

3 ELEKTROSTATICKÉ POLE ZA PRÍTOMNOSTI VODIČOV

3.1 NABITÝ VODIČ A JEHO ELEKTROSTATICKÉ POLE

Naše doterajšie úvahy, napriek ich závažným teoretickým dôsledkom, nezodpovedajú reálnym nábojovým rozloženiam. Ak napríklad hovoríme o náboji rozloženom homogénne v objeme gule, obyčajne máme na mysli nejakú guľu z dielektrického materiálu, ktorú sme priestorovo nabili, t. j. dopravili sme na ňu dodatočné náboje k tým, ktoré predstavujú protóny a elektróny atómov, z ktorých sa guľa skladá, a ktorých je rovnaký počet každého druhu. Bez tohto dielektrického "nosiča" si žiadne ďalšie zoskupenie protónov alebo elektrónov nevieme predstaviť. Musíme teda rozlišovať protóny a elektróny nenabitej látky, ktorých makroskopické pôsobenie sa kompenzuje, pretože je ich rovnaký počet, a náboje, ktoré sme na teleso priviedli, aby sme ho elektricky nabili. V prípade tuhých látok môžeme na teleso preniesť elektróny, a tým ho nabiť záporne, alebo nejaké množstvo elektrónov z nenabitého telesa odvieť, čím ich množstvo z hľadiska rovnováhy bude nedostatočné a teleso bude nabité kladne. Prenos protónov v tuhých látkach je oveľa zložitejší, a preto, ak budeme hovoriť o nabitom tuhom telese, budeme mať obyčajne na mysli prebytok alebo nedostatok elektrónov oproti jeho neutrálnemu stavu. Takýto elektrický stav môžeme dosiahnuť napríklad trením telesa. Pri kvapalinách a plynoch je situácia podstatne zložitejšia, a preto ich ako modelové látky v našich analýzach zatiaľ neuvažujeme.

Interakcia prebytočných nábojov s látkou má celý rad svojich zvláštností, s ktorými sa teraz chceme zaoberať. Najprv sa budeme venovať elektrickým javom, ktoré vznikajú, ak sa náboje nachádzajú na vodičoch alebo v ich okolí. Prísne vzaté, v elektrostatike sa ako vodiče javia všetky látky a líšia sa iba charakteristickou – relaxačnou – dobou, ktorá je mierou času, za ktorý sa v systéme "látka – privedené náboje" ustáli rovnovážny stav. Pre kovy, ako vynikajúce vodiče, je táto doba neobyčajne krátka, pre izolanty (dielektriká) môže byť veľmi dlhá, avšak nie nekonečná. Kovy sú mimoriadne vhodnými modelovými látkami pre naše ďalšie úvahy, pretože obsahujú v svojej kryštalickej mriežke voľné elektróny, ktoré sa pod účinkom vonkajších polí a nábojov môžu v objeme kovového telesa pohybovať.

Po privedení náboja na vodivé teleso sa vytvorí na ňom a v jeho okolí istý elektrický stav, ktorý možno opísať radom zákonitostí, a to:

1. Integrovaný náboj privedený na vodivé teleso sa rozloží plošne na jeho povrchu. V jeho vnútri sa stredná štatistická objemová hustota nábojov rovná nule. Táto skutočnosť je vcelku prirodzená, ak si uvedomíme, že privedené náboje rovnakého znamienka sa v objeme telesa budú odpudzovať a vo vodivom prostredí sa môžu pohybovať až na povrchovú plochu telesa. Na únik z tejto povrchovej vrstvy by

potrebovali dodatočnú energiu rovnú výstupnej práci, napr. elektrónov, z kovu. Táto problematika však ide za rámec našich úvah, a na tomto mieste iba konštatujeme, že vo vodivom nabitom telese je objemová hustota nábojov $\rho_{int} = 0$ a na jeho povrchu plošná hustota $\sigma \neq 0$.

2. Intenzita elektrostatického poľa vo vnútri nabitého vodivého telesa sa rovná nule. Táto skutočnosť plynie priamo z Gaussovho zákona. Z ľubovoľného objemu vo vnútri telesa sa tok intenzity elektrického poľa rovná nule, pretože v každom z takýchto objemov τ uzavretých plochou S sa celkový integrálny náboj rovná nule

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

z čoho plynie, že vo vnútri telesa stredná štatistická hodnota intenzity poľa sa všade rovná nule ($\mathbf{E} = 0$). Na druhej strane, podľa Gaussovho zákona v diferenciálnom tvare, vo vnútri vodivého telesa

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

pretože $\rho_{int} = 0$. Z posledného výrazu plynie, že intenzita poľa vo vnútri telesa sa alebo rovná nule, alebo je daná rotáciou nejakého ďalšieho vektora \mathbf{T} , teda $\mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{T}$. Platí totiž, že divergencia rotácie akéhokoľvek vektora sa rovná nule. To však nie je možné, pretože elektrostatické pole je poľom gradientovým (žriedlovým), z čoho plynie, že $\mathbf{E} = 0$ všade vo vnútri objemu telesa.

Na dôkaz uvedeného tvrdenia netreba robiť žiadne zložité teoretické úvahy, ak si uvedomíme, že v prípade nenulového poľa by sa vo vnútri vodiča museli pod jeho účinkom premiestňovať prítomné voľné náboje, teda by musel vodičom stále tiecť elektrický prúd. K tomu by však boli potrebné vonkajšie elektromotorické zdroje, čím by sa statický problém zmenil na dynamický.

3. Vektor intenzity elektrostatického poľa na povrchu vodivého nabitého telesa má v každom bode povrchu smer normály. Ak by to nebola pravda, potom tangenciálna zložka intenzity poľa E_t by na povrchu vyvolávala tangenciálnu silu, ktorá by nútila náboje k pohybu po povrchu, teda po povrchu by tiekol elektrický prúd. Takýto prúd tam tečie iba počas začiatočného preusporiadania nábojov.

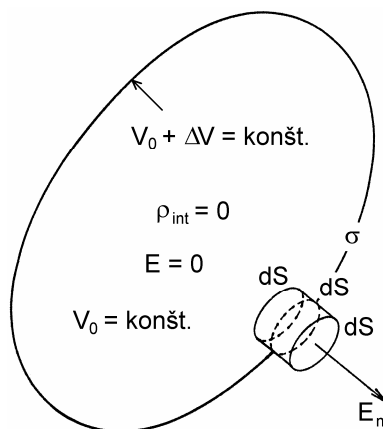
4. Povrch vodivého telesa je ekvipotenciálnou plochou. Tento fakt vyplýva zo skutočnosti, že siločiarly sú kolmé na ekvipotenciálne plochy, a teda aj na povrch vodiča v každom jeho bode.

5. V každom bode objemu telesa je potenciál V_0 rovnaký. Konštantný potenciál vo vnútri telesa je spôsobený nulovou intenzitou poľa. Hovoríme, že vodivé teleso je ekvipotenciálnym telesom. Rozdiel potenciálov (napätie) medzi jeho dvoma ľubovoľnými bodmi sa rovná nule. Avšak medzi povrchom a vnútrajškom telesa je malý potenciálový skok ΔV (pozri obr. 3.1), ktorý zabráni elektrónom uniknúť z povrchu kovu, a ktorý je v každom bode povrchu rovnaký za predpokladu, že vodič je homogénny. Túto skutočnosť vysvetľuje teória tuhých látok.

6. Normálová intenzita elektrostatického poľa E_n na povrchu vodivého telesa (pri $E_t = 0$) je daná výrazom

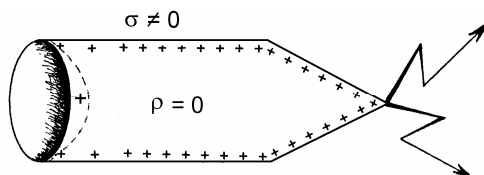
$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

kde σ je plošná hustota náboja v danom bode povrchu. Vzťah sa nazýva **Coulombova veta** a možno ho jednoducho dokázať s využitím Gaussovho zákona. V okolí vybraného bodu na povrchu telesa, v ktorom je plošný náboj σ , zvolíme nekonečne nízky valček s plochou základne dS ako na obr. 3.1. Tok intenzity poľa plochou valčeka je EdS , pretože intenzita vo vnútri telesa sa rovná nule. Náboj uzavretý vo valčeku je $dQ = \sigma dS$. Podľa Gaussovho zákona $EdS = \sigma dS/\epsilon_0$, z čoho okamžite plynie vzťah (3.1). Vzťah vyjadruje priamu úmernosť medzi hustotou náboja vo zvolenom bode a intenzitou poľa. Veľké intenzity poľa sú v povrchových miestach vodiča, v ktorých je veľká hustota náboja, a naopak.



Obr. 3.1

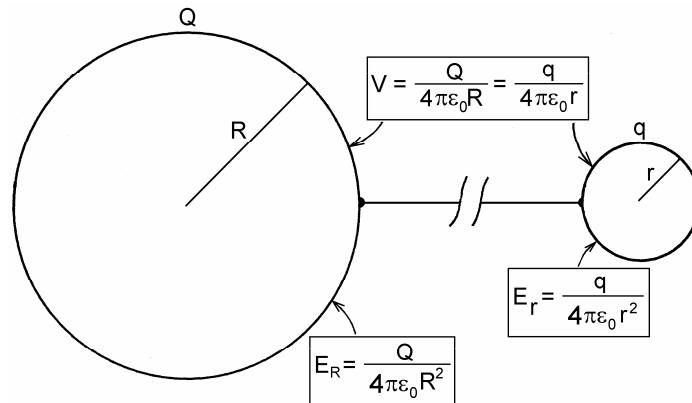
7. Intenzita elektrostatického poľa v danom bode povrchu nabitého vodivého telesa je nepriamo úmerná polomeru krivosti povrchovej plochy. Ak má teleso ostré výčnelky a preliačiny, potom na výčnelkoch (miesto s malým polomerom krivosti) môže intenzita poľa nadobúdať veľmi vysokých hodnôt, takých že dôjde k ionizácii okolitého vzduchu, čo sa prejaví iskrením (pozri obr. 3.2). V preliačinách je naopak intenzita poľa nižšia ako napr. na rovných plochách. O tejto vlastnosti zelektrizovaných telies sa môžeme presvedčiť nasledujúcou úvahou.



Obr. 3.2

Nech je vodivé teleso vytvorené dvoma vodivými guľami s polormi R a r ($R > r$) spojenými tenkým dlhým vodivým drôtom ako na obr. 3.3. Ak na takéto teleso privedieme nejaký náboj, rozloží sa na telese prakticky iba na guľach, kde budú náboje Q a q (predpokladáme, že spojovací drôtik má nepatrnú kapacitu). Obidve gule budú na rovnakom potenciáli V , pretože ide o jediné vodivé teleso. Bude teda platiť

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



Obr. 3.3

z čoho plynie, že pomer nábojov na guliach sa rovná pomeru ich polomerov, teda $Q/q = R/r$. Ak sa gule nachádzajú v dostatočne veľkej vzdialenosti od seba, budú intenzity elektrického poľa na každej guli rôzne, s hodnotami

$$E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Pre pomer intenzít platí

$$\frac{E_R}{E_r} = \frac{Q}{q} \frac{r^2}{R^2} = \frac{r}{R}$$

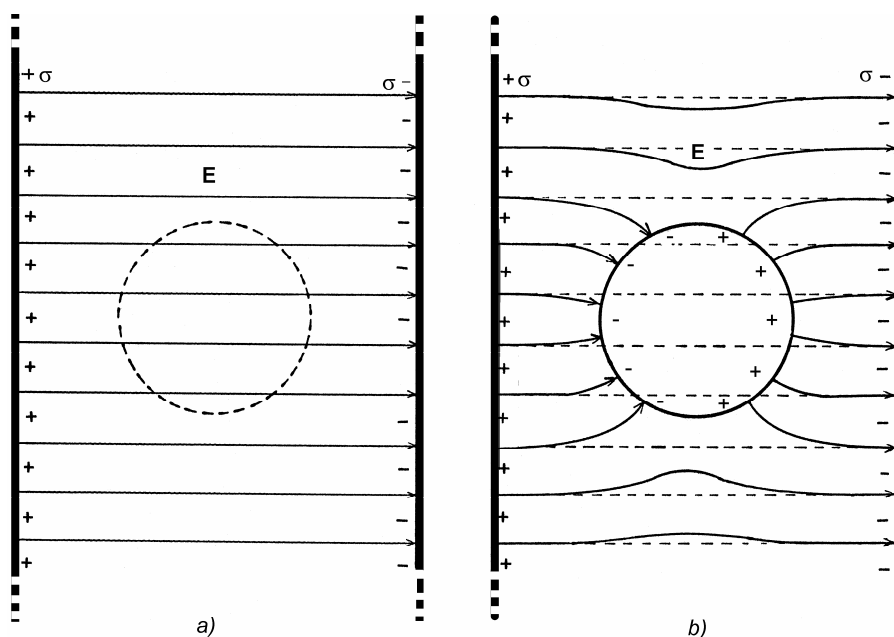
z čoho plynie naše tvrdenie. V ľubovoľnom bode povrchu vodivého nabitého telesa normálová intenzita poľa E_n je nepriamo úmerná polomeru krivosti povrchu r , teda

$$E_n \sim \frac{1}{r} \quad (3.2)$$

Skutočnosť, že intenzita elektrického poľa je nepriamo úmerná polomeru krivosti povrchovej plochy vodiča, musia mať na pamäti predovšetkým konštruktéri vysokonapäťových elektrických zariadení (elektrostatických generátorov, urýchľovačov, vysokonapäťových rozvodní a pod.). Ak sa treba vyvarovať nebezpečeniu elektrického prierazu a sršania na aktívnych častiach zariadení, nesmú mať tieto časti žiadne ostré výčnelky, ale musia byť zaoblené. Naopak, ak treba vytvoriť iskrište, opatrí sa taká aktívna časť vodivým hrotom nasmerovaným proti uzemnenej kovovej platni.

