2 ELEKTROSTATIKA NÁBOJOV VO VÁKUU

2.1 SILOVÉ PÔSOBENIE NÁBOJOV. COULOMBOV ZÁKON

Pri štúdiu elektromagnetických javov je otázkou zásadného významu silové pôsobenie medzi elektrickými nábojmi. Toto silové pôsobenie je v skutočnosti veľmi zložité, pretože závisí od množstva a pohybového stavu nábojov, ktoré sú v interakcii, a aj od rozloženia nábojov v priestore. Jednoduchý je iba prípad silového pôsobenia dvoch bodových nábojov (napr. nabitých elementárnych častíc), ktoré sú vo zvolenom súradnicovom systéme v pokoji a sú umiestnené v istej vzájomnej vzdialenosti. Takýto systém nezodpovedá reálnej situácii, pretože náboje v pokoji sa v prírode nevyskytujú. Ak hovoríme o nábojoch v pokoji, obyčajne máme na mysli veľký štatistický súbor elementárnych nábojov, ktoré síce v nejakom objeme môžu vykonávať fluktuačný tepelný pohyb, ale ich počet v danom objeme sa nemení (napr. náboj na nabitej guľôčke).

Silové pôsobenie medzi dvoma bodovými nábojmi skúmal v polovici 18. storočia francúzsky učenec Charles Augustin de Coulomb. Coulomb vykonal množstvo experimentov na zariadení nazývanom torzné váhy, na ktorých bodové náboje boli modelované kovovými nabitými guľôčkami. Z jeho meraní vyplynula skutočnosť, že bodové náboje (nabité guľôčky) pôsobia na seba silou, ktorá je úmerná súčinu nábojov a nepriamo úmerná štvorcu ich vzdialenosti. Sila je odpudivá, ak sú náboje rovnakého znamienka a príťažlivá, ak sú znamienka opačného, a pôsobí pozdĺž spojnice nábojov. Silové pôsobenie spĺňa tretí Newtonov zákon, t. j. pôsobiace sily na jednotlivé náboje sú v absolútnej hodnote rovnaké bez ohľadu na veľkosť jednotlivých nábojov. Tieto experimentálne zistené skutočnosti možno vyjadriť v nasledovnej matematickej formulácii

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{2.1}$$

kde F je sila pôsobiaca medzi nábojmi, q_1 a q_2 sú veľkosti nábojov, r je vzdialenosť nábojov a k je rozmerová konštanta, ktorá závisí od výberu sústavy jednotiek. V sústave fyzikálnych jednotiek SI (Systéme International d'Unités) je jej číselná hodnota

$$k = 8{,}987551786.10^9\ \mathrm{kg.m^3.s^{-4}.A^{-2}} \tag{2.2}$$

Hodnota konštanty k vyplynie z ďalších našich úvah. Z dôvodov racionalizácie vzťahov v elektrodynamike je vhodnejšie konštantu k písať v tvare

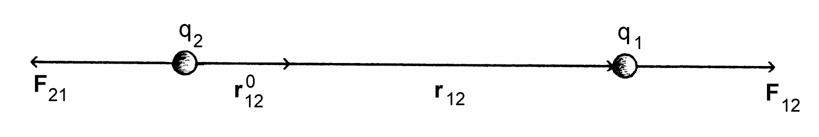
$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{2.3}$$

kde ε_0 je univerzálna prírodná konštanta súvisiaca s rýchlosťou svetla vo vákuu a nazýva sa **elektrická konštanta** (starší názov **permitivita vákua**). Jej číselná hodnota je

$$\varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,818.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}} \tag{2.4}$$

Sila je ale vektorová veličina, a preto výraz pre ňu musí obsahovať aj informáciu o smere jej pôsobenia. Ak je náboj q_1 vo vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}_{12}$ od náboja q_2 (pozri *obr. 2.1*), potom sila $\boldsymbol{F}_{12}$ pôsobiaca na náboj q_1 od náboja q_2 (náboje sú zadané s príslušným znamienkom) je určená vektorovým vzťahom

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12}} \tag{2.5}$$



Obr. 2.1

kde r_{12} je absolútna vzdialenosť nábojov. Ak zavedieme jednotkový vektor $\boldsymbol{r}_{12}^0 = \boldsymbol{r}_{12} / r_{12}$, potom výraz pre silu možno napísať v tvare

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{r}_{12}^0 \tag{2.6a}$$

Existuje ešte jeden spôsob zápisu Coulombovho zákona, pri ktorom sa polohy nábojov q_1 a q_2 zadajú polohovými vektormi $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ vzhľadom na nejaký referenčný bod 0 ako na *obr. 2.2.* V takom prípade

$$\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \qquad r_{12} = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|,$$

a

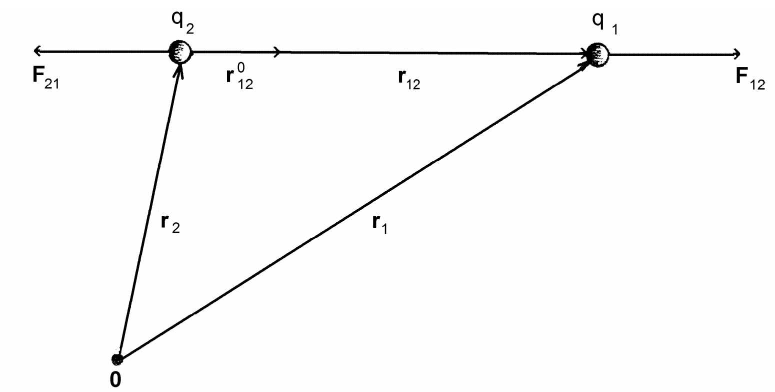
$$\boldsymbol{r}_{12}^0 = \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$$

takže výraz (2.6a) možno prepísať na tvar

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \tag{2.6b}$$

Posledný výraz je najvšeobecnejším matematickým vyjadrením Coulombovho zákona, ale aj najzložitejším, a preto ho budeme využívať iba výnimočne.

Platnosť zákona o silovom pôsobení bodových nábojov overoval Coulomb prostriedkami, ktoré mal v jeho dobe k dispozícii. Naša dôvera k silovému zákonu sa však nemôže zakladať na experimentoch, pri ktorých je ťažko merať sily s presnosťou väčšou ako niekoľko percent. Takéto merania nás nemôžu presvedčiť, že závislosť sily od vzdialenosti je skutočne kvadratická, teda že mocniteľ je 2 a nie napr. 2,001. Neskôr uvidíme, že platnosť Coulombovho zákona možno dokázať nepriamo experimentmi, podľa ktorých mocniteľ r sa rovná 2 s presnosťou lepšou ako $\pm 2.10^{-9}$.



Obr. 2.2

Coulombov zákon ako základný experimentálny zákon elektrostatiky sa ukazuje ako mimoriadne vhodným na stanovenie jednotkového množstva elektrického náboja. Skutočne, ak vo vzťahu (2.1) položíme $k = 1$, potom za jednotkové môžeme vyhlásiť také dve množstvá elektrického náboja, ktoré v jednotkovej vzdialenosti pôsobia na seba jednotkovou silou. Tak bola určená jednotka množstva elektrického náboja v sústave jednotiek CGS (Gaussovej sústave), ktorá sa dnes v praxi nepoužíva, v ktorej jednotka náboja, a následne jednotka elektrického prúdu, nie je základnou, ale odvodenou jednotkou. Keďže meranie sily medzi nábojmi (guľôčkami) je obtiažne a zaťažené značnou chybou, je v sústave fyzikálnych jednotiek SI jednotka náboja určená iným spôsobom. V SI sústave je základnou elektrickou jednotkou jednotka elektrického prúdu **ampér** (A), ktorý dokážeme pohodlne merať zo silových účinkov medzi prúdmi. Keďže elektrický prúd I je definovaný ako množstvo elektrického náboja q, ktoré prejde prierezom vodiča za jednotku času t, teda $I = q/t$, možno jednotkový náboj definovať ako množstvo náboja, ktoré pri prúde 1 A pretečie prierezom vodiča za jednu sekundu (s). Toto jednotkové množstvo náboja sa nazýva **coulomb** (C). Teda 1 C = 1 A $\times$ 1s = 1 A.s. Teraz je jasný pôvod hodnoty konštanty k (2.2) vo vzťahu (2.1). Dva bodové náboje, každý veľkosti 1 C, umiestnené vo vzájomnej vzdialenosti 1 m pôsobia na seba obrovskou silou, ktorá sa číselne (v newtonoch) rovná hodnote konštanty k, danej vyjadrením (2.2).

Číselná hodnota konštanty k alebo ε_0 sa však stanovuje iným spôsobom. V elektromagnetizme sa popri konštante ε_0 zavádza ešte jedna univerzálna konštanta poľa, a to **magnetická konštanta** μ_0 (starý názov **permeabilita vákua)**. Jej hodnota

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H/m} \qquad (2.7)$$

je daná definitoricky. Obidve konštanty poľa súvisia s rýchlosťou c svetla vo vákuu vzťahom

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \tag{2.8}$$

ktorý plynie z vlnových rovníc elektromagnetického poľa. Z toho elektrická konštanta

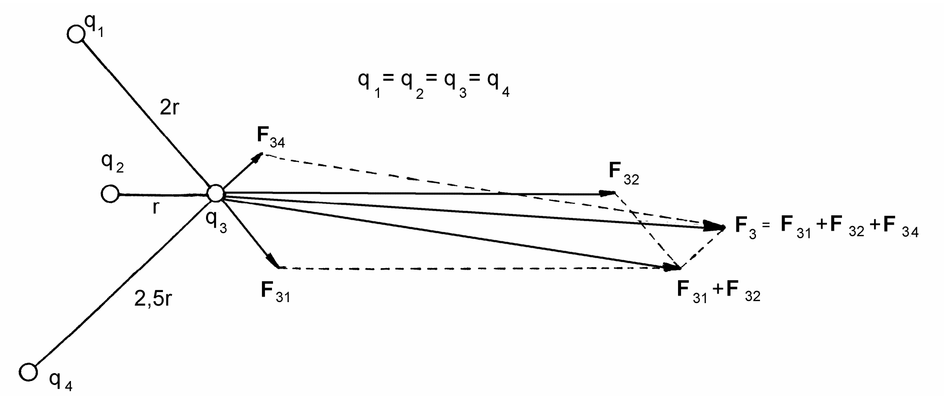
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \tag{2.9}$$

s číselnou hodnotou danou vyjadrením (2.4). Presnosť určenia ε_0 je daná presnosťou, s ktorou je v súčasnosti známa rýchlosť svetla vo vákuu (pozri odsek 11.7).

Ak je vo vzájomnom silovom pôsobení n nábojov, potom sila $\boldsymbol{F}_i$ pôsobiaca na vybraný i-tý náboj podľa princípu superpozície je daná výrazom

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_{i1} + \boldsymbol{F}_{i2} + \ldots + \boldsymbol{F}_{ii\text{-}1} + \boldsymbol{F}_{ii+1} + \ldots + \boldsymbol{F}_{in} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij} \qquad (j \neq i)$$

Skladanie síl od niekoľkých nábojov rovnakého znamienka a rovnakej absolútnej hodnoty je v proporcionálnej mierke znázornené na *obr. 2.3.*



Obr. 2.3

Jedna z už uvedených vlastností elektrických nábojov hovorí o ich väzbe na materiálne objekty, t. j. že náboje sú vždy viazané na isté elementárne častice. Medzi časticami ako nositeľmi elementárnych nábojov pôsobia okrem elektrických aj gravitačné sily. Je otázka, akou mierou sa podieľajú gravitačné sily v porovnaní s elektrickými silami na vzájomnom silovom pôsobení dvoch elementárnych častíc. Ako príklad možno posúdiť silové pôsobenie medzi protónom a elektrónom v danej vzdialenosti, napríklad v klasickom atóme vodíka. Medzi uvedenými časticami pôsobí príťažlivá sila, ktorá je výsledkom superpozície príťažlivej elektrickej sily medzi dvoma nesúhlasnými elementárnymi nábojmi a gravitačnej príťažlivej sily medzi hmotnosťami protónu a elektrónu. Ak uvážime, že hmotnosť protónu m_p = 1,67.10^{-27} kg, hmotnosť elektrónu m_e = 9,11.10^{-31} kg, elementárny náboj e = 1,602.10^{-19} C, gravitačná konštanta κ = 6,67.10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}

a elektrická konštanta poľa $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ F.m^{-1}, potom pomer elektrickej sily F_e a gravitačnej F_g je

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \kappa m_p m_e} \approx 2{,}27.10^{39} \text{ !!!}$$

Tento príklad svedčí o tom, že elektrická sila medzi nabitými elementárnymi časticami je mnohokrát väčšia ako príťažlivá sila medzi hmotnosťami častíc, a preto gravitačné pôsobenie medzi elementárnymi časticami možno vždy zanedbať. Uvedený príklad potvrdzuje ešte jednu skutočnosť, že sily, ktoré držia atómy pohromade, sú sily elektrického pôvodu. V tejto súvislosti je namieste otázka, čo drží pohromade atómové jadrá? Tie pozostávajú z neutrónov a protónov a medzi protónmi pôsobia silné elektrické odpudivé sily. Je zrejmé, že ak sa pod účinkom takejto sily atómové jadrá nerozletia, musia medzi ich stavebnými kameňmi pôsobiť ešte iné príťažlivé sily, ktoré musia byť silnejšie než odpudivé sily protónov. Týmito silami sú jadrové sily, sily krátkeho dosahu, oveľa väčšie ako gravitačné a elektrické sily, ktoré so vzdialenosťou veľmi rýchlo klesajú. Jadrové sily sú zodpovedné za konzistenciu a stabilitu atómových jadier. Ľahké jadrá, ktoré obsahujú rovnaký počet protónov a neutrónov, sú relatívne stabilné. U ťažkých jadier je stabilita zaistená väčším počtom neutrónov, ktoré zmenšujú odpudivú silu protónov tým, že "zrieďujú" protóny v jadre. Stabilita ťažkých jadier je však vratká. Veľmi ťažké jadrá s atómovým číslom väčším ako 83 sú nestabilné a pri sebemenšej excitácii sa rozpadajú. Sily medzi nukleónmi (protónmi a neutrónmi) v jadrách atómov sú **silné interakcie,** zatiaľ čo sily medzi jadrom a elektrónmi v atóme, prípadne sily medzi atómami v molekulách a v kryštáloch patria medzi **elektromagnetické interakcie**.

Vo svete, ktorý nás obklopuje, je elektrické silové pôsobenie podľa Coulombovho zákona jedno z najdôležitejších. Je zodpovedné za existenciu atómov, ale aj molekúl, teda za existenciu látok tak, ako ich v prírode poznáme, so všetkými ich mechanickými vlastnosťami. Tieto mechanické vlastnosti sú v skutočnosti odrazom pôsobenia elektrických síl medzi základnými stavebnými kameňmi látky. Platnosť Coulombovho zákona bola experimentálne overovaná a potvrdená v širokom rozsahu vzdialeností od rozmerov atómového jadra (rádovo 10^{-15} m) až do vzdialenosti rádovo 10^3 m a niet dôvodov pochybovať, že platí aj pre väčšie vzdialenosti.

Na základe uvedených skutočností možno Coulombov zákon považovať za jeden zo základných experimentálnych zákonov elektromagnetizmu.

2.2 ELEKTRICKÉ POLE. INTENZITA ELEKTRICKÉHO POĽA

Výpočet silového pôsobenia medzi bodovými nábojmi je jednoduchý, ak ide o interakciu dvoch nábojov. V systéme viacerých nábojov potom možno využiť princíp superpozície, ale úloha sa stáva zložitejšou. Ešte zložitejšou je úloha, ak na bodový náboj pôsobí rozloženie nábojov, ktoré môžeme považovať za spojité. Je zrejmé, že priamy výpočet je značne sťažený, alebo aj nemožný. Uvažujme ešte raz systém n bodových nábojov q_1, q_2, …, q_n, ktoré silovo pôsobia na vybraný náboj q_j. Sila $\boldsymbol{F}_j$ pôsobiaca na náboj q_j je podľa Coulombovho zákona a princípu superpozície

$$\boldsymbol{F}_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} \qquad (j \neq i) \tag{2.10}$$

kde

$$\boldsymbol{F}_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j q_i}{r_{ji}^3}\boldsymbol{r}_{ji} = q_j\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_{ji}^3}\boldsymbol{r}_{ji}\right] \qquad (j \neq i) \tag{2.11}$$

je sila, ktorou i-tý náboj pôsobí na j-tý náboj. Výsledná sila pôsobiaca na j-tý náboj je teda

$$\boldsymbol{F}_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ji} = q_j\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_{ji}^3}\boldsymbol{r}_{ji}\right] \qquad (j \neq i) \tag{2.12}$$

a je daná súčinom náboja q_j a súčiniteľa v hranatej zátvorke, ktorý závisí iba od nábojov q_1 až q_n a ich vektorových vzdialeností k náboju q_j. Výraz v zátvorke je matematicky vektorová funkcia polohy (ako uvidíme neskôr v elektrodynamike, aj funkcia času) a fyzikálne predstavuje vektorovú veličinu, ktorá sa číselne a smerom rovná sile pôsobiacej na jednotkový kladný náboj q_j veľký 1 C. Túto vektorovú veličinu nazývame **intenzita elektrického poľa** a označujeme ju symbolom $\boldsymbol{E}$. Priestorové rozloženie veličiny $\boldsymbol{E}$ nazývame **elektrické pole**. Podľa uvedených úvah je formálne intenzita elektrického poľa daná podielom sily a náboja, na ktorý sila pôsobí, teda

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}} \tag{2.13}$$

Intenzita elektrického poľa je dôležitá fyzikálna veličina, pre meranie ktorej treba určiť jednotku, najvhodnejšie priamo zo vzťahu (2.13). Vidíme, že takou jednotkou je 1 N/C. Častejšie sa však intenzita elektrického poľa určuje v ekvivalentných jednotkách 1 V/m = 1 N/C, kde V (volt) je jednotka elektrického potenciálu, alebo elektrického napätia. Rozmer jednotky intenzity elektrického poľa v sústave SI jednotiek je

$$1\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 1\ \mathrm{m.kg.s^{-3}.A^{-1}}$$

Ak v nejakom bode priestoru intenzitu elektrického poľa poznáme, potom sila pôsobiaca na náboj q v danom bode je vyjadrená jednoduchým výrazom

$$\boxed{\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}} \tag{2.14}$$

Tento vzťah medzi intenzitou elektrického poľa a silou, ktorá v danom bode pôsobí na elektrický náboj, je jedným zo základných vzťahov elektrostatiky.

