, rôzne minerály v kryštalickej aj amorfnej forme, ako napr. kremeň a jantár. Ďalej biologické materiály, ako napr. suché drevo, z plyných látok sú to napríklad inertné plyny a nakoniec látky, ktoré sú cieľenými produktmi ľudskej činnosti s dobre definovanou atómovou štruktúrou, ako napr. rozmanité organické aj neorganické umelé hmoty. Najmenej polovica predmetov, ktoré nás obklopujú a tvoria naše životné prostredie, sú nevodivé.

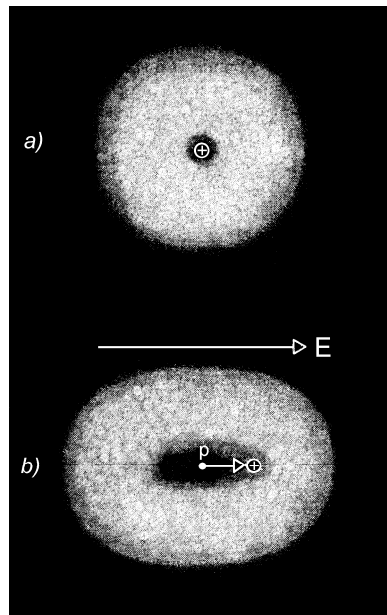
Ak hovoríme o izolantoch, musíme podobne ako pri vodičoch mať na pamäti, že ideálne nevodiče prakticky neexistujú. K veľmi dobrým izolačným prírodným materiálom patria napr. kremeň alebo slúda, z umelých hmôt napr. teflon a iné polyméry. Ako model pre našu analýzu sú najvhodnejšie práve tuhé polymérne materiály, ktoré sú elektricky homogénne a izotropné (majú rovnaké elektrické vlastnosti v každom bode objemu a vo všetkých smeroch). Okrem takýchto bežných materiálov existuje celá škála veľmi exotických látok, ktoré sa v praxi využívajú na špeciálnejšie než izolačné účely. Sú to napríklad piezoelektriká, feroelektriká, pyroelektriká a i.

Skôr, ako sa začneme hlbšie zaoberať elektrickými pochodmi v dielektrikách, položme si otázku: "Ak do elektrického poľa vložíme dielektrický materiál, ovplyvní pole jeho elektrický stav? A naopak, ovplyvní dielektrikum konfiguráciu elektrického poľa?" Samozrejme, odpoveď je kladná. Dielektrická látka je systémom nábojov, ktoré sú v zložitých atomárnych a molekulárnych väzbách. Elektrické pole bude na tieto väzby pôsobiť silami a bude nejakým spôsobom deformovať rovnovážnu konfiguráciu atómov. Ak je skúmanou dielektrickou látkou napríklad inertný plyn, čo je v podstate súbor navzájom takmer neinteragujúcich guľovo symetrických neutrálnych atómov (*obr. 4.1a*), elektrické pole spôsobí, že sa ťažisko kladného jadra nepatrne posunie v smere poľa a ťažisko záporného elektrónového obalu proti smeru poľa; vzájomné posunutie je  $\delta$ . Z atómu, ktorý je bez vonkajšieho poľa neutrálny, vznikne takto dipól s nenulovým vonkajším elektrickým poľom (*obr. 4.1b*). Vznik dipólu z neutrálneho guľovosymetrického atómu v elektrickom poli nazývame **elektrónovou polarizáciou atómu**. Tento proces v celom makroskopickom objeme nazývame **elektrónová polarizácia látky**.

Existujú však látky, ktorých stavebné kamene sú z elektrického hľadiska dipóly aj bez prítomnosti elektrického poľa. Takouto látkou je napríklad destilovaná voda. Jej molekuly  $H_2O$ , ako sme sa dozvedeli v odseku 2.9.1, sú silné elektrické dipóly. Bez vonkajšieho elektrického poľa jednotlivé dipóly vody vykonávajú intenzívny chaotický tepelný pohyb, takže v každom bode objemu vody a v každom čase sa stredná hodnota

elektrického poľa rovná nule a makroskopický objem vody sa javí elektricky neutrálny. Ak ampulku s vodou uložíme do elektrického poľa, jednotlivé dipóly majú tendenciu pod vplyvom točivého účinku poľa natočiť sa do smeru tohto poľa (pozri odsek 2.9.3). Ak by medzi dipólmi nebolo tepelné pôsobenie, každý dipól by sa otočil do smeru vonkajšieho poľa a látka by bola ideálne polarizovaná – všetky dipóly by "pozerali" rovnakým smerom. Takýto stav pri izbovej teplote však zďaleka nenastane a pole vnesie do tepelného chaosu dipólov len veľmi málo poriadku. Stane sa tak len v tej miere, v akej je pomer energie  $p \cdot E$  dipólu s momentom  $p$  v elektrickom poli intenzity  $E$ , k energii jeho tepelného pohybu  $kT$ , kde  $k$  je Boltzmannova konštanta a  $T$  je absolútna teplota. Presvedčte sa výpočtom, že pre reálne hodnoty intenzít elektrického poľa pri izbových teplotách je skutočne

$$\frac{pE}{kT} \ll 1$$



Obr. 4.1

V makroskopickom objeme látky sa pod účinkom poľa prejaví istá polarizácia ako výsledok čiastočného pootočenia časti dipólov do smeru elektrického poľa. Tento jav sa nazýva **orientačná polarizácia látky**. Látka je po polarizácii v inom elektrickom stave ako pred ňou, a spätne vplýva aj na elektrické pole v svojom okolí.

Podľa charakteru polarizácie delíme látky na nepolárne a polárne. **Nepolárne látky** sú tie, ktorých stavebné kamene bez vonkajšieho poľa nepredstavujú elektrické dipóly, a naopak, **polárne látky** sú tie, ktoré elektrické dipóly obsahujú aj bez prítomnosti poľa. V prvej skupine látok je polarizácia elektrónová, u druhých predovšetkým orientačná, pričom môže dochádzať aj k elektrónovej, prípadne atómovej polarizácii, čo sa prejaví deformáciou dipólov a zmenou vzájomnej vzdialenosti ich nábojových centier. Všimnite

si zásadný rozdiel medzi nenabíтым vodičom a nenabíтым dielektrikom v elektrickom poli: zatiaľ čo vo vodiči elektróny pod účinkom elektrického poľa opúšťajú svoje miesta v mriežke a usádzajú sa na povrchu vodiča (jav elektrickej indukcie), v dielektriku vznikajú alebo sa orientujú dipóly (jav polarizácie), ale k presunu nábojov v makroskopických objemoch nedochádza, pretože náboje nie sú voľné.

Uvedené polarizačné javy v dielektrikách sú iba kvalitatívnym opisom na takej úrovni, ktorá umožní zaviesť niektoré makroskopické elektrické charakteristiky dielektrických materiálov. Podrobnejšie sa k nim vrátíme v časti 4.8 pojednávajúcej o mikrofyzikálnej podstate polarizácie dielektrík. Venujme sa teda najprv makroskopickému pohľadu na elektrické pole v dielektriku.

Polarizačný stav látky, spôsobený účinkom elektrického poľa, treba najprv kvantitatívne opísať. Na tento opis sa zavádza vektorová veličina, ktorú nazývame **vektor elektrickej polarizácie** a budeme ho označovať symbolom  $\mathbf{P}$ . Vektor elektrickej polarizácie je definovaný ako dipólový moment jednotky objemu polarizovanej látky a matematicky ho možno vyjadriť výrazom

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta\tau} \quad [\text{C}\cdot\text{m}^{-2}] \quad (4.1)$$

kde  $\sum_i \mathbf{p}_i$  je celkový dipólový moment objemu  $\Delta\tau$  a objem sa v limite blíži k nule. Vektor polarizácie  $\mathbf{P}$  je teda funkcia súradníc v objeme dielektrika. Ak  $\sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ , čo môže byť spôsobené tým, že dielektrikum nie je pod vplyvom elektrického poľa, potom vektor polarizácie  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , t. j. dielektrikum je nepolarizované. U bežných látok podmienkou ich polarizácie je teda prítomnosť elektrického poľa a vektor  $\mathbf{P}$  je tomu poľu úmerný. Existujú však látky, v ktorých sa polarizácia udrží aj bez prítomnosti elektrického poľa. Sú to napr. feroelektrické, vysoko nelineárne látky s permanentnými dipólovými momentmi, ktoré sa našej lineárnej analýze vymykajú.

Existujú aj iné spôsoby matematického vyjadrenia vektora polarizácie. Ak látka obsahuje identické dipólové momenty  $\mathbf{p}$  a ich objemová koncentrácia je  $n$ , potom vektor polarizácie

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} \quad (4.2)$$

alebo v diferenciálnom tvare

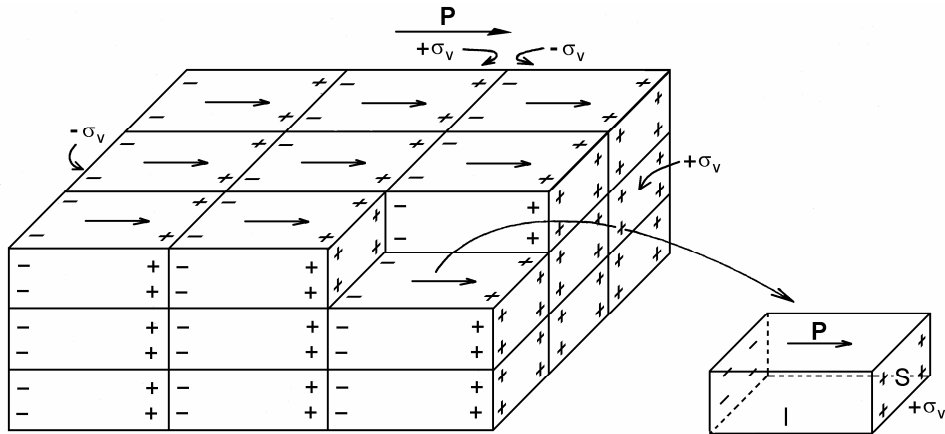
$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \quad (4.3)$$

Všimnime si, že všetky tri vyjadrenia vektora polarizácie skutočne udávajú objemovú hustotu elektrických dipólových momentov v látke.

Vektor polarizácie je veličina, ktorá nie je priamo prístupná meraniu, a preto sa pokúsime o jej vyjadrenie pomocou ďalších veličín. Prvou z nich je pojem viazaného náboja. Pod viazanými nábojmi budeme rozumieť tie náboje, ktoré sú súčasťami atómov alebo molekúl dielektrika, ktoré sa podieľajú na tvorbe jeho dipólov, a ktoré bez potrhania atómových alebo molekulárnych väzieb nemožno z dielektrika odvieť. Uvažované náboje vo vnútri dielektrika sú rozložené s nejakou objemovou hustotou  $\rho_v$  a na ľubovoľnej

vnútornej, ale hlavne povrchovej ploche dielektrika s plošnou hustotou  $\sigma_v$ . Plošná hustota  $\sigma_v$  je v jednoduchom vzťahu s vektorom polarizácie.

Pre posúdenie súvisu  $\mathbf{P}$  a  $\sigma_v$  uvažujme najprv dielektrikum tvaru kvádra na *obr. 4.2* homogénne polarizované pozdĺž jednej z jeho hrán napr. tak, že vektor  $\mathbf{P}$  smeruje zľava doprava. Objem spolarizovaného dielektrika je plný rovnomerne rozložených rovnakých dipólov, pričom kladné špičky dipólov na pravej povrchovej ploche vytvoria na nej kladný plošný náboj s hustotou  $+\sigma_v$ . Záporný náboj "chvostíkov" dipólov vo vnútri objemu bude kompenzovaný inými kladnými špičkami vo vnútri, takže homogénne polarizované dielektrikum vo vnútri nevykazuje nijaký viazaný objemový náboj. Na protiahlej ploche vľavo, kde končia chvostíky rovnakého množstva dipólov ako vpravo, sa vytvorí záporný viazaný plošný náboj  $-\sigma_v$ . Polarizácia materiálu sa teda prejaví vznikom plošných nábojov na povrchu telesa. Sú to celkom reálne náboje so známymi silovými účinkami, avšak také, že ich nemožno z telesa "sňať". Kváder by svojimi koncami priťahoval "kúsky papirusu, alebo ebonitovú tyč". Tak sa skutočne správa reálny dielektrický materiál nazývaný **elektret**, ak sa v ňom vytvorí a "zmrazí" permanentný elektrický dipólový moment, teda elektrická polarizácia. Taká polarizácia je, žiaľ, veľmi rýchlo zamaskovaná nachytanou "iónovou špinou" z ovzdušia. Nás ale na našom skúšobnom dielektriku zaujímajú iné veci.

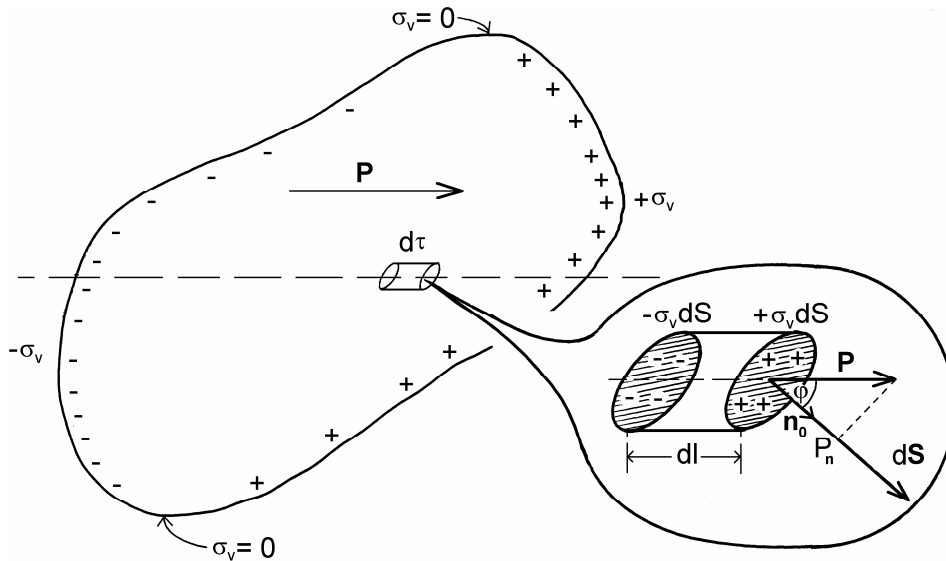


Obr. 4.2

Vo vnútri dielektrika sa polarizáciou na prvý pohľad nič nestalo. Ak ale myslennými ortogonálnymi rovinami dielektrikum rozrežeme, vzniknú väčšie alebo menšie kvádríky, ktoré sú tiež polarizované a na ich protiahlých plochách sú plošné náboje  $\pm\sigma_v$ . Pri pohľade na jeden takýto vybraný kvádrík na *obr. 4.2* vidíme, že z elektrického hľadiska je to vlastne dipól smerujúci zľava doprava (v smere polarizácie), s dipólovým momentom veľkosti  $p = l\sigma_v$ . Vektor polarizácie v danom kvádríku objemu  $\tau = lS$  má veľkosť

$$P = \frac{p}{\tau} = \sigma_v \quad (4.4)$$

Keďže kváder môžeme deliť na ľubovoľne malé kúsky, v ľubovoľnom bode objemu má veľkosť  $P = \sigma_v$  a má taký smer, že vystupuje z objemu na tej strane, kde je náboj kladný a vstupuje tam, kde je náboj záporný.