3.2 NENABITÝ VODIČ V ELEKTROSTATICKOM POLI

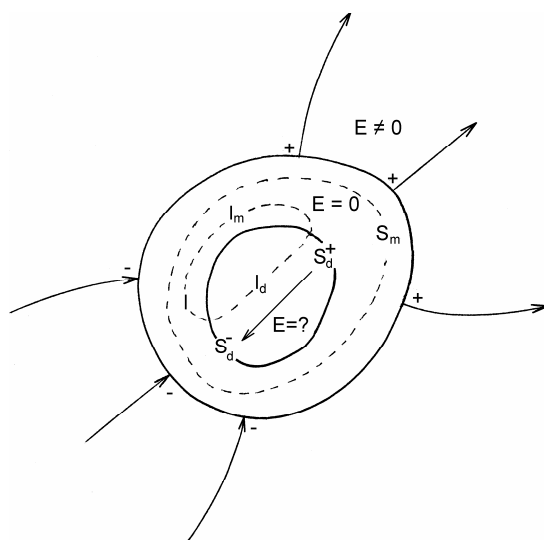
Ak sa na nenabitý vodič naloží elektrostatické pole, vznikajú zaujímavé efekty, ktoré podliehajú zákonitostiam uvedeným v prechádzajúcom odseku. Bezprostredne po naložení poľa dôjde vo vnútri vodivého telesa k posúvaniu nábojov, obyčajne elektrónov, pod účinkom naloženého poľa takým spôsobom a dovedy, kým sa pole vo vnútri objemu telesa nestane nulovým. Na povrchu vodiča, ktorý bol pôvodne neutrálny, sa vytvoria kladné a záporné plošné náboje, ktorých integrálny súčet sa rovná nule. Tento jav je známy pod názvom **elektrostatická indukcia**. Vzniklé plošné náboje a ich vonkajšie polia spĺňajú Coulombovu vetu a splnené sú aj všetky ostatné zákonitosti 1 až 7 odseku 3.1. Pri elektrostatickej indukcii vznikajú na vodivom nenabitom telese náboje tým, že sa na ňom pod účinkom vonkajšieho poľa oddelia kladné a záporné náboje, ich súčet však zostane rovný nule.



Obr. 3.4

Ako príklad je na *obr. 3.4b* znázornená vodivá nenabitá guľa vložená do pôvodne homogénneho elektrického poľa, na *obr. 3.4a* vytvoreného veľkými planparalelnými rovinnými plochami s pevnými konštantnými plošnými hustotami nábojov opačného znamienka $\pm\sigma$. Po vložení gule do poľa došlo v nej k elektrostatickej indukcii, pričom na ľavej polovici gule sa naindukoval záporný náboj, na pravej polovici kladný, rovnako veľký náboj. Pôvodne homogénne pole sa zdeformovalo tak, že jeho siločiarly vstupujú a vystupujú kolmo na guľovú plochu. Normálová intenzita poľa na guľi v každom bode spĺňa Coulombovu vetu. Makroskopický náboj a intenzita poľa vo vnútri gule sa rovnajú nule. Dá sa ukázať (pozri úlohu 75), že výsledné elektrické pole bude dané superpozíciou

homogénneho elektrického poľa a poľa elektrického dipólu, ktorý modeluje polarizovanú guľu.



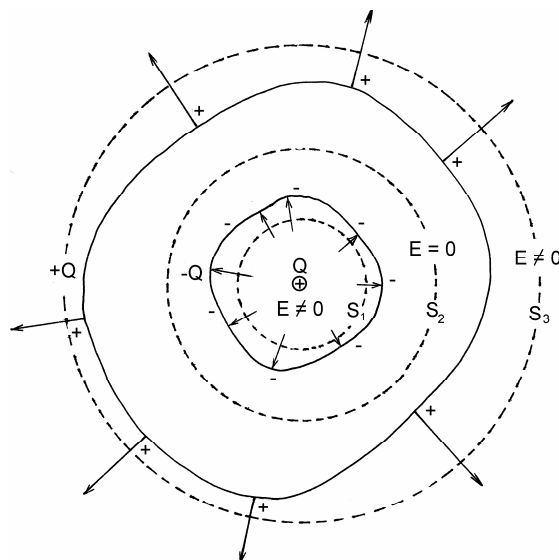
Obr. 3.5

Zaujímavé závery s praktickým dosahom možno urobiť o vodivých telesách s dutinou. Ak sa také teleso nabije, v jeho vonkajšom okolí bude nenulová intenzita elektrostatického poľa. Ak sa nenabitý vloží do vonkajšieho poľa, na povrchu telesa sa naindukujú náboje a vonkajšie pole sa zdeformuje z dôvodov, ktoré sme už uviedli. Aká je ale situácia v dutine? Je alebo nie je v nej elektrické pole? Uvažujme teleso podľa obr. 3.5. Vložené do poľa alebo nabité má vo vnútri materiálu nulovú intenzitu, a teda integrál z intenzity poľa po ľubovoľnej uzavretej ploche S_m prechádzajúcej materiálom sa rovná nule, z čoho plynie, že makroskopický náboj uzavretý plochou je nulový. To však nevylučuje, že napr. v dvoch plošných oblastiach S_d^+ a S_d^- dutiny sa nachádzajú opačné plošné náboje, ktorých integrálna suma sa rovná nule, ako na obr. 3.5, a také náboje by potom produkovali pole v dutine. Takéto pole je však zakázané druhým základným zákonom elektrostatiky, zákonom o dráhovom integrále poľa. Ak zvolíme uzavretú dráhu l pozostávajúcu z časti l_m , ktorá prechádza materiálom a z časti l_d prechádzajúcej dutinou, integrál poľa po tejto dráhe sa musí rovnať nule, t. j.

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_m} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_d} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Na dráhe l_m vo vnútri materiálu sa integrál rovná nule, pretože tam sa intenzita rovná nule. Na zvyšku l_d uzavretej dráhy l v dutine sa hodnota integrálu rovná nule bez ohľadu na to, aký má dráha l_d v dutine tvar. Z toho plynie, že v dutine je vždy nulové pole – dutina je od vonkajšieho priestoru elektricky odtienená, dokonca aj v prípade, ak pole vo vonkajšom priestore nie je statické, ale časovo premenné.

Možnosti elektrického tienenia majú veľký praktický význam v elektrickej meracej technike a v káblovej telekomunikácii, ale aj pre účely elektrickej bezpečnosti. Citlivé elektrické snímače a časti elektronických meracích prístrojov sa pre ich normálnu činnosť musia chrániť pred rušivými elektrickými signálmi a poliami tak, že sa uzatvárajú do kovových obalov, či skriniek. Uzavreté plechové kliečky dobre chránia pred úrazom vysokým elektrickým napätím (známa **Faradayova kliečka**). Kliečka pritom nemusí byť vyrobená z celokovového materiálu, ale môže byť napríklad z vodivej kovovej sieťoviny s nepríliš veľkými okami. Kovová karoséria automobilu tiež nie je úplne uzavretá, a napriek tomu relatívne dobre chráni cestujúcich pred elektrickým bleskom.



Obr. 3.6

A nakoniec môžeme uviesť ešte jeden teoretický argument o tom, že elektrické pole v kovovej dutine je vždy nulové. Pole v dutine musí byť dané riešením Laplaceovej rovnice (pozri odsek 2.12.3)

$$\Delta V = 0$$

Riešenie tejto rovnice je jednoznačné, ak jeho hodnota je daná v nejakej uzavretej oblasti, napr. na stene dutiny. Potenciál na stene je konštantný s hodnotou V_0 . Vhodným riešením vo vnútri dutiny je teda potenciál $V = V_0 = \text{konšt.}$ všade (konštanta je riešením Laplaceovej rovnice), a je to súčasne jediný možný potenciál. Z toho plynie, že pole vo vnútri dutiny je nulové, t. j. $\mathbf{E} = 0$, pretože $\mathbf{E} = -\text{grad } V$.

A teraz si položíme opačnú otázku. Funguje tienenie obojsmerne, t. j. vytvárajú náboje, uložené v dutine, pole z vonkajšej strany vodivého telesa, alebo nie? Napodiv tienenie nefunguje obojstranne. Ak sa v dutine nachádzajú náboje, potom v okolí nenabitého telesa existuje elektrostatické pole. Tento fakt si nevšimol ani profesor Richard P. Feynman,¹ keď vo svojej učebnici (R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands:

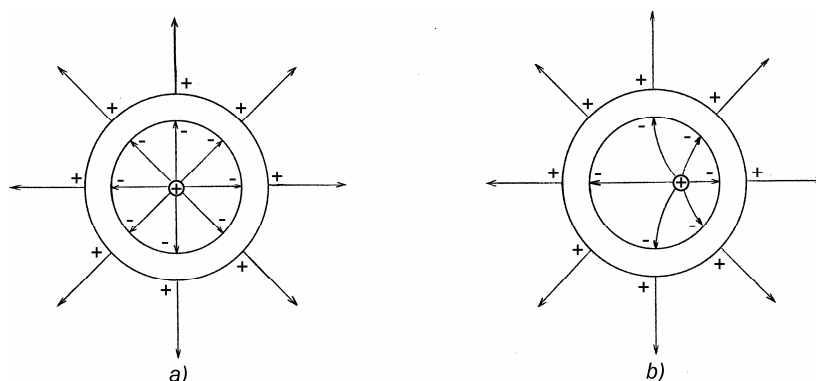
¹ Richard P. Feynman (1918 – 1988) – americký teoretický fyzik – dostal spolu s J. Schwingerom a s S. I. Tomonagom v roku 1965 Nobelovu cenu za rozvoj kvantovej elektrodynamiky

Feynmanove prednášky z fyziky 3, Alfa Bratislava 1988, str. 116) tvrdí, že "tienie funguje v oboch smeroch". Hovorí sa, že aj majster tesár sa občas sekne!

Dôkaz toho, že v okolí neutrálneho telesa s dutinou, v ktorej sa nachádzajú náboje je elektrické pole, je veľmi jednoduchý. Na obr. 3.6 je nenabité teleso s dutinou, v ktorej sa nachádza celkový náboj $+Q$, bez ohľadu na jeho vnútorné rozloženie. Je zrejme, že v dutine bude elektrické pole, ktorého siločiaru budú končiť kolmo na stenách dutiny a podľa Coulombovej vety končia na nábojoch. Teda na stene dutiny musí byť plošný náboj, ktorý je integrálne rovnako veľký ako $+Q$, ale opačného znamienka, teda $-Q$. Kde sa ale tento náboj na neutrálnom telese zobral? No predsa v samotnom telese, ktoré je vodivé, a v ktorom takéto náboje k dispozícii sú. Na povrch dutiny sa dostanú elektrostatickou indukciou, ale súčasne rovnako veľký náboj opačného znamienka (teda rovnaký ako náboj $+Q$ v dutine) sa kvôli kompenzácii usadí na povrchu telesa. Práve tento náboj vytvorí vonkajšie elektrické pole.

Dôkaz vyplýva bezprostredne aj z Gaussova zákona aplikovaného v integrálnom tvare. Ak okolo náboja $+Q$ vytvoríme Gaussovú plochu (plocha S_1 na obr. 3.6), je zrejme, že tok intenzity ňou je nenulový, teda v dutine je nenulové pole. Ak Gaussova plocha leží v materiále telesa (plocha S_2), tok intenzity je nulový, pretože intenzita v materiále je nulová. Uzavretý náboj je nulový, teda náboj $+Q$ v dutine musí byť kompenzovaný rovnako veľkým nábojom opačného znamienka indukovaným v stene dutiny. A nakoniec, ak Gaussova plocha obopína celé teleso (plocha S_3), celkový uzavretý náboj je $+Q$ (náboj $+Q$ v dutine plus neutrálne teleso), teda vonkajší tok intenzity je nenulový a v okolí telesa je nenulové pole.

Vnútorné a vonkajšie pole vodivého telesa majú jednu zaujímavú vlastnosť – ak raz vzniknú, potom sú navzájom nezávislé. Ak sa bude meniť pole v dutine premiestňovaním náboja v rámci dutiny (ale pritom jeho celková veľkosť zostane konštantná), pole v okolí telesa zostane rovnaké. Na obr. 3.7a,b je zobrazená guľová vodivá vrstva a v dutine je uložený bodový náboj. Vonkajšie pole je radiálne pole bodového náboja bez ohľadu na to, kde sa náboj v dutine nachádza. Vnútorné pole sa pritom môže drasticky meniť, ako to vidíme porovnaním obr. 3.7a a 3.7b.



Obr. 3.7

V súvislosti s elektrickými vodičmi sa často vyskytuje technicky dôležitý pojem **elektrického uzemnenia**. Pod uzemnením rozumieme vodivé spojenie nejakého vodivého (kovového) telesa so Zemou. Masa Zeme aj keď nie je homogénna, môže sa považovať za relatívne dobrý vodič, ktorý má obrovskú rozľahlosť s veľkou povrchovou plochou

a veľkú hmotnosť. S veľkými rozmermi Zeme súvisí jej veľká elektrická kapacita, t. j. schopnosť pojať veľký náboj bez toho, aby sa pritom znateľne zmenil jej elektrický potenciál. Ak nejaký vodič uzemníme, tým vyrovnáme jeho potenciál s potenciálom Zeme. Ak sa na uvažovanom telese bude meniť celkový náboj, tento náboj sa rozteká po celej Zemi a prakticky neovplyvní potenciál Zeme ani intenzitu elektrického poľa na nej. Ak Feynman tvrdí, že "tínenie funguje obojsmerne", potom zrejme mal na mysli uzemnené teleso, na ktorom naindukovaný náboj skutočne vytvorí iba zanedbateľnú dodatočnú intenzitu, pretože sa takmer úplne roztečie uzemnením do Zeme.