Prv, než pristúpime k výpočtu elektrostatických polí rôznych nábojových rozložení, odpovieme na jednu kardinálnu otázku: Čo je vlastne elektrické pole? Je to fyzikálna realita alebo iba bezobsažný pomocný pojem na popis silových interakcií medzi elektrickými nábojmi. Podľa spôsobu jeho zavedenia sa totiž možno domnievať, že elektrické pole je iba pomocná matematická funkcia, iba fikcia, ktorá neodráža nijakú objektívnu realitu. Ak by to bola pravda, to by znamenalo, že elektrické silové pôsobenie je okamžité pôsobenie nábojov na diaľku, bez akejkoľvek účasti priestoru a času. Takýto názor na problém sa všeobecne považoval za správny alebo aspoň logický až do vybudovania elektromagnetickej teórie, a v konečnom dôsledku až do vybudovania teórie relativity.[1] Silové interakcie elektrických nábojov sa však uskutočňujú v priestore a v čase, z čoho plynie, že elektrické pole je nositeľom energie. O tom sa možno presvedčiť nasledovným myšlienkovým experimentom:

Dva bodové náboje sa nachádzajú vo veľkej vzájomnej vzdialenosti. Predstavme si, že jeden z nábojov v istom okamihu zmenil polohu, "uskočil". Pýtame sa: za akú dobu to pocíti druhý náboj? Ak by sa informácia o zmene polohy náboja šírila okamžite s nekonečnou rýchlosťou, vtedy by sme mohli vyhlásiť, že vzájomné interakcie nábojov sú okamžité v čase, a teda sa dejú bezprostredne, bez účasti sprostredkovateľa, ktorým je priestor a čas. Dnes však vieme, že spomínaná informácia o zmene polohy náboja sa šíri konečnou rýchlosťou, konkrétne vo vákuu rýchlosťou svetla c. Teda prenos informácie sa uskutoční v priebehu doby $\Delta t = \Delta l/c$, kde Δl je vzdialenosť medzi nábojmi. Počas tejto doby informácia o "uskočení" náboja musí byť v niečom zakódovaná, a tým niečím je realita, ktorú nazývame elektrické pole.

Na zdôvodnenie existencie elektrického poľa netreba nám však robiť nijaké myšlienkové experimenty. Dnes nikto nepochybuje o reálnej existencii elektromagnetických vĺn, ktoré sa široko využívajú na prenos informácií a o ktorých vieme, že sa šíria konečnou rýchlosťou, vo vákuu rýchlosťou c. Prenos informácií je možný iba prenosom energie, teda elektromagnetické vlny predstavujú toky energie. Elektromagnetickým a tým aj elektrickým poliam teda musíme pripísať energiu, hybnosť a dokonca aj moment hybnosti a považovať ich za objektívne reality, pre ktoré sú splnené aj zákony zachovania. Treba si uvedomiť, že ak by pôsobenie nábojov bolo bez účasti priestoru a času, elektromagnetické vlny by neexistovali. Interakcia elektrických nábojov teda nie je bezprostredná, nie je to pôsobenie na diaľku, ale pôsobenie prostredníctvom reálneho elektrického poľa, ktoré je energetickým prejavom náboja.

Intenzita elektrického poľa *n* bodových nábojov. V tomto odseku uvedieme niekoľko príkladov na výpočet elektrostatických polí rôznych nábojových zoskupení. Jednoduchý je výpočet intenzity elektrického poľa skupiny bodových nábojov, alebo špeciálne jedného bodového náboja v bode, v ktorom neleží žiadny iný náboj. Intenzita systému bodových nábojov je daná výrazom v zátvorke vzťahu (2.12), teda

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i \qquad (2.15)$$

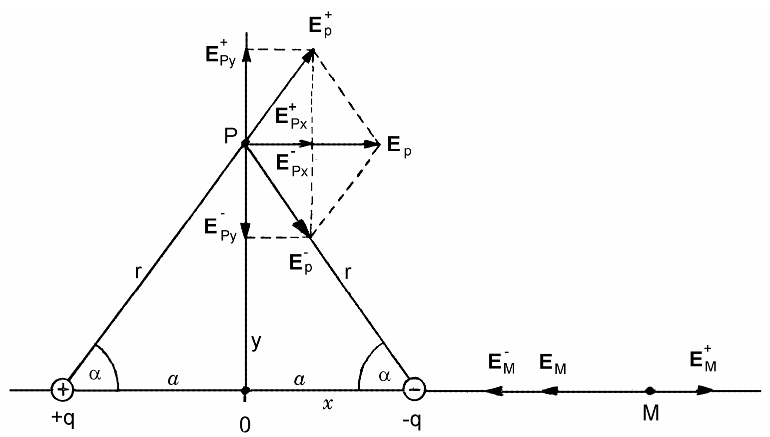
Intenzita elektrického poľa bodového náboja. Intenzita elektrického poľa od jediného bodového náboja q vo vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad (2.16)$$

[1] Predstavu o bezprostrednom pôsobení nábojov na diaľku zastával aj významný nemecký fyzik Wilhelm Eduard Weber (1804 – 1855)

Z posledných dvoch vzťahov vidíme, že pre intenzitu elektrického poľa, podobne ako pre elektrické sily, platí princíp superpozície, totiž, že intenzita poľa súboru bodových nábojov sa rovná vektorovému súčtu intenzít jednotlivých bodových nábojov. O elektrickom poli bodového náboja zatiaľ môžeme povedať iba to, že je to vektorové pole, ktoré je radiálne so stredom symetrie v mieste náboja, je priamo úmerné veľkosti náboja a nepriamo úmerné druhej mocnine vzdialenosti od náboja, teda je funkciou $1/r^2$. V mieste náboja má pole singularitu, intenzita poľa v absolútnej hodnote tam rastie nad všetky medze, a naopak, v nekonečne veľkých vzdialenostiach od náboja intenzita klesá k nule. Takúto informáciu nám poskytuje výraz (2.16).

Intenzita elektrického poľa dvojice bodových nábojov. Druhým dôležitým systémom nábojov je dvojica bodových nábojov q_1 a q_2 uložených v istej vzájomnej vzdialenosti d. Intenzita poľa v ľubovoľnom bode priestoru je daná superpozíciou polí dvoch nábojov a matematicky súčtom dvoch výrazov typu (2.16). Ak sú náboje ľubovoľné, bližšie neurčené, môže byť pole veľmi zložité. Polia rôznych dvojíc majú však niektoré spoločné črty; v miestach nábojov polia vykazujú singularity (nekonečne veľké absolútne hodnoty), v nekonečne pole zaniká, pole má valcovú (osovú) symetriu okolo osi prechádzajúcej nábojmi. Najjednoduchšie pole vytvárajú dvojice v absolútnej hodnote rovnako veľkých nábojov, pričom obzvlášť dôležitá je dvojica rovnako veľkých nábojov opačného znamienka, ktorú nazývame **elektrický dipól**. Pole elektrického dipólu je vhodnejšie analyzovať s využitím pojmu elektrického potenciálu, preto na tomto mieste posúdime iba niektoré základné črty tohto poľa.



Obr. 2.4

Na *obr. 2.4* je dvojica nábojov $+q$ a $-q$ vo vzájomnej vzdialenosti $d = 2a$. Os x pravouhlého súradnicového systému je totožná s osou dvojice nábojov a os y prechádza symetricky medzi nábojmi. Určíme intenzitu elektrického poľa na dvoch miestach – v bode $M(x; 0)$ na osi x vo vzdialenosti $x > a$ a vo zvolenom bode $P(0; y)$ na osi y. Treba si všimnúť, že pole je osovo symetrické, teda rovnaké pole ako v bode P je v každom bode na kružnici s polomerom y ležiacej v rovine kolmej na os x a so stredom na osi x. V bode M je intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}_M$ daná vektorovým súčtom polí $\boldsymbol{E}_M^+$ a $\boldsymbol{E}_M^-$ od jednotlivých bodových nábojov, teda

$$\boldsymbol{E}_M = \boldsymbol{E}_M^+ + \boldsymbol{E}_M^-$$

kde $\quad \boldsymbol{E}_M^+ = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{(x+a)^2}\boldsymbol{i} \quad$ a $\quad \boldsymbol{E}_M^- = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{(x-a)^2}\boldsymbol{i}$

takže $\quad \boldsymbol{E}_M = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{(x+a)^2} - \dfrac{1}{(x-a)^2}\right]\boldsymbol{i} =$

$$= -\frac{4axq}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 - a^2\right)^2}\boldsymbol{i} = -\frac{2qd}{4\pi\varepsilon_0 x^3\left(1 - \dfrac{a^2}{x^2}\right)^2}\boldsymbol{i} \tag{2.17}$$

Intenzita poľa v bode M smeruje proti jednotkovému vektoru $\boldsymbol{i}$ (do stredu súradnej sústavy). V symetrickom bode vo vzdialenosti $-x$ má intenzita elektrického poľa rovnakú absolútnu hodnotu a smeruje v zápornom smere osi x. So zväčšovaním absolútnej vzdialenosti x klesá intenzita v absolútnej hodnote k nule. V bodoch, kde sídlia náboje, intenzita v absolútnej hodnote rastie nad všetky medze (singulárne body).

V bodoch na osi x pre $|x| < a$ má intenzita smer kladnej osi x a jej veľkosť je daná výrazom

$$E_x = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x^2 + a^2}{\left(a^2 - x^2\right)^2} \tag{2.18}$$

o čom sa čitateľ môže ľahko presvedčiť. V strede súradnicovej sústavy ($x = 0$, $y = 0$), symetricky medzi nábojmi

$$E_x = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2} \tag{2.19}$$

teda intenzita predstavuje dvojnásobok intenzity poľa bodového náboja, čo sa dalo očakávať.

Všimnime si teraz vlastnosti intenzity poľa v bode P na osi y. Aj tam je intenzita poľa $\boldsymbol{E}_P$ daná superpozíciou dvoch vektorov $\boldsymbol{E}_P^+$ a $\boldsymbol{E}_P^-$, t. j.

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_P^+ + \boldsymbol{E}_P^-$$

kde

$$E_P^+ = E_P^- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

a zložky týchto vektorov v smeroch osí x a y v bode P sú dané výrazmi

$$E_{Px}^{+} = E_{Px}^{-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\alpha$$

$$E_{Py}^{+} = -E_{Py}^{-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\sin\alpha$$

Výsledná intenzita v bode P je daná vektorom

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_P^{+} + \boldsymbol{E}_P^{-} = (E_{Px}^{+} + E_{Px}^{-})\boldsymbol{i} + (E_{Py}^{+} + E_{Py}^{-})\boldsymbol{j} = 2E_{Px}^{+}\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$$

kde $\boldsymbol{j}$ je jednotkový vektor v smere osi y. Ako vidíme z posledného výrazu, pole v bode P má tiež iba zložku x

$$E_{Px} = 2E_{Px}^{+} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{r^3} =$$

$$= \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0\left(y^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 y^3\left(1 + \dfrac{a^2}{y^2}\right)^{3/2}}$$

kde sme pri úprave využili skutočnosť, že $a/r = \cos\alpha$ a

$$r = \sqrt{y^2 + a^2}$$

Intenzita elektrického poľa v bode P je teda daná vektorom

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 y^3\left(1 + \dfrac{a^2}{y^2}\right)^{3/2}}\boldsymbol{i} \tag{2.20}$$

a pre rastúce y klesá k nule. Pre $y = 0$, teda v strede symetrie (v začiatku súradnicového systému)

$$\boldsymbol{E}_P = E_x\boldsymbol{i} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{i}$$

čo je taký istý výsledok, aký sme dostali pri analýze poľa na osi dvojice nábojov [na osi dipólu – pozri vzťah (2.19)].

Obzvlášť dôležité je pole vo veľkej vzdialenosti od dvojice nábojov, teda vo vzdialenostiach oveľa väčších ako je vzdialenosť nábojov $d = 2a$. Takáto dvojica nábojov pozorovaná z veľmi veľkej vzdialenosti sa nazýva **bodový dipól**. Intenzitu poľa bodového dipólu na osiach x a y dostaneme tak, že vo vzťahoch (2.17) a (2.20) sa považuje x, $y \gg a$, takže veličiny $a^2/x^2 \ll 1$ a $a^2/y^2 \ll 1$ môžeme zanedbať. Označíme $p = qd$, potom

$$\boldsymbol{E}_M = \frac{-2p}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\boldsymbol{i} \tag{2.21a}$$

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 y^3}\boldsymbol{i} \tag{2.21b}$$

Veličina p je absolútna hodnota dipólového momentu. Vidíme, že intenzita poľa vo veľkej vzdialenosti na osi dipólu (osi x) je v absolútnej hodnote dvakrát väčšia ako intenzita v rovnako veľkej vzdialenosti kolmo na os dipólu (na osi y).

Vzhľadom na veľkú dôležitosť dipólového poľa vrátime sa k nemu podrobne po zavedení pojmu elektrického potenciálu. Zatiaľ si všimnime iba to, že dipólové pole v porovnaní s poľom bodového náboja je slabé a klesá s treťou mocninou vzdialenosti na rozdiel od poľa bodového náboja, ktoré, ako vieme, klesá s druhou mocninou vzdialenosti.

V ľubovoľných iných bodoch priestoru v okolí dvojice nábojov je pole dané vektorovým súčtom polí jednotlivých nábojov. Jeho matematické vyjadrenie môže byť zložité a obyčajne neposkytuje názornú predstavu o priestorovom priebehu poľa.

Názornú predstavu o poli možno získať, ak ho nejakým spôsobom graficky zobrazíme. Podľa už uvedených matematických vyjadrení je elektrické pole spojitá vektorová funkcia polohy v priestore, v blízkosti bodového náboja rastie nad všetky medze a smerom do nekonečna klesá k nule. Túto funkciu by teda bolo možné znázorniť pomocou nejakých čiar. Existuje viacero spôsobov ako graficky zobraziť elektrické pole. Najrozšírenejší spôsob zobrazenia poľa je pomocou siločiar. Siločiary v priestore, kde existuje elektrické pole, sú myslené orientované čiary, ktoré majú nasledovné vlastnosti:

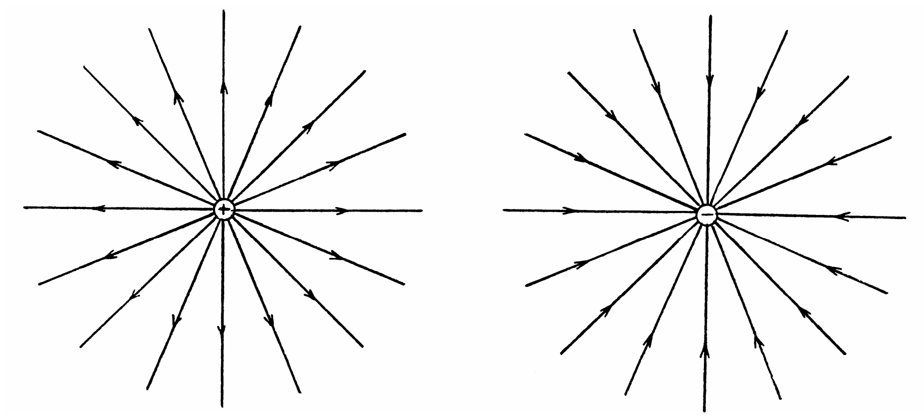
1. V každom bode poľa má vektor intenzity smer dotyčnice k siločiare. Táto vlastnosť implikuje skutočnosť, že siločiary sa nemôžu pretínať.

2. Siločiary začínajú na kladných a končia na záporných nábojoch alebo v nekonečne.

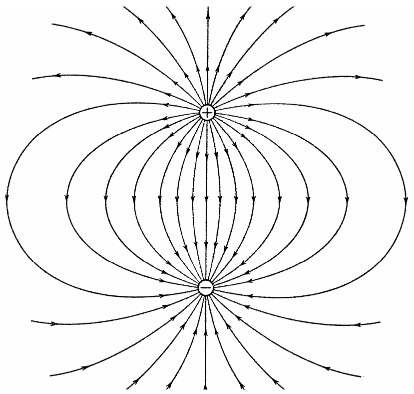
3. Siločiary znázorňujeme tak, že ich počet prenikajúci jednotkovú plochu je úmerný intenzite poľa v danom bode. Tam, kde sú siločiary hustejšie, je intenzita poľa väčšia, a tam kde sú redšie, je intenzita menšia.