Obr. 4.3

Ak by uvažované polarizované teleso malo nepravidelný tvar, treba urobiť všeobecnejšiu úvahu. Nech nepravidelné teleso na obr. 4.3 je polarizované (nie nutne homogénne) horizontálne smerom doprava. Vyrežeme v tomto telese nekonečne malý objem tvaru skoseného nekonečne malého valčeka objemu  $d\tau = dl dS \cos \varphi$ , kde  $\varphi$  je uhol medzi smerom polarizácie (a súčasne osou valčeka) a smerom vonkajšej normály k ploške  $dS$ . Na čelných ploškach vyrezaného valčeka sú plošné náboje  $\pm\sigma_v$ . Valček je tiež "elektrický dipól" smerujúci doprava s dipólovým momentom veľkosti  $dp = dl dS \sigma_v$ . V mieste elementárneho objemu je teda polarizácia veľkosti

$$P = \frac{dp}{d\tau} = \frac{\sigma_v}{\cos \varphi} \quad (4.5)$$

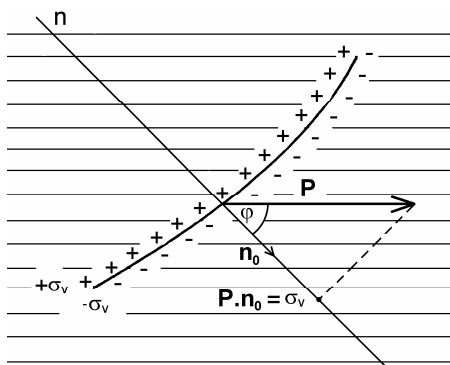
Rovnicu (4.5) je výhodnejšie prepísať na tvar

$$\sigma_v = P \cos \varphi = P_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 \quad (4.6)$$

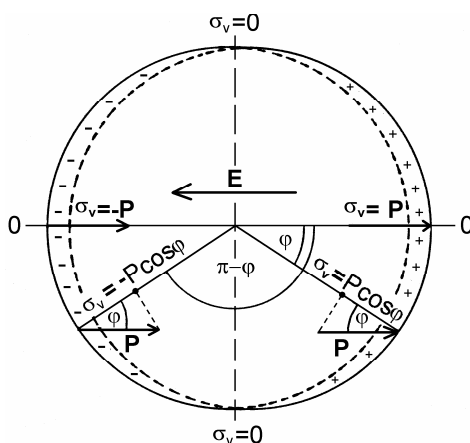
kde  $P_n$  je priemet vektora  $\mathbf{P}$  do smeru normály k ploške  $dS$ , presnejšie do smeru vektora  $d\mathbf{S}$ , alebo jednotkového vektora normály  $\mathbf{n}_0$ .

Čo však rovnica (4.6) vyjadruje a aký má zmysel? Rovnica hovorí, že v každom bode dielektrika, ktorým preložíme nejakú rovinnú plochu, sa plošná hustota viazaného náboja rovná normálovej zložke vektora polarizácie. Lenže normála k rovine má dva smery a na jednej strane myslenej plochy, ktorá je reznou plochou dielektrika je náboj kladný a na druhej náboj záporný. Podľa obr. 4.4 vektor normály  $\mathbf{n}_0$  smeruje od kladne

nabitej strany k zápornej. Na povrchu polarizovaného telesa normála vystupuje z telesa tam, kde je viazaný náboj kladný a vstupuje do neho tam, kde je záporný. Na *obr. 4.5* je znázornená homogénne polarizovaná guľa s vektorom polarizácie  $\mathbf{P}$ , s osou polarizácie  $OO'$ . Viazaný náboj na povrchu guľe je daný funkčnou závislosťou  $\sigma_v = P \cos \varphi$ , pre hodnoty  $\varphi$  od 0 až po  $\pi$ . Na póloch guľe sú plošné náboje  $\sigma_v = \pm P$ , na rovníku guľe nie je žiadny náboj. Čitateľovi odporúčam vypočítať elektrické pole takejto homogénne polarizovanej guľe v jej okolí a vo vnútri (pozri úlohu 73). Bude možno prekvapený, že pole v okolí guľe je poľom elektrického dipólu a úloha sa prakticky redukuje na výpočet ekvivalentného dipólového momentu. Vo vnútri guľe, podľa očakávania, je pole homogénne a smeruje sprava doľava (proti smeru vektora  $\mathbf{P}$ ).



Obr. 4.4



Obr. 4.5

Rovnica (4.6) nemá veľký praktický význam, pretože tak, ako vektor polarizácie, ani viazané náboje nie sú merateľné. Má však teoretický význam, pretože umožňuje sformulovať základný zákon elektrostatiky pre dielektriká. Týmto zákonom je Gaussov zovšeobecnený zákon.

## 4.2 GAUSSOV ZÁKON V DIELEKTRIKU

Teraz sme konečne pripravení odpovedať na otázku, ako dielektrikum ovplyvní elektrické pole, ktoré ním preniká. Predpokladajme, že nejaké teleso je nabité nábojom  $+Q$  (zdôrazňujeme, že ide o voľný náboj) a ponorené do dielektrika. Pod účinkom elektrického poľa sa dielektrikum polarizuje tak, že všetky jeho dipóly budú mieriť od nabitého telesa. Najprehľadnejšia je situácia bezprostredne v okolí telesa v prvej dipólovej vrstve, ktorá je schematicky zobrazená na *obr. 4.6*. Ak okolo telesa zvolíme Gaussovú plochu  $S$  tak, že bude pretínať každý vzpriamený dipól v polovici, celkový uzavretý náboj bude: voľný náboj  $Q$  plus celkový viazaný náboj  $Q_v$  záporných dipólových koncov obopnutých plochou  $S$ . Tieto zvyšky dipólov vytvárajú na ploche

nábojovú hustotu  $-\sigma_v$ . Tok intenzity elektrického poľa  $\mathbf{E}$  plochou  $S$  je viazaný podľa vzťahu (2.43) s celkový nábojom voľným aj viazaným, teda

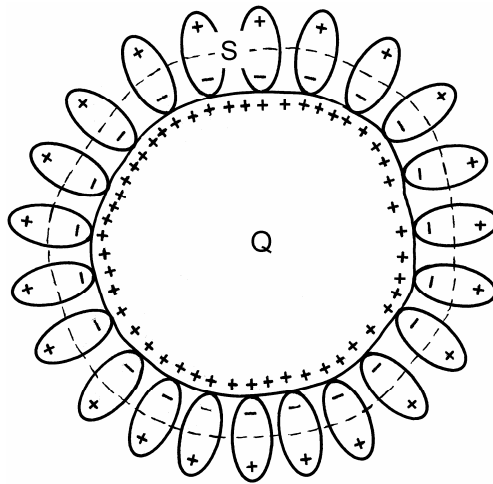
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q + Q_v}{\epsilon_0} \quad (4.7)$$

kde

$$Q_v = -\oint_S \sigma_v dS \quad (4.8)$$

je celkový viazaný náboj daný integráciou  $-\sigma_v$  po ploche  $S$ . Celkový náboj uzavretý plochou  $S$  je menší ako náboj  $Q$  a má veľkosť

$$Q_{celk} = Q + \left( -\oint_S \sigma_v dS \right) < Q$$



Obr. 4.6

Tok intenzity elektrického poľa plochou  $S$  z náboja  $Q_{celk}$  podľa výrazu (4.7) je v dielektriku menší, ako by bol z voľného náboja  $Q$  rovnakou plochou  $S$  vo vákuu. **Intenzita elektrického poľa v dielektriku za inak rovnakých podmienok je menšia ako vo vákuu.** Rovnicu (4.7) môžeme prepísať v tvare

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q - \oint_S \sigma_v dS}{\epsilon_0}$$

alebo s ohľadom na (4.6) a (4.8) do tvaru

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}}{\epsilon_0}$$

Vzhľadom na to, že obidva integrály v poslednom výraze sú cez rovnaký integračný obor, možno túto rovnicu upraviť na tvar

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (4.9)$$

#### 4.2.1 Vektor $\mathbf{D}$

Rovnica (4.9) je zjednodušeným zápisom predchádzajúcich dvoch výrazov, teda aj výrazu (4.7), a v tom je vlastne jej najväčší význam. Vektor pod integrálom sa označuje symbolom  $\mathbf{D}$  a v našej literatúre sa nazýva **vektor elektrickej indukcie  $\mathbf{D}$** , v anglickej "electric displacement  $\mathbf{D}$ " a v nemeckej "der elektrische Verschiebungsvektor  $\mathbf{D}$ ", teda

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad [\text{C} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (4.10)$$

Rozpaky, ktoré uvedené názvy vyvolávajú, sú úplne oprávnené. Vektor  $\mathbf{D}$  je súčtom vektora polarizácie  $\mathbf{P}$  a vektora intenzity poľa  $\mathbf{E}$  vynásobeného elektrickou konštantou poľa  $\epsilon_0$ . Aj skúsenému fyzikovi spôsobuje ťažkosť si pod týmto vektorom niečo konkrétneho predstaviť. Anglický názov, ktorý zaviedol ešte Maxwell, a podobne aj nemecký, vyjadrujú skutočnosť, že pri polarizácii dielektrika dochádza k "posunu" nábojov v rámci jedného atómu alebo molekuly v smere pôsobiaceho poľa. V starších učebniciach nájdete úporné snahy autorov vysvetľovať fyzikálny zmysel  $\mathbf{D}$  pomocou rôznych "ihlových" a "diskových" dutín v dielektriku, avšak bez presvedčivého úspechu. Jedno však tomuto vektoru nemožno uprieť, a to fakt, že pomocou neho sa dá napísať jednoduchá rovnica

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (4.11)$$

ktorá hovorí, že tok vektora elektrickej indukcie  $\mathbf{D}$  uzavretou plochou  $S$  sa rovná jednoducho tomu voľnému náboju, ktorý plocha uzatvára. Rovnica (4.11) je **zovšeobecnený Gaussov zákon pre dielektrikum v integrálnom tvare**. Vo vákuu, kde sa nemá čo posúvať, ani polarizovať,  $\mathbf{P} = 0$  a

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (4.12)$$

Tam prejde výraz (4.11) a odpovedajúce predchádzajúce výrazy na Gaussov zákon vo vákuu. Čoskoro tiež ukážeme, že v jednoduchých bežných dielektrikách sa vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{D}$  líšia iba konštantným rozmerovým súčiniteľom. Rozmer vektora  $\mathbf{D}$  je  $\text{C} \cdot \text{m}^{-2} = \text{A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}$  a súčasne je to jeho meracia jednotka. Vidíme, že je to rozmer plošnej hustoty nábojov.



Na margo užitočnosti vektora  $\mathbf{D}$  treba povedať, že on iba umožňuje opísať základné zákony elektromagnetizmu jednoduchými rovnicami, a preto mu netreba pripisovať väčší fyzikálny význam, než si zaslúži.

Rovnica (4.11) spolu s Gaussovou matematickou vetou nám ponúka možnosť vyjadrenia lokálnej vlastnosti poľa vektora  $\mathbf{D}$ , teda jeho divergenciu. Ak pripustíme, že náboj  $Q$  môže byť v objeme  $\tau$  uzavretom plochou  $S$  (teda aj v dielektriku) rozložený s nejakou priestorovou hustotou  $\rho$ , takže  $Q = \int_{\tau} \rho d\tau$ , potom užitím Gaussovej vety dostaneme hľadaný lokálny vzťah

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho} \quad (4.13)$$

Je to **zovšeobecnený Gaussov zákon** v dielektriku, jeho diferenciálna forma. Spolu s rovnicou (4.11) predstavuje jeden zo štyroch základných zákonov elektromagnetizmu, je to jedna z Maxwellových rovníc v najvšeobecnejšom tvare.

Dosadme teraz späť do posledného výrazu vyjadrenie vektora  $\mathbf{D}$  podľa (4.10) a vypočítajme z neho divergenciu vektora  $\mathbf{E}$ . Po úprave dostaneme

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

Podľa rozmeru čitateľa na pravej strane vidíme, že popri objemovej hustote voľného náboja tu vystupuje nejaká objemová hustota nábojov  $-\operatorname{div} \mathbf{P}$ . Nenulovú divergenciu vektora polarizácie môžu vyvolať iba viazané objemové náboje v nehomogénnom dielektriku (pozri úlohu 68), teda uvažovaný člen musí predstavovať objemovú hustotu viazaného náboja  $\rho_v$ , takže

$$\rho_v = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (4.14)$$

V bežných dielektrikách sa objemová hustota viazaného náboja rovná nule, o čom sa čitateľ môže presvedčiť napr. vyriešením úloh 69 alebo 72.