V praxi má uzemnenie dvojakú funkciu: Ochrannú – so Zemou sa vodivo spájajú všetky vodivé časti (kryty) elektrických zariadení, ktoré by sa mohli ocitnúť pod napätím ohrozujúcim používateľa. V káblovej telekomunikácii plní uzemnenie pracovnú úlohu tým, že umožňuje využiť Zem ako spätný vodič prenosového dvojvodičového vedenia. Táto možnosť sa dnes kvôli možnému rušeniu prakticky nevyužíva.

3.3 EXPERIMENTÁLNY DÔKAZ PLATNOSTI ZÁKONA PREVRÁTENÝCH KVADRÁTOV V ELEKTROSTATIKE

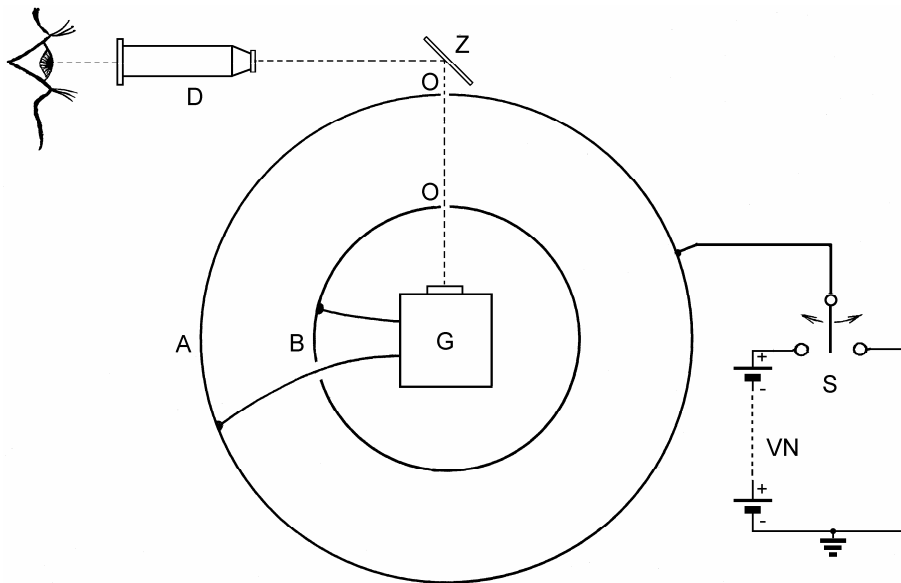
Elektrostatické javy, vznikajúce na vodičoch s dutinami, poskytujú presvedčivé možnosti experimentálneho dôkazu platnosti Coulombovho zákona, menovite skutočnosti, že elektrická sila je nepriamo úmerná druhej mocnine vzdialenosti nábojov. O priamy dôkaz závislosti $1/r^2$ sa pokúsil meraním sily medzi dvoma nabitými guľôčkami H. Cavendish (1731 – 1810). Zistil, že hodnota exponentu leží s najväčšou pravdepodobnosťou v hraniciach od 1,98 do 2,02. Cavendish však svoje pozorovania nepublikoval, takže o tejto skutočnosti okrem niekoľkých jeho súčasníkov takmer nikto nevedel. Neskôr, v druhej polovici 19. storočia, J. C. Maxwell meraním stanovil v zákone prevrátených kvadrátov exponent 2 s presnosťou $\pm 5 \cdot 10^{-5}$. Avšak ani táto relatívne vysoká presnosť nedáva právo vyhlásiť zákon prevrátených kvadrátov v elektrostatike za jednoznačne platný.

Ukázalo sa, že oveľa väčšiu presnosť experimentálneho dôkazu uvedeného zákona možno dosiahnuť skúmaním intenzity elektrického poľa v dutine vodiča. Podľa teoretických úvah predchádzajúceho odstavca, založených na predpokladoch o platnosti Gaussovho zákona, sa intenzita elektrického poľa v uzavretej dutine vodivého telesa, bez ohľadu na jej geometrický tvar, rovná nule. Naviac, v odseku 2.5 bolo ukázané, že vo vnútri guľovej plochy, na ktorej je rovnomerne rozložený náboj, sa intenzita poľa rovná nule za predpokladu, že intenzita sa riadi zákonom prevrátených kvadrátov. Platnosť zákona prevrátených kvadrátov bude teda experimentálne dokázaná, ak sa pokusmi potvrdí, že v uzavretej dutine ľubovoľného tvaru (napr. v guľovej), sa intenzita poľa rovná nule. Takýto experimentálny dôkaz podali Plimpton a Lawton¹ v roku 1936 preskúmaním intenzity elektrostatického poľa vo vnútri kovovej gule, pripojenej na zdroj vysokého potenciálu.

Usporiadanie experimentu je zrejme z obr. 3.8. V uzavretej kovovej guli A s priemerom asi 150 cm je koncentricky na izolačných oporách umiestnená druhá kovová guľa B a v nej citlivý galvanometer G (prístroj, na meranie veľmi malých prúdových impulzov). Vstup galvanometra je pripojený medzi vonkajšiu a vnútornú guľu, takže môže registrovať náboj,

¹ Plimpton, S. J., Lawton, W. E.: Phys. Rev. **50**, 1066 (1936)

ktorý prešiel medzi guľami. Prípadná výchylka galvanometra sa pozoruje opticky pomocou ďalekohľadu D a zrkadlá Z cez veľmi malé otvory O v guľových stenách. Ku guľi A sa oproti izolovanej vodivej uzemnenej podložke pomocou prepínača S striedavo pripája zdroj vysokého napätia VN a skrat na zem. Po pripnutí zdroja sa guľa A istým nábojom nabije. Ak by časť tohto náboja prešla na guľu B , galvanometer by to musel registrovať ako prúdový impulz. Po prepnutí spínača sa guľa A cez skrat vybije, a ak by guľa B bola nabitá, musela by sa tiež vybiť, čo by galvanometer registroval ako opačný prúdový impulz. Experimentátori však nič podobného nepozorovali! Galvanometer neukázal výchylku ani pri nabíjaní, ani pri vybíjaní systému. Aby zvýšili citlivosť metódy, Plimpton a Lawton použili netlmený galvanometrický systém s frekvenciou vlastných kmitov asi 2 Hz a systém napájali striedavým napätím rovnakej frekvencie. Očakávali rezonančné zvýraznenie efektu ak by bol veľmi slabý, ale ani táto modifikácia nevedla k merateľným prúdovým impulzom. Na základe tohto experimentu Plimpton a Lawton usúdili, že exponent v Coulombovom zákone sa od hodnoty 2 nemôže líšiť o viac ako $\pm 2 \cdot 10^{-9}$.



Obr. 3.8

3.4 VÝPOČET ELEKTROSTATICKÝCH POLÍ NÁBOJOV NA VODIČOCH

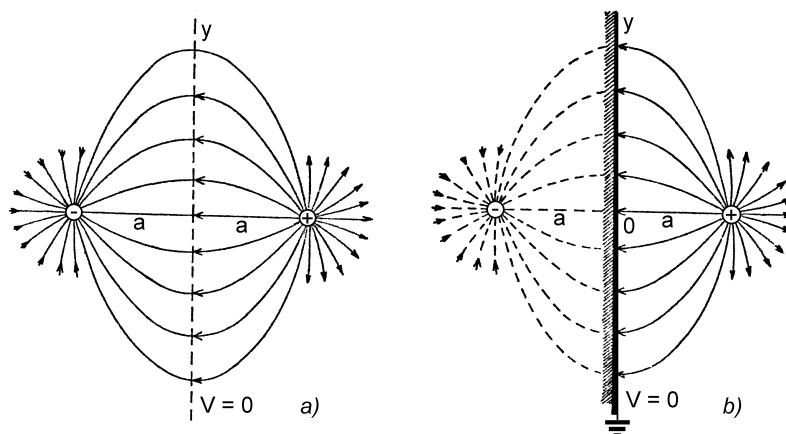
Výpočet elektrostatičeských polí nábojov rozložených na vodičoch má svoje zvláštnosti a úskalía, ktoré spôsobujú, že úlohy o poliach vodičov sa môžu často veľmi komplikovať. Tieto komplikácie súvisia so špecifickými elektrickými javmi, ktoré odlišujú vodiče od dielektrík. Sú to nasledovné skutočnosti:

Na vodičoch sa náboje môžu pohybovať. To znamená, že ak sa k nabitému izolovanému vodivému telesu priblíži iný nabitý alebo nenabitý vodič, v dôsledku elektrickej indukcie dôjde k premiestneniu nábojov na obidvoch telesách, a tým aj k zmene polí telies oproti poliam, ktoré by produkovali izolovane. Ináč povedané, pri priblížení telies nedochádza k jednoduchej superpozícii pôvodných polí izolovaných telies, ale náboje na telesách sa preskupujú tak, aby systém mal minimálnu elektrostatickú energiu (Thomsonova veta).

Povrch telesa je ekvipotenciálnou plochou, čo naopak môže niekedy situáciu zjednodušiť. Vodivé telesá, nabitá alebo nenabitá, predstavujú uzavreté plochy konštantného potenciálu. Vo všeobecnosti úlohy, v ktorých sú zadané oblasti konštantného alebo nulového potenciálu, patria do skupiny okrajových úloh, ktorých riešenia vyhovujú Laplaceovej rovnici (2.155). Tieto úlohy sa vo väčšine prípadov nedajú analyticky riešiť. Dnes, v dobe počítačov, ich však možno s ľubovoľnou presnosťou riešiť numericky.

Existuje skupina úloh, pri riešení ktorých sa využíva fakt, že povrch vodivého telesa je ekvipotenciálnou plochou. Metóda riešenia je veľmi poučná a nazýva sa **metódou elektrických zrkadiel**. Spočíva v tom, že k vodivým telesám s danou geometriou, ktorých potenciály sú známe, sa hľadajú také jednoduché rozloženia bodových nábojov, ktorých niektoré ekvipotenciálne plochy sú identické s povrchovými plochami uvedených telies. Na ilustráciu možno uviesť úlohu, z ktorej je zrejмый pôvod názvu metódy:

Pred nekonečnou vodivou uzemnenou rovinou je v kolmej vzdialenosti a umiestnený bodový náboj $+q$. Aké elektrické pole vytvorí náboj v svojom okolí? Aká sila pôsobí na náboj? Akú prácu treba vykonať pri prenosení náboja $+q$ do nekonečna? Aké je rozloženie plošného indukovaného náboja na rovine? Aký je celkový indukovaný náboj na celej nekonečnej rovine?



Obr. 3.9

Na prvý pohľad sa položené otázky zdajú zložité, až dokiaľ si neuvedomíme nápadnú podobnosť tejto úlohy s úlohou o dvojici bodových nábojov $\pm q$, uložených vo vzájomnej vzdialenosti $d = 2a$, podľa obr. 3.9a. Táto úloha bola riešená v odseku 2.2 o elektrickom poli. Pole na osi dvojice a v rovine prechádzajúcej symetricky medzi nábojmi je dané výrazmi (2.17), (2.18) a (2.20). Siločiaru poľa sú znázornené na obr. 3.9a, plocha nulového potenciálu je nekonečná rovina umiestnená v strede medzi nábojmi. Ak sa do tejto roviny umiestni vodivá rovinná nenabitá plocha, pole dvojice nábojov sa

vôbec nezmení, avšak už nebude produktom dvojice bodových nábojov. Vpravo od roviny bude polom bodového náboja $+q$ a záporného indukovaného náboja na pravom povrchu vodivej roviny. Celkový indukovaný náboj na rovine $Q = -q$, čo vyplýva napríklad zo skutočnosti, že všetky siločiarly bodového náboja končia kolmo na rovine, na ktorej navyš platí Coulombova veta. O týchto skutočnostiach sa čitateľ môže presvedčiť jednoduchou integráciou intenzity podľa výrazu (2.20) cez celú nekonečnú rovinu (s voľbou plošných elementov $dS = 2\pi y dy$ v tvare medzikruží, v integračných hraniciach y od 0 po ∞), teda $Q = -\epsilon_0 \int_S E(y) dS$. Vľavo od roviny je pole bodového náboja $-q$ a celkového indukovaného náboja $+q$ s rovnakými vlastnosťami. Tieto dve polia na každej strane roviny sú navzájom úplne nezávislé. Ak by sa napr. bodový náboj $-q$ odstránil, indukovaný náboj $+q$ na rovine vľavo by zostal, ale by sa rozložil na veľmi veľkej (nekonečnej) rovine rovnomerne so zanedbateľnou (nulovou) hustotou, takže vľavo od roviny by vzniklo slabé (nulové) homogénne pole. Ak sa rovina nakoniec uzemní, náboj $+q$ bude odvedený do Zeme, náboj $-q$ na rovine zostane, a spolu s $+q$ vytvára pole v pravom polpriestore. Toto pole je ale riešením našej pôvodnej úlohy a celá situácia je znázornená na obr. 3.9b.

Na otázky našej úlohy môžeme teda dať tieto odpovede:

Pole náboja a uzemnenej roviny je na strane náboja také isté ako pole reálneho náboja $+q$ a "zrkadlového" náboja $-q$ umiestneného za rovinou (zrkadlom) vo vzdialenosti a . Za rovinou je pole nulové.

Na náboj q pôsobí taká istá príťažlivá sila, ako sila medzi nábojom a jeho obrazom vzdialeným $2a$, teda

$$f = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}$$

Na prenesenie náboja $+q$ z nekonečna do vzdialenosti a treba vykonať prácu

$$A = -\int_{\infty}^a f da = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a}$$

Na rovine je rozložený indukovaný náboj s plošnou hustotou

$$\sigma(y) = -\epsilon_0 E(y) = -\frac{qa}{2\pi(y^2 + a^2)^{3/2}}$$

kde $E(y)$ je intenzita poľa na povrchu roviny na kružnici s polomerom y okolo stredu symetrie 0 daná vyjadrením (2.20).