Nie je celkom triviálne, že existuje súbor siločiar, ktoré majú uvedené vlastnosti. Možno sa presvedčiť, že ak by neplatil Coulombov zákon, takýto súbor siločiar by neexistoval. Netreba však zabúdať, že elektrické siločiary sú iba pomocný prostriedok na zobrazenie poľa, že nijaké reálne čiary v priestore neexistujú.

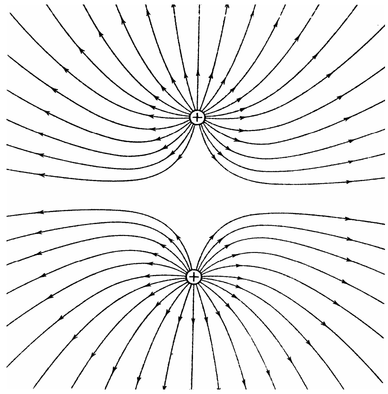
Na *obr. 2.5* sú znázornené siločiary kladného a záporného bodového náboja. Z kladného náboja siločiary radiálne vychádzajú a strácajú sa v nekonečne. Na zápornom náboji majú siločiary opačný smer. Na *obr. 2.6* sú siločiary dvojice opačných rovnako veľkých nábojov, na *obr. 2.7* sú siločiary dvojice rovnakých kladných nábojov a napokon na *obr. 2.8* siločiary dvojice opačných nábojov rôznej veľkosti. Vidíme, že najmä posledné siločiary sú elegantné a zobrazujú relatívne zložité, v priestore osovo symetrické pole.



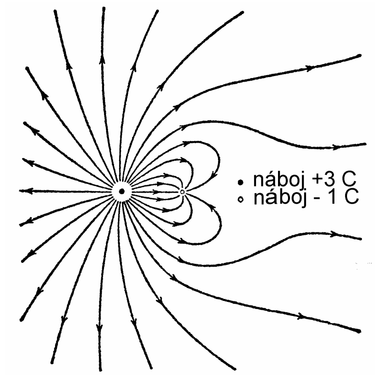
Obr. 2.5



Obr. 2.6



Obr. 2.7



Obr. 2.8

2.3 INTENZITA ELEKTRICKÉHO POĽA NÁBOJOV SPOJITE ROZLOŽENÝCH NA ČIARACH, PLOCHÁCH A V OBJEME

V praxi je elektrický náboj často spojito rozložený na telesách rôznych geometrických foriem, pričom spojitosť musíme chápať v uvedenom zmysle rozloženia veľkého množstva elementárnych nábojov na objektoch konečných rozmerov. Pod pojmom rozložený náboj tu rozumieme dodatočný náboj, ktorý bol na teleso privedený alebo z neho odvedený vo forme napr. istého počtu elektrónov. Bez tohoto dodatočného náboja sa teleso javí ako elektricky nenabité, t. j. účinok náboja všetkých protónov je kompenzovaný účinkom náboja presne rovnakého počtu elektrónov. Je samozrejmé, že túto kompenzáciu treba chápať v relatívne veľkom objeme, v ktorom veľký počet kladných a záporných nábojov je rovnaký. V blízkosti jednotlivých elementárnych nábojov v telese existujú silné lokálne polia, ktoré v dôsledku chaotického tepelného pohybu majú fluktuačný charakter a ich priestorová a časová stredná hodnota sa rovná nule. Ak teda privedieme na teleso dodatočný náboj – ináč povedané, elektricky ho nabijeme – zaujmú tieto náboje na telese isté polohy závislé od štruktúry a elektrických vlastností telesa.

Na tomto mieste treba povedať, že v prírode sa vyskytujúce látky delíme z hľadiska ich základných elektrických vlastností na:

a) látky elektricky nevodivé, nazývané **nevodiče**, izolanty, prípadne **dielektriká**,

b) látky elektricky vodivé, alebo jednoducho **vodiče**.

Pojem "vodivosť látok" zavedieme neskôr ako fyzikálnu veličinu, na tomto mieste definujeme vodivosť ako mieru voľnosti pohybu nábojov v látke. V nevodičoch, dielektrikách, sa privedené náboje nemôžu pohybovať, teda zotrvávajú na tých miestach, na ktoré boli vonkajšími silami prinesené. Vo vodičoch sa náboje môžu pohybovať, takže privedený náboj si na vodivom telese nájde sám miesto, na ktorom je ochotný stabilne zotrvať. Toto rozmiestnenie nábojov na vodivom telese je "kolektívne", po dohode s ostatnými nábojmi. Dá sa ukázať, že rozloženie nábojov na vodivom telese zodpovedá princípu najmenšieho účinku – náboje sa na vodivom telese rozložia tak, že energia ich elektrického poľa je minimálna (Thomsonova veta).

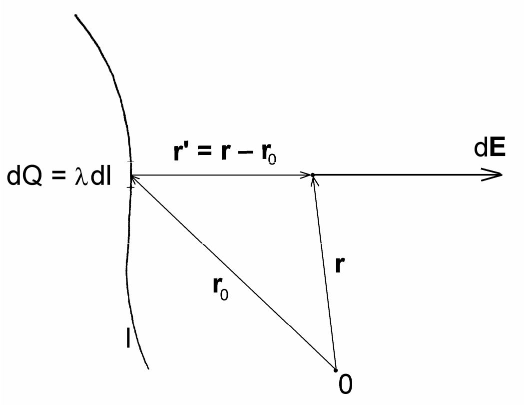
Uvedené triedenie látok na vodivé a nevodivé je veľmi hrubé, pretože v prírode v skutočnosti neexistujú ideálne látky, ktoré by patrili do jednej alebo druhej skupiny. Všetky tuhé látky sú viac-menej vodivé alebo nevodivé. Naviac, popri tuhých látkach existujú aj látky kvapalné a plynné, ktoré majú svoje špecifické zvláštnosti, najmä plyny, ktoré keď sú ionizované, predstavujú osobitné skupenstvo hmoty nazývané **fyzikálna plazma**. Keďže sa na tomto mieste nemienime zaoberať vnútornou štruktúrou látok, uspokojíme sa s týmto hrubým triedením, ktoré potrebám elektrostatiky dostatočne vyhovuje. Látkové nabité prostredie samo vplýva na intenzitu elektrického poľa. Predbežne si však tento vplyv nebudeme všímať a výsledné elektrické pole budeme považovať iba za pole dodatočných, prinesených nábojov.

Venujme sa teda spôsobom výpočtu intenzity poľa od rôznych nábojových rozložení. Všetky tieto výpočty sú založené na platnosti princípu superpozície a vedú na integráciu príspevkov k intenzite od jednotlivých elementov nábojového rozdelenia. Ako prvé preskúmame elektrické pole budené nábojom rozloženým na geometrickom útvare, podobnom matematickej čiare, ktorá môže modelovať napr. tenký vodivý nabitý drôt alebo nabité vlákno z umelej hmoty. Dĺžka nosiča náboja (čiary) nech je l a môže byť konečná alebo nekonečná. Na čiare je rozložený náboj s dĺžkovou hustotou λ, pričom λ môže byť konštanta (kladná alebo záporná), ak je náboj na čiare rozložený rovnomerne, alebo veličina závislá od polohy na čiare. V takom prípade je λ matematickou funkciou polohy, pričom poloha môže byť daná rôznym spôsobom; najčastejšie ako priebežný bod v pravouhlých súradniciach (x_0, y_0, z_0), teda vzdialenosťou uvažovaného bodu na čiare od vhodne zvoleného začiatku 0, pozri *obr. 2.9*, teda $\lambda(\boldsymbol{r}_0)$. V tomto bode na čiare zvolíme nekonečne krátky úsek dl, na ktorom je celkový nekonečne malý náboj $\mathrm{d}Q(\boldsymbol{r}_0) = \lambda(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}l$. Tento náboj má vo veľkej vzdialenosti $\boldsymbol{r}'$ vlastnosti bodového náboja, teda budí nekonečne malé pole d$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ úmerné dQ a klesajúce ako funkcia $1/r'^2$ so smerom pozdĺž vektora $\boldsymbol{r}'$. Pole d$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ možno vyjadriť matematickými vzťahmi

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\,Q(\boldsymbol{r}_0)}{r'^3}\boldsymbol{r}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}'}{r'^3}\mathrm{d}\,l = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\right|^3}\mathrm{d}\,l \qquad (2.22)$$

kde $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ (pozri *obr. 2.9*). Výsledná intenzita poľa od celej nabitej čiary je daná vektorovým súčtom nekonečne malých príspevkov d$\boldsymbol{E}$ od jednotlivých nábojových elementov pozdĺž celej čiary l. Matematicky je tento súčet daný integrálom príspevkov (2.22), teda

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}'}{r'^3}\mathrm{d}\,l \qquad (2.23)$$



Obr. 2.9

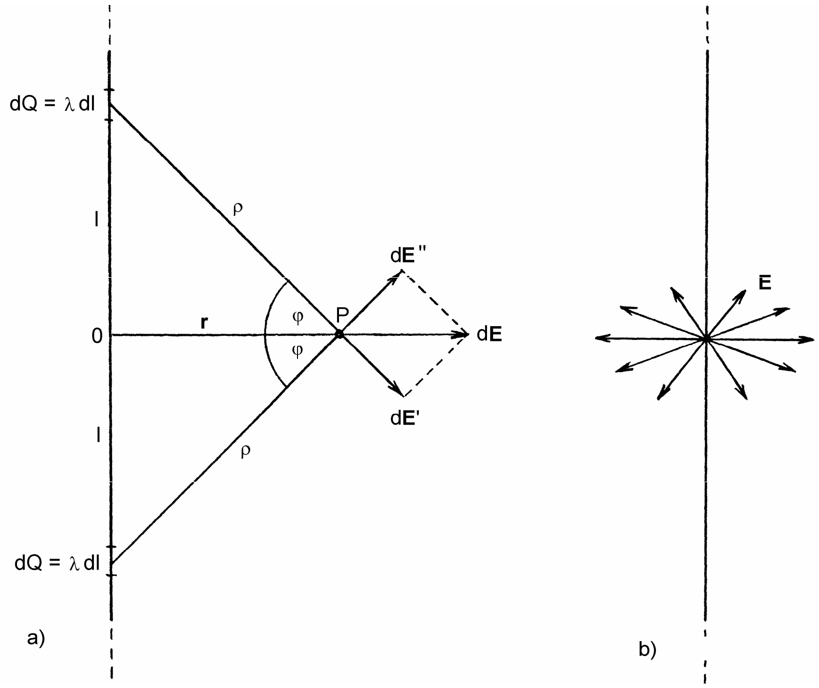
Vzťah (2.23) pre intenzitu elektrického poľa od nabitej priamky má iba formálny význam, pretože nevieme priamo počítať integrály z vektorových funkcií. Ak máme šťastie, že polia od všetkých elementov majú rovnaký smer, v takom prípade ide o obyčajnú integráciu, ale to je zriedkavosť. Vo všeobecnosti treba príspevky typu (2.22) rozložiť na vektorové zložky a tieto jednotlivo integrovať. Výsledok dostaneme v tvare troch zložiek vektora intenzity elektrického poľa. Čiastočne sa výpočet zjednoduší aj v prípade, keď je nábojová hustota konštantná.

Intenzita elektrického poľa v okolí nabitej priamky. Ako užitočný príklad uvedieme výpočet intenzity elektrického poľa v okolí nekonečne dlhej priamky nabitej nábojom s konštantnou hustotou λ. Na *obr. 2.10a* je znázornená časť nekonečnej nabitej priamky. V kolmej vzdialenosti r od priamky (bod 0 je vzťažný bod) v bode P je intenzita elektrického poľa od každého z dvoch zvolených elementov $\lambda \mathrm{d}l$ daná výrazom

$$\mathrm{d}E' = \mathrm{d}E'' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}l}{\rho^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}\varphi \tag{2.24}$$

kde sme využili skutočnosť, že

$$l = r\,\mathrm{tg}\,\varphi \qquad \mathrm{d}l = \frac{r}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \qquad \rho = \frac{r}{\cos\varphi}$$



Obr. 2.10

Tieto elementárne príspevky majú smery spojníc ρ a v bode P sa vektorovo sčítajú na výslednú intenzitu dvojice v absolútnej hodnote

$$\mathrm{d}E_r = 2\,\mathrm{d}E'\cos\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \tag{2.25}$$

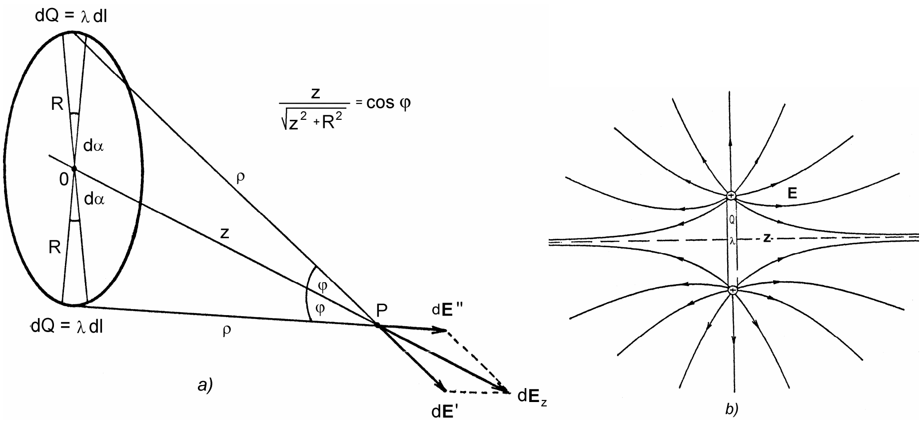
Smer tohoto príspevku je pozdĺž spojnice r. Teraz môžeme integrovať všetky takéto dvojice pozdĺž nekonečnej priamky, teda

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.26}$$

Vidíme, že pole nábojov rozložených rovnomerne na nekonečnej priamke je radiálne okolo priamky a intenzita poľa klesá ako funkcia $1/r$. Na *obr. 2.10b* sú znázornené siločiary poľa v okolí nabitej priamky.

Intenzita elektrického poľa od náboja na kružnici. Poučným príkladom je výpočet intenzity elektrického poľa na osi kružnice polomeru R s nábojom Q rovnomerne rozloženým pozdĺž nej s dĺžkovou hustotou $\lambda = Q/(2\pi R)$, pozri *obr. 2.11a*. Intenzitu poľa vypočítame vo vzdialenosti z od stredu kružnice. Na kružnici zvolíme dva proti sebe ležiace nábojové elementy $\lambda \mathrm{d}l$, ktoré dávajú dva rovnako veľké príspevky intenzity

$$\mathrm{d}E' = \mathrm{d}E'' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}l}{\rho^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,\mathrm{d}\alpha}{z^2}\cos^2\varphi$$



Obr. 2.11

kde $\rho = z/\cos\varphi$ a $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\alpha$. Tieto dva príspevky sa v bode P vektorovo skladajú a vytvárajú pozdĺž osi z element intenzity

$$\mathrm{d}E_z = 2\,\mathrm{d}E'\cos\varphi = \frac{\lambda R}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos^3\varphi}{z^2}\mathrm{d}\alpha$$

Po jednoduchej integrácii elementov $\mathrm{d}\alpha$ od 0 po π dostaneme pre intenzitu poľa na osi kruhu vo vzdialenosti z v mieste, odkiaľ oblúky kruhu vidieť pod uhlom φ, výraz v tvare

$$E_z = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{\cos^3\varphi}{z^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} \tag{2.27}$$

Z tohoto výrazu môžeme urobiť niektoré výpovede o priebehu poľa pozdĺž osi z. Predovšetkým v začiatku, v strede kružnice (z = 0), je intenzita nulová. To síce priamo z posledného výrazu nevyplýva, pretože by tam mohli okrem zložky v smere z existovať i nejaké priečne zložky, ale aj tie by sa v dôsledku osovej symetrie rozloženia náboja v strede kružnice museli rušiť. Pre záporné hodnoty z je intenzita poľa na osi záporná, čo znamená, že tam intenzita poľa smeruje proti smeru osi z, a v nekonečne veľkých vzdialenostiach napravo a naľavo od stredu 0 sa intenzita poľa rovná nule. Posledný výraz môžeme písať aj v tvare

$$E_z(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{R^2}{z^2}\right)^{3/2}} \tag{2.28}$$

odkiaľ vidíme, že vo vzdialenosti z » R je pole dané približným výrazom

$$E_z(z) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

Vo veľkej vzdialenosti od kružnice nielen na osi, ale v ľubovoľnom bode priestoru je pole dané posledným výrazom, inak povedané, z veľkej vzdialenosti pozorujeme nabitú kružnicu ako bodový náboj.

Zistili sme, že intenzita poľa v začiatku a v nekonečne sa rovná nule, musí teda na osi z existovať miesto, kde intenzita poľa má maximum. Možno sa ľahko presvedčiť, keď sa vypočíta extrém funkčnej závislosti (2.27), že intenzita nadobúda absolútne maximá vo vzdialenostiach $\pm R/\sqrt{2}$ od stredu kružnice, kde dosahuje hodnoty

$$E_{max} = \frac{Q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Pole siločiar v bezprostrednom okolí kružnice je pomerne zložité. O jeho priebehu si možno urobiť predstavu z *obr. 2.11b*. Náš výpočet sa týka iba bodov na osi kružnice, vo všetkých iných bodoch výpočty sú zložité a vedú na eliptické integrály.