### 4.3 PERMITIVITA A ELEKTRICKÁ SUSCEPTIBILITA DIELEKTRIKA

V predchádzajúcich odsekoch sme zaviedli dve nové vektorové veličiny pre opis elektrických vlastností dielektrík – vektor  $\mathbf{P}$  a vektor  $\mathbf{D}$ . Našou ďalšou úlohou je nájsť vzájomný súvis medzi tromi veličinami  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{E}$ . Pre tento účel preskúmame elektrické pole v doskovom kondenzátore, do ktorého je zasunutá doska dielektrika so symetrickými vákuovými, prípadne vzduchovými štrbinami, ako na *obr. 4.7*. Predpokladajme, že kondenzátor bol nabitý a na jeho doskách je plošná hustota nábojov  $\pm\sigma$ . Ak zanedbáme okrajové efekty, potom v kondenzátore sú tri homogénne elektrické polia kolmé na roviny dosiek. Predovšetkým je to pole  $E_0$  v štrbine, ktoré budia náboje  $\pm\sigma$  rozložené na kovových doskách kondenzátora. Smeruje na obrázku dole a jeho veľkosť

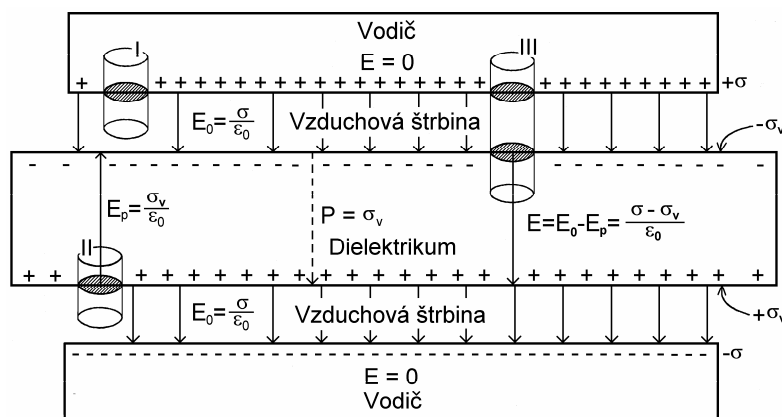
$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4.15)$$

plynie z aplikácie Gaussovho zákona na valcovú uzavretú plochu I. Také isté pole by bolo aj v prázdnom kondenzátore. Pod účinkom tohto poľa sa dielektrikum spolarizuje, vektor polarizácie  $\mathbf{P}$  v dielektriku smeruje dole (v štrbine  $\mathbf{P} = 0$ ), a na povrchu dielektrickej dosky vzniknú viazané náboje  $\pm\sigma_v$ . Viazané náboje vytvoria v dielektriku polarizačné pole  $E_p$ , ktorého veľkosť plynie z aplikácie Gaussovho zákona na valcovú uzavretú plochu II, smeruje nahor a má hodnotu

$$E_p = \frac{\sigma_v}{\epsilon_0} \quad (4.16)$$

Výsledné elektrické pole  $E$  v dielektriku je dané superpozíciou polí podľa výrazov (4.15) a (4.16). Aplikáciou Gaussovho zákona na uzavretú plochu III dostaneme

$$E = E_0 - E_p = \frac{\sigma - \sigma_v}{\epsilon_0} < E_0 \quad (4.17)$$



Obr. 4.7

Vidíme, že **intenzita elektrického poľa v dielektriku je skutočne menšia ako vo vákuu**, v súhlase s naším tvrdením v predchádzajúcom odseku. Túto skutočnosť zistil už M. Faraday v roku 1837, pri meraní napätia na kondenzátore s dielektrikom a bez neho. Pomer intenzity poľa vo vákuu a v dielektriku

$$\epsilon_r = \frac{E_0}{E} = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_v} > 1 \quad (4.18)$$

je pre obyčajné lineárne homogénne a izotropné dielektriká bezrozmerná makroskopická "konštanta" závislá od mnohých faktorov, ako je teplota, frekvencia poľa, tlak atď. a nazýva sa **relatívna permitivita** dielektrika. Zavedením relatívnej permitivity, ako

materiálovej konštanty dielektrík, sa analýza polí v látkach neobyčajne zjednodušuje. Pole v dielektriku

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (4.19)$$

ako vidíme, možno vyjadriť iba pomocou voľných nábojov, ak elektrickú konštantu poľa  $\varepsilon_0$  nahradíme konštantou

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad [\text{F.m}^{-1}] \quad (4.20)$$

ktorú nazývame **permitivita dielektrika**. Teda

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (4.21)$$

čo je vzťah formálne podobný vzťahu (4.15). Pomocou permitivity konečne možno vyjadriť aj vektor polarizácie prostredníctvom intenzity poľa. Využitím vzťahov (4.6), (4.18) a (4.19) dostaneme pre vektor polarizácie veľkosť

$$P = \sigma_v = \sigma \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) = (\varepsilon - \varepsilon_0)E = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

Vektor polarizácie  $\mathbf{P}$  má smer budiaceho poľa  $\mathbf{E}$ , takže možno napísať aj vektorový vzťah

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E} \quad (4.22)$$

kde

$$\kappa = \varepsilon_r - 1 \quad (4.23)$$

je ďalšia bezrozmerná materiálová konštantá nazývaná **elektrická susceptibilita**, ktorá v prípade homogénnych izotropných materiálov je kladné číslo. Podľa vzťahu (4.22) je vektor polarizácie úmerný vektoru intenzity elektrického poľa, a to platí pre bežné dielektriká až takmer po hranicu ich elektrickej pevnosti (po hranicu elektrického prierazu).

Nakoniec aj vektor elektrickej indukcie možno vyjadriť cez intenzitu budiaceho poľa. Ak vo výraze (4.10) dosadíme za  $\mathbf{P}$  podľa výrazu (4.22) dostaneme

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (4.24)$$

V obyčajných dielektrikách vzťah medzi  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{D}$  je skutočne neobyčajne jednoduchý lineárny vzťah. Stojí za povšimnutie, že v uvažovanom kondenzátore vektor elektrickej indukcie má všade veľkosť

$$D = \sigma$$

teda aj v štrbine, aj v dielektriku, a smeruje od kladnej kovovej dosky k zápornej. Vektor  $\mathbf{D}$  vytvára v jednoduchom dielektriku formálne rovnaké pole ako pole vektora  $\mathbf{E}$ . Tak

napríklad na rozhraní vodiča s dielektrikom je vektor  $\mathbf{D}$  kolmý na povrch vodiča a jeho veľkosť je  $D_n = \sigma$ , kde  $\sigma$  je plošná hustota voľného náboja na vodivej ploche. Z toho plynie, že aj vektor  $\mathbf{E}$  je kolmý na povrch a jeho hodnota na povrchu je

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (4.25)$$

čo je vlastne Coulombova veta pre nabitý vodič ponorený v dielektriku. V spomínaných obyčajných dielektrikách aj Gaussov zákon možno napísať pre tok intenzity poľa  $\mathbf{E}$  v dôverne známom integrálnom tvare

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon} \quad (4.26)$$

alebo v diferenciálnom tvare

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (4.27)$$

Tieto výrazy sa odlišujú od výrazov pre vákuum iba vzájomnou zámennou  $\varepsilon_0$  a  $\varepsilon$ .

## 4.4 DIELEKTRICKÉ MATERIÁLY

Príroda nám v svojej nekonečnej mnohotvárnosti poskytuje aj materiály, ktoré nie sú také jednoduché (a to je na nej fascinujúce!). Čitateľovi je možno známe, že najprirodzenejší stav čistých minerálnych látok v prírode je kryštalický stav, na ktorý sa látky menia v priebehu vekov. Sklenené vázy zo staroegyptských hrobiek sa v priebehu tisícročí zmenili na kryštalové. Očarujú nás krásne kryštály kremíka  $\text{SiO}_2$  nazývané kremeň, ktoré v podzemí rástli do svojich bizarných tvarov milióny rokov. Okrem neho sú známe nespočetné množstvá iných kryštalických nerastov, a dnes aj umelo pestovaných kryštálov. Tieto dielektrické látky sú vysoko anizotropné vo svojich mechanických, ale aj v elektrických vlastnostiach, takže majú v rôznych smeroch rôzne polarizačné vlastnosti. Je len prirodzené, že elektrické vlastnosti takých látok nemôžu byť vyjadrené púhym číslom. Smerová závislosť (anizotropia) elektrických vlastností sa namiesto čísla vyjadruje tenzorom permitivity (alebo susceptibility) druhého rádu.

Niektoré látky majú objemovú nehomogenitu a tá sa prejaví funkčnou priestorovou závislosťou permitivity. Sú aj také látky, ktorých permitivita závisí od intenzity elektrického poľa, nazývané nelineárne, a nakoniec látky s elektrickou hysterézou, také, že ich polarizačný stav pri rovnakom budiacom elektrickom poli môže byť rôzny. Pre také látky napr.  $\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E})$  nie je to isté ako  $\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E}$ , t. j.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} \neq \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E}$$

Vzt'ahy (4.25) až (4.27) pre takéto látky samozrejme neplatia alebo platia obmedzene. Pri nich treba vychádzať zo všeobecných formulácií Gaussovho zákona (4.11) a (4.13). V tabuľke 4 uvádzame klasifikáciu dielektrík podľa štruktúry a typu polarizácie.

**Tabuľka 4**

| Typ dielektrika  | Permitivita $\epsilon_r$      | Typ polarizácie  |
|--|-------------------------------|--|
| 1. Plynné dielektriká  | 1,000 2 – 1,006               | elektrónová  |
| 2. Nepochárne kvapaliny a tuhé dielektriká neobsahujúce ióny | 1,8 – 2,3                     | detto  |
| 3. Polárne kvapaliny polárne polyméry                        | 3 – 81                        | elektrónová a orientačná   |
| 4. Sklá<br>Iónové kryštály<br>Dipólové kryštály              | 3 – 20<br>4 – 300<br>10 – 300 | elektrónová, iónová pružná polarizácia, elektrónová a orientačná |
| 5. Iónové kryštály s poruchami                               | 600 – 3 000                   | elektrónová, iónová pružná polarizácia                           |
| 6. Feroelektriká (seignetoelektriká)                         | 200 – 100 000                 | spontánna polarizácia  |

**Komentár k tabuľke 4:** Iónové kryštály sú kryštály s prevažne iónovým charakterom chemických väzieb. Typickými reprezentantmi sú halogenidy prechodných prvkov, ako napr. NaCl, LiCl, KBr a iné. Iónové kryštály s poruchami majú porušenú kryštalickú mriežku chýbajúcimi alebo cudzími atómami. Seignetoelektriká, alebo dnes častejšie nazývané feroelektriká, sú materiály s vysokou relatívnou permitivitou spôsobenou prítomnosťou samovoľne (spontánne) spolarizovaných oblastí (domén) existujúcich bez prítomnosti elektrického poľa. V tomto ohľade sa feroelektriká podobajú na feromagnetiká. O typoch polarizácie uvedených v tabuľke bude pojednané v odseku 4.8.

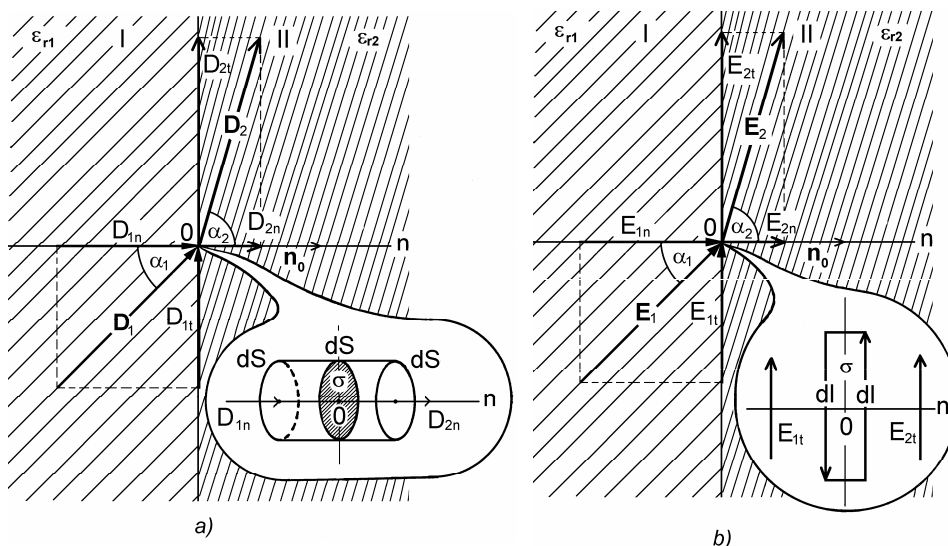
**Tabuľka 5**

| Materiál         | Permitivita $\epsilon_r$ | Elektrická pevnosť $\times 10^6$ V/m |
|------------------|--------------------------|--------------------------------------|
| Vákuum           | 1                        | $\infty$                             |
| Vzduch           | 1,000 59                 | 3                                    |
| Voda             | 81                       | –                                    |
| Etylalkohol      | 26                       | –                                    |
| Papier           | 3,5                      | 14                                   |
| Sľuda            | 5,4                      | 160                                  |
| Jantár           | 2,7                      | 90                                   |
| Porcelán         | 6,5                      | 4                                    |
| Mramor           | 7 – 8                    | 3,5 – 16                             |
| Kremeň (tavený)  | 3,8                      | 47 – 67                              |
| Sklo (pyrex)     | 4,5                      | 13                                   |
| Bakelit          | 4,8                      | 12                                   |
| PMMA (plexisklo) | 2,7 – 3,2                | 11 – 13                              |
| Polyetylén       | 2,3                      | 50                                   |
| Polystyrén       | 2,6                      | 25                                   |
| Teflon           | 2,1                      | 60                                   |
| Neoprén          | 6,9                      | 12                                   |
| Kryštál NaCl     | 5,9                      | 15                                   |
| TiO              | 100                      | 6                                    |

V tabuľke 5 sú uvedené vybrané dielektrické materiály, ich relatívne permitivity a elektrické pevnosti. Pod elektrickou pevnosťou materiálu rozumieme maximálnu prípustnú intenzitu elektrického poľa, nad ktorou sa v materiále zvyšuje nebezpečie elektrického prierazu. Údaje platia pre izbovú teplotu (cca pre 300 K), pre statické polia a boli prevzaté z Handbook of Chemistry and Physics, Cleveland (Ohio), 1955. Permitivity niektorých materiálov v striedavých elektrických poliach sú uvedené v tabuľke 17.

## 4.5 ELEKTRICKÉ POLE NA ROZHRANÍ DVOCH PROSTREDÍ. HRANIČNÉ PODMIENKY

Pri výpočte elektrostatického poľa v dielektriku treba zvláštnu pozornosť venovať poľu na rozhraní dvoch dielektrík a na rozhraní vodiča s dielektrikom. Tieto okrajové alebo hraničné podmienky, treba stanoviť aj s ohľadom na riešenie zložitých teoretických problémov elektrostatiky s využitím Laplaceovej rovnice. Pri prechode z jedného prostredia do druhého, keď sa skokom mení relatívna permitivita materiálu z hodnoty  $\epsilon_{r1}$  na hodnotu  $\epsilon_{r2}$ , sa budú skokom meniť aj vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{D}$ , a to ich veľkosti aj smery.



Obr. 4.8

Uvažujme rozhranie dvoch dielektrík v bode 0 a v jeho nekonečne malom okolí na obr. 4.8a, v ktorom je nenulové elektrické pole dané vektormi  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  na jednej a druhej strane rozhrania, a im zodpovedajúce vektory  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  a  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$ . Pre všeobecnosť predpokladajme, že na rozhraní je rozložený voľný plošný náboj s hustotou  $\sigma$ . Nech je  $\mathbf{n}$  normála k rozhraniu a  $\mathbf{n}_0$  jednotkový vektor normály smerujúci z prostredia I do prostredia II. Rozložme v bode 0 v oblasti I vektor  $\mathbf{D}_1$  na normálovú zložku  $D_{1n}$  pozdĺž normály k rozhraniu a tangenciálnu zložku  $D_{1t}$ . Podobne v tom istom bode sprava, v oblasti II, rozložme  $\mathbf{D}_2$  na zložky  $D_{2n}$  a  $D_{2t}$ . Ak okolo bodu 0 vytvoríme nekonečne

malý valček so základňami  $dS$  (valček má nulovú dĺžku), môžeme naň aplikovať zovšeobecnený Gaussov zákon. Pre normálovú zložku vektora  $\mathbf{D}$  získame vzťah

$$D_{2n} dS - D_{1n} dS = \sigma dS$$

alebo jednoducho

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (4.28)$$

Aplikácia rovnakého postupu na tangenciálnu zložku nevedie k výsledku, treba sa pokúsiť o dráhový integrál po uzavretej dráhe. Lenže dráhový integrál pre vektor  $\mathbf{D}$  nie je určený. Našťastie, dráhový integrál intenzity elektrického poľa  $\mathbf{E}$  po uzavretej dráhe nezávisí od prostredia, a aj v dielektriku sa rovná nule. Aplikujme teda tento princíp na nekonečne malú obdĺžnikovú slučku na obr. 4.8b s výškou  $dl$  tesne na rozhraní. Pre tangenciálne zložky vektora  $\mathbf{E}$  po uzavretej slučke (ktorej šírka je v skutočnosti nulová) môžeme napísať

$$E_{2t} dl - E_{1t} dl = 0$$

alebo

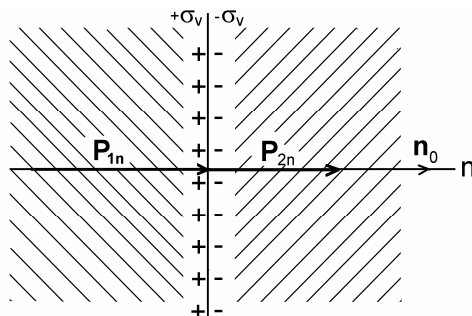
$$E_{2t} - E_{1t} = 0 \quad (4.29)$$

Rovnice (4.28) a (4.29) patria spolu, napíšeme ich vo všeobecnom vektorovom tvare

$$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \quad (4.30)$$

$$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

a nazveme ich **hraničné** alebo **okrajové podmienky** pre vektory elektrického poľa. Ich zvláštnosťou je, že platia úplne univerzálne v ľubovoľnom elektromagnetickom poli. Podľa nich sa rozdiel normálových (kolmých) zložiek vektora elektrickej indukcie rovná plošnému voľnému náboju  $\sigma$  na rozhraní a tangenciálne (dotyčnicové) zložky sú na oboch stranách rozhrania rovnaké. Čoskoro preskúame niektoré zaujímavé špeciálne prípady.