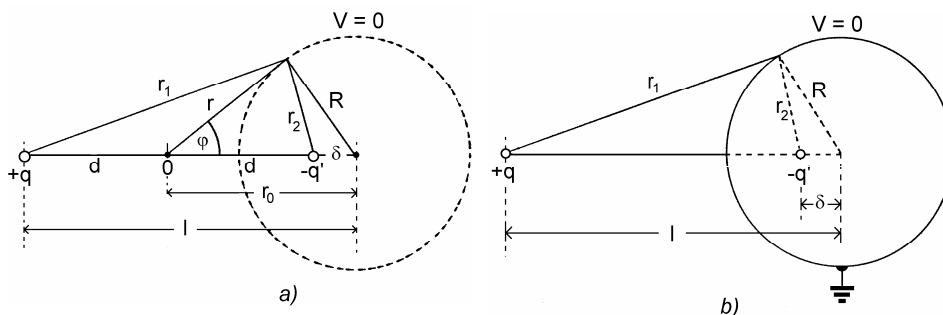
Celkový indukovaný náboj na nekonečnej rovine je $-q$ a možno ho dostať integráciou posledného výrazu po celej rovine už spomínaným spôsobom.

Uvedieme ešte jednu úlohu, v ktorej zrkadlový náboj vystupuje v trochu inom poňatí:

Vo vzdialenosti l od stredu vodivej uzemnenej gule polomeru R ($R < l$) sa nachádza bodový náboj q (obr. 3.10b). Nájdite intenzitu poľa vo vonkajšom priestore gule (vo vnútri gule sa intenzita samozrejme rovná nule).

Čitateľovi predovšetkým prenecháme na dôkaz tvrdenie, že plocha nulového potenciálu dvoch bodových nábojov $+q$ a $-q'$ ($q > q'$), uložených vo vzdialenosti $2d$, je guľová plocha s polomerom

$$R = 2d \frac{qq'}{q^2 - q'^2} \quad (3.3)$$



Obr. 3.10

a so vzdialenosťou jej stredu

$$r_0 = d \frac{q^2 + q'^2}{q^2 - q'^2} \quad (3.4)$$

od stredu symetrie 0 na obr. 3.10a. (Odporúčam vyjadriť vzdialenosti r_1, r_2 pomocou kosínusovej vety a využiť skutočnosť, že na guľovej ploche $V = 0$, teda $qr_2 = q'r_1$. Nakoniec napísať rovnicu kružnice v polárnych súradniciach r, φ).

Ak porovnáme obr. 3.10a a 3.10b vidíme, že naša úloha bude v podstate vyriešená, ak v obr. 3.10b určíme veľkosť "zrkadlového" náboja q' a jeho polohu, napr. jeho vzdialenosť δ od stredu vodivej gule. Pri takomto označení porovnaním oboch obrázkov vidíme, že $2d = l - \delta$ a $r_0 = d + \delta$. Dosadením týchto rovností do výrazov (3.3) a (3.4) dostaneme nové výrazy

$$R = (l - \delta) \frac{qq'}{q^2 - q'^2} \quad (3.5)$$

$$\delta = l \frac{q'^2}{q^2} \quad (3.6)$$

Riešenia týchto rovníc pre q' a δ dávajú hľadané veličiny

$$q' = \frac{R}{l} q \quad \text{a} \quad \delta = \frac{R^2}{l} \quad (3.7)$$

A tak môžeme zhrnúť: Pole vo vonkajšom okolí vodivej uzemnenej gule za prítomnosti bodového náboja je také isté, ako pole dvojice nábojov: náboja $+q$ a zrkadlového náboja $-q' = -Rq/l$, uložených vo vzájomnej vzdialenosti $l - \delta = (l^2 - R^2)/l$.

Jednoduchými úvahami sa okrem toho dá ukázať, že celkový reálny indukovaný náboj na uzemnenej guli sa rovná zrkadlovému náboju $-q' = -qR/l$. Náboj je rozložený tak, že jeho hustota v absolútnej hodnote je najväčšia na priľahlom priesečníku spojnice náboja q so stredom gule, a najmenšia je na opačnej strane guľovej plochy.

Ak je guľová plocha neuzemnená a nenabitá, jej vonkajšie pole je dané uvedenou dvojicou nábojov $+q$ a $-q'$, plus pole bodového náboja $+q'$ umiestneného v strede guľovej plochy.

Ak je guľová plocha neuzemnená, a navyiac nabitá nábojom q_0 , treba k predchádzajúcim nábojom ešte pridať náboj q_0 do stredu guľovej plochy.

Metóda elektrických zrkadiel dovoľuje jednoducho riešiť aj úlohu o elektrickom poli bodového náboja umiestneného necentrálne vo vnútri guľovej plochy (obr. 3.7b). Riešenie tejto úlohy prenechávame čitateľovi.¹

3.5 KAPACITA VODIČOV A KONDENZÁTOROV

Vodiče a sústavy vodičov majú jednu, z praktického hľadiska veľmi dôležitú, elektrickú vlastnosť, a to schopnosť prijať elektrický náboj, čo vedie k zvýšeniu jeho elektrického potenciálu ako celku. Potenciál vodivého telesa pritom lineárne závisí od náboja na ňom. Ak na telese zväčšíme náboj o hodnotu Δq , vzrastie jeho potenciál o zodpovedajúcu hodnotu ΔV , podľa vzťahu

$$\Delta q = C\Delta V \quad (3.8)$$

kde konštanta úmernosti C sa nazýva kapacita vodiča. Kapacita osamoteného vodiča závisí iba od veľkosti povrchovej plochy vodiča a veľmi zložitým spôsobom od jej tvaru. Záležitosť je natoľko komplikovaná, že nakoniec jediným vodivým telesom, pre ktoré vieme jednoducho vypočítať pomer náboja a potenciálu, teda jeho kapacitu, je guľové teleso. Ak na vodivej guli s polomerom R zväčšíme náboj o Δq , zvýši sa jej potenciál o

$$\Delta V = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

S využitím vzťahu (3.8) dostaneme pre kapacitu vodivej gule výraz

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (3.9)$$

z ktorého vidíme, že kapacita vodivej gule je priamo úmerná jej polomeru R , čo sa vlastne dalo očakávať.

¹ Je zaujímavé pripomenúť, že metóda elektrických zrkadiel bola známa už tvorcomi elektromagnetickej teórie J. C. Maxwellovi.

Kapacita je dôležitý elektrotechnický parameter vodičov, ktorý treba počítať, resp. merať. Jednotku kapacity možno stanoviť zo vzťahov (3.8), alebo (3.9). Podľa týchto vzťahov jednotkovú kapacitu má vodič, ktorého potenciál sa zvýši o jeden volt, ak naň privedieme náboj jeden coulomb. Táto jednotka má názov **farad** s označením a rozmerom

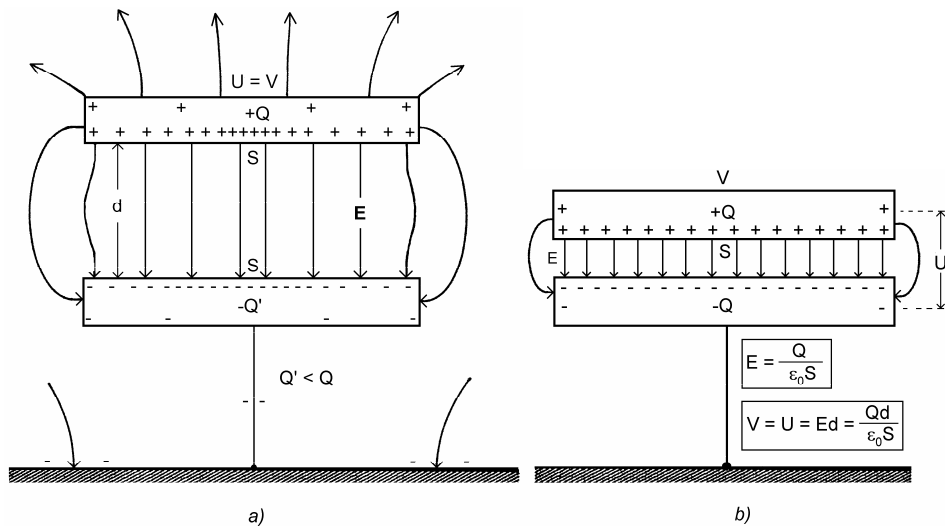
$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}} = 1 \text{ m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$$

Z výrazu (3.9) vidno, prečo sa elektrická konštanta poľa ϵ_0 udáva v jednotkách F/m.

Jednotka 1 F je veľmi veľká. Takúto kapacitu osamotenými vodičmi nemožno prakticky realizovať. Ak by napr. osamotená kovová guľa mala mať kapacitu 1 F, musela by podľa výrazu (3.9) mať polomer

$$R = \frac{1 \text{ F}}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ m}$$

ktorý je asi 1400-krát väčší ako polomer Zeme. Elektrotechnická prax však vyžaduje kapacity až 10^{-3} F pri rozumne malých rozmeroch, čo vylučuje ich realizáciu osamotenými vodičmi. Avšak z dvoch vodičov možno vytvoriť veľmi veľké kapacity pri takých rozmeroch, že sa pohodlne zmestia do dlane. Sústava dvoch vodičov vhodného tvaru a vhodne usporiadaných sa nazýva **kondenzátor**.



Obr. 3.11

K pojmu kondenzátor sa môžeme dopracovať nasledovnou úvahou. Predpokladajme, že nad veľkou vodivou uzemnenou platňou sa nachádza planparalelná iná vodivá platňa s nábojom Q a s plošným obsahom S na jednej strane, (pozri obr. 3.11a). Hrúbka platní je na obrázku kvôli kresleniu prehnane veľká, avšak pre funkčnosť systému nepodstatná; obyčajne ide o tenké kovové fólie. Nábojom Q indukovaný záporný náboj $-Q'$ na uzemnenej platni je v absolútnej hodnote menší ako Q . Sústava nábojov vytvorí elektrostatické pole,

ktoré pri veľkej vzdialenosti platní bude pomerne zložité a jeho siločiaru budú mať priebeh ako na obr. 3.11a. Horná platňa je na istom potenciáli V oproti Zemi, a tento potenciál (alebo napätie medzi rovinami $U = V$) možno teoreticky vypočítať integráciou intenzity od Zeme až po nabitú platňu po ktorejkoľvek siločiare (samozrejme každý takýto integrál $-\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ dá rovnakú hodnotu napätia U). Bez ohľadu na to, že výpočet integrálu je v analytickom tvare zložitý alebo nemožný, napätie U závisí iba od veľkosti náboja Q , veľkosti nabitých plochy a jej vzdialenosti d od uzemnenej platne. Pomer náboja a napätia Q/U medzi platňami takto definuje kapacitu C sústavy nabitých platní a uzemnená platňa spolu so Zemou. Nevýhodou tejto sústavy môžu byť jej ešte stále veľké rozmery, ale hlavne nejednoznačnosť potenciálu V (a teda aj kapacity), ktorý závisí od prípadnej prítomnosti iných vodivých aj nevodivých predmetov v okolí.

Situácia sa stane prehľadnejšou, ak nabitú platňu začneme približovať k uzemnenej. Elektrické pole sa začne sústreďovať medzi platňami a bude stále viac podobné homogénnemu poľu medzi dvoma nekonečnými rovinami, nabitými konštantnou plošnou hustotou náboja, pretože aj náboj Q sa bude stále rovnomernejšie rozkladať na dolnej, privrátenej ploche nabitých platní. Pri istej, dostatočne malej vzdialenosti, je situácia zobrazená na obr. 3.11b. Elektrické pole je už relatívne dobre uzavreté medzi platňami až na malé okrajové efekty. Kladný náboj Q a prakticky rovnako veľký opačný náboj $-Q$ sú rozložené rovnomerne s hustotami $\sigma = \pm Q/S$ a medzi rovinami S vytvárajú takmer homogénne pole

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

Napätie medzi rovinami sa pri tomto homogénnom poli rovná súčinu intenzity a vzdialenosti rovin

$$U = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

Sústava práve uvažovaných planoparalelných vodivých platní, každá s privrátenu plochou S , uložených veľmi blízko seba (malé d), takže pole je dostatočne dobre uzavreté medzi platňami, sa nazýva **platňový** (doskový) alebo **rovinný kondenzátor**. Pre jeho kapacitu danú pomerom Q/U z posledného vzťahu plyní

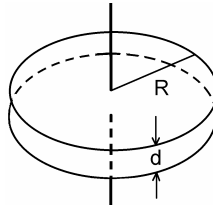
$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (3.10)$$

Kapacita opísaného doskového kondenzátora je teda priamo úmerná ploche S jednej roviny a nepriamo úmerná vzdialenosti rovin d . Roviny môžu predstavovať napr. tenké hliníkové fólie oddelené izolačnou dielektrickou fóliou, ktorá zabezpečuje konštantnú vzdialenosť d , izoluje vodivé fólie a súčasne zvyšuje kapacitu kondenzátora o faktor $\epsilon_r \geq 1$, ktorý je bezrozmernou materiálovou konštantou izolačnej fólie a nazýva sa **relatívna permitivita** dielektrika. Pôvod a význam pojmu permitivity bude vysvetlený v odseku 4.3 o dielektrikách. Kapacita doskového kondenzátora s dielektrikom je teda daná výrazom

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \quad (3.11)$$

Treba však mať na pamäti, že výraz (3.11) platí približne, pretože sa pri jeho odvodení predpokladalo, že celé náboje $\pm Q$ sú rozložené striktne rovnomerne na privrátených plochách kondenzátora a pole je ideálne homogénne (inak povedané – zanedbali sme okrajové efekty). V skutočnosti kapacita bude vždy väčšia ako tá, ktorú udáva výraz (3.11), pretože celkové náboje v interakcii sú väčšie o tie, ktoré sa nachádzajú na okrajoch a vonkajších stranách dosiek kondenzátora. Ak má kondenzátor kruhové dosky s polomerom R , takže $S = \pi R^2$ (pozri obr. 3.12), potom skutočná kapacita takého kondenzátora je daná výrazom

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} f = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \pi R^2}{d} f \quad (3.12)$$



Obr. 3.12

kde f je korekčný faktor závislý od pomeru d/R , získaný numerickým modelovaním reálneho poľa doskového kondenzátora. Pre dostatočne malý pomer d/R je hodnota f blízka jednotke. Niekoľko hodnôt f je uvedených v tabuľke 3.