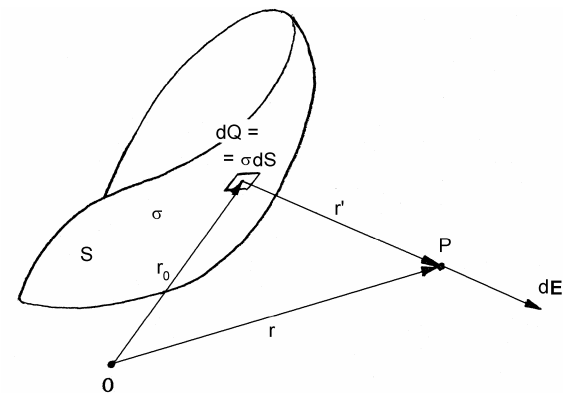
Druhým, v praxi sa často vyskytujúcim nábojovým rozložením, je spojité rozloženie náboja na ploche. Na *obr. 2.12* je znázornená plocha S, ktorá tiež môže byť konečná alebo nekonečná, na ktorej je rozložený náboj s plošnou hustotou σ. Vo vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}_0$ od vzťažného bodu 0 je na ploche zvolená elementárna plocha dS, na ktorej sídli nekonečne malý náboj dQ = σdS. Tento náboj produkuje vo vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}'$ elementárne malú intenzitu elektrického poľa

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}\,S}{r'^3} \tag{2.29}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je vektorová vzdialenosť bodu P, v ktorom počítame intenzitu. Výsledná intenzita poľa v bode P je daná integrálom výrazu (2.29), teda

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}'}{r'^3}\,\mathrm{d}\,S \tag{2.30}$$

Integrál v poslednom výraze je vo všeobecnosti dvojným integrálom a spôsob jeho výpočtu závisí od spôsobu voľby plošného elementu dS.



Obr. 2.12

Intenzita elektrického poľa od náboja na kruhovej ploche. Ako príklad uvedieme výpočet intenzity elektrického poľa na osi kruhu s polomerom R vo vzdialenosti z od náboja Q rovnomerne rozloženého s plošnou hustotou $\sigma = Q/(\pi R^2)$ na kruhu, pozri *obr. 2.13a*. Na kruhu si zvolíme koncentrické medzikružie s polomerom r, s prírastkom dr a na ňom vyberieme dva proti sebe ležiace plošné elementy $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha$, na ktorých sú nekonečne malé náboje dQ = $\sigma r\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha$. Tieto náboje vytvoria v bode P intenzity elektrického poľa s absolútnymi hodnotami

$$\mathrm{d}\,E' = \mathrm{d}\,E'' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\alpha}{\rho^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\alpha$$

kde sme pri zápise využili rovnosti

$$\rho = \frac{z}{\cos\varphi} \qquad\qquad r = z\,\mathrm{tg}\,\varphi \qquad\qquad \mathrm{d}\,r = \frac{z}{\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\,\varphi$$

Tieto dva príspevky sa v bode P vektorovo skladajú a vytvoria elementárne pole

$$\mathrm{d}\,E''' = 2\,\mathrm{d}\,E'\cos\varphi = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\alpha = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\alpha$$

Po prvej integrácii tohto výrazu cez elementy dα od 0 po π dostaneme elementárnu intenzitu od celého medzikružia

$$\mathrm{d}\,E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi$$

a ak tú integrujeme cez uhol φ od 0 po φ_0, dostaneme

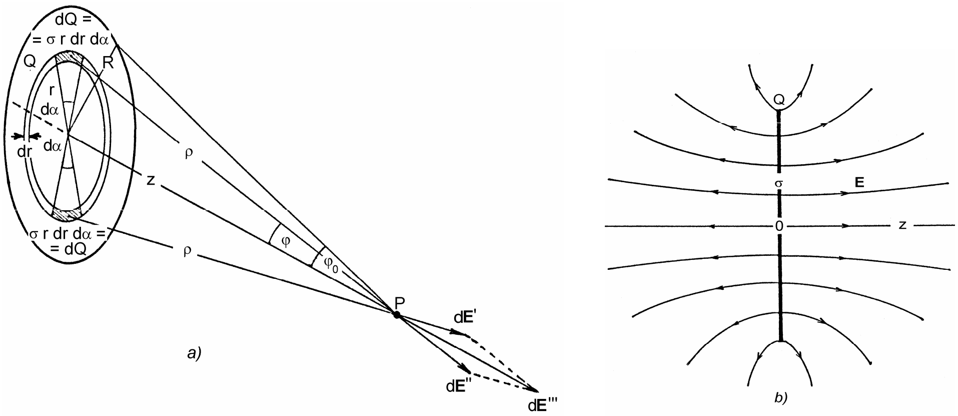
$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\varphi_0) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(1-\cos\varphi_0) \tag{2.31}$$

Pre funkciu $\cos\varphi_0$ platí

$$\cos\varphi_0 = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

takže

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}\right) \tag{2.32}$$



Obr. 2.13

Z výrazov (2.31) a (2.32) môžeme získať zaujímavé informácie o poli. Predovšetkým vidíme, že v nekonečne veľkej vzdialenosti (pre $\varphi_0 = 0$ alebo $z \to \infty$) pole vymizne a v strede kruhu (pre $\varphi_0 = \pi/2$, alebo $z = 0$) má konečnú hodnotu

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \tag{2.33}$$

Vo veľkej vzdialenosti od kruhu pre $z \gg R$, môžeme prevrátenú hodnotu odmocniny vo výraze (2.32) rozvinúť do mocninového radu a obmedziť sa na prvé dva členy rozvoja, teda

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}$$

a uvedený výraz nadobudne tvar

$$E_z \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

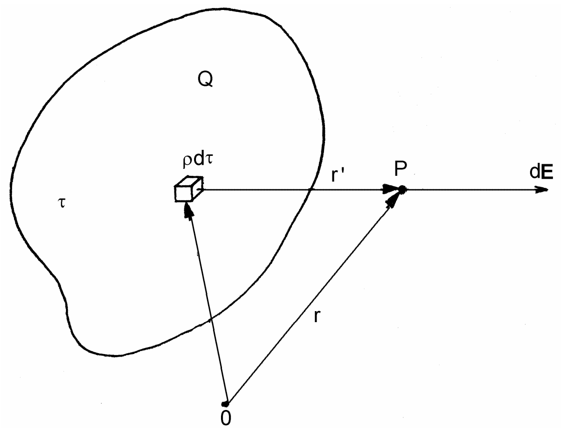
Vidíme, že vo veľkých vzdialenostiach od kruhu je jeho pole podobné ako pole bodového náboja.

Na plošný náboj rozložený na kruhovej ploche je možný ešte iný dôležitý pohľad. Predpokladajme, že polomer plochy R budeme zväčšovať do nekonečna. Kruhová plocha prejde na nekonečnú rovinu. Ak vo výraze (2.31) $\varphi_0 \to \pi/2$ alebo vo výraze (2.32) $R \to \infty$, dávajú tieto výrazy intenzitu elektrického poľa pred nekonečnou rovinou v tvare

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{2.34}$$

Keďže nekonečná rovina nemá os symetrie, intenzita daná posledným výrazom je rovnako veľká v každom bode pred a za rovinou. Ak je σ kladné, potom pole má smer od roviny na každú stranu. Ide o homogénne polia.

Samozrejme nekonečne rozľahlé roviny v praxi nemáme, ale naše úvahy sú platné pre každý prípad, v ktorom $z \ll R$, kde R je najmenší lineárny rozmer rovinnej plochy. Pole v dostatočne malej blízkosti od stredu nabitej roviny môžeme považovať za viac alebo menej homogénne s hodnotou intenzity $\sigma/(2\varepsilon_0)$ podľa výrazu (2.34). Siločiary v okolí rovnomerne nabitého kruhu sú znázornené na *obr. 2.13b*.



Obr. 2.14

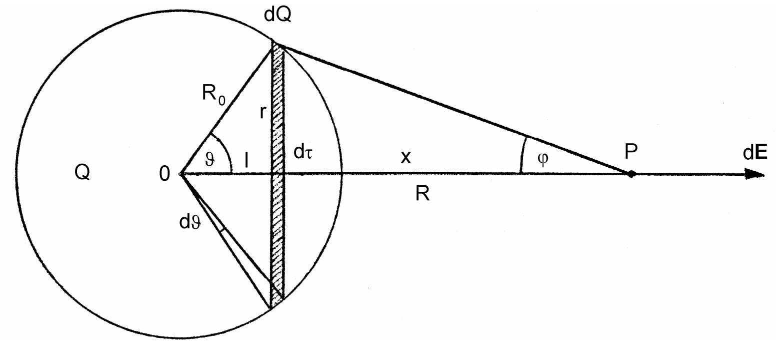
Podobne ako v prípade nabitej čiary a roviny môžeme vypočítať intenzitu elektrického poľa aj v prípade náboja rozloženého v objeme s objemovou hustotou ρ v objeme τ podľa *obr. 2.14*. Intenzita elektrického poľa v ľubovoľnom bode P danom polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ je daná výrazom

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \frac{\rho(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}' \,\mathrm{d}\,\tau}{r'^3} \tag{2.35}$$

kde $\boldsymbol{r}_0$ je polohový vektor nábojového elementu $\mathrm{d}Q = \sigma(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\tau$ a $\boldsymbol{r}'$ je vektorová vzdialenosť bodu P. Bod P pritom môže ležať mimo objemu τ, ale môže ležať aj v tomto objeme alebo na hraničnej ploche objemu. Je zaujímavé, že pole zostane konečné aj v týchto vnútorných bodoch objemu. Takisto pole na ploche s plošnou hustotou náboja je konečné, avšak ak sú náboje rozložené na čiarach, pole na samotnej čiare má singularitu, čo si možno všimnúť napríklad v prípade nekonečne dlhého priamkového náboja [výraz (2.26)].

Intenzita elektrického poľa od náboja v guli. Uvedieme príklad výpočtu intenzity elektrického poľa pre náboje rozložené s objemovou hustotou. Ako uvidíte, takéto výpočty začínajú byť nepríjemne zložité. Relatívne jednoduchý je výpočet intenzity v okolí gule s polomerom R_0 nabitej rovnomerne v objeme celkovým nábojom Q, teda s konštantnou hustotou náboja $\rho = 3Q/(4\pi R_0^3)$. Vypočítame intenzitu vo vzdialenosti $R > R_0$ od stredu gule. Na guli zvolíme element objemu $\mathrm{d}\tau$ v tvare nekonečne tenkého rezu tvaru disku podľa *obr. 2.15*, ktorého obsah

$$\mathrm{d}\tau = \pi R_0^3 \sin^3 \vartheta \,\mathrm{d}\vartheta$$



Obr. 2.15

Význam symbolov je zrejmý z obrázku, z ktorého takisto vidíme, že

$$r = R_0 \sin\vartheta \qquad l = R_0 \cos\vartheta \qquad x = R - l = R - R_0 \cos\vartheta$$

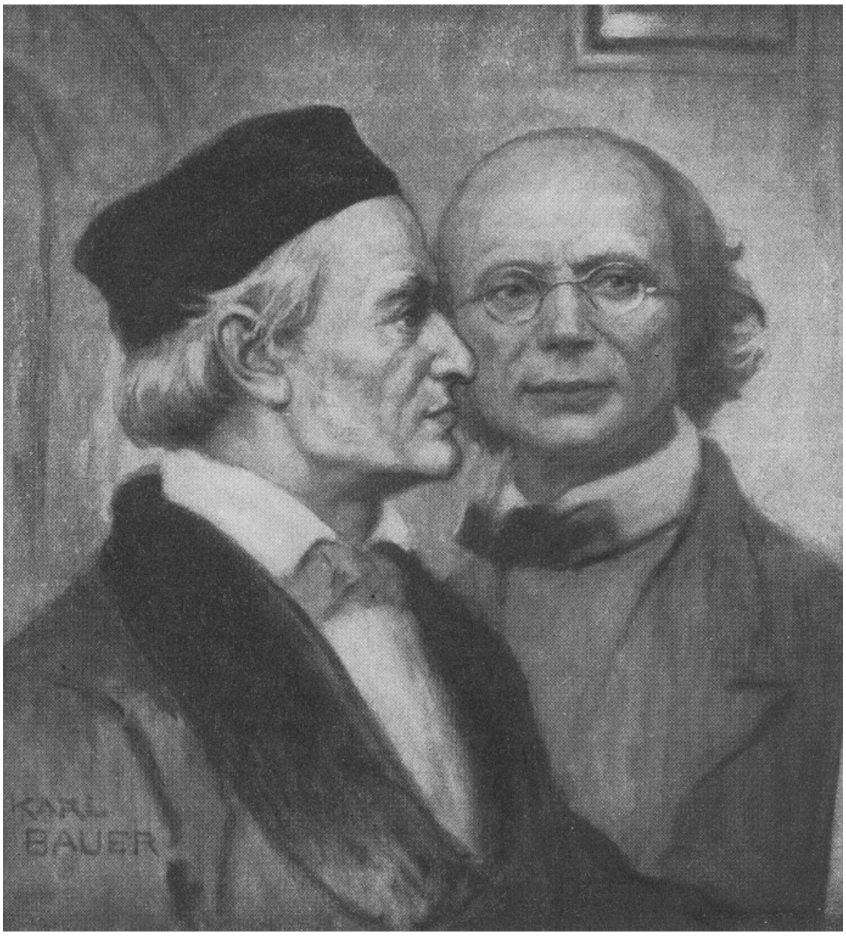
$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \cos\varphi$$

Na objemovom elementárnom disku je náboj

$$\mathrm{d}Q = \rho \,\mathrm{d}\tau = \frac{3}{4} Q \sin^3 \vartheta \,\mathrm{d}\vartheta$$

ktorý v bode P vo vzdialenosti x od neho vytvorí osovú intenzitu poľa veľkosti

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}(1 - \cos\varphi) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R_0^2}\left[\sin\vartheta - \frac{(R - R_0\cos\vartheta)\sin\vartheta}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\vartheta}}\right]\mathrm{d}\vartheta$$



Karl Friedrich GAUSS
(1777 Braunschweig – 1855 Göttingen)

Wilhelm Eduard WEBER
(1804 Wittenberg – 1855 Göttingen)

Maľba v Deutsches Museum, Mníchov

Tento výraz sme získali ako analógiu k výrazu pre intenzitu poľa plošného rovinného disku [pozri vzťah (2.31)]. Výsledné pole dostaneme integráciou cez všetky elementárne objemové disky, teda v danom vyjadrení podľa uhla ϑ od 0 po π, takže

$$E = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R_0^2}\int_0^{\pi}\left[\sin\vartheta - \frac{(R-R_0\cos\vartheta)\sin\vartheta}{\sqrt{R^2+R_0^2-2RR_0\cos\vartheta}}\right]\mathrm{d}\,\vartheta = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Pri výpočte integrálu možno s výhodou využiť substitúciu

$$R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos\vartheta = t$$

S prekvapením zisťujeme, že výsledok integrácie je neobyčajne jednoduchý. Pole mimo objemu gule je také isté radiálne pole, ako pole rovnako veľkého bodového náboja umiestneného v strede gule, teda

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.36}$$

pre všetky $r > R_0$. Vo vnútri guľového rozloženia je tiež nenulové pole, je takisto jednoduché, ale jeho výpočet je zložitý, a preto ho na tomto mieste neuvádzame.

Uvedené ilustrácie svedčia o tom, že výpočet poľa zložitejších rozložení nábojov priamou integráciou je možný, ale je prinajmenšom nepohodlný. Našťastie existuje metóda, ktorá, aj keď nie je univerzálna, umožňuje v niektorých prípadoch určiť intenzity polí takmer spamäti a ušetrí čitateľa od úmorných výpočtov. Metóda spočíva na jednom zo základných zákonov elektromagnetizmu, ktorý dostal názov podľa jeho objaviteľa – volá sa Gaussov zákon.

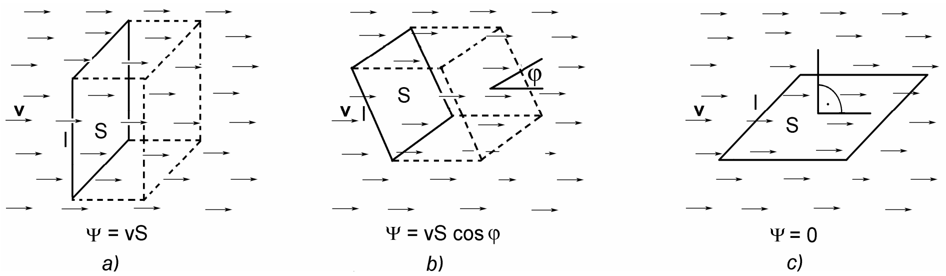
2.4 GAUSSOV ZÁKON. TOK VEKTORA PLOCHOU

Pojem toku vektora je jedným zo základných pojmov teórie vektorového poľa. Vo fyzike sa s ním stretávame často, napríklad v hydrodynamike. Staviteľov hydrocentrál samozrejme veľmi zaujíma, aké množstvo vody pretečie za jednotku času prívodným potrubím k turbíne. Množstvo pretečenej vody, napr. v m^3/s, závisí predovšetkým od prierezovej plochy potrubia, ale aj od charakteru prúdenia a od rýchlosti molekúl vody v jednotlivých bodoch prierezovej plochy. Ak by prúdenie bolo laminárne, v tom prípade úloha o množstve pretečenej vody alebo fyzikálne povedané – úloha o toku vektora rýchlosti – by bola veľmi jednoduchá. Ak však podmienka laminárnosti prúdenia nie je splnená, úloha sa môže ukázať náročná na výpočet.