Obr. 4.9

Nuž, a ako sa správa na rozhraní dvoch dielektrík vektor polarizácie? Túto otázku sme vlastne zodpovedali v odseku 4.1, vzťahom (4.6). Ak reznou plochou v dielektriku je skutočné rozhranie dvoch prostredí, ako napr. na obr. 4.9, potom s využitím vzťahu (4.6) pre normálové zložky vektora polarizácie platí

$$P_{2n} - P_{1n} = \sigma_{v1} - \sigma_{v2} = -\sigma_v \quad (4.31)$$

kde  $\sigma_v = \sigma_{v2} - \sigma_{v1}$  je výsledná plošná hustota viazaného náboja na rozhraní. Vidíme, že ak  $\sigma_{v1} = \sigma_{v2}$ , potom aj  $P_{1n} = P_{2n}$ , a teda nejde o skutočné dielektrické rozhranie, ide iba o myslenú reznú plochu dielektrikom.

Posúďme dva špeciálne prípady:

1. **Na rozhraní nie sú žiadne voľné náboje**, teda  $\sigma = 0$ . V tom prípade prvú z okrajových podmienok môžeme napísať v tvare

$$\varepsilon_{r2}E_{2n} = \varepsilon_{r1}E_{1n}$$

Ak druhú okrajovú podmienku vydelíme touto rovnicou a uvážime, že

$$\frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \operatorname{tg} \alpha_1 \qquad \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = \operatorname{tg} \alpha_2$$

môžeme napísať

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \quad (4.32)$$

Rovnica (4.32) sa nazýva **rovnica lomu elektrických siločiar**. V danom prostredí uhol lomu je úmerný relatívnej permitivite dielektrika ( $\operatorname{tg} \alpha \sim \varepsilon_r$ ).

2. **Jedno z prostredí**, napr. prostredie I, **je vodič**. Vo vodiči sa intenzita poľa rovná nule, teda  $D = E = 0$  a tiež  $E_{1t} = 0$ . Z toho okamžite plynie, že  $E_{2t} = 0$ , t. j. na povrchu vodiča sa tangenciálna zložka intenzity poľa rovná nule. Je to známy fakt z kapitoly 3 venovanej vodičom. Z prvej okrajovej podmienky plynie, že

$$D_{2n} = \sigma \quad (4.33)$$

čo však tiež nie je nič nového – je to Coulombova veta v dielektriku [pozri vzťah (4.25)]. Tieto závažné fakty a ich súvis s hraničnými podmienkami svedčia o tom, že hraničné podmienky sú efektívnym nástrojom teórie elektromagnetického poľa.

## 4.6 ENERGIA ELEKTRICKÉHO POĽA V DIELEKTRIKU

Pri výpočte energie nábojov v dielektriku a energie elektrického poľa si treba všimnúť niektoré skutočnosti, ktoré výpočet energie komplikujú. Najprv treba posúdiť otázku síl, ktoré pôsobia medzi dvoma bodovými nábojmi v dielektriku. Treba si uvedomiť, že dielektrikum pozostáva tiež z nábojov, a preto otázka o silovom pôsobení dvoch vybraných nábojov sa stáva veľmi problematickou. V mnohých knihách sa pre silové pôsobenie takýchto nábojov bez uváženia napíše modifikovaný Coulombov zákon

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{q_1q_2}{r^3} \mathbf{r}$$



v ktorom  $\epsilon_r$  má charakterizovať prítomnosť prostredia. Autori často zabudnú na skutočnosť, že  $\epsilon_r$  je makroskopická konštanta, ktorá v mikrosвете nemá nijaký význam. Taký zákon nemožno použiť napr. pre silové pôsobenie dvoch blízkyh iónov v látke. Možno ho snáď použiť pre nejaké relatívne veľké nabité gule ponorené v kvapalnom dielektriku a umiestnené vo veľkej vzdialenosti od seba, inak povedané, pre makroskopické systémy. Sila vzájomného pôsobenia medzi guľami je potom  $\epsilon_r$ -krát menšia ako sila medzi tými istými guľovými nábojmi vo vákuu. V tuhých látkach Coulombov zákon vôbec nevystihuje silové pôsobenie medzi guľami, pretože neberie do úvahy rôzne mechanické tlaky, prípadne točivé momenty.

Podobný, nič nehovoriaci vzťah, je aj výraz pre energiu dvoch bodových nábojov v dielektriku. V interakcii nie sú iba dva vybrané náboje, ale všetky náboje v okolí bez ohľadu na to, či ich považujeme za voľné, alebo tie, ktoré patria dielektriku. Všetky výrazy, ktoré sme napísali pre energiu sústavy bodových nábojov platia vtedy, ak do výpočtu zahrnieme aj tie náboje, ktoré patria k dielektriku, a samozrejme vzťahy už netreba korigovať žiadnou konštantou  $\epsilon_r$ .

Keďže otázka energie nabitého telesa na mikroskopickej úrovni je veľmi zložitá, radšej sa vzdáme presného vyjadrenia energie sústavy bodových nábojov v látke a pokúsime sa o iný prístup. Budeme predpokladať, že dielektrikum je spojité kontinuum, v ktorom je definovaná objemová hustota  $\rho$  voľných nábojov rozložených v nejakom objeme  $\tau$ . Pri takomto pohľade na dielektrikum ho možno charakterizovať permitivitou ako štatistickou veličinou, ktorá je zviazaná so strednou intenzitou poľa voľných nábojov v látke. Vydeme zo vzťahu (3.32) pre energiu spojitého rozloženia nábojov, ktorý platí aj v dielektriku. Nech  $V$  je stredný potenciál v uvažovanom bode objemu  $\tau$ , potom

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau$$

kde  $\rho$  je hustota voľných nábojov.

Hustotu voľných nábojov  $\rho$  vyjadříme zovšeobecneným Gaussovým zákonom  $\rho = \text{div} \mathbf{D}$  a využijeme operátorovú identitu

$$\text{div}(V\mathbf{D}) = V \text{div} \mathbf{D} + (\text{grad } V) \cdot \mathbf{D}$$

Postupom podobným ako v odseku 3.7.2 dostaneme pre energiu výraz

$$W = \frac{1}{2} \left( \oint_{S \rightarrow \infty} V\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau \right)$$

Prvý integrál sa rovná nule z rovnakých dôvodov ako vo vákuu, takže konečný výraz pre energiu je tvaru

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau = \int_{\tau \rightarrow \infty} w_{el} d\tau \quad (4.34)$$

$$\text{Veličina} \quad w_{el} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \quad [\text{J} \cdot \text{m}^{-3}] \quad (4.35)$$

je hustota energie elektrického poľa voľných nábojov v dielektriku, aj mimo neho. Výraz platí všeobecne pre všetky prostredia včítane vákuu. Vo vákuu, kde  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , prejde na tvar (3.35). V prípade lineárnych izotropných a homogénnych dielektrík, v ktorých  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , nadobudne tvar

$$w_{el} = \frac{\epsilon E^2}{2} \quad (4.36)$$

V tomto tvare sa hustota energie vyjadruje najčastejšie, pretože väčšina v praxi sa vyskytujúcich dielektrík sú jednoduché materiály. Avšak výraz (4.35) je najvšeobecnejší, pretože platí ako pre bežné, tak aj pre nelineárne a anizotropné látky, v ktorých vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{D}$  nemusia mať rovnaký smer.

Na energiu elektrického poľa v dielektriku je možný ešte iný pohľad, ktorý zahŕňa aj náboje samotného dielektrika, teda všetky náboje, uložené vo vákuu. V tom prípade analýza, podobná už uvedenej, vedie k výrazu pre hustotu energie v tvare

$$w_{el} = \frac{\epsilon_0 E_{cel}^2}{2}$$

kde  $E_{cel}$  je celková intenzita poľa v priestore budená voľnými aj viazanými nábojmi – jednoducho všetkými nábojmi v priestore. Je zrejmé, že táto hustota energie je väčšia ako hustota daná výrazmi (4.35) alebo (4.36), pretože zahŕňa aj vnútornú energiu skrytú v samotnom dielektriku.

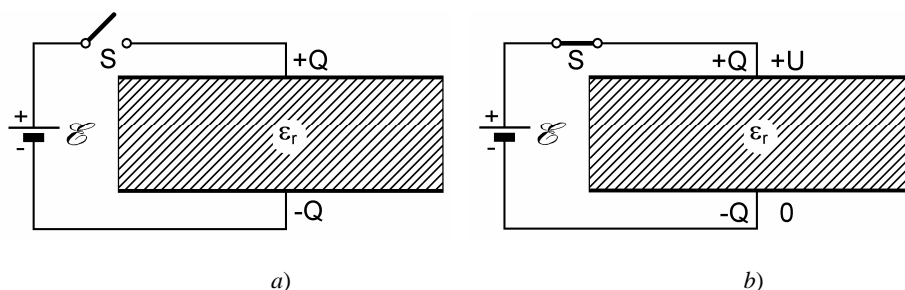
## 4.7 KONDENZÁTOR S DIELEKTRIKOM. PREMENY ENERGIE V KONDENZÁTORE A SILY PÔSOBIACE NA DIELEKTRIKUM

Nabíjanie kondenzátora zo zdroja elektromotorického napätia je zložitý proces, na ktorom sa zúčastňuje odpor spojovacích vodičov, ich indukčnosť, ako aj vodivostné vlastnosti dielektrika medzi doskami kondenzátora. Takýto proces sa vyznačuje strmým časovým nábehom napätia na kondenzátore a následným oscilačným priebehom s rýchlym útlmom na hodnotu napätia zdroja. Tento proces nazývame prechodový jav a budeme sa ním zaoberať neskôr. V tomto odseku nás budú zaujímať zmeny energie kondenzátora, ku ktorým dôjde v prípade, ak sa dielektrikum z kondenzátora vytiahne (odstráni), alebo naopak, sa do neho vloží.

Predpokladajme teda, že nejaký kondenzátor, najlepšie doskový, ktorý má bez dielektrika kapacitu  $C_0$ , bol naplnený homogénnym dielektrikom s permitivitou  $\epsilon_r$  a bol nabitý do ustáleného stavu zo zdroja elektromotorického napätia  $\mathcal{E} = U$ . Budeme sledovať, ako sa mení energia kondenzátora, ak dielektrikum spomedzi dosiek vyberieme. Pritom budeme rozlišovať dva prípady, ktoré sú zobrazené na obr. 4.10 a, b.

Prípád prvý je znázornený na obr. 4.10a. Kondenzátor bol zo zdroja nabitý a zdroj bol potom od neho spínačom  $S$  odpojený. Na kondenzátore, ktorého kapacita  $C = \epsilon_r C_0$  je náboj veľkosti  $Q$ , ktorý zostáva konštantný, bez ohľadu na to, či sa dielektrikum medzi doskami nachádza, alebo nie. Napätie na kondenzátore sa však bude meniť. Ak je na začiatku na kondenzátore napätie

$$U = \frac{Q}{\epsilon_r C_0}$$



Obr. 4.10

po odstránení dielektrika kapacita kondenzátora klesne na hodnotu  $C_0$  a pri konštantnom náboji musí napätie stúpnúť na hodnotu

$$U' = \frac{Q}{C_0} = \epsilon_r U > U$$

Začiatočná energia kondenzátora s dielektrikom sa dá vyjadriť výrazmi

$$W_{zac} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_r C_0} = \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 U^2$$

a jeho konečná energia po vytiahnutí dielektrika

$$W_{kon} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} = \frac{1}{2} \epsilon_r C U^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r^2 C_0 U^2$$

Rozdiel konečnej a začiatočnej energie  $\Delta W$  v súhlase so zákonom zachovania energie udáva prácu, ktorá bola na kondenzátore vykonaná. Tento rozdiel je daný výrazom

$$\Delta W = W_{kon} - W_{zac} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} = \epsilon_r (\epsilon_r - 1) \frac{1}{2} C_0 U^2 > 0 \quad (4.37)$$

Kladný rozdiel konečnej a začiatočnej energie svedčí o tom, že pri vyberaní dielektrika z kondenzátora bola na ňom vonkajšou silou vykonaná práca.

Prípád druhý je znázornený na obr. 4.10b. Pri vyberaní dielektrika je zdroj trvale pripojený ku kondenzátoru. Na kondenzátore zostáva stále rovnaké napätie  $U = \mathcal{E}$ , avšak náboj na ňom sa bude meniť. Na začiatku je na kondenzátore náboj

$$Q = \varepsilon_r C_0 U$$

a na konci, po odstránení dielektrika, náboj

$$Q' = C_0 U = \frac{Q}{\varepsilon_r} < Q$$

Začiatočná energia kondenzátora

$$W_{zac} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_r C_0}$$

a konečná, po vybratí dielektrika

$$W_{kon} = \frac{1}{2} C_0 U^2 = \frac{1}{2} \frac{C U^2}{\varepsilon_r} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_r^2 C_0} = \frac{W_{zac}}{\varepsilon_r}$$

Rozdiel konečnej a začiatočnej energie

$$\Delta W = W_{kon} - W_{zac} = \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \frac{1}{2} C U^2 = (1 - \varepsilon_r) \frac{1}{2} C_0 U^2 < 0$$

Napodiv, po vybratí dielektrika je energia kondenzátora nižšia ako na začiatku, a na prvý pohľad sa zdá, že kondenzátor vykonal prácu  $\Delta W$  tým, že dielektrikum "vypudil". Experiment však ukazuje, že dielektrikum je do kondenzátora vtáhané! Ak sa na náš systém pozrieme pozornejšie, vidíme, že je tu ešte jeden objekt, ktorý sa podieľa na energetických premenách, a tým je zdroj. Počas vyberania dielektrika sa na doskách kondenzátora znižuje náboj tým, že prechádza znovu do zdroja. Celkový náboj, ktorý v procese odstraňovania dielektrika prejde do zdroja je

$$\Delta Q = Q - Q' = (\varepsilon_r - 1) C_0 U$$

Ak je zdrojom akumulátor, tak týmto nábojom sa akumulátor pri konštantnom napätí  $U$  nabije, a vykoná sa na ňom práca

$$\Delta A = \Delta Q U = (\varepsilon_r - 1) C_0 U^2$$

Túto prácu vykonáva:

1. vybijajúci sa kondenzátor (na účet poklesu jeho energie  $\Delta W$ ),
2. vonkajšia sila, ktorá vyťahuje dielektrikum a vykoná prácu  $A_v$ .