Tabuľka 3

d/R	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
f	1,286	1,167	1,094	1,042	1,023

Doskový kondenzátor je objemovo podstatne výhodnejší ako osamotená guľa rovnakej kapacity. Ak porovnáme vzťahy (3.9) a (3.11) dostaneme súvis medzi polomerom gule R a pomerom S/d kondenzátora s rovnakými kapacitami v tvare

$$R = \frac{\epsilon_r S}{4\pi d} \quad (3.13)$$

Ak máme napr. kondenzátor s plochou dosiek 1 m^2 vzdialených 1 mm vo vákuu ($\epsilon_r = 1$), potom má podľa vzťahu (3.13) rovnakú kapacitu, ako guľa s polomerom $R \approx 80 \text{ m}$. Tu je každý komentár zbytočný! Kondenzátor daných rozmerov môžeme urobiť z dvoch hliníkových páskových fólií (elektrod kondenzátora) oddelených izolačnou fóliou a zvinutých do malého valčeka (aká je asi jeho kapacita?).

Poučný je výpočet kapacity guľového kondenzátora, aj keď sám kondenzátor nemá veľkú praktickú hodnotu. **Guľový kondenzátor** pozostáva z dvoch koncentrických guľových vodivých plôch s polermi a a b (nech $a < b$). Ak vnútornú guľu nabijeme napr. nábojom $-Q$ (ale ako?), vznikne v guľovej vrstve medzi polermi a a b radiálne elektrické pole s intenzitou

$$E(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

pre $a < r < b$. Tým istým výrazom bude dané aj pole v okolí kondenzátora, teda pre $b < r < \infty$, pretože na vnútornej ploche väčšej gule je naindukovaný náboj $+Q$ a na jej vonkajšej strane náboj $-Q$. Ak na vonkajšiu guľu privedieme kompenzačný náboj $+Q$ alebo ju uzemníme, kondenzátor ako celok bude nenabitý a v jeho uvažovanej guľovej vrstve bude ideálne uzavreté pole, ktorého intenzita je daná posledným výrazom. Napätie U na kondenzátore dostaneme integráciou intenzity $E(r)$ od a po b , teda

$$U = -\int_a^b E(r)dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

z čoho kapacita Q/U guľového kondenzátora je daná vyjadrením

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (3.14)$$

Kapacita guľového kondenzátora je výrazom (3.14) daná presne, pretože pole kondenzátora je uzavreté. Ak guľová vrstva kondenzátora je tenká, môžeme polomer b vyjadriť ako $b = a + \delta$, kde $\delta \ll a, b$. V takom prípade $b - a = \delta$ a $ab = a^2 + a\delta \approx a^2$, ďalej $4\pi a^2 = S_{ef}$ je efektívna plocha guľového kondenzátora, takže za daných podmienok výraz (3.14) môžeme napísať v tvare

$$C \approx \frac{\epsilon_0 S_{ef}}{\delta} \quad (3.15)$$

čo je formálne rovnaký výraz ako (3.10) pre doskový kondenzátor. Guľový kondenzátor nemá veľkú praktickú hodnotu, pretože ňaj nemožno pripojiť kontakty bez porušenia guľovej symetrie a má nepriaznivo nízky pomer kapacita/objem.

Oveľa väčší praktický význam má **valcový kondenzátor** – sústava dvoch koaxiálnych valcových vodivých plôch s polermi a a b ($a < b$) vyobrazených na obr. 3.13. Predpokladajme, že kondenzátor je dostatočne dlhý, takže po jeho nabití okrajové efekty možno zanedbať. Privedme na vnútorný valec kondenzátora náboj $+Q$ a na vonkajší náboj $-Q$. Vo vnútri kondenzátora (t. j. vo valcovej vrstve $a < r < b$) je osovo radiálne elektrické pole s intenzitou

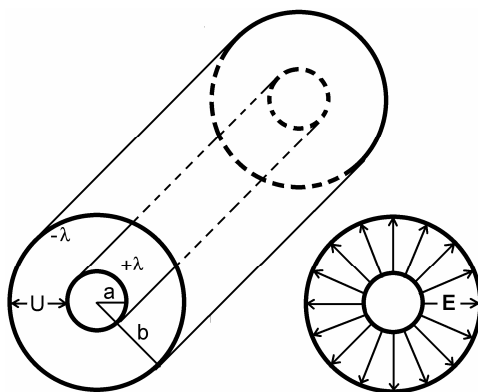
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

kde $\lambda = Q/l$ je dĺžková hustota náboja na kondenzátore. Vo vonkajšom okolí kondenzátora je elektrické pole nulové. Napätie na kondenzátore

$$U = V_a - V_b = -\int_b^a E(r)dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

a kapacita C' jednotkovej dĺžky kondenzátora daná pomerom λ/U je podľa tohto vzťahu

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad [\text{F/m}] \quad (3.16)$$



Obr. 3.13

Ak je vnútrajšok kondenzátora vyplnený tuhým dielektrikom, treba posledný výraz vynásobiť jeho relatívnou permitivitou ϵ_r . Valcové kondenzátory sa dnes vyrábajú zriedkavo, napriek tomu výraz (3.16) má veľký význam. V telekomunikácii sa na prenos signálov na veľké vzdialenosti používajú koaxiálne káble, ktoré možno považovať za veľmi dlhé valcové kondenzátory. Jeden meter ich dĺžky má kapacitu danú posledným výrazom. Kapacita na jednotku dĺžky kábla je jedným s primárnych parametrov koaxiálneho vedenia. Spolu s jeho ďalším primárnym parametrom, a to indukčnosťou na jednotku dĺžky, udáva vlnovú impedanciu (vlnový odpor) kábla, ale o tom pojednáme až neskôr.

V starších učebniciach elektromagnetizmu sa venoval priestor aj technickým otázkam výroby rôznych typov kondenzátorov. Domnievam sa, že pri dnešnom stave rozvoja elektrotechnických technológií by na obmedzenom priestore nebolo možné kvalifikovane opísať výrobu kondenzátorov, čo ani nie je naším cieľom, a preto čitateľov odkazujem na technickú a firemnú literatúru, prípadne katalógy elektrotechnických súčiastok. Spoločná pre všetky typy vyrábaných kondenzátorov je skutočnosť, že sú tvorené systémom dvoch vodivých plôch oddelených dielektrikom (alebo uložených vo vákuu) v takej tesnej vzdialenosti, že elektrické pole nabitého kondenzátora je v ňom úplne uzavreté. Dva typy kondenzátorov môžu poslúžiť ako príklad pozoruhodnej invencie moderných technológií a výrobcov – je to **kapacitná polovodičová dióda** (varikap, alebo varaktor) a **tantalový kondenzátor** s tuhým elektrolytom.



Kapacitná dióda je v podstate plošná polovodičová dióda pripojená na napätie v závernom smere. V takomto zapojení je dióda nevodivá a medzi svojimi prívodmi predstavuje kondenzátor, ktorého kapacita je daná šírkou PN prechodu (elektródy kondenzátora). Zmenou napätia možno meniť šírku PN prechodu, a tým aj kapacitu diódy. Varikap je teda nízkokapacitný kondenzátor s premennou kapacitou riadenou napätím.


Tantalový kondenzátor je rafinovaným typom vysokokapacitného kondenzátora veľmi malých rozmerov. Má kvapkový tvar priemeru rádu milimetrov pri kapacitách až desiatok mikrofaradov ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$). "Kvapku" tvorí vysokoporézny sintrovaný oxid tantalu Ta_2O_5 , ktorý má obrovskú efektívnu povrchovú plochu a tvorí jednu elektródu kondenzátora. Druhou elektródou je do štruktúry vbudovaný oxid mangánu MnO_2 . Hrúbka oxidovej vrstvy určuje vzdialenosť elektród kondenzátora a je rádu niekoľko desiatok až stoviek nanometrov. Veľký pomer S/d zaručuje vysokú kapacitu kondenzátora.

V technickej praxi sa používajú kondenzátory s kapacitou od jednotiek pikofaradov pF ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$), cez nanofarady nF ($1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$) a mikrofarady μF ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$), až po milifarady mF ($1 \text{ mF} = 10^{-3} \text{ F}$).

Druhým technickým parametrom kondenzátora, popri jeho kapacite, je pracovné alebo **maximálne prípustné napätie**, ktoré spolu s kapacitou obyčajne býva vyznačené na kondenzátore. Pracovné napätie závisí od použitého dielektrika a jeho hrúbky medzi elektródami kondenzátora. Kondenzátory s vysokou kapacitou určené na vysoké napätie musia mať dostatočne veľkú hrúbku dielektrika pri súčasne veľkej ploche medzi elektródami, čo determinuje jeho veľký objem, teda veľký objem kondenzátora. S tým musia konštruktéri vysokonapäťových elektrických zariadení počítať. Prekročenie maximálneho napätia na kondenzátore môže mať za následok jeho elektrický prieraz a zničenie. Maximálne prípustné intenzity elektrických polí v rôznych dielektrických materiáloch sú uvedené v odseku 4.4 (tabuľka 5).

3.6 ELEKTRICKÉ OBVODY S KONDENZÁTORMI

Kondenzátor je jeden z početných elektrických prvkov, ktorý spolu s ďalšími prvkami, ako sú rezistory, cievky, diódy, tranzistory atď. môže byť súčasťou zložitých elektronických zapojení. Tieto zapojenia graficky znázorňujeme ich schémami. Na kreslenie schém sú dohodnuté symboly, ktorými sa prvky zobrazujú. Pre jednoduchý kondenzátor je takýmto medzinárodne dohodnutým symbolom znak  alebo pre polarizovaný elektrolytický kondenzátor  (nesmie sa v zapojení pripojiť s opačnou polaritou).

Naším ďalším cieľom bude posúdiť elektrické vlastnosti rôznych spojení kondenzátorov, ak sa také spojenie pripojí na jeden alebo viac zdrojov pevných napätí. Takéto zdroje (ako napr. plochá batéria troch 1,5 V suchých článkov) budeme v schémach zobrazovať dohodnutým symbolom  a ich elektromotorické napätia (pozri odsek 5.3) označovať \mathcal{E} (kladná hodnota). Kondenzátory možno účelne spájať, napr. zaradiť za sebou (sériovo) a spolu so zdrojom vytvoriť uzavretú slučku alebo ich spojiť vedľa seba (paralelne), prípadne vytvárať kombinácie oboch predchádzajúcich. Možno tiež vytvárať spojenia vyššej zložitosti, nazývané mostíkové, ktoré nie sú kombináciou predchádzajúcich. Takto môžu vzniknúť zložité siete pozostávajúce z kondenzátorov a zdrojov elektromotorických napätí. Kondenzátory a zdroje vytvárajú v sieťach uzavreté obvody a v uzloch sa tieto

súčiastky spájajú. Ak sú v ľubovoľnom takom zapojení známe kapacity kondenzátorov C_j a napätia zdrojov \mathcal{E}_k , potom analýzou zapojenia možno určiť náboje Q_j a napätia U_j na jednotlivých kondenzátoroch.

Analýzou elektrických obvodov sa v celej šírke zaoberá teoretická elektrotechnika, jej záber však presahuje rámec našich úvah a potrieb. Celá táto analýza sa však zakladá na dvoch nám už známych princípoch:

1. Integrál intenzity elektrostatického poľa \mathbf{E} po uzavretej dráhe l prechádzajúcej prírodnými vodičmi, kondenzátormi a zdrojmi sa rovná nule, t. j.