Druhý príklad toku vektorovej veličiny je tok energie elektromagnetického poľa, ak chcete, tak napr. žiarivej elektromagnetickej energie Slnka, ktorá preniká cez okno do Vašej izby. Neskôr zavedieme vektorovú veličinu, ktorá sa nazýva Poyntingov vektor a fyzikálne udáva množstvo elektromagnetickej energie prenikajúcej kolmo jednotkovou plochou za jednotku času alebo výkon prechádzajúci kolmo jednotkovou plochou. Ak

Poyntingov vektor vhodne integrujeme, dostaneme celkový slnečný výkon cez Vaše okno alebo inak povedané – tok Poyntingovho vektora danou plochou.

V uvedených dvoch príkladoch ide o skutočný tok reálnej fyzikálnej veličiny (hmotnosť, energia). Ukazuje sa však, že niekedy je vhodné zaviesť aj tok vektorovej veličiny, pri ktorej v známom zmysle nič netečie. Takýmto abstraktným tokom je napr. tok intenzity elektrického poľa alebo tok magnetickej indukcie. Ich zavedenie nám umožňuje elegantne sformulovať niektoré základné zákony elektromagnetizmu. Pokúsme sa naše úvahy o toku vyjadriť matematicky.



Obr. 2.16

Predstavme si, že v nejakej časti priestoru je dané nejaké vektorové pole. Pre jednoznačnosť predpokladajme, že je to pole vektora rýchlosti $\boldsymbol{v}$ prúdiacej kvapaliny ako funkcie priestorových súradníc. Pre začiatok tiež predpokladajme, že ide o pole homogénne. Vložme do tejto prúdiacej kvapaliny myslený rovinný rámček s obvodom l, napr. štvoruholník ako na *obr. 2.16a* tak, že vektor $\boldsymbol{v}$ je kolmý na rovinnú plochu S ohraničenú rámčekom. Potom množstvo kvapaliny, ktoré pri rýchlosti v pretečie plochou S za jednotku času je vS. Toto množstvo vyjadrené napríklad v m^3/s nazveme tokom kvapaliny alebo tokom vektora $\boldsymbol{v}$ plochou S a označíme ho

$$\Psi = vS$$

Ak by plocha rámčeka nebola kolmá na smer vektora $\boldsymbol{v}$, ale kolmica k ploche by zvierala s plochou uhol φ ako na *obr. 2.16b*, potom tok rámčekom by bol

$$\Psi = vS\cos\varphi \qquad (2.37)$$

Špeciálne v prípade, ak kolmica zviera s vektorom $\boldsymbol{v}$ uhol $\varphi = 90°$ ako na *obr. 2.16c*, potom tok $\Psi = 0$.

Vo všetkých predošlých prípadoch sme predpokladali, že vektor rýchlosti je konštantný vektor, teda jeho pole je homogénne. Ak sa rýchlosť kvapaliny od miesta k miestu mení, v tom prípade výsledný tok cez rovinnú plochu bude daný integrálnym súčtom nekonečne malých tokov $d\Psi$ cez nekonečne malé plôšky dS, na ktoré musíme plochu S rozložiť. Podobne ako vo vzťahu (2.37) dostaneme

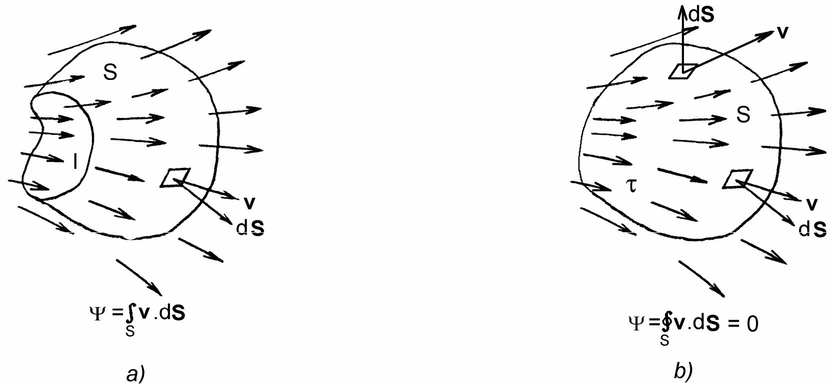
$$d\Psi = v dS\cos\varphi \qquad (2.38)$$

kde φ je uhol medzi vektorom $\boldsymbol{v}$ a kolmicou na príslušnú plôšku dS. Vzniká tu však jedna ťažkosť, že na jednotlivých plôškach je smer vektora $\boldsymbol{v}$ rôzny, a teda φ je funkciou polohy. Pri zápise posledného výrazu možno s výhodou využiť pojem plošného vektora – je to vektor, ktorého modul sa rovná veľkosti rovinnej plochy a smer je daný smerom kolmice na plochu. Plocha má však dve strany, preto v konkrétnom prípade treba nejakým pravidlom tento smer vybrať. V danom prípade je to smer reálneho toku. Náš plošný element dS budeme teda stotožňovať s vektorom d$\boldsymbol{S}$ a keďže rýchlosť je tiež vektor, výraz (2.38) pre dΨ môžeme napísať ako skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{v}$ a d$\boldsymbol{S}$, teda

$$\mathrm{d}\Psi = \boldsymbol{v}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.39}$$

Celkový tok udáva integrál jednotlivých príspevkov (2.39) po celej ploche S

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{v}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} \tag{2.40}$$



Obr. 2.17

Zovšeobecníme teraz naše úvahy o toku kvapaliny. Plocha S nemusí byť rovinná, ale ľubovoľná, a dokonca aj rámček – hraničná čiara l, nemusí ležať v rovine, pozri *obr. 2.17a*. Aj v takomto prípade tok kvapaliny je daný integrálom (2.40), hoci jeho praktický zmysel sa stráca, nie však v prípade iných, abstraktných vektorových polí. V abstrakcii môžeme pokračovať tak, že hraničnú čiaru l budeme skracovať na nulu, až z plochy s hraničnou čiarou vznikne uzavretá plocha S ako na *obr. 2.17b*, ktorá uzatvára nejaký objem τ. Vypočítajme tok kvapaliny takouto uzavretou plochou. Bezpochyby takýto integrál po uzavretej ploche z rýchlosti prúdiacej nestlačiteľnej kvapaliny sa rovná nule, čo môžeme matematicky napísať

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{v}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = 0 \tag{2.41}$$

Integrál, teda tok vektora $\boldsymbol{v}$, sa rovná nule, pretože koľko kvapaliny do objemu τ plochou zľava na obr. *2.17b* vtečie, toľko jej plochou vpravo z objemu vytečie – kvapalina sa totiž vo vnútri plochy nehromadí.

Existuje veľa vektorových polí, ktorých integrál toku cez ľubovoľnú uzavretú plochu sa rovná nule, ale aj veľa takých, ktorých tok sa nule nerovná. Nulovým je tok práve diskutovanej nestlačiteľnej kvapaliny charakterizovanej jej rýchlostným poľom, ďalej tok vektora magnetickej indukcie, na druhej strane, nenulovým je napr. tok intenzity elektrického poľa, tok intenzity gravitačného poľa a i.

Venujme sa teda toku intenzity elektrického poľa, ktorý bude teraz stredobodom nášho záujmu. Analogický postup a argumentáciu, aké sme aplikovali pri zavedení toku rýchlosti, môžeme aplikovať aj pri zavedení toku vektora intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$. Ak v elektrickom poli intenzity $\boldsymbol{E}$ zvolíme uzavretú plochu S, formálne je tok vektora $\boldsymbol{E}$ daný integráciou príspevkov $\mathrm{d}\Psi = \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ po uzavretej ploche S, teda

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} \tag{2.42}$$

Položme si teraz zásadnú otázku – čomu sa takýto integrál vo všeobecnosti rovná, čomu sa rovná tok intenzity elektrického poľa uzavretou plochou, ak zoberieme do úvahy, že v priestore, kde existujú polia, sa nachádzajú aj ich zdroje – bodové alebo nejako rozložené náboje. Predovšetkým si treba všimnúť, že tok akéhokoľvek vektorového poľa je skalárna veličina. Ďalej, intuitívne cítime, že hodnota integrálu bude principiálne iná cez také plochy, ktoré vo svojom vnútri obsahujú náboje, a iná v prípade, ak vo vnútri plochy náboje neexistujú. Otázku o toku nemožno zodpovedať na základe žiadnych poznatkov z elektromagnetizmu, to musel niekto prísť so spásnou myšlienkou hodnou génia. Taký génius sa objavil na konci 18. storočia v Nemecku a volal sa Karl Friedrich Gauss, ktorý vyslovil **Zákon**. Slávny zákon o toku však Gauss nesformuloval pre elektrické, ale pre gravitačné pole, ktoré je rovnakého fyzikálneho druhu, a ktoré v jeho dobe bolo študované intenzívnejšie ako vtedy takmer neznáme elektrické pole. Gauss vo svojom zákone predovšetkým stanovil, že tok vektora intenzity elektrického poľa je vo všeobecnosti nenulový. Zákon v jeho dnešnej formulácii znie:

Gaussov zákon

Tok intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ *uzavretou plochou S sa rovná náboju Q uzavretému plochou a delenému elektrickou konštantou poľa (starý názov permitivitou vákua)* ε_0*. V matematickej formulácii:*

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2.43}$$

Treba zdôrazniť, že náboj Q je celkový náboj v objeme τ uzavretom plochou S bez ohľadu na to, ako je tam rozložený; môže to byť jeden bodový náboj q, teda $Q = q$, alebo súbor n bodových nábojov q_i, teda

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

alebo náboj rozložený spojito v objeme τ s objemovou hustotou ρ, t. j.

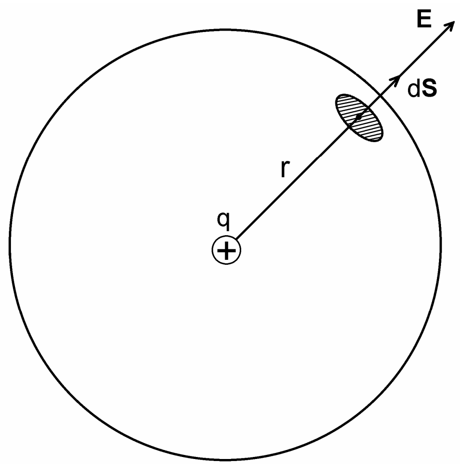
$$Q = \int_{\tau} \rho \, \mathrm{d}\tau$$

Ak v objeme uzavretom plochou nie sú žiadne náboje, vtedy sa tok uzavretou plochou rovná nule, teda

$$\oint_{S} \boldsymbol{E} . \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

Uvedená formulácia Gaussovho zákona (2.43) je známa ako integrálny tvar Gaussovho zákona, pretože udáva vlastnosti poľa vo veľkom objeme. Neskôr sformulujeme diferenciálny tvar, ktorý opisuje vlastnosti poľa v bode priestoru.

Všimnime si teraz niektoré základné vlastnosti elektrického poľa tak, ako plynú z Gaussovho zákona. Skutočnosť, že tok je nenulový, ak plocha obsahuje náboje, a naopak, je nulový, ak tam náboje nie sú, je znakom, že pole je žriedlové a žriedlami sú elektrické náboje – elektrické siločiary vystupujú z kladných nábojov a vstupujú do záporných. Takúto vlastnosť nemá napr. magnetické pole, ktorého tok ľubovoľnou uzavretou plochou je vždy nulový. Magnetické pole je preto poľom nežriedlovým, poľom vírovým.



Obr. 2.18

Druhá závažná skutočnosť, ktorá plynie z Gaussovho zákona, je intenzita poľa bodového náboja. Ak okolo bodového náboja q zvolíme Gaussovu plochu v tvare koncentrickej guľovej plochy s polomerom r (*obr. 2.18*) a ak urobíme jediný predpoklad o poli, že je radiálne, potom vo výraze (2.43) skalárne súčiny $\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ sú súčiny absolútnych hodnôt $E\mathrm{d}S$, pretože vektory $\boldsymbol{E}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ sú všade na uvažovanej guľovej ploche paralelné. Ďalej, E je všade na ploche konštantné, teda ho možno spod integrálu vybrať, a nakoniec, $\int_S \mathrm{d}S$ = obsahu guľovej plochy, teda

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S E\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

z čoho
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

To je nám už známy výraz pre intenzitu elektrického poľa v okolí bodového náboja. Ak na plochu S umiestnime ďalší naboj q_0, potom sila F_0 pôsobiaca na tento náboj

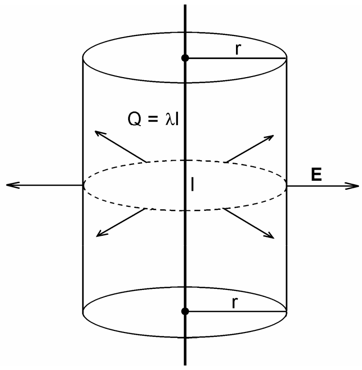
$$F_0 = q_0 E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}$$

čo je Coulombov zákon, ku ktorému sme takto dospeli čisto teoretickými úvahami z Gaussovho zákona. Mohli by sme však naše úvahy aj obrátiť a z Coulombovho zákona dokázať platnosť Gaussovho zákona. Vzniká tak bludný kruh – circulus vitiosus in probando! Ak sa mu chceme vyhnúť, musíme si ujasniť otázku priority a rozhodnúť, ktorý z týchto dvoch zákonov je prvotný. Prvotný je taký zákon, ktorý logicky nevyplýva z iných zákonov, má neobmedzenú platnosť a pritom neodporuje žiadnemu javu pozorovanému v prírode. Takéto atribúty má Gaussov zákon, a preto ho považujeme za prvotný zákon elektrostatiky. Coulombov zákon, ktorý platí pre bodové náboje vo vákuu ho experimentálne potvrdzuje.

2.5 VÝPOČET INTENZÍT ELEKTRICKÝCH POLÍ S VYUŽITÍM GAUSSOVHO ZÁKONA

Gaussov zákon nám v niektorých prípadoch umožňuje neobyčajne jednoducho a elegantne vypočítať intenzitu poľa. Jeden takýto výpočet sme urobili v predchádzajúcom odstavci pre bodový náboj. Ak chceme využiť Gaussov zákon na výpočet intenzity polí, potrebujeme iba dve veci. Mať predstavu o priestorovom rozložení poľa, t. j. mať predstavu napr. o priebehu siločiar, a na jej základe nájsť Gaussovu plochu tak, aby v každom jej bode bola intenzita poľa rovnaká a bola kolmá na plochu. V takom prípade integrál $\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}$ prejde na súčin plochy S a veľkosti intenzity E, teda $\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = ES$. Je zrejmé, že nie vždy vieme nájsť vhodnú plochu, a preto počet takto riešiteľných úloh je obmedzený. Umenie vhodne zvoliť Gaussovu plochu je mierou úspešnosti riešenia.

Intenzita elektrického poľa v okolí nabitej priamky. Vráťme sa teraz znovu k nekonečne dlhej priamke nabitej nábojom s konštantnou hustotou λ a vypočítajme intenzitu elektrického poľa v jej okolí ešte raz, teraz s využitím Gaussovho zákona. Pole je radiálne, lebo je valcovo symetrické s osou symetrie na nabitej priamke. Ak zvolíme ako Gaussovu plochu koaxiálny valec s polomerom r a dĺžkou l ako na *obr. 2.19*, bude mať pole na plášti valca všade rovnakú hodnotu a bude smerovať kolmo na valcovú plochu. Celkový náboj uzavretý plochou $Q = \lambda l$ a tok valcovou plochou je daný iba tokom cez plášť valca, pretože tok základňami je nulový (vektory intenzity ležia v rovine základní). S využitím Gaussovho zákona (2.43) dostaneme



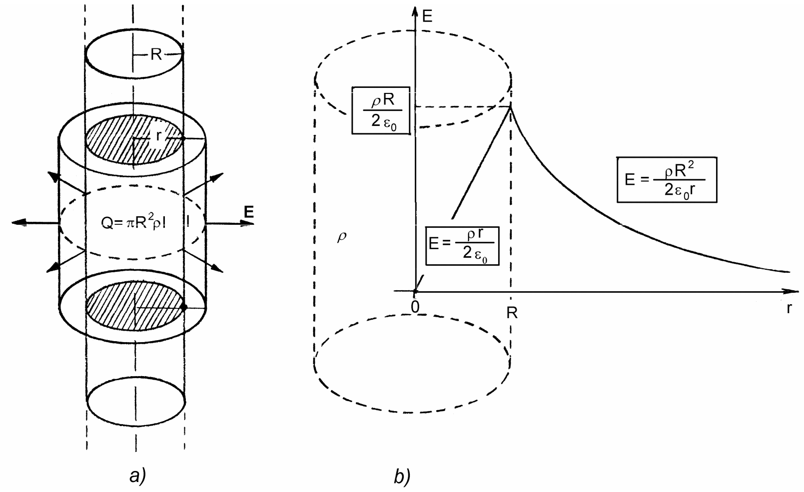
Obr. 2.19

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = 2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

a odtiaľ
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

čo je ten istý výsledok ako (2.26), ktorý sme dostali integráciou. Porovnajte a posúďte, ktorý postup je jednoduchší.