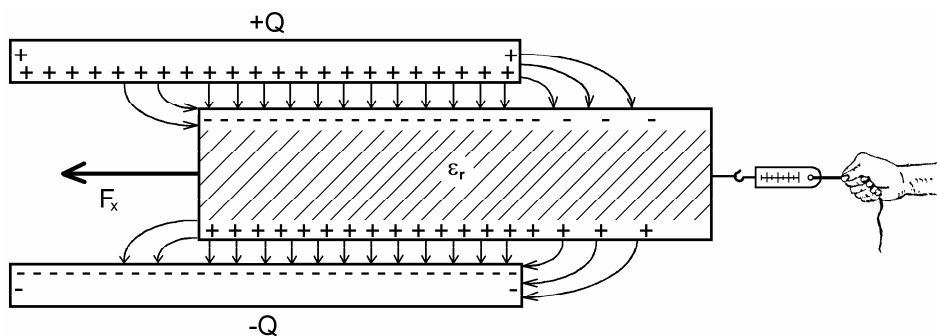
Rovnica energetickej rovnováhy teda znie:

$$\Delta W + A_v = \Delta A$$

z čoho práca vonkajšej sily

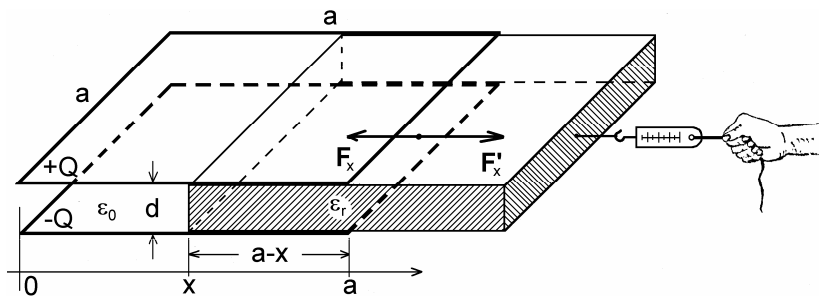
$$A_v = \Delta A - \Delta W = (\varepsilon_r - 1) \frac{1}{2} C_0 U^2 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{1}{2} C U^2 > 0 \quad (4.38)$$

Kondenzátor naozaj vykonal prácu – spolu s vonkajšou silou nabili zdroj.



Obr. 4.11

Na záver našich energetických úvah sa natíska otázka o silách, ktoré pôsobia na dielektrikum pri jeho vyťahovaní z kondenzátora. Táto otázka sa ukazuje ako neobyčajne zložitá. Silu pôsobiacu na dielektrikum možno interpretovať ako silu, ktorá pôsobí na dipóly dielektrika. V odseku 2.9.3 sme ukázali, že na dipól pôsobí translačná sila, ak sa nachádza v nehomogénnom elektrickom poli [pozri výraz (2.122), prípadne (2.123)]. Teda na dielektrikum pôsobí sila iba vtedy, ak sa nachádza v nehomogénnom poli. Ak sa pozrieme na obr. 4.11, na ktorom je dielektrikum z kondenzátora povytiahnuté, vidíme, že na časť dielektrika medzi doskami kondenzátora pole nepôsobí žiadnou silou, lebo je homogénne. Na časť dielektrika vonku, ďaleko od okraja kondenzátora, elektrická sila takisto nepôsobí, pretože tam je pole nulové. Oblasť dielektrika na hrane dosiek kondenzátora sa nachádza v silne nehomogénnom poli, a práve toto pole, ktoré sme doteraz ignorovali ako podružný okrajový efekt, má silový účinok na dielektrikum. Samozrejme, že ak je celé dielektrikum medzi doskami kondenzátora, žiadna sila naň nepôsobí. Teraz vidíme, prečo vznikajú také veľké problémy pri určení sily, ktorá vťahuje dielektrikum medzi dosky kondenzátora – veď nevieme určiť ani jej pôsobisko. Našťastie v takomto geometricky jednoduchom a definovanom prípade vieme silu určiť z princípu virtuálnej práce diferenciaciou energie podľa súradníc. Ukážeme ako!



Obr. 4.12

Na obr. 4.12 je zobrazený doskový kondenzátor s plochou dosiek  $S = a^2$ , a ich vzdialenosťou  $d$ , ktorý má bez dielektrika kapacitu  $C_0 = \epsilon_0 a^2/d$ . Kondenzátor je nabitý nábojom  $\pm Q$  a od zdroja odpojený. Medzi jeho dosky možno zasúvať dielektrikum. Ak je dielektrikum s permitivitou  $\epsilon_r$  zasunuté medzi doskami do hĺbky  $a - x$ , jeho kapacita

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 [ax + \varepsilon_r a(a-x)]}{d} = \frac{\varepsilon_0 a [x(1-\varepsilon_r) + \varepsilon_r a]}{d}$$

Energia kondenzátora ako funkcia  $x$  je potom

$$W(x) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a [x(1-\varepsilon_r) + \varepsilon_r a]} = \frac{Q^2 a}{2C_0 [x(1-\varepsilon_r) + \varepsilon_r a]}$$

Sila pôsobiaca na dielektrikum je daná zápornou deriváciou energie podľa súradnice  $x$ , teda

$$F_x = -\frac{dW(x)}{dx} = \frac{Q^2 a(1-\varepsilon_r)}{2C_0 [x(1-\varepsilon_r) + \varepsilon_r a]^2} < 0 \quad (4.39)$$

Celková vykonaná práca  $A$  proti elektrickej sile  $F_x$  pri vyberaní dielektrika z kondenzátora je daná integrálom sily  $F_x' = -F_x$  pre  $x$  od 0 (dielektrikum je vo vnútri) po  $a$  (dielektrikum je vonku), teda

$$A = -\int_0^a F_x dx = \frac{Q^2 a(\varepsilon_r - 1)}{2C_0} \int_0^a \frac{dx}{[x(1-\varepsilon_r) + \varepsilon_r a]^2} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0}$$

čo sa zhoduje s rozdielom konečnej a začiatkovej energie kondenzátora podľa výrazu (4.37).

Čitateľ si určite všimol isté slabiny našej analýzy. Výraz (4.39) pre silu, ako je zjavné, je nenulový aj pre  $x = 0$ , t. j. v prípade, keď dielektrikum je úplne zasunuté medzi dosky. Túto anomáliu možno vysvetliť matematickou nespojitosťou výrazu  $C(x)$  v bode  $x = 0$ , kde nemáme právo počítat deriváciu zadanej funkcie  $W(x)$ , a teda ani silu  $F_x$  zo vzťahu (4.39). Rovnaký problém vzniká pri  $x = a$ , kde je síce sila naozaj nenulová, pretože aj na okraji kondenzátora a za ním je nenulové a nehomogénne pole, ale sila nie je daná hodnotou plynúcou z výrazu (4.39). Ten platí iba pre  $0 < x < a$ .

V súvislosti s analyzovanou problematikou nakoniec odporúčam čitateľovi riešiť úlohy 77 až 86.

Na záver tohoto odseku sú v tabuľke 6 uvedené všetky výrazy, ktoré sa môžu vyskytnúť v súvislosti s elektrickými poľami v doskových kondenzátoroch s dielektrikami, alebo bez nich. Kondenzátory majú plochy dosiek  $S$  a vzdialenosť dosiek  $d$ , dielektrikum má relatívnu permitivitu  $\varepsilon_r$ . V ľavej časti tabuľky dvojica kondenzátorov nesie konštantný náboj, vpravo je dvojica s konštantným napätím. Na konci tabuľky sú uvedené dva číselné príklady, ktoré majú čitateľovi priblížiť numerické súvislosti. Všetky vektory poľa ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{P}$ ) v kondenzátoroch majú rovnaký smer – od kladnej elektródy k zápornej.

Tabuľka 6

| Kondenzátor bez dielektrika  | Kondenzátor s dielektrikom   | Kondenzátor bez dielektrika                               | Kondenzátor s dielektrikom   |
|--|--|---|--|
| $Q = \text{konšt.}$  |  | $U = \text{konšt.}$                                       |  |
| $D_0 = \frac{Q}{S}$  | $D = \frac{Q}{S} = D_0$  | $E_0 = \frac{U}{d}$                                       | $E = \frac{U}{d} = E_0$  |
| $E_0 = \frac{D_0}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$                            | $E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{E_0}{\epsilon_r} < E_0$        | $D_0 = \epsilon_0 E_0 = \epsilon_0 \frac{U}{d}$           | $D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U}{d} = \epsilon_r D_0 > D_0$ |
| $U_0 = E_0 d = \frac{Q}{\epsilon_0 S} d$   | $U = Ed = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{U_0}{\epsilon_r} < U_0$                        | $Q_0 = D_0 S = \epsilon_0 \frac{U}{d} S$                  | $Q = DS = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U}{d} S = \epsilon_r Q_0 > Q_0$                    |
| $C_0 = \frac{Q}{U_0} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$                                     | $C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = \epsilon_r C_0 > C_0$                       | $C_0 = \frac{Q_0}{U} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$            | $C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = \epsilon_r C_0 > C_0$             |
| Polarizácia nulová   | $P = \sigma_v = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{Q}{S}$ | Polarizácia nulová  | $P = \sigma_v = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{U}{d}$ |
| Viazaný náboj nulový   | $Q_v = \sigma_v S = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) Q < Q$                                   | Viazaný náboj nulový                                      | $Q_v = \sigma_v S = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{U}{d} S < Q$                       |
| Numerické hodnoty pre: $S = 1 \text{ m}^2$ , $d = 1 \text{ mm}$ , $\epsilon_r = 2$ |  |   |  |
| $Q = 8,854 \cdot 10^{-7} \text{ C}$  |  | $U = 100 \text{ V}$                                       |  |
| $D_0 = 8,854 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$                          | $D = 8,854 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$  | $E_0 = 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$                | $E = 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$   |
| $E_0 = 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$   | $E = 5 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$   | $D_0 = 8,854 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$ | $D = 17,71 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$                                  |
| $U_0 = 100 \text{ V}$  | $U = 50 \text{ V}$   | $Q_0 = 8,854 \cdot 10^{-7} \text{ C}$                     | $Q = 17,71 \cdot 10^{-7} \text{ C}$  |
| $C_0 = 8,854 \text{ nF}$   | $C = 17,71 \text{ nF}$   | $C_0 = 8,854 \text{ nF}$                                  | $C = 17,71 \text{ nF}$   |
| $P_0 = 0$  | $P = 4,43 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$   | $P_0 = 0$   | $P = 8,854 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$                                  |
| $Q_{v0} = 0$   | $Q_v = 4,43 \cdot 10^{-2} \text{ C}$   | $Q_{v0} = 0$  | $Q_v = 8,854 \cdot 10^{-7} \text{ C}$  |

## 4.8 MIKROFYZIKÁLNA PODSTATA POLARIZÁCIE DIELEKTRIKA

V našom doterajšom výklade elektrických vlastností látok sme možno málo zdôrazňovali skutočnosť, že elektrické polia v látkach, ktoré sme považovali za statické, sú v skutočnosti stredné hodnoty priestorovo a časovo veľmi zložitých a rýchlo sa meniacich polí, zodpovedajúcich atomárnej, resp. molekulárnej štruktúre prostredia. Látku sme považovali za kontinuum, ktorého elektrické makroskopické vlastnosti sme opísali permitivitou a susceptibilitou. Tieto parametre látok sú dnes dobre merateľné, veď stačí iba zmerať kapacitu kondenzátora naplneného dielektrikom a bez neho, a podiel výsledkov merania dáva relatívnu permitivitu dielektrika. Ak by sme poznali teoretickú súvislosť týchto parametrov s mikrofyzikálnymi štruktúrnymi charakteristikami látok, porovnanie nameraných výsledkov s teoretickými predpoveďami by mohlo rozhodnúť o správnosti našich predstáv o mechanizmoch, ktoré vedú k polarizácii látok, a tak prispieť k poznaniu jednej stránky sveta v ktorom žijeme. Práve o to sa chceme v tomto odseku pokúsiť.

Videli sme, že vektor polarizácie väčšiny látok je v širokom intervale elektrických polí veličina úmerná intenzite elektrického poľa, a tento vzťah je lineárny. Táto skutočnosť značne zjednodušuje náš pohľad na látku v elektrickom poli.

### 4.8.1 Elektrónová polarizácia

Začneme analýzou najjednoduchšieho prípadu, akým je nepolárny inertný plyn. Každý atóm plynu v hrubom priblížení zaberá guľový objem, v ktorom je polarizovaný a vzniká z neho dipól. Atómy môžeme považovať za viac-menej voľné a na každý pôsobí iba vonkajšie elektrické pole s intenzitou  $E$ . Vzhľadom na to, že polarizácia v systéme identických dipólov je úmerná koncentrácii, možno očakávať, že jednotlivé dipólové momenty  $p$ , ktoré vzniknú v látke v dôsledku elektrónovej polarizácie, budú úmerné intenzite elektrického poľa, ktoré guľovo symetrický atóm polarizuje. Túto úmernosť zvykneme písať v tvare

$$p = \varepsilon_0 \alpha E \quad (4.40)$$

kde  $\alpha$  je konštanta, ktorá sa nazýva polarizovateľnosť atómu. Úlohou teórie je správne určiť  $\alpha$  aby zodpovedalo experimentálnym pozorovaniam. Vyjdime z predstavy, že atóm s atómovým číslom  $Z$  je tvorený bodovým nábojom jadra  $Q_+ = Ze$  a záporným nábojom elektrónov  $Q_- = -Ze$  rozloženým spojito v objeme gule s polomerom  $R$ . Ak sa atóm ocitne v elektrickom poli s intenzitou  $E$ , bude na jadro pôsobiť externá sila (pozri obr. 4.13, ako aj obr. 4.1)

$$F_{ext} = ZeE$$

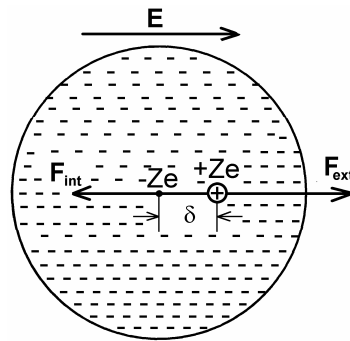
s tendenciou vychýliť jadro zo stredu atómu. Na vychýlené jadro okamžite pôsobí spätná centrálna sila  $F_{int}$  od elektrónového obalu s veľkosťou

$$F_{int} = ZeE_{int}$$



kde

$$E_{int} = \frac{Zer}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$



Obr. 4.13

je vnútorná intenzita elektrického poľa vo vzdialenosti  $r$  od stredu guľového rovnomerne rozloženého náboja  $Q_- = -Ze$  [pozri vzťah (2.50)]. Treba povedať, že atóm je natoľko odolný, že bežné, v praxi sa vyskytujúce polia, nie sú schopné vytrhnúť jadro zo stredu atómu (totálne ho ionizovať) a môžu spôsobiť iba to, že jadro a obal sa navzájom nepatrne posunú. Tento posun  $r = \delta$  pri rovnováhe síl  $F_{ext}$  a  $F_{int}$  plynie z podmienky

$$F_{ext} = F_{int}$$

alebo

$$ZeE = \frac{Z^2 e^2 \delta}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

a z toho

$$\delta = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 E}{Ze}$$

Posun  $\delta$  je dĺžka vzniklého dipólu tvoreného nábojmi  $Q_{\pm} = \pm Ze$ . Jeho dipólový moment má veľkosť

$$p = Q\delta = Ze\delta = 4\pi\epsilon_0 R^3 E \quad (4.41)$$

a smeruje v smere intenzity polarizujúceho poľa  $E$ . Ak porovnáme tento výsledok so vzťahom (4.40), vidíme že podľa našich teoretických predstáv polarizácia je skutočne lineárna, a že polarizovateľnosť nepolárneho atómu

$$\alpha = 4\pi R^3 \quad [\text{m}^3] \quad (4.42)$$

čo je výsledok vcelku pochopiteľný, avšak neočakávane jednoduchý. Polarizovateľnosť atómu je úmerná tretej mocnine jeho polomeru (objemu) – väčší atóm sa lepšie a viac polarizuje! Makroskopická veličina – polarizácia – je podľa vzťahov (4.2) a (4.22)