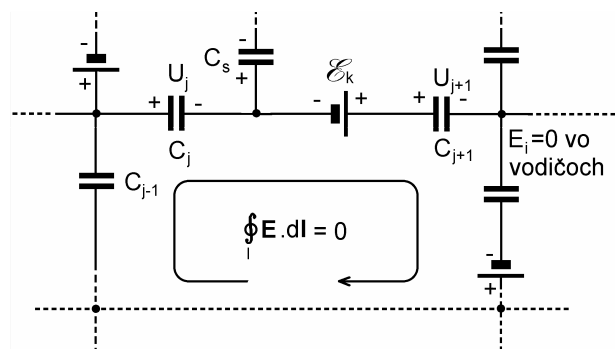
$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} + \oint_l \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{l} + \oint_l \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.17)$$

kde \mathbf{E}_i , \mathbf{E}_j a \mathbf{E}_k sú postupne intenzity elektrického poľa vo vodičoch, v kondenzátoroch a v zdrojoch. Dráha l prechádza súčiastkami v nejakej uzavretej slučke uvažovanej elektrickej siete. Orientácia slučky je ľubovoľná (napr. v rovine pravotočivá – pozri obr. 3.14). Posúďme teraz príspevky troch integrálov v rovnici (3.17):

a) Integrály intenzity \mathbf{E}_i pozdĺž spojovacích vodičov v obvode. Keďže vo vodičoch $\mathbf{E}_i = 0$, všetky takéto integrály sú nulové, a teda časti dráhy l pozdĺž spojovacích vodičov k hodnote integrálu (3.17) neprispievajú.

b) Integrály typu $\int \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{r}_j$ počítané cez j -tý kondenzátor v obvode. Vektor \mathbf{E}_j je intenzita elektrického poľa v j -tom kondenzátore a $d\mathbf{r}_j$ je vektorový element dráhy v kondenzátore. Posledné dva vektory sú kolieárne, intenzita poľa má konštantnú hodnotu $E_j = U_j / d_j$, kde $U_j = Q_j / C_j$ je napätie na j -tom kondenzátore a d_j je vzdialenosť dosiek kondenzátora. Absolútna hodnota integrálu je teda

$$\int_0^{d_j} \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{r}_j = \frac{U_j}{d_j} \int_0^{d_j} dr_j = U_j \quad (3.18)$$



Obr. 3.14

Znamienko napätia U_j na kondenzátore v obvode závisí od smeru intenzity poľa v kondenzátore – je kladné ak v kondenzátore vektory \mathbf{E}_j a $d\mathbf{r}_j$ majú rovnaký smer a záporné, ak vektory majú opačný smer. Keďže napätia na kondenzátoroch sú pri analýze neznáme, znamienko vyjde ako súčasť výsledku riešenia.

c) Integrály typu $\int \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{r}_k$ cez zdroje napätí, kde \mathbf{E}_k je stacionárne pole v zdroji (smerujúce od kladného pólu k zápornému). Fyzikálne procesy v zdrojoch budú predmetom analýzy v elektrodynamike. Pre účely tohto odseku je dôležité, že elektromotorické napätie k -tého zdroja \mathcal{E}_k možno opísať formálnou vnútenou (hnacou) intenzitou $\mathbf{E}_{emn} = -\mathbf{E}_k$ neelektrického pôvodu v zdroji, ktorá smeruje od záporného pólu zdroja ku kladnému a v zdroji vykonáva prácu. Formálne môžeme napísať

$$\int \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{r}_k = -\int \mathbf{E}_{emn} \cdot d\mathbf{r}_k = -\mathcal{E}_k \quad (3.19)$$

Ak je zdroj zapojený tak, že integračná dráha prechádza od záporného pólu cez zdroj ku kladnému, teda proti smeru \mathbf{E}_k , vystupuje \mathcal{E}_k v rovnici (3.17) so záporným znamienkom, v opačnom prípade s kladným.

Ľavá strana rovnice (3.17) je daná súčtom napätí U_j na n kondenzátoroch podľa výrazov (3.18) a elektromotorických napätí \mathcal{E}_k od p zdrojov podľa výrazu (3.19) v uzavretej slučke a s ohľadom na znamienka. Platí teda

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{j=1}^n U_j - \sum_{k=1}^p \mathcal{E}_k = 0$$

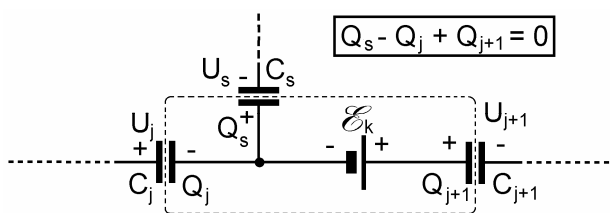
alebo

$$\sum_{k=1}^p \mathcal{E}_k = \sum_{j=1}^n U_j = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{C_j} \quad (3.20)$$

pretože $U_j = Q_j/C_j$. Tvrdenie (3.17), že integrál intenzity elektrického poľa po uzavretej dráhe v obvode zloženom z kondenzátorov a zdrojov sa rovná nule, je ekvivalentné tvrdeniam (3.20), že **algebraický súčet elektromotorických napätí zdrojov sa rovná súčtu napätí na kondenzátoroch v uzavretej slučke**.

2. Druhý princíp, ktorý sa využíva pri analýze sietí s kondenzátormi, je v podstate zákon zachovania elektrického náboja, presnejšie skutočnosť, že na nenabitom vodivom telese sa celkový indukovaný náboj rovná nule. "Nenabítym vodičom v obvode" je vodivé spojenie dvoch alebo viac elektród kondenzátora v uzle, pričom v ceste vodivého spojenia môže byť aj zdroj, pretože jeho celkový kladný aj záporný náboj sa rovná nule (pozri obr. 3.15). Na jednotlivých elektródach spojených do uzla sa nachádzajú indukované náboje. Ak je takto spojených l elektród, potom súčet všetkých ich nábojov sa rovná nule, teda

$$\sum_{i=1}^l Q_i = \sum_{i=1}^l U_i C_i = 0 \quad (3.21)$$



Obr. 3.15

kde Q_i je náboj na i -tej elektróde spojenia, U_i je napätie príslušného kondenzátora a C_i je jeho kapacita. Na rovnicu (3.21) existuje ešte jeden zaujímavý pohľad, ktorý potvrdzuje jej principiálnosť. Napätie na i -tom kondenzátore $U_i = E_i d_i$, kde E_i je intenzita elektrického poľa v kondenzátore a d_i je vzdialenosť jeho elektród. Kapacita i -tého kondenzátora $C_i = \varepsilon_0 S_i / d_i$, kde S_i je jeho efektívna plocha. Dosadením týchto vyjadrení do (3.21) dostaneme zaujímavý vzťah

$$\sum_{i=1}^l E_i S_i = 0$$

Suma predstavuje súčet parciálnych tokov intenzity poľa cez jednotlivé kondenzátory zapojené v uzle a táto suma sa rovná nule. Je to vlastne Gaussov zákon aplikovaný na l kondenzátorov zapojených v uzle, ktorý hovorí, že celkový náboj spojených elektród kondenzátorov sa rovná nule.

Sústavy rovníc typu (3.20) a (3.21) umožňujú analýzu akéhokoľvek zapojenia kondenzátorov a zdrojov v elektrickej sieti. Každá elektrická sieť pozostáva z vetiev pospájaných v uzloch. Vetvy predstavujú kondenzátory, alebo zdroje, alebo ich sériové spojenia. Pre účely našej analýzy sú uzlami v sieti miesta, v ktorých sú spojené vždy najmenej tri vetvy. Uzol s dvoma vetvami (s dvoma elektródami) je degenerovaný, pretože poskytuje jedinú informáciu, že príslušné spojené elektródy majú rovnako veľký náboj opačného znamienka. Ak sieť s p uzlami obsahuje zdroje so známymi elektromotorickými napätiami a n známymi kondenzátorov, potom analýzou siete treba nájsť n napätí U_i , alebo n nábojov $Q_i = C_i U_i$ na jednotlivých kondenzátoroch. K tejto analýze treba zostaviť n lineárne nezávislých rovníc typu (3.20) a (3.21). Spôsob výberu rovníc je nasledovný: V sieti možno nájsť m nezávislých slučiek takých, že žiadna z nich nepozostáva z už vytvorených slučiek (ináč povedané – každá zo slučiek obsahuje aspoň jednu aspoň vetvu ktorá nie je v žiadnej inej slučke). Pre týchto m slučiek možno napísať m rovníc podľa (3.20), ktoré sú lineárne nezávislé, t. j. také, že žiadna z nich nie je lineárnou kombináciou ostatných. Zostávajúcich $n - m$ rovníc možno napísať pre nezávislé uzly, v ktorých sú spojené elektródy so svojimi nábojmi, teda rovnice podľa (3.21). Takých nezávislých uzlov v sieti je $p - 1$. V teórii elektrických sietí sa dokazuje, že počet rovníc potrebných pre analýzu je práve $m + p - 1 = n$.

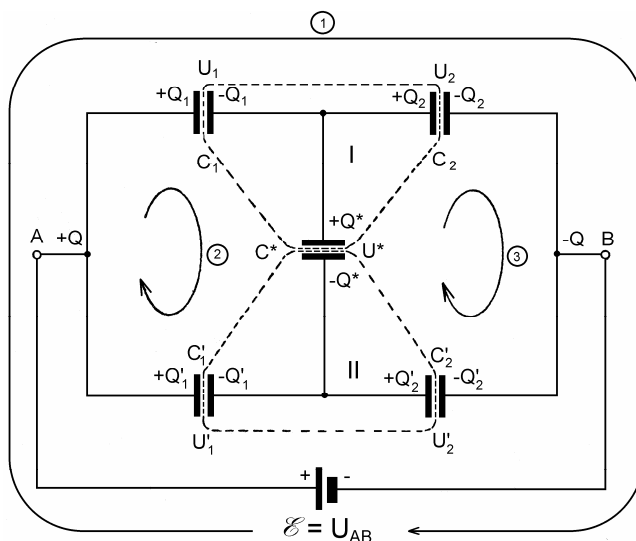
Čitatelia, ktorí poznajú formalizmus analýzy odporových alebo impedančných elektrických sietí pomocou Kirchhoffových zákonov, si určite všimli, že tu prezentovaný formalizmus je pozoruhodnou elektrostatickou analógiou Kirchhoffových zákonov.

Z matematického hľadiska daná úloha vedie na riešenie sústavy lineárnych algebraických rovníc pre neznáme U_i alebo $Q_i = C_i U_i$. Ak čitateľovi-študentovi nie je známy spôsob riešenia takýchto úloh, nech sa poradí so svojím učiteľom algebry.

Na ilustráciu analýzy elektrickej siete s kondenzátormi zostavíme sústavu potrebných rovníc pre veľmi zaujímavé a v praxi dôležité zapojenie známe pod názvom kapacitný most. Zapojenie je zrejme z obr. 3.16. Štvorica kondenzátorov $C_1 - C_2$ a $C_1' - C_2'$ je v strede "premostená" kondenzátorom C^* a celý systém zľava i sprava je pripojený k zdroju elektromotorického napätia \mathcal{E} . Našou úlohou je pri známom elektromotorickom napätí zdroja \mathcal{E} , nájsť napätia U_1, U_2, U_1', U_2' a U^* (alebo im zodpovedajúce náboje) na piatich známých kondenzátoroch. Na riešenie úlohy treba vyššie opísaným spôsobom zostaviť päť lineárne nezávislých rovníc. V zapojení možno zostrojiť tri (ale nie viac)

nezávislé uzavreté slučky, napríklad slučky 1, 2 a 3 tak, ako na obrázku. Treba povedať, že to nie je jediný možný spôsob výberu slučiek – v danej úlohe existuje celkove 16 spôsobov výberu. Pre vybrané slučky možno podľa vzťahov (3.20) napísať rovnice

$$\left. \begin{aligned} U_1 + U_2 &= \mathcal{E} \\ U_1 + U^* - U'_1 &= 0 \\ U_2 - U'_2 - U^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$



Obr. 3.16

Voľba polarity napätí na kondenzátoroch je ponechaná na ľubovôľu riešiteľa. Ak je numerický výsledok riešenia kladný, voľba bola správna, ak výsledok je záporný, polarita napätia je opačná. Systém rovníc je neúplný, treba ho doplniť dvoma rovnicami typu (3.21) pre nezávislé uzly. Podľa našej definície daná sieť má štyri uzly. Napätie medzi uzlami A a B je známe ($U_{AB} = \mathcal{E}$). Z troch zvyšných uzlov dva nezávislé – I a II, sú vyznačené na obrázku. Pre tieto uzly platia rovnice

$$\left. \begin{aligned} -U_1 C_1 + U_2 C_2 + U^* C^* &= 0 \\ -U'_1 C'_1 + U'_2 C'_2 - U^* C^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Dvojicu rovníc sme mohli vybrať aj ináč, napr. jedna z uvedených rovníc a k nej rovnica pre zvyšný uzol (vpravo, alebo vľavo). Rovnica pre tento uzol má tvar

$$U_1 C_1 + U'_1 C'_1 - U_2 C_2 - U'_2 C'_2 = 0$$

Túto rovnicu však dostaneme sčítaním rovníc systému (3.23) a vynásobením výsledku s (-1). Rovnica je teda lineárnou kombináciou predchádzajúcich dvoch a do systému (3.23) už nepatrí. Riešenie systému (3.22) a (3.23) poskytuje hľadané napätia. Z fyzikálneho

hľadiska je úloha vyriešená a závisí iba od čitateľovej matematickej erudície a trepezlivosti, ako rýchlo sa dopracuje k výrazom pre hľadané napätia.

Vo väčšine prípadov sú zaujímavé iba niektoré napätia, napr. napätie na priečnej vetve mosta, teda na kondenzátore C^* . Toto napätie je dané výrazom

$$U^* = \mathcal{E} \frac{C_1 C_2' - C_1' C_2}{(C_1' + C_2')(C_1 + C_2) + C^*(C_1 + C_2 + C_1' + C_2')} \quad (3.24)$$

Z výsledku vidíme, že napätie na kondenzátore C^* môže byť kladné (s polaritou vyznačenou na obrázku) alebo záporné, závislé od numerických hodnôt kapacít ostatných kondenzátorov. Môže byť aj nulové vtedy, ak $C_1 C_2' = C_1' C_2$ alebo ak pre pomer kapacít platí

$$\frac{C_1}{C_1'} = \frac{C_2}{C_2'} \quad (3.25)$$

Ak platí podmienka (3.25) hovoríme, že most je v rovnováhe, čo možno dosiahnuť zmenou kapacity jedného z kondenzátorov. Pri známych hodnotách kapacít troch kondenzátorov možno z posledného vzťahu určiť kapacitu štvrtého kondenzátora.

Tieto úvahy majú do istej miery akademický charakter, pretože v praxi sotva niekto vyvažuje kapacitný most pri konštantnom napätí zdroja. Elektrostatické napätia sa totiž dosť obťažne merajú a využitie mosta pre elektrostatické účely je minimálne. Kapacitný most má oveľa väčší význam pri použití striedavých či harmonických napätí. V takom prípade je analýza mostu formálne rovnaká, iba že sa nepracuje s pojmami kapacít, ale kapacitných reaktancií alebo susceptancií (zdanlivých kapacitných odporov alebo vodivostí) a hľadajú sa amplitúdy napätí, resp. prúdov. Takto možno most použiť na meranie kapacít kondenzátorov, alebo napríklad ako posúvač fázy, ak sa do jeho jedného ramena namiesto kapacity zaradi premenný odpor (pozri alternatívnu úlohu 245).