Intenzita elektrického poľa od náboja rozloženého v nekonečne dlhom valci. Predpokladajme teraz, že náboj je rozložený nie na priamke, ale s nejakou konštantnou objemovou hustotou ρ v nekonečne dlhom valci s polomerom R (*obr. 2.20a*). Aj v takom prípade výpočet intenzity poľa je možný priamou integráciou, avšak je zložitý. Využime k výpočtu Gaussov zákon. Preskúmame zvlášť pole mimo objemu valca ($r > R$) a vo valci ($r < R$). Zavedieme si dĺžkovú hustotu náboja (náboj na meter dĺžky valca) $\lambda = \pi R^2\rho$.



Obr. 2.20

V bodoch $r > R$ môžeme aj teraz očakávať radiálne pole, takže Gaussovou plochou môže byť zase koaxiálny valec ako v prípade priamkového náboja. Rovnakými úvahami dostaneme pre intenzitu poľa výraz

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\pi R^2 \rho}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \tag{2.44}$$

teda priebeh poľa ako funkciu $1/r$, podobne ako u priamkového náboja.

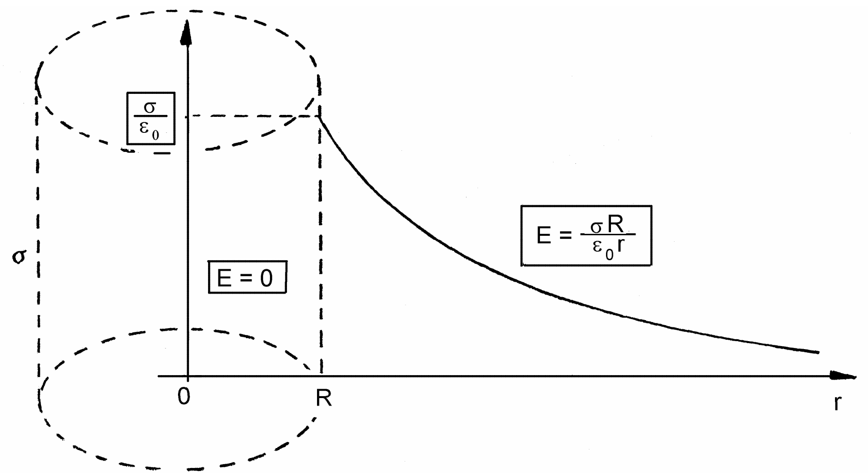
Ak vo vnútri valca (pre body $r < R$) existuje pole, tak z dôvodov symetrie musí byť tiež radiálne a vyhovujúcou Gaussovou plochou je zase koaxiálny valec s polomerom r a dĺžkou l. Celkový uzavretý náboj $Q = \pi r^2 \rho l$, a teda podľa Gaussovho zákona (2.43) platí

$$2\pi l E = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\pi r^2 \rho l}{\varepsilon_0}$$

z čoho

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \tag{2.45}$$

Vidíme, že vo vnútri valca existuje radiálne pole s nulovou hodnotou intenzity na osi valca, veľkosť intenzity poľa lineárne narastá až na hodnotu $\rho R/(2\varepsilon_0)$ a z tejto hodnoty klesá ako funkcia $1/r$ podľa výrazu (2.44). Na *obr. 2.20b* je graficky znázornená závislosť absolútnej hodnoty intenzity poľa ako funkcie r (vzdialenosti od osi valca).



Obr. 2.21

Intenzita elektrického poľa od náboja na valcovej ploche. Ak je náboj rozložený s konštantnou plošnou hustotou σ po povrchu valca, môžeme tiež očakávať, že vo vonkajšom priestore ($r > R$) bude intenzita smerovať radiálne od osi valca, a teda vhodnou Gaussovou plochou je valec dĺžky l s polomerom r. Vo vnútri valca je uzavretý celkový náboj $Q = 2\pi R l \sigma$. S využitím Gaussovho zákona pre intenzitu poľa dostaneme

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \qquad (2.46)$$

Ako vidíme, pole je také isté, ako pole nabitej priamky s dĺžkovou hustotou $\lambda = 2\pi R\sigma$.

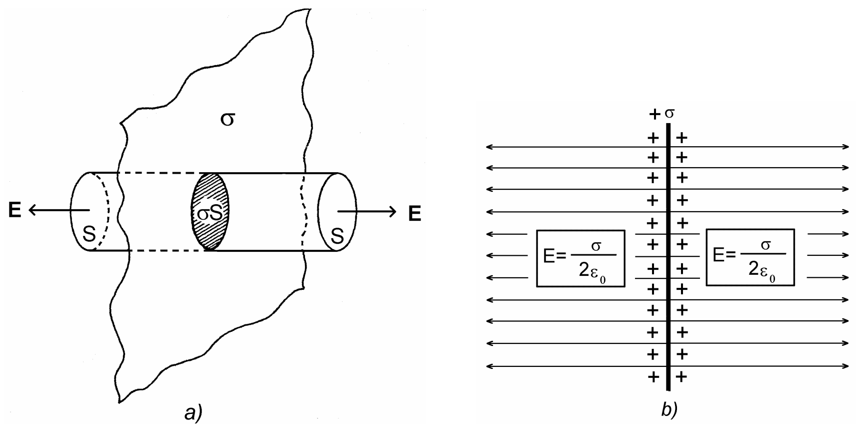
Zaujímavá je otázka o poli vo vnútri valcovej plochy, pre $r < R$. Ak vo vnútri valca zvolíme akúkoľvek uzavretú plochu S, nebude obsahovať žiadny náboj, pretože náboj je uložený s plošnou hustotou po povrchu valca. To ale znamená, že $\oint \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ po ľubovoľnej ploche vo vnútri valca sa rovná nule, teda že samotná integrovaná funkcia sa musí rovnať nule. Vo vnútri valca $E = 0$, o čom sa ľahko môžeme presvedčiť aj priamou integráciou. Grafický priebeh absolútnej hodnoty E v závislosti od r pre nekonečne dlhý valec nabitý povrchovo nábojom s hustotou σ je na *obr. 2.21*.

Intenzita elektrického poľa od náboja na nekonečnej rovine. Dôležitý je prípad poľa nekonečnej roviny nabitej nábojom s konštantnou hustotou σ. Je logické predpokladať, že na obidvoch stranách roviny je homogénne elektrické pole E kolmé k rovine. Vhodnou Gaussovou plochou je valec s plochou základne S preložený cez nabitú rovinu v jeho polovičnej dĺžke podľa *obr. 2.22a*. Tok intenzity plášťom valca je nulový, pretože vektor poľa leží na ploche plášťa, takže celkový tok valcom je súčtom tokov cez dve jeho základne, t. j. $2SE$. Celkový náboj obklopený valcom je σS, a teda v súhlase so vzťahom (2.43)

$$2SE = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

z čoho

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (2.47)$$



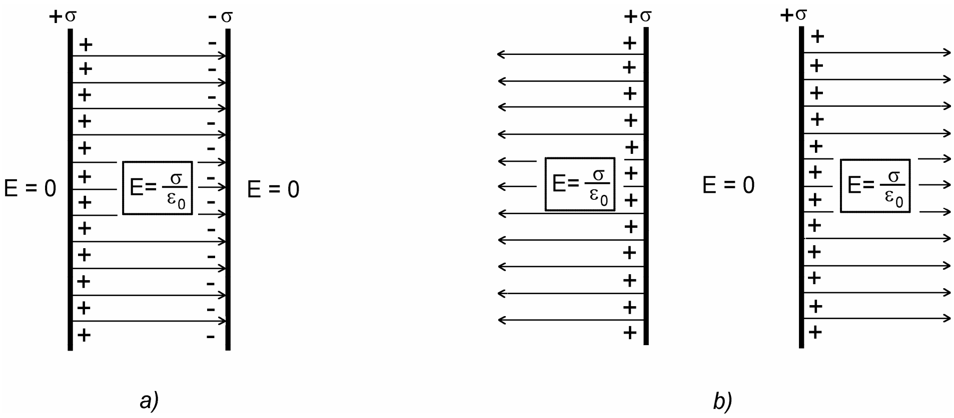
Obr. 2.22

Rovnaký výraz sme už dostali pri limitnom prechode kruhovej plochy na nekonečnú rovinu [pozri výraz (2.34)]. Pole siločiar v okolí nekonečnej roviny je na *obr. 2.22b*.

Elektrické pole nábojov na dvoch paralelných rovinách. Dve paralelné nekonečné roviny nabité opačnými plošnými nábojmi $\pm\sigma$ vytvoria pole, ktoré je superpozíciou poli každého z nábojov. Medzi rovinami sa intenzity od obidvoch rovín sčítavajú na hodnotu

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.48}$$

so smerom vektora ***E*** od kladnej roviny k zápornej. Z vonkajšej strany rovín sa intenzita poľa rovná nule, polia sa tam navzájom kompenzujú. Ak sú roviny nabite nábojmi rovnakého znamienka, medzi rovinami sa intenzita rovná nule a z vonkajšej strany rovín má hodnotu σ/ε_0. Polia obidvoch párov rovín sú zobrazené siločiarami na *obr. 2.23a,b*.



Obr. 2.23

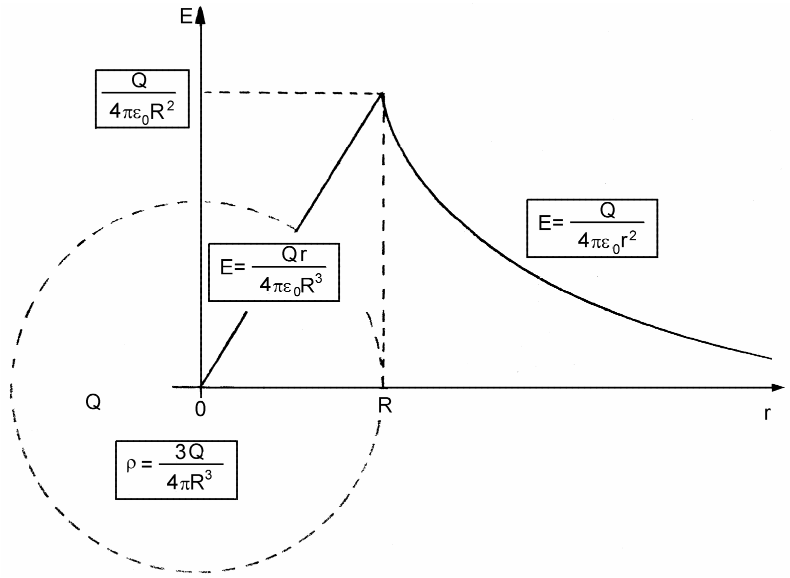
Intenzita elektrického poľa náboja rozloženého v objeme gule. Dôležitým prípadom objemovo rozloženého náboja je náboj Q rozložený s konštantnou hustotou $\rho = 3Q/(4\pi R^3)$ v objeme gule s polomerom R. Pole v okolí gule sme už získali pomerne zložitou integráciou. Skúsme to s Gaussovým zákonom! Rovnomerne rozložený náboj bude produkovať radiálne elektrické pole ako v okolí, tak aj vo vnútri gule. Označme vzdialenosť od stredu gule r. Pre body mimo objemu gule ($r > R$) je vhodnou Gaussovou plochou koncentrická guľová plocha s polomerom r. V každom bode tejto plochy je intenzita E rovnaká a kolmá na plochu, teda tok intenzity sa rovná $4\pi R^2 E$ a podľa vzťahu (2.43)

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

z čoho

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.49}$$

Teda známy výsledok [pozri výraz (2.36)], teraz získaný neobyčajne jednoducho – pole v okolí gule je také isté, ako pole rovnako veľkého bodového náboja umiestneného v strede gule. Akýkoľvek iný bodový náboj q_0 opačného znamienka ako Q nachádzajúci sa v okolí nabitej gule bude priťahovaný do stredu gule podobne, ako sú priťahované predmety na povrchu Zeme, alebo Mesiac, smerom do stredu Zeme. Táto vlastnosť silového pôsobenia Zeme alebo guľového náboja, dnes pre nás takmer triviálna, nebola triviálna pre Newtona, ktorý sa takmer dvadsať rokov zdráhal skutočnosť o centrálnom silovom pôsobení Zeme a Mesiaca publikovať, pretože mu chýbal matematický dôkaz.



Obr. 2.24

Vo vnútri gule pre $r < R$ je Gaussova plocha tiež guľová plocha s polomerom r, avšak náboj, ktorý uzatvára je $Q' = (4/3)\pi r^3\rho = (r^3/R^3)Q$. Tok plochou je $4\pi r^2 E$, takže

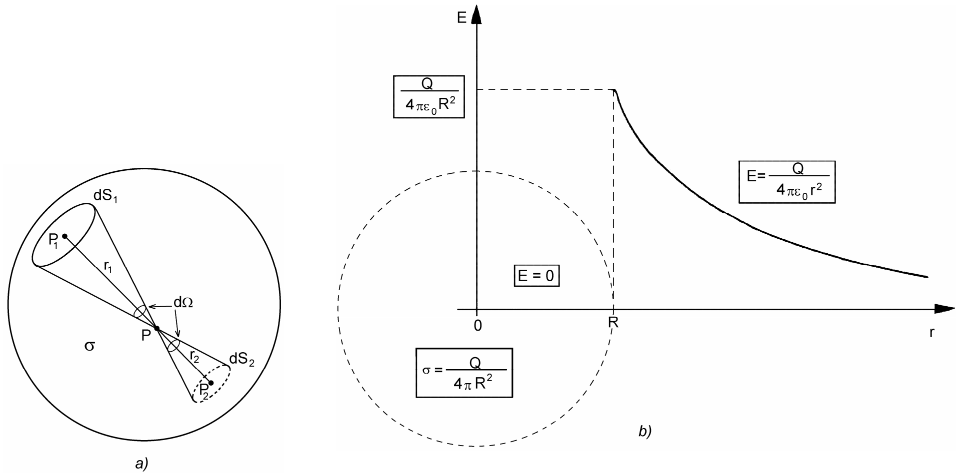
$$4\pi r^2 E = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{r^3}{R^3}Q}{\varepsilon_0}$$

z toho

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \tag{2.50}$$

Vo vnútri gule je teda radiálne elektrické pole, ktorého veľkosť intenzity závisí lineárne od vzdialenosti r a na povrchu gule má hodnotu $Q/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$. Na *obr. 2.24* je znázornená závislosť absolútnej hodnoty intenzity elektrického poľa E od vzdialenosti r od stredu gule.

Intenzita elektrického poľa náboja rozloženého na guľovej ploche. Ak je náboj Q rozložený na guľovej ploche s polomerom R, pole v okolí plochy ($r > R$) je také isté ako v prípade bodového náboja, teda je dané výrazom (2.49). Vo vnútri guľovej plochy sa intenzita poľa rovná nule z tých istých dôvodov ako v prípade nekonečne dlhého dutého valca. Ak vo vnútri dutej gule vytvoríme akúkoľvek uzavretú plochu, nebude obsahovať žiadne náboje, tok každou takou plochou je nulový, a teda intenzita je nulová.



Obr. 2.25

Pokiaľ je takáto úvaha nepresvedčivá, môžeme intenzitu poľa vo vnútri dutej gule počítať priamou integráciou. Vo vnútri guľovej plochy nabitej rovnomerne nábojom s plošnou hustotou σ zvoľme bod P a preložme ním priamku, ktorá pretne guľovú plochu v bodoch P_1 a P_2 vo vzdialenostiach r_1 a r_2 od bodu P podľa *obr. 2.25a*. Vytvorme okolo priamky úzky kužeľ s vrcholom v bode P s priestorovým uhlom dΩ, ktorý na guľovej ploche vytne dve elementárne plôšky dS_1 a dS_2, na ktorých sú elementárne nábojové množstvá σdS_1 a σdS_2. Nabité plôšky vytvoria v bode P elementárne intenzity poľa

$$\mathrm{d}E_1 = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S_1}{r_1^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$

a

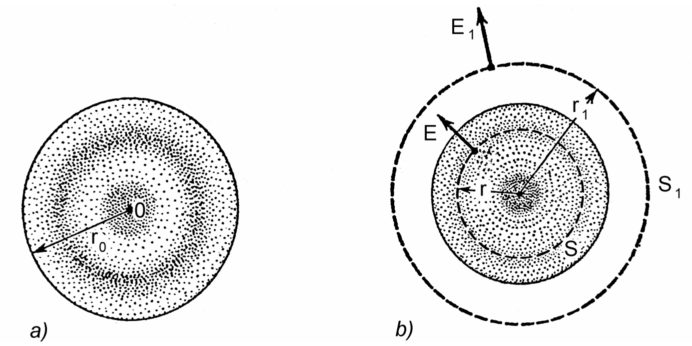
$$\mathrm{d}E_2 = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S_2}{r_2^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$

Intenzity sú čo do veľkosti rovnaké, pretože $\mathrm{d}S_1/r_1^2 = \mathrm{d}S_2/r_2^2 = \mathrm{d}\Omega$ a ich smery v bode P sú opačné. Intenzita poľa od vybranej dvojice nábojových elementov v bode P sa teda rovná nule a nulový bude aj príspevok od všetkých ostatných dvojíc na guľovej ploche. Skutočnosť, že vo vnútri guľovej rovnomerne nabitej plochy je intenzita poľa nulová, je dôsledkom toho, že pole bodového náboja klesá ako funkcia $1/r^2$, ako to vidieť aj z posledných dvoch výrazov. To súčasne potvrdzuje aj platnosť Gaussovho zákona.