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E} = n\alpha\varepsilon_0 \mathbf{E}$$

z čoho elektrická susceptibilita látky

$$\kappa = \varepsilon_r - 1 = n\alpha = 4\pi nR^3 \quad (4.43)$$

alebo relatívna permitivita

$$\varepsilon_r = 1 + 4\pi nR^3 \quad (4.44)$$

Bude zaujímavé porovnať tieto teoretické výsledky pre susceptibilitu a permitivitu s experimentálnymi údajmi. Meraniami bolo zistené, že vodík pri atmosférickom tlaku a teplote 0 °C (koncentrácia atómov  $n = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ ) má susceptibilitu

$$\kappa_{exp} = 0,000\,26$$

a relatívnu permitivitu

$$\varepsilon_{r\,exp} = \kappa_{exp} + 1 = 1,000\,26$$

Na druhej strane, ak za polomer vodíkového atómu budeme považovať jeho klasický (Bohrov) polomer  $R = a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  a dosadíme do vzťahu (4.43) dostaneme teoretickú hodnotu susceptibility

$$\kappa_{teor} = 4\pi \cdot 2,69 \cdot 10^{25} \cdot (0,53 \cdot 10^{-10})^3 = 0,000\,050\,3$$

čo je výsledok len asi 5-krát menší, ako experimentálne zistená hodnota. Takáto zhoda experimentálnych a teoretických výsledkov sa v atómovej fyzike považuje za veľmi dobrú, až vyvoláva podozrenie, že je to iba vec náhody; veď to, čo sme urobili, že sme jediný vodíkový elektrón na klasickej Bohrovej dráhe aproximovali jeho spojitým rozložením v guľi rovnakého (Bohrovho) polomeru, je prílišná opovážlivosť. Lenže v atóme nijaké klasické dráhy neexistujú. Vodíkový elektrón sa môže s istou pravdepodobnosťou nachádzať v celom guľovom okolí jadra (protónu), najpravdepodobnejší pre jeho pobyt je však pobyt na guľovej ploche s Bohrovým polomerom. Feynman vo svojej už citovanej učebnici uvádza kvantovomechanický výsledok pre koeficient polarizovateľnosti vodíkového atómu

$$\alpha \approx 16\pi a_0^3$$

kde

$$a_0 = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{\pi e^2 m_e} = 0,529\,18 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

je polomer základnej Bohrovej orbity atómu ( $\hbar$  je Planckova konštanta,  $m_e$  je hmotnosť elektrónu). Tento výraz dáva pre teoretickú susceptibilitu výsledok štyrikrát väčší ako náš, a teda takmer zhodný s experimentálnym výsledkom, ak navyše zoberieme do úvahy, že permitivita bola meraná pre molekulárny, a nie pre atomárny vodík.

Výsledok našich úvah je poučný z dvoch dôvodov: predovšetkým je to potvrdenie správnosti našich predstáv o rozložení elektrónového náboja v atóme a za druhé, že pole, ktoré polarizuje atóm v plyne, je vonkajšie pole bez vplyvu polí susedov, pretože sa predpokladalo, že koncentrácia atómov je nízka.

#### 4.8.2 Nepolárne plyny a kvapaliny. Clausiusov-Mossottiho vzťah

Náš výklad polarizácie plynov bol urobený za predpokladu, že jednotlivé atómy, resp. dipóly, sú tak ďaleko od seba, že ich vzájomné pôsobenie môžeme zanedbať. Inak povedané, každý dipól sa nachádza iba vo vonkajšom poli, alebo že vonkajšie pole je súčasne vnútorným poľom v látke. V plynoch pri vysokých tlakoch s vysokou koncentráciou atómov alebo v kvapalných látkach tento predpoklad nie je splnený a skutočné pole, ktoré polarizuje vybraný atómu, je superpozíciou stredného poľa v látke  $E$  a poľa  $E'$  najbližšieho atomárneho okolia. Toto pole môže veľmi komplikovať výpočet, pretože závisí od vnútornej štruktúry látky. Lorentz ukázal, že dobré výsledky pre nepolárne plyny a kvapaliny sa dajú dosiahnuť, ak sa za vnútorné pole intenzity  $E'$  v mieste polarizovaného atómu považuje pole v guľovej dutine homogénneho polarizovaného dielektrika s makroskopickou polarizáciou  $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$ , podľa obr. 4.14. Pri výpočte intenzity poľa  $E'$  v dutine homogénne polarizovaného dielektrika možno využiť výsledok riešenia úlohy 37, prípadne 73. Z týchto úloh sa dozvieme, že elektrická intenzita  $E_g$  vo vnútri homogénne polarizovanej gule s polarizáciou  $\mathbf{P}$  je tiež homogénne pole dané výrazom (pozri aj obr. 4.5)

$$\mathbf{E}_g = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Elektrické pole v dutine dielektrika je vlastne akýmsi "negatívnym" poľom v guľi, takže môžeme napísať

$$\mathbf{E}' = -\mathbf{E}_g = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Výsledné lokálne pole  $\mathbf{E}_{lok}$ , ktoré polarizuje jednotlivý atóm

$$\mathbf{E}_{lok} = \mathbf{E} + \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Polarizácia v látke je potom

$$\mathbf{P} = n\alpha\epsilon_0\mathbf{E}_{lok} = n\alpha\epsilon_0\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}\right)$$

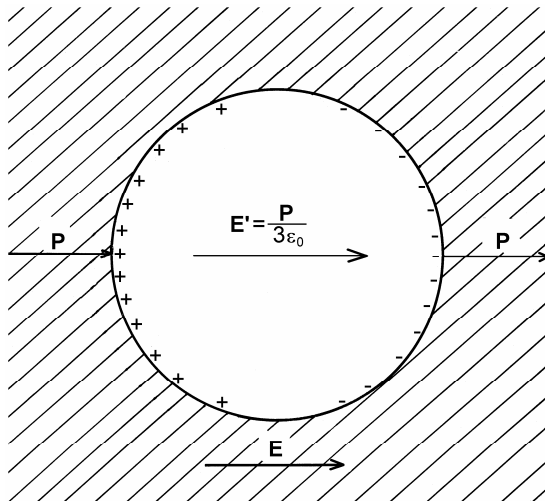
z čoho plynie výraz

$$\left(1 - \frac{n\alpha}{3}\right)\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = n\alpha\epsilon_0\mathbf{E}$$

Po úprave posledného výrazu dostaneme vzťah

$$\varepsilon_r - 1 = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}} \quad (4.45a)$$

alebo vzťah v tvare



Obr. 4.14

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3} \quad (4.45b)$$

Vzťah (4.45) prvý raz odvodili R. Clausius a O. F. Mossotti a je všeobecne známy pod ich menami. **Clausiusov-Mossottiho vzťah** udáva súvis medzi permitivitou dielektrika (makroskopickou veličinou) a polarizovateľnosťou nepolárnych molekúl (mikroskopická veličina) v plynoch a kvapalinách. Pri nízkych tlakoch je  $n\alpha/3 \ll 1$  z dôvodov nízkej koncentrácie a výraz (4.45) pre susceptibilitu sa redukuje na tvar

$$\varepsilon_r - 1 = n\alpha$$

zhodný s výrazom (4.43) pre susceptibilitu voľných atómov alebo molekúl plynu, bez Lorentzovej korekcie.

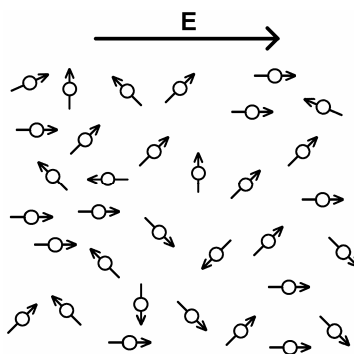
Clausiusov-Mossottiho vzťah bol experimentálne overovaný v širokom rozsahu tlakov až do  $10^8$  Pa na plynom  $\text{CO}_2$ ,<sup>1</sup> pričom sa preukázala výborná zhoda experimentálnych výsledkov s výsledkami vypočítanými podľa vzťahov (4.45).

Pre polárne a tuhé látky, v ktorých  $n\alpha/3 > 1$ , dávajú rovnice (4.45) záporné hodnoty susceptibilität a  $\varepsilon_r$  menšie ako jedna. Pre také látky Clausiusov-Mossottiho vzťah neplatí.

<sup>1</sup> Michels, A., Michels, C., Phil. Trans. R. Soc. **A231**, 409 (1932)

### 4.8.3 Polárne látky. Orientačná polarizácia

Polárne látky, ktoré z elektrického hľadiska pozostávajú z dipólov aj bez prítomnosti vonkajšieho elektrického poľa, vykazujú principiálne iný proces polarizácie. Pod účinkom vonkajšieho elektrického poľa snažia sa dipóly polárnej látky zaujať smer tohto poľa, avšak chaotický tepelný pohyb jednotlivých molekulárnych dipólov bráni tomuto usporiadaniu, a pokiaľ vonkajšie elektrické pole nie je extrémne vysoké, dochádza k štatistickej strednej polarizácii  $\mathbf{P}$  v smere intenzity poľa  $\mathbf{E}$ , pričom vzťah medzi veličinami je v širokom rozsahu polí lineárny. Pri danej hodnote poľa je polarizácia nepriamo úmerná teplote v dôsledku depolarizačného účinku teploty.



Obr. 4.15

Predpokladajme, že v jednotke objemu dielektrika sa nachádza  $n_0$  molekúl s dipólovými momentmi veľkosti  $p$ . Každý dipól v látke môže zaujímať štatisticky ľubovoľnú orientáciu vzhľadom k smeru vonkajšieho elektrického poľa. Ak smer intenzity poľa  $\mathbf{E}$  stotožníme so smerom polárnej osi sférického súradnicového systému, možno potenciálnu energiu jednotlivých dipólov vyjadriť výrazom (pozri odsek 2.9.2)

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \vartheta \quad (4.46)$$

kde polárny uhol  $\vartheta$  je štatistická, náhodná veličina. Bez poľa by jednotlivé dipóly boli rovnomerne rozložené do všetkých smerov pre uhly  $\vartheta$  od 0 po  $\pi$  a azimutálny uhol  $\varphi$  od 0 po  $2\pi$ . V látke by neexistovala v žiadnom smere výsledná nenulová polarizácia. Ak však je pole nenulové, bude jeho smer štatisticky významný, pretože jednotlivé momenty budú mať tendenciu zaujať práve tento smer (pozri obr. 4.15). Ak chceme určiť rozloženie osí dipólov za prítomnosti orientujúceho poľa  $\mathbf{E}$ , treba využiť zákony štatistickej mechaniky. Pre štatistické rozdelenie dipólov podľa energií sa hodí **Boltzmannovo štatistické rozdelenie**, podľa ktorého:

– v podmienkach termodynamickej rovnováhy (inak povedané – v tepelne ustálenom systéme) sa zákon rozdelenia molekúl (dipólov) podľa energií za prítomnosti konzervatívneho poľa (v našom prípade elektrostatického poľa) odlišuje od zákona ich rozdelenia bez toho poľa súčiniteľom

$$e^{-\frac{W}{kT}} \quad (4.47)$$

kde  $W$  je potenciálna energia molekuly v uvažovanom silovom poli,  $T$  je absolútna teplota a  $k$  je univerzálna konštanta nazývaná Boltzmannovou konštantou.

V našom prípade potenciálna energia  $W$  je energia dipólu (4.46) v elektrickom poli.

Keďže energia dipólu závisí od polárneho uhla  $\vartheta$  pre ľubovoľnú hodnotu azimutálneho uhla  $\varphi$ , treba nám teraz vyjadriť počet dipólov  $dn$  na jednotku objemu, ktoré smerovo ležia medzi kónickými plochami s uhlami  $\vartheta$  a  $\vartheta + d\vartheta$  podľa obr. 4.16. Tento počet s využitím Boltzmannovho rozdelenia (4.47) je daný výrazom

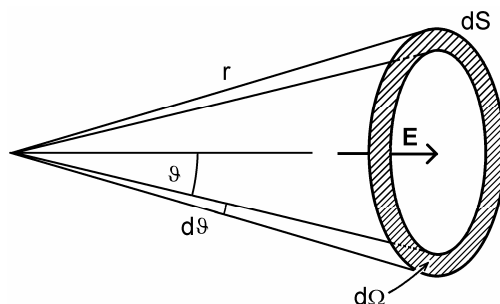
$$dn = A e^{-\frac{W}{kT}} d\Omega \quad (4.48)$$

kde  $A$  je konštanta, ktorú treba určiť normovaním a  $d\Omega$  je elementárny priestorový uhol vymedzený kónickými plochami na obr. 4.16. Jeho veľkosť je daná výrazom

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \quad (4.49)$$

Dosadením výrazu (4.49) do (4.48) dostaneme pre počet dipólov výraz

$$dn = A e^{\frac{pE}{kT} \cos \vartheta} 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \quad (4.50)$$



Obr. 4.16

Vidíme, že odchýlka rozloženia od rovnomerného je daná faktorom

$$e^{\frac{pE}{kT} \cos \vartheta}$$

a je tým väčšia, čím je väčšia intenzita  $E$  a čím je nižšia teplota  $T$ . To je pochopiteľné, pretože so zvyšovaním teploty rastie energia tepelného pohybu, ktorá narúša usporiadanie dipólov.