Analýza napätí mostu umožňuje tiež vypočítať jeho kapacitu C_{AB} na svorkách AB pripojeného zdroja. Ako si možno všimnúť, táto kapacita nie je výsledkom jednoduchých sériovo-paralelných radení jednotlivých kapacít, a teda pri jej výpočte nemožno použiť osvedčené pravidlá pre sériové a paralelné spájanie kondenzátorov známe zo strednej školy. Podľa definície je kapacita C_{AB} na svorkách zdroja daná podielom náboja Q privedeného na svorku A zapojenia a napätia U_{AB} medzi svorkami, teda

$$C_{AB} = \frac{Q}{U_{AB}}$$

Keďže $U_{AB} = \mathcal{E}$ a podľa obr. 3.16 $Q = Q_1 + Q_1' = C_1 U_1 + C_1' U_1'$, potom

$$C_{AB} = \frac{C_1 U_1 + C_1' U_1'}{\mathcal{E}} \quad (3.26)$$

Ak sú známe napätia U_1 a U_1' , posledný výraz poskytne zložité vyjadrenie kapacity mostu v tvare

$$C_{AB} = \frac{C_1 C_2 (C_1' + C_2') + C_1' C_2' (C_1 + C_2) + C^* (C_1 + C_1') (C_2 + C_2')}{(C_1 + C_2) (C_1' + C_2') + C^* (C_1 + C_2 + C_1' + C_2')} \quad (3.27)$$

V prípade, že most je vyvážený, napätie na kondenzátore C^* je nulové, kondenzátor možno v zapojení vynechať (alebo ho skratovať) a v poslednom výraze položiť $C^* = 0$ (alebo $C^* = \infty$). Most prejde na jednoduché zapojenie štyroch sériovo-paralelne zapojených kondenzátorov, ktorých kapacita s uvážením podmienky rovnováhy (3.25) sa dá vyjadriť výrazmi

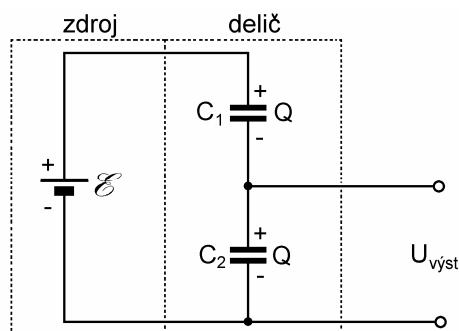
$$C_{AB} = C_1' \frac{C_2 + C_2'}{C_1' + C_2'} = C_2' \frac{C_1 + C_1'}{C_1' + C_2'}$$

Nakoniec uvedieme ešte jeden jednoduchý, ale dôležitý obvod, **kapacitný napäťový delič**. Jeho zapojenie je na obr. 3.17 a analýza veľmi jednoduchá. Obvod má iba degenerované uzly, t. j. také, ktoré spájajú iba dva prvky. Na obidvoch kondenzátoroch sú rovnaké náboje, takže pre jediný uzavretý obvod (slučku) platí

$$\mathcal{E} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

z čoho

$$Q = \mathcal{E} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$



Obr. 3.17

a výstupné napätie

$$U_{výst} = \frac{Q}{C_2} = \mathcal{E} \frac{C_1}{C_1 + C_2} < \mathcal{E} \quad (3.28)$$

Výstupné napätie deliča, ako vidieť, je vždy menšie ako napätie zdroja a je nepriamo úmerné kapacite C_2 medzi výstupnými svorkami. Ak je kapacita nulová ($C_2 = 0$), výstupné napätie sa rovná elektromotorickému napätiu zdroja ($U_{výst} = \mathcal{E}$), ak je kapacita nekonečná ($C_2 = \infty$), výstupné napätie sa rovná nule ($U_{výst} = 0$). Nulovú kapacitu predstavuje neprítomnosť kondenzátora v obvode, nekonečnú predstavuje galvanický skrat. Obidve extrémne hodnoty kapacít sú v praxi problematické, a preto posledné tvrdenie treba brať ako dobré priblíženie ku skutočnosti. Kapacitný delič sa takisto ako kapacitný most

zriedkavo používa so statickými napätiami. Oveľa častejšie je jeho použitie v obvodoch striedavých napätí, v obvodovej elektronike.

3.7 ENERGIA ELEKTROSTATICKEHO POL'A. ENERGIA NABITÉHO KONDENZÁTORA

3.7.1 Energia sústavy bodových nábojov

Ak sa dva bodové náboje q_1 a q_2 nachádzajú v nejakej vzdialenosti r_{12} , majú istú vzájomnú potenciálnu energiu W , pretože na vytvorenie tejto konfigurácie musela byť vykonaná práca prenesením nábojov z nekonečna, kde ich energia sa konvenčne považuje za nulovú.

Podľa odseku 2.8.1. práca vykonaná pri prenesení náboja q_1 v poli iného náboja q_2 na ich vzájomnú konečnú vzdialenosť r_{12} sa rovná súčinu náboja q_1 a potenciálu V_1 budeného nábojom q_2 v mieste svojho suseda. Táto práca vo vákuu sa rovná nadobudnutej vzájomnej potenciálnej energii W dvojice, pretože je $q_1V_1 = q_2V_2$ možno pre energiu dvojice napísať vzťah

$$W = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r_{12}} = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2)$$

kde V_1 a V_2 sú vzájomné potenciály jednotlivých nábojov v mieste druhého náboja

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}} \quad \text{a} \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{21}}$$

($r_{12} = r_{21}$). Ak je v interakcii n nábojov, potom matematickou indukciou dostaneme výraz pre ich vzájomnú energiu v tvare

$$W = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3 + \dots + q_nV_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_iV_i \quad (3.29)$$

kde V_i je potenciál v mieste i -tého náboja budený všetkými $n - 1$ nábojmi s výnimkou i -tého, teda

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{q_j}{r_{ij}} \quad (j \neq i) \quad (3.30)$$

Pomocou výrazov (3.29) a (3.30) možno vyjadriť vzájomnú potenciálnu elektrostatickú energiu n bodových nábojov v tvare

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (j \neq i) \quad (3.31)$$

Treba upozorniť, že každý bodový náboj má ešte vlastnú energiu, ktorá je nekonečná (sústrediť náboj do bodu vyžaduje nekonečnú prácu). Táto energia, napríklad v prípade elektrónu, robí veľké problémy teoretickým fyzikom. Pri výpočtoch energií ju možno brať ako aditívnu konštantu, ktorú nakoniec možno ignorovať.

3.7.2 Energia elektrostatického poľa

Vzťah (3.31), ktorý sme odvodili, má skôr teoretický význam, pretože zriedkakedy potrebujeme počítať statickú energiu sústavy bodových nábojov. Môže však poslúžiť na odvodenie dôležitejšieho výrazu pre energiu nábojov rozložených spojito v priestore, a hlavne výrazu pre energiu elektrostatického poľa takéhoto rozloženia.

Predpokladajme teda, že v nejakej časti priestoru sú náboje rozložené spojito s objemovou hustotou ρ , ktorá je funkciou súradníc. V nekonečne malom objeme $d\tau$ je uložený náboj $dQ = \rho d\tau$. Výraz (3.31) využijeme na vyjadrenie energie spojitého rozloženia nábojov tak, že bodový náboj q_i nahradíme nekonečne malým nábojom dQ a potenciál V_i potenciálom V v objemovom elemente $d\tau$. Súčiny $VdQ = \rho Vd\tau$ potom integrujeme cez celý objem τ , v ktorom sa náboje nachádzajú. Tak dostaneme vyjadrenie energie spojitého rozloženia nábojov v tvare

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau \quad (3.32)$$

Tento spôsob vyjadrenia energie spojitého rozloženia nábojov nie je však výhodný, pretože zriedkakedy poznáme ρ a V , častejšie poznáme intenzitu poľa \mathbf{E} . Vzťah upravíme tak, že objemovú hustotu náboja vyjadríme diferenciálnym tvarom Gaussovhovho zákona

$$\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}$$

Výraz (3.32) pre energiu prejde takto na tvar

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau \rightarrow \infty} V \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau$$

Všimnite si, že v poslednom výraze sme hranicu integrácie rozšírili na celý nekonečný objem, pretože pokiaľ nie sú iné obmedzenia, pole tých nábojov, ktoré sú v konečne, sa môže rozprestierať do nekonečna. Výraz pod integrálom sa dá upraviť využitím operátorovej identity (pozri tabuľku 2)

$$\operatorname{div}(V\mathbf{E}) = V \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} V = V \operatorname{div} \mathbf{E} - E^2$$

z čoho

$$V \operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div}(V\mathbf{E}) + E^2$$

kde sme využili skutočnosť, že $\text{grad}V = -\mathbf{E}$. Dosadením vo výraze pre energiu dostaneme vyjadrenie

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_{\tau \rightarrow \infty} \text{div}(\mathbf{VE}) d\tau + \int_{\tau \rightarrow \infty} E^2 d\tau \right] \quad (3.33)$$

Prvý integrál možno pomocou Gaussovej vety vyjadriť ako integrál po uzavretej ploche S v limite idúcej do nekonečna, teda

$$\int_{\tau \rightarrow \infty} \text{div}(\mathbf{VE}) d\tau = \oint_{S \rightarrow \infty} \mathbf{VE} \cdot d\mathbf{S}$$

Hodnota tohto integrálu sa rovná nule a plynie to z nasledovnej úvahy: Na veľmi veľkej ploche tvaru gule s polomerom r potenciál nábojov umiestnených okolo stredu gule klesá ako potenciál bodového náboja teda úmerne $\sim 1/r$ a intenzita klesá úmerne $\sim 1/r^2$. Element plochy dS na guli vidieť zo začiatku pod priestorovým uhlom $d\Omega$ naopak, rastie s r úmerne $\sim r^2$, menovite $dS = r^2 d\Omega$. Súčin $\mathbf{VE} \cdot d\mathbf{S} = VE dS \sim 1/r$ a pre $r \rightarrow \infty$ klesá k nule, teda aj uvažovaný integrál na nekonečnej ploche vymizne. Energiu vyjadrenú výrazom (3.33) treba interpretovať ako energiu elektrostatického poľa v priestore nenulovej hustoty nábojov, ale aj mimo nábojového rozloženia až do nekonečna. Jej hodnota je daná integrálom

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau \rightarrow \infty} E^2 d\tau = \int_{\tau \rightarrow \infty} w_{el} d\tau \quad (3.34)$$

Veličina

$$\boxed{w_{el} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}} \quad (3.35)$$

sa nazýva objemová hustota energie elektrostatického poľa vo vákuu a meria sa v jednotkách J/m^3 . Výraz (3.35) patrí medzi základné výrazy teórie elektrostatického poľa. Jeho integráciou cez objem dostaneme celkovú elektrostatickú energiu v danom objeme.

3.7.3 Elektrická energia nabitého kondenzátora

Odvodenie výrazu (3.35) vyžaduje istú teoretickú predstavivosť, a preto ho odvodíme ešte raz a jednoduchšie, hoci menej všeobecne. Ideálny doskový kondenzátor (plocha jednej dosky S , vzdialenosť dosiek h), bez okrajových efektov budeme nabíjať tak, že náboj rovnakého znamienka v nekonečne malých množstvách dq (napr. v dávkach istého počtu elektrónov) budeme prenášať z jednej dosky na druhú, pozri *obr. 3.18*. V istom štádiu je na doskách náboj $\pm q$ a prenesenie každého ďalšieho množstva dq je spojené s vykonaním práce dA proti elektrickému poľu

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

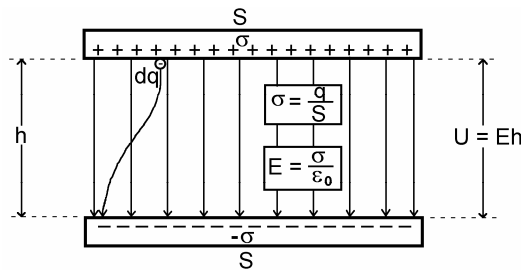
ktoré už v kondenzátore existuje. Elementárna práca, vykonaná vonkajšou silou, je daná výrazom

$$dA = hEdq = \frac{h}{\epsilon_0 S} qdq \quad (3.36)$$

Ak celkový prenesený náboj je Q , potom práca A , potrebná na jeho transport, je daná integrálom príspevkov (3.36) od nulového, po konečný náboj Q . Teda

$$A = \frac{h}{\epsilon_0 S} \int_0^Q qdq = \frac{h}{\epsilon_0 S} \frac{Q^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \epsilon_0 h S E^2 = \frac{1}{2} C U^2$$

kde $C = \epsilon_0 S/h$ je kapacita kondenzátora a $U = Eh = Q/C$ je napätie na ňom.



Obr. 3.18

Vykonaná práca na kondenzátore sa premení na jeho potenciálnu energiu

$$W = A = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} C U^2 \quad (3.37)$$

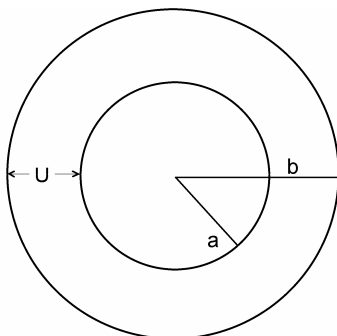
Z tohto výrazu môžeme vypočítať hustotu elektrostatickej energie v nabitom kondenzátore, v ktorom je intenzita E konštantný vektor. Hustota energie elektrostatického poľa w_{el} je daná podielom energie W a objemu kondenzátora $\tau = hS$, teda

$$w_{el} = \frac{W}{\tau} = \frac{C U^2}{2hS} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

čo je taký istý výsledok ako (3.35).