Grafická závislosť intenzity poľa náboja rozloženého rovnomerne po guľovej ploche v závislosti od vzdialenosti r od stredu guľovej plochy je na *obr. 2.25b*.

Intenzita elektrického poľa náboja rozloženého s guľovou symetriou. Gaussov zákon umožňuje vypočítať intenzitu elektrického poľa nielen náboja rovnomerne rozloženého na guli, ale aj akéhokoľvek guľovo symetrického rozloženia náboja $\rho(r)$ s hustotou závislou iba od vzdialenosti r od stredu symetrie 0. Na *obr. 2.26a* je znázornený príklad guľovo symetrického rozloženia náboja. Hustota smerom od stredu najprv klesá, potom narastá, potom znovu klesá a pre vzdialenosti väčšie ako r_0 je nulová. Guľovo symetrické rozloženie náboja musí budiť radiálne pole so stredom v strede symetrie náboja, teda Gaussovou plochou je každá koncentrická guľová plocha so stredom v strede 0, teda napr. plocha S na *obr. 2.26b*. Náboj uzavretý každou plochou S s polomerom r sa rovná integrálnemu súčtu elementárnych nábojov

$$\mathrm{d}\,Q = \rho(r')\,\mathrm{d}\,\tau = 4\pi\rho(r')r'^2\,\mathrm{d}\,r'$$



Obr. 2.26

kde $\mathrm{d}\,\tau = 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r'$ je elementárny objem nekonečne tenkej guľovej vrstvy s polomerom r' hrúbkou $\mathrm{d}r'$. Integrovaním od 0 po r dostaneme

$$Q(r) = \int_S \mathrm{d}\,Q = 4\pi\int_0^r \rho(r')r'^2\,\mathrm{d}\,r'$$

Tok intenzity $E(r)$ plochou S je $4\pi r^2 E$, takže

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi\int_0^r \rho(r')r'^2\,\mathrm{d}\,r'}{\varepsilon_0}$$

z čoho

$$E(r) = \frac{\int_0^r \rho(r')r'^2\mathrm{d}r'}{\varepsilon_0 r^2} \tag{2.51}$$

Treba si všimnúť, že pre všetky vzdialenosti $r < r_0$ je pole dané iba tými nábojmi, ktoré sú uzavreté v guli s polomerom r; náboje vo vzdialenosti väčšej ako r nemajú vplyv na pole vo vzdialenosti r.

Ak $r > r_0$, napr. $r = r_1$ na *obr. 2.26b*, v tom prípade Gaussova S_1 plocha obopína celý náboj rozloženia

$$Q = 4\pi \int_0^{r_0} \rho(r')r'^2 \,\mathrm{d}\,r'$$

a vo vonkajšom priestore je intenzita daná výrazom

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\int_0^{r_0} \rho(r')r'^2 \,\mathrm{d}\,r'}{\varepsilon_0 r^2} \tag{2.52}$$

teda je taká, ako keby celý náboj bol sústredený v strede guľovej symetrie.

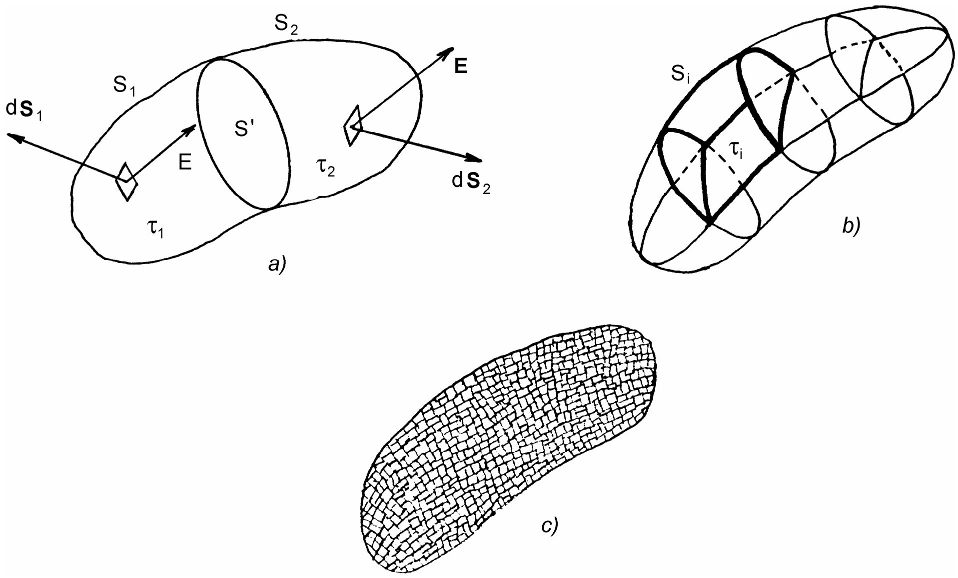
2.6 DIVERGENCIA ELEKTRICKÉHO POĽA

Gaussova veta

Gaussov zákon v integrálnom tvare je prostriedkom, ktorý z priestorového rozloženia nábojov a z priestorovej predstavy o priebehu siločiar umožňuje prakticky "uhádnuť" štruktúru poľa. Vo výrazoch pre intenzitu poľa vystupuje integrálny náboj uzavretý Gaussovou plochou a hodnoty poľa sa určujú na tejto ploche. Pole vo zvolenom bode je dané nábojmi, ktoré sa nachádzajú v iných bodoch priestoru, teda vo vnútri plochy. To je jeden pohľad na súvis nábojov a polí z hľadiska Gaussovho zákona v integrálnom tvare.

Druhý pohľad poskytuje tento zákon sformulovaný v diferenciálnom tvare. Predpokladajme, že náboje sú rozložené v priestore s objemovou hustotou ρ, ktorá je funkciou polohy. Položíme si otázku: "V akom vzťahu je intenzita elektrického poľa k objemovej hustote náboja v danom bode?" Aký je vzájomný vzťah $\boldsymbol{E}$ a ρ? Je nepochybné, že nejakým spôsobom tieto dve veličiny súvisia. Uvažujme takto! V okolí zvoleného bodu v priestore, v ktorom je nenulová hustota náboja, zvolíme uzavretú plochu, ktorú budeme postupne zmenšovať. So zmenšovaním plochy sa bude zmenšovať aj uzavretý objem τ a s ním aj celkový uzavretý náboj. V limite objem klesá k nule, teda k bodu, a k nule bude klesať aj tok Ψ vektora $\boldsymbol{E}$ z daného bodu. Tok Ψ z bodu v priestore teda nie je tou veličina, ktorá by charakterizovala pole vo vzťahu k hustote náboja v uvažovanom bode, pretože tok v bode je vždy nulový. K čomu ale bude konvergovať pomer toku Ψ k objemu τ, keď obidve tieto veličiny konvergujú k nule? Tento pomer môže za istých okolností klesať k nule, ale môže konvergovať aj k nejakej nenulovej hodnote. Veličina – limitný pomer toku Ψ vektora k objemu τ – vyjadruje teda akúsi vlastnosť poľa, ktorá súvisí s hustotou náboja v danom bode a ako sa ukáže, je to vlastnosť veľmi cenná a dôležitá. Môžeme ju zaviesť nielen pre elektrické, ale pre akékoľvek vektorové pole.

Pokúsme sa sformulovať vyslovené myšlienky matematicky. Predpokladajme, že v časti priestoru, v objeme τ uzavretom plochou S, je náboj rozložený s objemovou hustotou ρ závislou od polohy. Tok vektora $\boldsymbol{E}$ z objemu τ plochou S možno formálne zapísať ako



Obr. 2.27

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Rozdeľme objem τ na dve časti τ_1 a τ_2 hraničnou plochou (priehradkou) S' ako na *obr. 2.27a*. Jednotlivé objemy sú uzavreté plochami S_1 a S_2, hraničná plocha S' je spoločná obidvom. Pôvodný tok plochou S sa rovná súčtu tokov plochami S_1 a S_2 (tok hraničnou plochou S' jedným a druhým smerom je rovnako veľký, ale má opačné znamienko), teda môžeme napísať

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{S_1} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 + \oint_{S_2} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 = \Psi_1 + \Psi_2$$

V tomto súčte je každý z tokov menší ako pôvodný a takisto sú menšie aj odpovedajúce objemy τ_1 a τ_2, pretože tok Ψ zostáva rovnaký. V delení objemu τ môžeme pokračovať ďalšími priehradkami a po n-tom delení máme $2n$ objemov uzavretých $2n$ plochami ako na *obr. 2.27b*. Celkový tok n plochami

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} \oint_{S_i} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}_i = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i \qquad (2.53)$$

je daný konvergujúcim radom príspevkov $\oint_{S_i} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}_i$, ktorých veľkosť so zväčšovaním $n \to \infty$ klesá k nule. Na tejto úrovni vydeľme a vynásobme pravú stranu posledného výrazu postupne objemami τ_i, takže vyjadrenie toku dostaneme v tvare

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\oint_{S_i} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}_i}{\tau_\mathrm{i}} \tau_i \qquad (2.54)$$

Ak teraz vo výraze (2.54) urobíme limitu pre $\tau_i \to 0$, po nekonečnom počte delení objemu ako na *obr. 2.27c*, prejdú τ_i na nekonečne malé objemy dτ a suma prejde na objemový integrál cez celý objem τ. Nuž teda

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\tau \lim_{\tau \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\tau} \mathrm{d}\tau \qquad (2.55)$$

Pod objemovým integrálom sme dostali nejakú novú skalárnu funkciu polohy v priestore, ktorú označíme symbolicky ako "div $\boldsymbol{E}$" a nazveme **divergencia intenzity elektrického poľa *E***:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\tau} \qquad (2.56)$$

Význam slova "divergencia" je "výtok"; div $\boldsymbol{E}$ je teda výtok vektora $\boldsymbol{E}$ z nejakého bodu v priestore. Pojem divergencie môžeme tiež vyjadriť nasledovnou definíciou:

Divergencia vektora **E** (div**E**) *v nejakom bode priestoru je skalár daný limitným pomerom výtoku* $\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ *vektora* **E** *uzavretou plochou S okolo uvažovaného bodu a objemu* τ *uzavretého plochou S, pre* $\tau \to 0$*, teda*

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\tau} \qquad (2.56)$$

Za pomoci výrazu (2.56) pre divergenciu možno pre tok intenzity elektrostatického poľa písať výraz

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\tau \mathrm{div}\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\,\tau \qquad (2.57)$$

Z výrazu (2.57) vidíme, že nekonečným delením pôvodnej uzavretej plochy a následnými matematickými operáciami na výraze pre Ψ, sme premenili integrál príspevkov $\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ po uzavretej ploche S, na integrál príspevkov div $\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau$ v objeme τ uzavretom plochou S. Z (2.57) plynie identita

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\tau \mathrm{div}\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\,\tau} \qquad (2.58)$$

ktorá patrí skôr do matematiky, pretože platí pre ľubovoľné vektorové pole a na jej odvodenie sme zatiaľ nič "elektrického" nevyužili. Je to jedna z integrálnych viet teórie vektorového poľa. Na počesť K. F. Gaussa, ktorý bol rovnako veľkým matematikom ako fyzikom, nazýva sa identita (2.58) **Gaussova veta**.

Podľa Gaussovej vety existujú dva rovnocenné spôsoby výpočtu toku intenzity elektrického poľa uzavretou plochou *S* z objemu τ:

1. vychádzajúc z hodnôt $\boldsymbol{E}$ na ploche *S;*
2. vychádzajúc z div $\boldsymbol{E}$ v objeme τ.

V tomto zmysle môžeme div $\boldsymbol{E}$ považovať za žriedlo poľa $\boldsymbol{E}$, za jeho zdroj. O Gaussovej vete môžeme tiež vyhlásiť, že dovoľuje premeniť plošný integrál vektorového poľa na integrál objemový, a naopak.

Pozrime sa teraz, čo nám Gaussova veta poskytuje v súvislosti s nábojmi rozloženými v objeme. Celkový náboj rozložený v objeme τ je

$$Q = \int_{\tau} \rho \,\mathrm{d}\tau$$

a podľa Gaussovho zákona

$$\oint_S \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (2.59)$$

Ak porovnáme výrazy (2.58) a (2.59) vidíme, že

$$\int_{\tau} \mathrm{div}\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}\tau \qquad (2.60)$$

alebo že objemový integrál z divergencie intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ sa rovná integrálu cez ten istý objem z veličiny ρ/ε_0. Keďže výraz (2.60) platí pre ľubovoľný objem, potom v každom bode priestoru je splnený vzťah

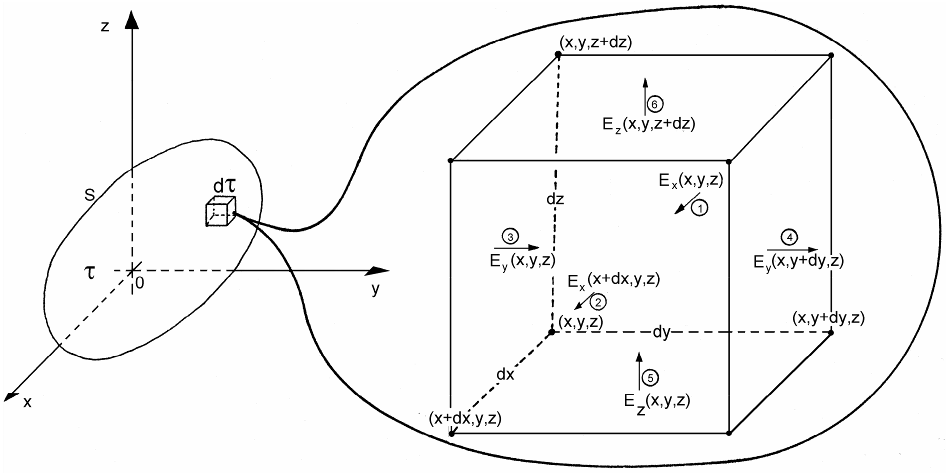
$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (2.61)$$

Vzťah (2.61) je **Gaussov zákon v diferenciálnom tvare** – je to hľadaný lokálny vzťah medzi intenzitou elektrického poľa a objemovou hustotou náboja. V každom bode priestoru je divergencia, výtok vektora $\boldsymbol{E}$, úmerný hustote náboja. V miestach, kde sa hustota náboja rovná nule, rovná sa nule aj divergencia intenzity elektrického poľa.

Vzťah (2.61) dáva aj presnejší zmysel nášmu tvrdeniu o zdrojoch alebo žriedlach vektorového poľa. Zdrojmi či žriedlami elektrického poľa sú objemové náboje. Elektrické pole je poľom žriedlovým, má nenulovú divergenciu. Existujú polia, ktorých divergencia v každom bode priestoru sa rovná nule. Takým poľom je napr. pole prúdiacej nestlačiteľnej kvapaliny alebo magnetické pole. Je pochopiteľné, že prúdiaca nestlačiteľná kvapalina nemá žriedla, pretože by to vyžadovalo vznik nových molekúl v prúdovom poli.

Nakoniec možno položiť ešte jednu otázku: "Ako a kedy možno vzťah (2.61) využiť?" Za predpokladu, že je známa intenzita elektrického poľa ako funkcia polohy, možno pomocou vzťahu teoreticky určiť objemovú hustotu náboja ako funkciu polohy, samozrejme za predpokladu, že dokážeme prakticky vypočítať divergenciu poľa. Teda zo známeho priebehu poľa by sme určili náboje, opak toho, čo sme robili z integrálneho tvaru Gaussovho zákona. Zatiaľ však divergenciu vypočítať nevieme, pretože vzťah (2.56) je iba definičným vzťahom a možnosť výpočtu div $\boldsymbol{E}$ neposkytuje. Ak chceme získať vzťah, ktorý umožní divergenciu vypočítať, musíme zvoliť vhodný systém súradníc a uvedenú procedúru zopakovať.

Vzťah (2.61) má však aj hlbší teoretický význam, pretože vyjadruje principiálnu vlastnosť elektrického poľa – jeho žriedlovosť. Rovnica (2.61) alebo (2.43) je jedna zo štyroch základných rovníc elektromagnetizmu vo vákuu, ktoré v rokoch 1864 až 1873 sformuloval anglicky fyzik James Clerk Maxwell. Na jeho počesť sa nazývajú **Maxwellove rovnice**.