Teraz nám treba predovšetkým určiť konštantu  $A$  normovaním. Normovanie je matematický postup, pri ktorom treba zvoliť takú hodnotu  $A$ , aby sa po integrovaní výrazu (4.50) cez všetky možné hodnoty  $\vartheta$  od 0 po  $\pi$  výsledok rovnal počtu dipólov  $n_0$  na jednotku objemu, t. j. koncentrácii dipólov. Nech teda

$$n_0 = \int dn = 2\pi A \int_0^\pi e^{\frac{pE}{kT} \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta \quad (4.51)$$

Spôsob výpočtu integrálu závisí od hodnoty exponentu e-funkcie. Pre väčšinu látok z uvažovanej skupiny je pomer  $pE/(kT) \ll 1$  aj pre veľmi vysoké hodnoty intenzít polí. V takom prípade možno exponenciálnu funkciu aproximovať dvojčlenom

$$e^{\frac{pE}{kT} \cos \vartheta} \approx 1 + \frac{pE}{kT} \cos \vartheta$$

a výraz (4.51) prejde na tvar

$$n_0 = 2\pi A \int_0^\pi \left(1 + \frac{pE}{kT} \cos \vartheta\right) \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi A$$

Z neho pre konštantu  $A$  dostávame hodnotu

$$A = \frac{n_0}{4\pi}$$

Konečne môžeme napísať výraz pre počet dipólov v jednotkovom objeme, ktorých energia je z intervalu uhlov  $\vartheta$  a  $\vartheta + d\vartheta$

$$dn = \frac{n_0}{2} \left(1 + \frac{pE}{kT} \cos \vartheta\right) \sin \vartheta d\vartheta$$

Tento počet dipólov prispieva k polarizácii  $dP$  priemetom dipólového momentu do smeru vonkajšieho poľa ( $p \cos \vartheta$ ), teda

$$dP = p \cos \vartheta dn = \frac{n_0 p}{2} \left(1 + \frac{pE}{kT} \cos \vartheta\right) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta$$

Po integrácii tohto výrazu pre  $\vartheta$  od 0 po  $\pi$

$$P = \frac{n_0 p}{2} \int_0^\pi \left(1 + \frac{pE}{kT} \cos \vartheta\right) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \frac{n_0 p^2}{3kT} E$$

konečne dostávame výraz pre orientačnú polarizáciu dielektrika v tvare

$$\mathbf{P} = \frac{n_0 p^2}{3kT} \mathbf{E} \quad (4.52)$$

a z neho výraz pre susceptibilitu v tvare

$$\kappa = \epsilon_r - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{n_0 p^2}{3\epsilon_0 kT} \quad (4.53)$$

Nakoniec treba znovu zdôrazniť, že výrazy (4.52) a (4.53) platia iba v prípade, ak

$$\frac{pE}{kT} \ll 1$$

Pri porušení tejto podmienky napr. vo veľmi silných poliach alebo pri veľmi nízkych teplotách prestane polarizácia  $P$  vzrastať lineárne s  $E$  a rastie k maximálnej možnej hodnote odpovedajúcej orientácii všetkých dipólov do smeru vektora  $E$ . Veľkosť tejto "saturačnej polarizácie" je daná výrazom

$$P_{sat} = n_0 p$$

Na orientačnej polarizácii je pozoruhodná jej závislosť od teploty. Bola meraná závislosť susceptibility od prevrátenej hodnoty teploty a výsledkom je lineárny graf, čo potvrdzuje platnosť výrazu (4.53). Na druhej strane, polarizácia nepolárnych dielektrík je jav, ktorý od teploty takmer nezávisí. Výraz (4.53) sa často píše v tvare

$$\kappa = \epsilon_r - 1 = \frac{C}{T} \quad (4.54)$$

a nazýva sa Curieho zákon, na počesť francúzskeho fyzika P. Curie, ktorý v roku 1895 objavil formálne rovnaký zákon pre magnetickú susceptibilitu paramagnetických látok, zatiaľ čo vzťah (4.53) pre orientačnú polarizáciu dielektrík objavil P. Debye v roku 1912. Konštanta

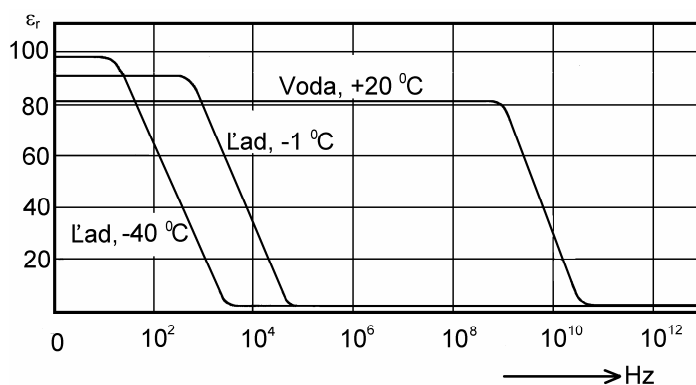
$$C = \frac{n_0 p^2}{3\epsilon_0 k}$$

sa nazýva Curieho konštanta.

Orientačná polarizácia má ešte jednu zvláštnosť oproti elektrónovej, a to je jej frekvenčná závislosť. Pri praktickom využívaní dielektrík je dôležité, ako sa dielektriká správajú nie v konštantných, ale v časovo premenných, napríklad striedavých (sínusovo sa meniacich) poliach. Schopnosť polarizácie je obmedzená relaxačnou dobou príslušnou istému druhu pohybu. Deformácia atómu, ktorá nastáva pri elektrónovej polarizácii, je proces, ktorý nastane za dobu rádovo  $10^{-16}$  s. To znamená, že nepolárne látky sú schopné polarizácie striedavým elektrickým poľom až do frekvencií rádovo  $10^{16}$  Hz, teda od nulovej frekvencie statického poľa až po svetelné frekvencie elektromagnetického poľa. Iná je situácia u polárnych látok. Pohyblivosť dipólov alebo možnosť ich rotácie v látke závisí od mnohých faktorov, predovšetkým od teploty a tlaku. Tieto faktory ovplyvňujú vnútorné trenie v látke, ktoré bráni periodickému preklápaniu dipólov pod účinkom striedavého elektrického poľa. So zvyšovaním frekvencie táto schopnosť dipólov klesá, až pri určitej frekvencii úplne zanikne. Dipóly sa prestanú preklápať a v látke sa zachová iba elektrónová polarizácia, ktorá existuje samozrejme aj u polárnych látok, len je podstatne slabšia.



Ako príklad možno uviesť pozorovania frekvenčných závislostí permitivity pre polárne molekuly vody. Pri izbovej teplote a normálnom tlaku v statickom poli má voda medzi bežnými látkami jednu z najväčších relatívnych permitív, cca 81. Súvisí to s veľkým dipólovým momentom molekuly  $H_2O$  (pozri tabuľku 1). Ak na vzorku vody naložíme striedavé pole a začneme frekvenciu zvyšovať, zostane hodnota permitivity rovnaká až do frekvencií cca  $10^9$  Hz, teda do pásma, ktoré zvykneme nazývať mikrovlny. Pri ďalšom zvyšovaní frekvencie permitivita prudko klesá na hodnotu zodpovedajúcu elektrónovej polarizácii vody a zostáva konštantná až po svetelné frekvencie. Ak ale budeme merať permitivitu vody v tuhom stave, teda permitivitu ľadu, zistíme, že začiatočná permitivita začne klesať už pri frekvenciách 10 resp. 1000 Hz a potom zostáva konštantná. Na obr. 4.17 sú znázornené experimentálne získané frekvenčné závislosti permitivity vody pri troch rôznych teplotách, ktoré potvrdzujú správnosť našich teoretických predstáv.<sup>1</sup>



Obr. 4.17

\* \* \* \* \*

Na záver nášho pojednania o elektrostatike je na mieste otázka o význame elektrostatiky v širšom koncepte elektromagnetizmu. Môžeme na ňu odpovedať z dvoch hľadísk: z hľadiska teoretického poznávania a z hľadiska čisto utilitárneho. Predovšetkým si treba znovu uvedomiť, že nijaké statické elektrické polia v prírode v skutočnosti neexistujú – to čo v praxi prehlasujeme za statické, sú v skutočnosti stredné hodnoty elektrických veličín, ktorých pôvodcom sú elektrické náboje v látkach alebo vo vákuu vo svojom chaotickom tepelnom pohybe. Základné zákony elektrostatiky, ktoré sme v priebehu našich doterajších úvah sformulovali, v skutočnosti platia pre stredné hodnoty veličín. Táto skutočnosť však neznižuje dôležitosť samotných zákonov, pretože tie tvoria teoretický základ pre elektrodynamiku.

Elektrostatika zd'aleka nemá také praktické využitie ako elektrodynamika. V bežnom živote elektrostatické efekty najčastejšie vnímame ako nepríjemné účinky nábojov nahromadených na izolačných materiáloch (tkaniny z umelých hmôt, podlahy, plastikové fólie a iné) teoreticky ťažko opísateľným trením (triboelektrina). V styku s ľudským telom

<sup>1</sup> Grafické priebehy sú z knihy Smyth, C. P.: "Dielectric Behaviour and Structure", McGraw-Hill, New York 1955 a z článku Auty, R. P., Cole, R. H., J. Chem. Phys. **20**, 1309 (1952)

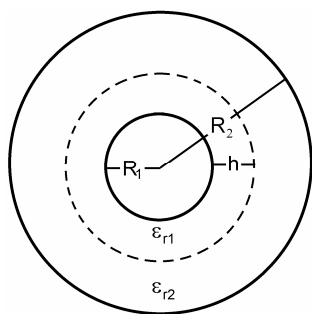
dochádza k vybíjaniu týchto nábojov preskokom elektrických iskier. Impozantným, ale aj nebezpečným prírodným úkazom je elektrický blesk – výboj "statickej" elektriny v atmosfére, počas ktorého sa náboj v priemere asi 20 C neutralizuje pri napätí rádovo  $10^9$  V = 1 GV elektrickým prúdom až 20 000 A.

Priame bezprostredné priemyselné využitie elektrostatických javov je – ako už bolo povedané – relatívne chudobné: sú to napr. elektrostatické odľučovače tuhých častíc z plynu a priemyselných splodín, xerografické zariadenia, rôzne typy elektrostatických úchytných a iné. Vo fyzike elementárnych častíc sa na ich urýchľovanie využívajú elektrostatické generátory napätia, napr. známy Van de Graaffov generátor, ktorý dosahuje napätia až niekoľko miliónov voltov, a ktorého stolnú verziu určenú na demonštračné účely vlastní takmer každé gymnázium. Statická elektrina v praxi je jav skôr neželateľný, či neužitočný, ba až škodlivý, a treba s ňou často bojovať (vývoj rôznych typov antistatických materiálov prípadne náterov). Napriek týmto málo povzbudivým záverom je elektrostatika neodmysliteľnou teoretickou časťou elektromagnetizmu, bez ktorej by sme museli začať budovať elektrodynamiku "na zelenej lúke".

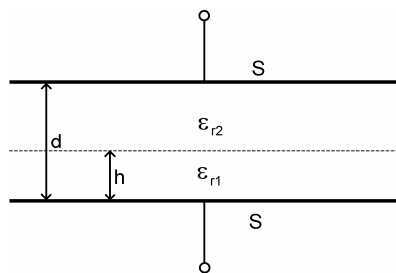
## Úlohy 65 – 96

**65.** Dve rovnaké guľôčky s hmotnosťou  $m$  a polomerom  $R$  sú nabité nábojmi  $Q$  a zavesené na nitiach rovnakej dĺžky. V dôsledku odpudivej sily medzi nábojmi rozostúpia sa guľôčky tak, že nite zvierajú uhol  $\varphi$ . Tento systém nábojov je ponorený do dielektrickej kvapaliny s hustotou  $\rho$  a relatívnou permitivitou  $\epsilon_r$ . Aká musí byť hustota kvapaliny, aby sa uhol  $\varphi$  medzi nitiami po ponorení guľôčok do kvapaliny nezmenil?

**66.** Guľový kondenzátor je tvorený dvoma vodivými guľovými plochami s polermi  $R_1$  a  $R_2$ . Vnútorňa guľa je obalená vrstvou dielektrika s hrúbkou  $h$  a permitivitou  $\epsilon_{r1}$  (obr. 66). Zvyšok priestoru je vyplnený dielektrikom s permitivitou  $\epsilon_{r2}$ . Vypočítajte kapacitu kondenzátora.



Obr. 66



Obr. 67

**67.** Doskový kondenzátor s plochou dosiek  $S$  a ich vzdialenosťou  $d$  je vyplnený dvoma vrstvami dielektrík hrúbkami  $h$  a  $d - h$  a s permitivitami  $\epsilon_{r1}$  a  $\epsilon_{r2}$  (obr. 67). Vypočítajte kapacitu kondenzátora.

**68.** Doskový kondenzátor je zaplnený dielektrikom, ktorého permitivita sa mení podľa vzťahu

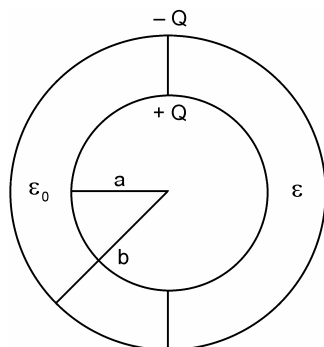
$$\epsilon(x) = \frac{\epsilon_0(x+a)}{a}$$

kde  $a$  je vzdialenosť dosiek a  $x$  je os kolmá na rovinu dosiek. Plocha každej dosky je  $S$ . Vypočítajte kapacitu kondenzátora a rozdelenie viazaného plošného a priestorového náboja v dielektriku, ak je kondenzátor udržiavaný na napätí  $U$ .

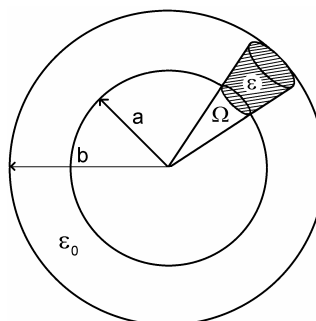
**69.** Na dvoch koncentrických guľových plochách s polormi  $a$  a  $b$  sú rozložené náboje  $\pm Q$  podľa obr. 69. Priestor v guľovej vrstve medzi elektródami kondenzátora je do polovice vyplnený dielektrikom s permitivitou  $\epsilon$ , v druhej polovici je vákuum.

- Nájdite priebeh vektora elektrickej indukcie v kondenzátore.
- Vypočítajte rozloženie intenzity elektrického poľa v kondenzátore.
- Nájdite plošné rozloženie nábojov na elektródach kondenzátora.
- Vypočítajte hustotu viazaných nábojov na povrchových plochách dielektrika a v jeho objeme.
- Vypočítajte kapacitu takého kondenzátora.

**70.** Guľový kondenzátor na obr. 70 je čiastočne vyplnený dielektrikom s permitivitou  $\epsilon$ . Dielektrikum vymedzuje priestorový uhol  $\Omega$  s vrcholom v strede guľových plôch kondenzátora. Vypočítajte kapacitu kondenzátora.



Obr. 69



Obr. 70

**71.** Guľový kondenzátor s polormi guľových elektród  $a$  a  $b$  ( $a > b$ ) je vyplnený dielektrikom, ktorého permitivita sa s polomerom  $r$  mení podľa vzťahu

$$\epsilon(r) = \epsilon_0 \frac{a^2}{r^2}$$

Vypočítajte kapacitu kondenzátora.