Úlohy 38 – 64

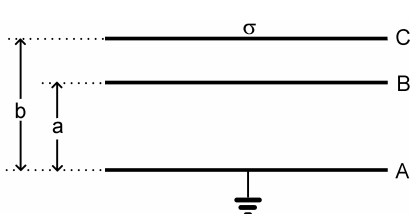
38. Ako zvolit' polomer a vnútornej gule v guľovom kondenzátore s vonkajším polomerom b , aby pri danom potenciálovom rozdiely U bola intenzita elektrického poľa na povrchu vnútornej gule minimálna? Vypočítajte kapacitu takého kondenzátora.



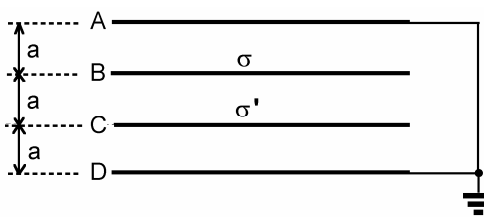
Obr. 39

39. Pri prenose veľkých elektrických výkonov koaxiálnym káblom treba volit' polomery valcových vodičov kábla tak, aby pri danom potenciálovom rozdiely U na kábli bola intenzita elektrického poľa na povrchu vnútorného vodiča minimálna. Aký bude v takom prípade polomer vnútorného vodiča v koaxiálnom kábli na obr. 39?

40. Dané sú tri paralelné roviny A, B, C na obr. 40. Rovina A je uzemnená, rovina B vo vzdialenosti a od roviny A je nenabitá a rovina C vo vzdialenosti b od roviny A je nabitá plošným nábojom σ . Roviny sú vodivé a ich rozmery sú oveľa väčšie ako vzájomné vzdialenosti. Vypočítajte potenciály rovín B a C .



Obr. 40



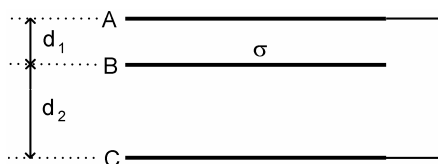
Obr. 41

41. Štyri rovnaké vodivé roviny A, B, C, D , sú umiestnené paralelne v rovnakej vzdialenosti a (obr. 41). Roviny A a D sú udržiavané na nulovom potenciáli, rovina B je nabitá plošným nábojom σ a rovina C má plošný náboj σ' . Určite potenciály rovín B a C a intenzity elektrického poľa medzi rovinami. Okrajové efekty možno zanedbať.

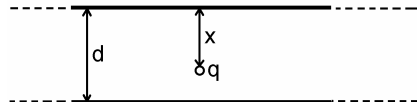
42. Tri paralelné vodivé roviny A, B, C , sú umiestnené podľa obr. 42. Na rovine B je plošný náboj σ . Roviny A a C sú vodivo spojené a nenabité. Určite plošné náboje na vnútorných plochách rovín A a C .

43. Dve veľmi veľké paralelné vodivé roviny sú umiestnené blízko seba vo vzdialenosti d . Roviny sú vodivo spojené. Medzi rovinami vo vzdialenosti $x < d$ od jednej z nich je umiestnený náboj q (obr. 43). Vypočítajte celkové indukované náboje na vnútorných stranách oboch rovín.

Poznámka: Pri riešení možno využiť fakt, že ak v myslenej paralelnej rovine náboja q umiestnime n bodových nábojov, zvýši sa celkový indukovaný náboj na obidvoch rovinách n -krát, a jeho celková hodnota bude $-nq$. Myslenú rovinu teda možno nabiť plošným nábojom nq a pri riešení postupovať ako v úlohe 42, pričom sa využije zákon superpozície. Úlohu možno riešiť aj pomocou nekonečných zrkadlových zobrazení náboja, čo je však oveľa zložitejšie.



Obr. 42



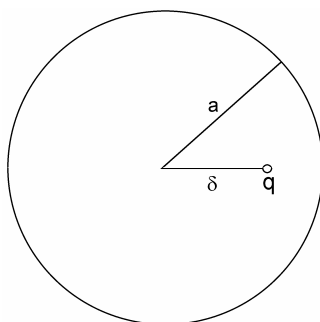
Obr. 43

44. Bodový náboj q sa nachádza medzi dvoma koncentrickými plochami s polermi a a b vo vzdialenosti r od stredu, pričom je splnená podmienka: $a < r < b$. Vypočítajte indukované náboje q_a a q_b na guľových plochách.

45. Bodový náboj q je umiestnený vo vzdialenosti l od stredu vodivej guľovej plochy s polomerom a ($a < l$). Vypočítajte:

- potenciál v okolí guľovej plochy, ak je táto uzemnená,
- potenciál, ak guľová plocha je nenabitá a izolovaná,
- potenciál, ak guľová plocha je izolovaná a má náboj q_0 .

46. V kovovej dutej guľi, ktorá je izolovaná a nenabitá, je umiestnený bodový náboj q vo vzdialenosti δ od jej stredu (obr. 46). Vypočítajte silu, ktorou guľa pôsobí na náboj. Aká bude táto sila, ak sa guľa uzemní?



Obr. 46

47. Bodový náboj $q = 10^{-9}$ C je umiestnený vo vzdialenosti $l = 20$ cm od stredu vodivej nenabitej guľe polomeru $R = 10$ cm. Nájdite intenzitu elektrického poľa na guľi v bode najbližšom k náboju a v bode najvzdialenejšom od náboja.

48. Náboj q je umiestnený vo vzdialenosti l od stredu uzemnenej vodivej guľe s polomerom a . Nájdite plošnú hustotu indukovaného náboja na guľi ako funkciu uhlu φ , ktorý zvierajú spojnice náboja a stredu guľe s ľubovoľným polomerom guľe. Aký je celkový náboj na guľi? Aký je náboj na časti guľovej plochy, ktorú vidieť z miesta náboja q ?

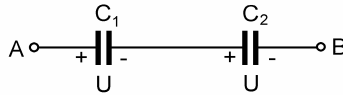
49. Vodivá guľa s polomerom r_1 je umiestnená v strede vodivej guľovej vrstvy s vnútorným polomerom r_2 a vonkajším polomerom r_3 ($r_1 < r_2 < r_3$). Na guľi je náboj q a na guľovej vrstve

náboj q' . Nájďte intenzitu elektrického poľa a potenciál v celom priestore a rozloženie elektrického náboja.

50. Doskový kondenzátor s vákuom má kapacitu 1 000 pF. Na každej doske je náboj s absolútnou hodnotou 10^{-6} C. Dosky sú vzdialené o $d = 1$ mm.

- Aké je napätie medzi doskami?
- Aká sila pôsobí medzi doskami?
- Aké bude napätie, ak sa vzdialenosť dosiek zdvojnásobí?
- Akú prácu treba vykonať pri oddialení dosiek na dvojnásobnú vzdialenosť?

51. Dva kondenzátory, ktorých kapacity sú v pomere $C_1/C_2 = k$, boli spojené do série a nabité na potenciálový rozdiel U . Potom boli spojené paralelne a bolo zistené, že na kondenzátor C_1 prešiel náboj q . Aké sú hodnoty C_1 a C_2 ?

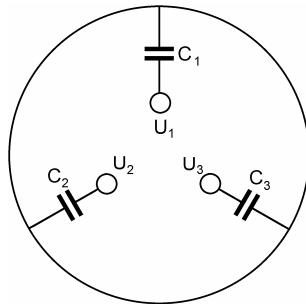


Obr. 52

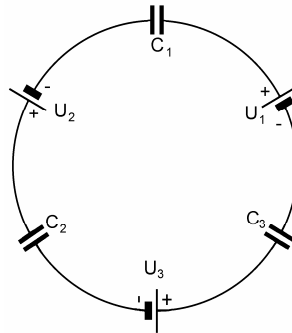
52. Dva kondenzátory C_1 a C_2 sú spojené do série a každý je nabitý na potenciálový rozdiel U (obr. 52). Aké napätie bude na paralelnej dvojici, ktorá vznikne spojením svoriek A a B. Aké náboje budú na jednotlivých kondenzátoroch? Ako sa zmení energia kondenzátorov?

53. Dva paralelné valcové vodiče s polomermi a majú osovú vzdialenosť $2d$. Vypočítajte kapacitu na jednotku dĺžky týchto vodičov. Nájďte približný výraz pre kapacitu, ak $a \ll d$.

Poznámka: Najprv dokážte, že ekvipotenciálne plochy dvoch paralelných priamok s dĺžkovými hustotami nábojov $\pm\lambda$ sú valcové plochy a potom použite metódu elektrických zrkadiel.



Obr. 54



Obr. 55

54. Trojvodičový kábel na obr. 54 má kapacity jednotlivých vodičov oproti plášťu C_1 , C_2 , C_3 . Kapacity medzi vodičmi aj plášť a voči zemi možno zanedbať. Napätia jednotlivých vodičov oproti zemi sú U_1 , U_2 , U_3 (uzemňovací vodič nie je na obrázku zobrazený). Plášť je neuzemnený. Stanovte potenciál plášťa voči zemi.

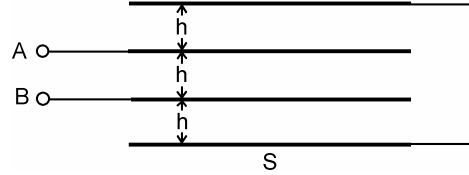
55. Stanovte napätia na kondenzátoroch v schéme na obr. 55. U_1 , U_2 , U_3 predstavujú zdroje pevných napätí.

56. Tri rovnaké kovové dosky s plochou S sú uložené planparalelne vo vzájomnej vzdialenosti h . Dosky sú vodivo spojené na svorky A a B podľa obr. 56. Vypočítajte kapacitu medzi svorkami A a B .



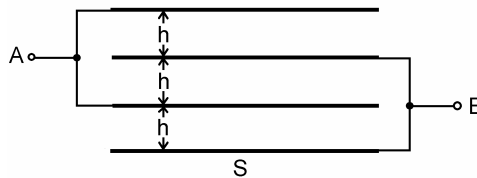
Obr. 56

57. Štyri rovnaké kovové dosky s plochou S sú uložené planparalelne vo vzájomnej vzdialenosti h (obr. 57), ktorá je malá vzhľadom na rozmery dosiek. Vonkajšie dosky sú vodivo spojené. Nájďte kapacitu tejto sústavy vzhľadom na svorky A a B .



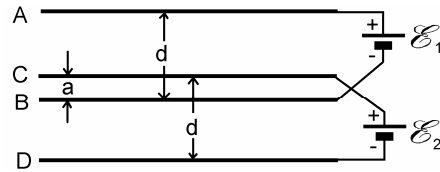
Obr. 57

58. Štyri rovnaké kovové dosky s plochou S sú uložené planparalelne vo vzájomnej vzdialenosti h , ktorá je malá vzhľadom na rozmery dosiek. Dosky sú vodivo prepojené podľa obr. 58. Nájďte kapacitu sústavy medzi svorkami A a B .



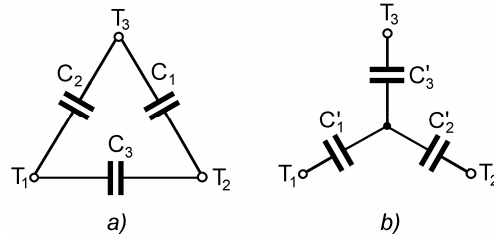
Obr. 58

59. Dve dvojice planparalelných vodivých dosiek AB a CD , každá dvojica vo vzdialenosti d , sú zasunuté medzi seba a pripojené na zdroje pevných napätí \mathcal{E}_1 a \mathcal{E}_2 , podľa obr. 59. Nájďte napätie medzi doskami B a C a jeho polaritu. Elektrické pole medzi doskami je homogénne, okrajové efekty možno zanedbať.



Obr. 59

60. Tri kondenzátory C_1 , C_2 a C_3 zapojené do trojuholníka podľa obr. 60a. Nájďte kapacity kondenzátorov C'_1 , C'_2 a C'_3 zapojených do hviezdy podľa obr. 60b tak, aby výsledné kapacity medzi uzlami T_1 , T_2 a T_3 boli v oboch prípadoch rovnaké.

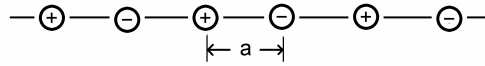


Obr.60

61. Vypočítajte elektrostatickú energiu náboja Q rovnomerne rozloženého v objeme gule s polomerom R .

62. Jadrá ťažkých atómov majú náboj rozložený približne rovnomerne v guľovom objeme s polomerom a (a je polomer jadra) a s objemovou hustotou náboja $\rho = 1,33 \cdot 10^{25} \text{ C/m}^3$. Čomu sa rovná zmena energie jadra uránu s celkovým nábojom $92e$ (e – náboj protónu), ak sa pôvodné jadro rozpadne na dve jadrá s rovnakými polomerami a s rovnakými nábojmi? Po rozpade sa jadrá vzdialia na veľmi veľkú (nekonečnú) vzdialenosť. Toto je energia, ktorá sa uvoľní z jadra U^{235} pri výbuchu atómovej bomby. Odhadnite energiu uvoľnenú na jeden kilogram štiepneho materiálu.

63. Vypočítajte polomer π -mezónu využívajúc informáciu, že rozdiel energií nabitého a neutrálneho π -mezónu je $\Delta mc^2 = 4,6 \text{ MeV}$. Tento rozdiel energií predstavuje elektrostatickú energiu nabitého π -mezónu. Predpokladajte, že náboj π -mezónu je rozložený na jeho povrchu a jeho celková hodnota je $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.



Obr. 64

64. Lineárna iónová molekula pozostáva z iónov $\pm e$ uložených v rovnakej vzdialenosti a podľa obr. 64. Vypočítajte energiu na jeden ión molekuly.