**72.** Vodivá guľa s polomerom  $R$ , s celkovým nábojom  $Q$  je obalená guľovou vrstvou dielektrika s hrúbkou  $h$  a permitivitou  $\epsilon_r$  (obr. 72). Vypočítajte:

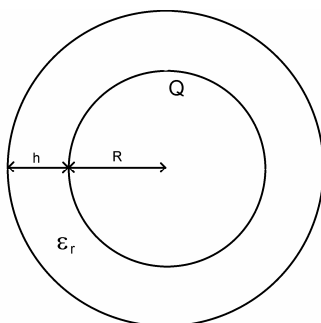
- hustotu plošného viazaného náboja na vonkajšej a vnútornej ploche dielektrika,
- hustotu viazaného priestorového náboja v dielektriku,
- celkový viazaný náboj na vonkajšej a vnútornej ploche dielektrika,
- vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{P}$  ako funkcie vzdialenosti  $r$  od stredu symetrie.

**73.** Dielektrická guľa s polomerom  $R$  je homogénne polarizovaná v celom objeme (vektor polarizácie v celom objeme je konštantný). Vypočítajte potenciál v okolí gule a v jej vnútri. Nakreslite priebeh siločiar vo vnútri gule a v jej okolí.

**74.** Dielektrická guľa s polomerom  $R$  a permitivitou  $\epsilon_r$  je umiestnená v homogénnom elektrickom poli intenzity  $E_0$ . Vypočítajte intenzitu elektrického poľa, vektor polarizácie a potenciál vo vnútri gule a v jej okolí.

75. Vodivá uzemnená guľa s polomerom  $R$  je vložená do homogénneho elektrického poľa intenzity  $E_0$ . Vypočítajte potenciál v okolí gule a v jej vnútri.

Poznámka: Riešte ako limitný prípad predchádzajúcej úlohy.

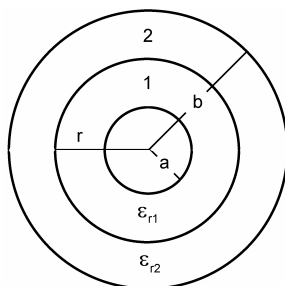


Obr. 72

76. Bodový náboj  $Q$  je umiestnený na rovinnom rozhraní dvoch dielektrík s permitivitami  $\epsilon_1$  a  $\epsilon_2$ , vyplňujúcich celý priestor. Odvoďte výrazy pre vektor intenzity elektrického poľa, vektor elektrickej indukcie a potenciál ako funkcie vzdialenosti od náboja.

77. Doskový kondenzátor s dielektrikom je nabitý na istý potenciálový rozdiel  $U$ , pričom jeho energia je  $3 \cdot 10^{-5}$  J. Na vybratie dielektrika z kondenzátora treba vynaložiť prácu  $5 \cdot 10^{-5}$  J. Aká je relatívna permitivita dielektrika?

78. Doskový kondenzátor s plochou dosiek  $S$  a ich vzdialenosťou  $d$  je vyplnený pevným dielektrikom s relatívnou permitivitou  $\epsilon_r$ , a nabitý na potenciálový rozdiel  $U$ . Vypočítajte prácu, ktorú treba vynaložiť na vybratie dielektrika z kondenzátora.



Obr. 79

79. Priestor medzi cylindrickými vodičmi koaxiálneho kábla je vyplnený dvoma koaxiálnymi vrstvami dielektrík 1 a 2 s permitivitami  $\epsilon_{r1} = 6$  a  $\epsilon_{r2} = 3$ . Dielektrická pevnosť dielektrika 1 je  $E_{max1} = 6000$  kV/m a dielektrika 2 je  $E_{max2} = 4000$  kV/m. Polomer vnútorného vodiča je  $a = 1$  cm a vonkajšieho  $b = 5$  cm (obr. 79).

- Ako treba voliť polomer rozhrania dielektrík, aby pri intenzite elektrického poľa na povrchu vnútorného vodiča  $E_{max1}$  nepresiahla intenzita elektrického poľa v dielektriku 2 hodnotu  $E_{max2}$ ?
- Aké je maximálne dovolené napätie na kábli?
- Aká je kapacita kábla na meter dĺžky?
- Aká maximálna energia môže byť nazhromaždená v jednom metri kábla?

**80.** Horná hranica prípustného napätia na kondenzátore závisí od dielektrickej pevnosti jeho dielektrika. Dielektrická pevnosť materiálu je daná maximálnou prípustnou hodnotou intenzity elektrického poľa v materiáli. Nad touto hranicou nastáva prieraz kondenzátora. Dielektrická pevnosť kvalitných dielektrík predstavuje hodnoty okolo  $10^7$  V/m. Vypočítajte maximálnu elektrickú energiu, ktorú možno „uskladniť“ v jednom kilograme kondenzátora naplneného kvalitným dielektrikom s permitivitou 2,3 a mernou hustotou  $10^3$  kg/m<sup>3</sup>. Hmotnosť elektród možno zanedbať. Porovnajte výsledok s „mernou energiou“ (J/kg) olovených a Ni-Cd akumulátorov. Parametre autoakumulátorov udávané výrobcami podľa časopisu Svět motorů 21/75 sú:

|            | výkon/kg       | energia/kg    |
|------------|----------------|---------------|
| Pb aku.    | 36 – 160 W/kg  | 10 – 40 Wh/kg |
| Ni-Cd aku. | 100 – 200 W/kg | 30 – 50 Wh/kg |

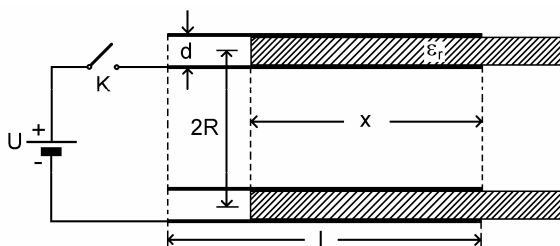
**81.** a) Akou silou  $f$  sa navzájom priťahujú dosky rovinného kondenzátora, ak medzi doskami je konštantné napätie  $U$  a dosky sú vo vzdialenosti  $a$  od seba?

b) Aká bude sila  $f$ , ak sa nabitý kondenzátor odpojí od zdroja, a potom sa naplní tekutým dielektrikom s relatívnou permitivitou  $\epsilon_r$ ?

c) Aká bude sila  $f$ , ak sa nabitý kondenzátor odpojí od zdroja napätia, a potom sa naplní tuhým dielektrikom s permitivitou  $\epsilon$ , a s hrúbkou trošku menšou ako je vzdialenosť dosiek  $a$ , takže dielektrikum sa dosiek nedotýka?

d) Aká bude sila  $f$ , ak sa najprv kondenzátor zaleje tekutým dielektrikom permitivity  $\epsilon_r$ , a potom sa nabije na potenciálový rozdiel  $U$ ?

e) Aká bude sila  $f$ , ak sa najprv kondenzátor naplní tuhým dielektrikom ako v prípade c), a potom sa nabije na potenciálový rozdiel  $U$ ?



Obr. 82

**82.** V cylindrickom kondenzátore dĺžky  $l$  so stredným polomerom elektród  $R$  a ich vzdialenosťou  $d$  ( $d \ll R$ ) podľa obr. 82 sa môže voľne pohybovať dielektrická trubica permitivity  $\epsilon_r$  s hrúbkou  $d$ , takže pri úplnom zasunutí vyplňuje celý aktívny objem kondenzátora.

a) Vypočítajte kapacitu kondenzátora bez dielektrika a s dielektrikom.

b) Kondenzátor bez dielektrika je pripojený na zdroj napätia  $U$ . Aká je jeho energia?

c) Dielektrikum sa začne zasúvať do kondenzátora pri konštantnom napätí zdroja. Aká sila pôsobí na dielektrikum? Aká práca sa vykoná pri úplnom zasunutí dielektrika?

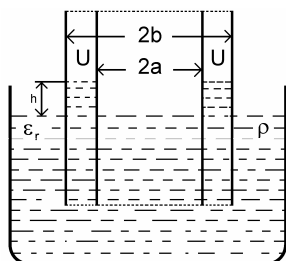
d) Dielektrikum je úplne zasunuté pri napätí  $U$ . Aká je energia kondenzátora?

e) Pri zasunutom dielektriku sa zdroj napätia od kondenzátora odpojí a dielektrikum začneme vyťahovať. Aká sila naň pôsobí? Akú prácu treba vykonať na úplné vytiahnutie dielektrika z kondenzátora?

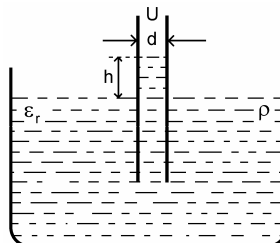
f) Aká je energia kondenzátora po vytiahnutí dielektrika?

**83.** Valcový kondenzátor s polermi elektród  $a$  a  $b$  ( $a < b$ ) a vzduchovým dielektrikom je ponorený do dielektrickej kvapaliny s hustotou  $\rho$  a relatívnou permitivitou  $\epsilon_r$  podľa obr. 83.

Vypočítajte do akej výšky vystúpi kvapalina medzi elektródy kondenzátora, ak je tento udržiavaný na konštantnom napätí  $U$ .



Obr. 83



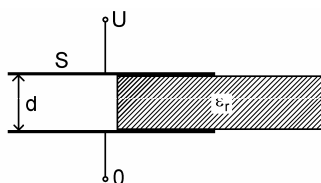
Obr. 84

**84.** Doskový kondenzátor je ponorený do dielektrickej kvapaliny s hustotou  $\rho$  a permitivitou  $\epsilon_r$  podľa obr. 84. Kondenzátor je udržiavaný na napätí  $U$ . Vypočítajte výšku, do ktorej vystúpi kvapalina medzi dosky kondenzátora.

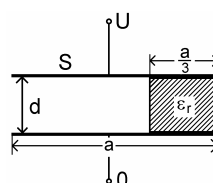
**85.** Vypočítajte silu, ktorou je vťahované dielektrikum s permitivitou  $\epsilon_r$  medzi dosky kondenzátora na obr. 85. Na kondenzátore je konštantné napätie  $U$ .

**86.** Doskový kondenzátor pozostáva z dvoch štvorcových elektród so stranami  $a = 15$  cm vzdialenými  $d = 3$  mm. Medzi elektródy kondenzátora je zasunutá sklenená doska s relatívnou permitivitou  $\epsilon_r = 6$  tak, že vyplňuje tretinu objemu kondenzátora. Vo zvyšku objemu je vákuum, alebo vzduch (obr. 86). Na kondenzátor je pripojené napätie  $U = 600$  V.

- Vypočítajte kapacitu kondenzátora.
- Stanovte celkový náboj na kondenzátore a jeho plošné rozloženie.
- Vypočítajte energiu kondenzátora.



Obr. 85



Obr. 86

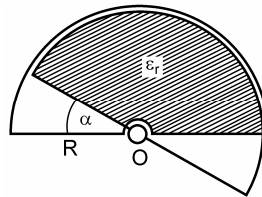
**87.** Nekonečne dlhý dielektrický valec polomeru  $R$  je homogénne polarizovaný ( $\mathbf{P}$  je konštantný vektor polarizácie) v smere osi  $z$  kolmej na os valca. Vypočítajte potenciál a intenzitu elektrického poľa vo vnútri valca a v jeho okolí.

**88.** Nekonečne dlhý dielektrický valec s polomerom  $R$  a relatívnou permitivitou  $\epsilon_r$  je vložený do homogénneho elektrického poľa intenzity  $\mathbf{E}$  tak, že os valca je kolmá na smer poľa  $\mathbf{E}$ . Vypočítajte potenciál vo vnútri a v okolí valca.

**89.** Nekonečne dlhý kovový valec polomeru  $R$  je vložený do homogénneho elektrického poľa intenzity  $\mathbf{E}$  tak, že os valca je kolmá na smer poľa  $\mathbf{E}$ . Vypočítajte potenciál vo vnútri a v okolí valca. (Riešte ako limitný prípad predchádzajúceho príkladu.)

**90.** Vypočítajte kapacitu guľového kondenzátora, ktorého polomer vnútornej elektródy je  $R_1$ , polomer vonkajšej elektródy  $R_2$  a aktívny objem kondenzátora je vyplnený dielektrikom, ktorého permitivita je daná výrazom  $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos^2 \vartheta$ , kde  $\vartheta$  je polárny uhol.

**91.** Kondenzátor pozostáva z dvoch pevných polkruhových platní polomeru  $R$  a pohyblivej platne polkruhového dielektrika s permitivitou  $\varepsilon$ . Dielektrická platňa sa môže otáčať okolo osi  $O$  (obr. 91). Hrúbka dielektrickej platne  $h$  sa rovná vzdialenosti elektród kondenzátora. Na kondenzátore je napätie  $U$ . Nájdite moment sily vzhľadom na os  $O$ , ktorý pôsobí na dielektrikum v polohe podľa obrázku.



Obr. 91

**92.** Voľný bodový náboj  $q$  sa nachádza v dielektrickom prostredí, ktorého permitivita je daná výrazom  $\varepsilon = \alpha r$  ( $\alpha$  je konštanta,  $r$  je vzdialenosť od náboja). Nájdite vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{P}$  a objemový viazaný náboj v dielektriku ako funkciu  $r$ .

**93.** Nekonečne veľká vrstva homogénneho dielektrika s permitivitou  $\varepsilon$  je nabitá voľným objemovým nábojom  $\rho$  s konštantnou hustotou. Hrúbka vrstvy je  $a$ . Nájdite:

a) intenzitu elektrického poľa a potenciál ako funkciu vzdialenosti  $x$  od stredu vrstvy (potenciál v strede vrstvy nech sa rovná nule); znázornite intenzitu elektrického poľa a potenciál ako funkcie vzdialenosti stredu vrstvy;

b) plošnú a objemovú hustotu viazaných nábojov.

**94.** Homogénne dielektrikum má tvar guľovej vrstvy s vnútorným polomerom  $a$  a vonkajším  $b$ . Nájdite a graficky znázornite závislosť intenzity elektrického poľa  $E$  a potenciálu  $V$  ako funkcie vzdialenosti  $r$  od stredu systému, ak náboj  $Q$  je rozložený rovnomerne

a) na vnútornej ploche dielektrika,

b) v objeme dielektrika.

**95.** Voľný náboj  $Q$  je rozložený rovnomerne v objeme gule polomeru  $R$  z homogénneho dielektrika permitivity  $\varepsilon$ . Nájdite a graficky znázornite intenzitu elektrického poľa  $E$  a potenciál  $V$  ako funkcie vzdialenosti  $r$  od stredu gule. Nájdite plošnú a objemovú hustotu viazaných nábojov.

**96.** V kolmej vzdialenosti  $d$  od rovinného rozhrania dvoch dielektrík s permitivitami  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$  sa nachádza bodový náboj  $Q$ . Nájdite plošnú hustotu viazaného náboja na rozhraní ako funkciu vzdialenosti  $r$  od náboja a celkový viazaný náboj.