Obr. 2.28

2.7 DIVERGENCIA VEKTOROVÉHO POĽA V PRAVOUHLÝCH SÚRADNICIACH

Teraz odvodíme výraz pre divergenciu vektora v najčastejšie používanom systéme pravouhlých súradníc x, y, z. V tomto systéme zvolíme objem τ uzavretý plochou S ako na *obr. 2.28*. Predpokladajme, že v uvažovanom priestore existuje nenulová intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}(x,y,z)$. Toto pole rozložíme na jeho zložky v smere súradnicových osí $E_x(x,y,z)$, $E_y(x,y,z)$ a $E_z(x,y,z)$. Objem τ rozdelíme na elementárne objemy $\mathrm{d}\tau =$ $= \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, jeden z nich je zväčšený a zobrazený na *obr. 2.28*. Každý takýto pravouhlý objem je ohraničený troma dvojicami plôch $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na obrázku očíslovaných ako 1 až 6. Tok $\mathrm{d}\Psi$ cez túto uzavretú plochu je daný súčtom troch tokov $\mathrm{d}\Psi_x$, $\mathrm{d}\Psi_y$, $\mathrm{d}\Psi_z$ v smere súradnicových osí, teda

$$\mathrm{d}\,\Psi = \mathrm{d}\,\Psi_x + \mathrm{d}\,\Psi_y + \mathrm{d}\,\Psi_z$$

Tok dΨ nekonečne malou plochou sa podľa Gaussovej vety (2.58) rovná div $\boldsymbol{E}$ dτ, alebo div $\boldsymbol{E}$ dxdydz, teda

$$\mathrm{d}\Psi = \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2.62}$$

Jednotlivé čiastkové toky sa rovnajú súčinom zložky intenzity a príslušnej nekonečne malej plochy pri rešpektovaní znamienka toku. Tak napr. dΨ_x je daný rozdielom toku $E_x(x + \mathrm{d}x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ cez stenu 2 von z objemu a toku $E_x(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ cez stenu 1 dovnútra objemu. Prvý príspevok je kladný – tok z objemu dτ vyteká, druhý je záporný – tok do objemu vteká. Tento rozdiel predstavuje nekonečne malý prírastok $(\partial E_x/\partial x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ toku v smere osi x. Vyjadrené matematicky

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Psi_x &= E_x(x+\mathrm{d}x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - E_x(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\ &= \left[E_x(x+\mathrm{d}x, y, z) - E_x(x, y, z)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\partial E_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Podobne tok v smere osi y

$$\mathrm{d}\Psi_y = \left[E_y(x, y+\mathrm{d}y, z) - E_y(x, y, z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{\partial E_y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

a v smere osi z

$$\mathrm{d}\Psi_z = \left[E_z(x, y, z+\mathrm{d}z) - E_z(x, y, z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\partial E_z}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Sčítaním týchto príspevkov a s využitím (2.62) dostaneme divergenciu vektora $\boldsymbol{E}$ vyjadrenú v pravouhlých súradniciach

$$\boxed{\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}(x, y, z) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}} \tag{2.63}$$

S ohľadom na výraz (2.61) Gaussov zákon v diferenciálnom tvare v pravouhlých súradniciach nadobudne tvar

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}} \tag{2.64}$$

Z matematického hľadiska je posledná rovnica parciálnou diferenciálnou rovnicou pre zložky intenzity elektrického poľa. Pri známych funkčných závislostiach zložiek poľa od súradníc možno z nej vypočítať objemovú hustotu ako funkciu pravouhlých súradníc. Žiaľ, rovnica vo všeobecnosti neumožňuje vypočítať intenzitu poľa. To vyžaduje zadať nejaký ďalší vzťah. Intenzitu poľa možno určiť iba v jednorozmernom prípade, ak ρ je funkciou iba jednej premennej. Takýto prípad má však nanajvýš akademický význam.

2.8 ELEKTRICKÝ POTENCIÁL

2.8.1 Práca v elektrostatickom poli

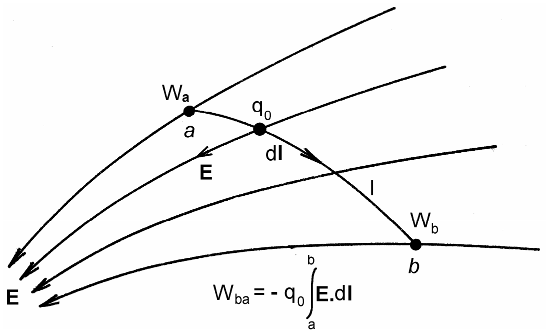
Intenzita elektrického poľa má z hľadiska výpočtov jednu veľkú nevýhodu, že je to vektorová veličina, a na jej určenie v každom bode treba zadať tri čísla, tri zložky vektora. Ani priame silové meranie intenzity poľa nie je jednoduché, a preto je namieste otázka: "Nemožno elektrické pole opísať skalárnou veličinou, ktorá by pole rovnako dobre a jednoznačne charakterizovala, a ktorá by naviac bola ľahko merateľná?" Taká veličina sa skutočne dá zaviesť a nazýva sa elektrický potenciál, alebo jednoducho potenciál, či potenciálová funkcia.

S pojmom potenciál ste sa stretli v mechanike pri štúdiu gravitačného poľa. Gravitačný potenciál bol zavedený ako skalárna funkcia polohy v gravitačnom poli, číselne sa rovná práci potrebnej na prenesenie jednotkového bodového množstva hmotnosti z referenčného do daného bodu. Pretože gravitačné pole aj elektrické pole sú polia rovnakého fyzikálneho druhu (konzervatívne polia), zavedieme podobnú potenciálovú funkciu aj pre elektrické pole.

Predpokladajme, že v elektrickom poli intenzity $\boldsymbol{E}$ sa nachádza kladný náboj q_0, ktorý chceme premiestniť z bodu a do bodu b (*obr. 2.29*). Takýto prenos sa musí uskutočniť po nejakej dráhe l a musí sa pritom vykonať istá práca W_{ba}. Na náboj v každom bode dráhy pôsobí sila $\boldsymbol{F} = q_0\boldsymbol{E}$. Pri prenose náboja q_0 po dráhe l vykonajú vonkajšie sily prácu

$$W_{ba} = -\int_{a(l)}^{b} \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -q_0 \int_{a(l)}^{b} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.65}$$

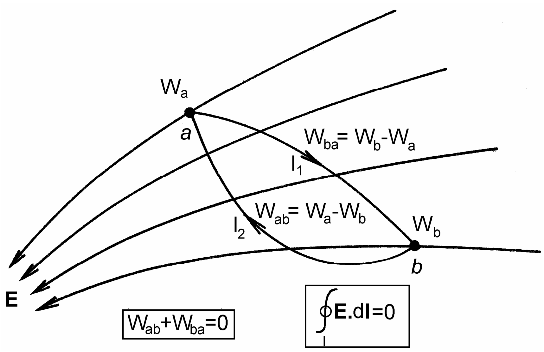
Záporné znamienko dokumentuje fakt, že práca sa koná proti silám poľa.



Obr. 2.29

Z matematického hľadiska sa výraz (2.65) nazýva dráhový integrál sily medzi bodmi a a b. Hodnota takého integrálu sa získa tak, že v každom bode integračnej dráhy vypočítame skalárne súčiny – $\boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ alebo – $q_0\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, a tie po dráhe sčítame. Lenže po ktorej dráhe? Body a a b možno predsa spojiť nekonečným množstvom dráh. Na prvý pohľad sa zdá, že hodnota dráhového integrálu závisí od dráhy, po ktorej prácu konáme.

Elektrostatické pole má však tú pozoruhodnú vlastnosť, že práca vykonaná prenosom náboja medzi dvoma bodmi nezávisí od dráhy, po ktorej náboj prenášame, ale iba od začiatočnej a konečnej polohy prenášaného náboja. Je to práve taká dôležitá vlastnosť elektrostatického poľa, ako fakt, že toto pole je žriedlové. Skutočnosť, že hodnota dráhového integrálu nezávisí od dráhy, nie je triviálna, a neplatí pre ľubovoľné silové pole (neplatí napr. pre sily trenia). Pre elektrostatické pole plynie zo zákona zachovania energie: Ak je pole vytvorené daným súborom statických nábojov, museli byť tieto náboje "dopravené" do svojich polôh (napr. z nekonečna), a na to sa musela vykonať určitá práca závislá od konečného rozmiestnenia nábojov. Teda systém nábojov spolu s nábojom q_0 v bode a má určitú potenciálnu energiu W_a. Ak náboj q_0 prenesieme do bodu b a všetky ostatné náboje zostanú v pôvodných polohách a pri prenose sa prekonáva iba elektrická sila, zmení sa potenciálna energia na hodnotu W_b, ktorá závisí iba od konečného rozloženia nábojov bez ohľadu na spôsob, akým sa náboj q_0 do bodu b dostal. Práca W_{ba} vykonaná pri prenose náboja q_0 z bodu a do bodu b je daná rozdielom potenciálnych energií $W_b - W_a$, a skutočne nezávisí od dráhy po ktorej bol náboj prenesený. Z toho pre elektrostatické pole plynú dva dôležité závery:



Obr. 2.30

1) **Pri prenose náboja v elektrostatickom poli po uzavretej dráhe sa celková vykonaná práca rovná nule**. Ak prenesieme náboj q_0 z bodu a do bodu b po dráhe l_1, ako na *obr. 2.30*, vykonáme prácu

$$W_{ba} = -q_0 \int_{a(l_1)}^{b} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

a ak teraz náboj q_0 z bodu b prenesieme znovu do bodu a po inej dráhe l_2, potom sa vykoná práca

$$W_{ab} = -q_0 \int_{b(l_2)}^{a} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

Vykonaná práca je v prvom prípade $W_{ba} = W_b - W_a$ a v druhom prípade $W_{ab} = W_a - W_b = -W_{ba}$, a teda skutočne práca po uzavretej dráhe v elektrostatickom poli sa rovná nule, a to po ľubovoľnej dráhe, pretože naša úvaha platí pre ľubovoľnú dvojicu bodov v priestore. Matematicky túto skutočnosť zapisujeme

$$W_{ba} + W_{ab} = -q_0 \left(\int_{a(l_1)}^{b} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{b(l_2)}^{a} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \right) = -q_0 \oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

Pre nenulové q_0 plynie, že pre ľubovoľnú uzavretú dráhu $l = l_1 + l_2$ v elektrostatickom poli je

$$\boxed{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0} \qquad (2.66)$$

Vzťah (2.66) je popri Gaussovom zákone jeden z dvoch základných vzťahov elektrostatiky. Vyjadruje skutočnosť, že elektrostatické pole nemá uzavreté siločiary, po ktorých by integrál intenzity mohol mať nenulovú hodnotu. Inak povedané, elektrostatické pole je nevírové, a teda je žriedlové. Často sa pole s takými vlastnosťami nazýva konzervatívne pole. Výraz (2.66) by si zaslúžil pomenovanie, podobne ako Gaussov zákon, nemá ho však. Ešte sa k nemu vrátime, keď budeme posudzovať jeho lokálny význam v elektrostatickom poli.

2) **Práca vykonaná prenosom náboja v elektrostatickom poli medzi dvoma bodmi (z bodu *a* do bodu *b*) je daná rozdielom potenciálnych energií konečného a začiatočného stavu**. S využitím vzťahu (2.65) môžeme teda napísať

$$W_{ba} = W_b - W_a = -q_0 \int_a^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (2.67)$$

Pravá strana výrazu (2.67) je súčinom náboja q_0 a veličiny

$$-\int_a^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

ktorá závisí iba od intenzity poľa $\boldsymbol{E}$ a od dvoch zvolených bodov a a b v priestore a je daná rozdielom dvoch čísel. Je to skalárna veličina a ak je jeden z bodov (napr. bod a) pevný, referenčný, potom je to bodová funkcia v priestore, v ktorom je pole $\boldsymbol{E}$ definované. Ak výraz (2.67) vydelíme s q_0, dostaneme

$$\frac{W_{ba}}{q_0} = \frac{W_b}{q_0} - \frac{W_a}{q_0} = -\int_a^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (2.68)$$

Podiely W_a/q_0 a W_b/q_0 nazývame potenciály elektrostatického poľa v bodoch a a b a budeme ich označovať V_a a V_b. Podiel práce W_{ba} vykonanej pri prenesení náboja q_0 z bodu a do bodu b a tohto náboja nazývame rozdiel potenciálov $V_b - V_a$ alebo elektrické napätie U_{ba} bodu b oproti bodu a. Výraz (2.68) môžeme prepísať do tvaru

$$U_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.69}$$

Hodnota elektrického napätia $U_{ba} = V_b - V_a$ môže byť kladná alebo záporná podľa toho, či sa práca na náboji q_0 pri jeho prenose koná (zvyšuje sa jeho potenciálna energia), alebo náboj prácu koná (znižuje sa jeho potenciálna energia). Z výrazu (2.69) plynie, že potenciál v bode b je

$$V_b = V_a - \int_a^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.70}$$

Ak a je pevný referenčný bod, v ktorom je daná hodnota potenciálu $V(a)$, potom výraz (2.70) je bodová funkcia polohy (funkcia bodu b) v elektrostatickom poli, ktorú nazývame potenciálovou funkciou.

Študenti často prijímajú vzťah (2.70) s rozpakmi, pretože evidentne predstavuje nejednoznačnú funkciu, ktorej hodnota závisí od voľby referenčného bodu a. Hovoríme, že potenciálová funkcia je určená s presnosťou na aditívnu konštantu, a teda ako taká, nemá priamy fyzikálny význam. V praxi sa najčastejšie pracuje s potenciálovou funkciou s referenčným bodom v nekonečne, teda $a \to \infty$ a potenciál v nekonečne sa považuje za nulový, $V(\infty) = 0$. Takýto postup je možný, ak sa všetky náboje, ktoré sa podieľajú na tvorbe poľa, nachádzajú v konečne, čo je prakticky vždy splnené. V takom prípade výraz (2.70) dostane tvar

$$V_b = -\int_\infty^b \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.71}$$

Pomocou tohto vzťahu obyčajne určujeme potenciálovú funkciu zo známeho poľa $\boldsymbol{E}$.

Aký má teda potenciálová funkcia vôbec zmysel? Predovšetkým ten, že rozdiel jej hodnôt v dvoch bodoch udáva elektrické napätie medzi týmito bodmi, a napätie je jedna z najčastejšie meraných veličín v elektromagnetizme. Skutočne, ak urobíme rozdiel hodnôt funkcie (2.71) v bodoch b a a, dostaneme vzťah (2.69).

Druhý, teoretický význam potenciálovej funkcie je ten, že istými matematickými operáciami možno z nej určiť intenzitu elektrického poľa, ako sme to na začiatku tohoto odstavca sľúbili, a čo aj dokážeme.

Jednotkou potenciálu, alebo vhodnejšie – rozdielu potenciálov, či elektrického napätia – je jeden volt (1 V). K jeho definícii možno využiť vzťah (2.68), podľa ktorého:

Medzi dvoma bodmi v priestore je rozdiel potenciálov jeden volt (1 V) vtedy, keď pri prenesení náboja jedného coulomba (1 C) medzi týmito bodmi treba vykonať prácu alebo sa získa kinetická energia jeden joule (1 J). Rozmer jednotky volt plynie z rozmerového výrazu

$$[\mathrm{V}] = \frac{[\mathrm{J}]}{[\mathrm{C}]} = \mathrm{m}^2.\mathrm{kg}.\mathrm{s}^{-3}.\mathrm{A}^{-1}$$

Uvedená definícia voltu je statická, a nie je pre praktické účely vhodná. Existuje druhá, dynamická definícia, ktorá vychádza z elektrického prúdu a z odporu vodiča, alebo z elektrického výkonu (neskôr sa ukáže, že 1 V = 1 ampér × 1 ohm = 1 watt/1 ampér).

Všimnime si ešte jeden dôležitý význam elektrického napätia pri urýchľovaní elementárnych častíc. Ak nejaký náboj q (napr. nabitá častica) prejde v elektrickom poli z bodu a do bodu b pod účinkom tohto poľa, bude na svojej dráhe urýchľovaný a prírastok kinetickej energie ΔW podľa vzťahu (2.68) je daný jednoducho súčinom náboja a prejdeného rozdielu potenciálov alebo napätia, teda

$$\Delta W_k = q(V_b - V_a) = qU_{ba} \tag{2.72}$$

kde súčin qU_{ba} je kladný. Ak je súčin qU_{ba} záporný, bude častica na svojej dráhe brzdená. Ak časticou je elektrón s nábojom $q = -e = -1{,}602.10^{-19}$ C, a ak prejde rozdiel potenciálov 1 V v smere nárastu potenciálu, zvýši sa jeho kinetická energia o hodnotu $\Delta W = 1{,}602.10^{-19}$ C . 1 V = $1{,}602.10^{-19}$ J. Toto množstvo energie sa nazýva **elektrónvolt** (eV), a teda

$$1 \text{ eV} = 1{,}602.10^{-19} \text{ J}$$

Elektrónvolt je jednotka energie používaná v atómovej fyzike a fyzike elementárnych častíc.

2.8.2 Výpočet potenciálových funkcií rôznych nábojových rozložení

Ak si zrekapitulujeme postup našich úvah zistíme, že vlastne doteraz nevieme vypočítať potenciálovú funkciu či rozdiel potenciálov, pretože vzťahy (2.69) až (2.71) môžu poslúžiť iba na výpočet potenciálu zo známej intenzity poľa. My by sme však potrebovali nájsť spôsob výpočtu potenciálovej funkcie z rozloženia nábojov. Začnime najjednoduchším prípadom a vypočítajme potenciál budený jediným bodovým nábojom.

Potenciál od bodového náboja. Vo vzdialenosti r_0 od bodového náboja q zvoľme bod b, v ktorom chceme vypočítať hodnotu potenciálovej funkcie (pozri *obr. 2.31*). Intenzita elektrického poľa bodového náboja ako funkcia vektorovej vzdialenosti $\boldsymbol{r}$ od náboja je daná výrazom

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Dosadením za $\boldsymbol{E}$ vo výraze (2.71) dostaneme pre potenciál vzťah

$$V(r_0) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r_0}\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

Integračná dráha l prebieha z nekonečna do bodu b napr. tak, ako na *obr. 2.31*. V nejakom bode vo vzdialenosti r od náboja, na dráhe l, sa skalárny súčin $\boldsymbol{r}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ dá v súhlase s *obr. 2.31* vyjadriť takto:

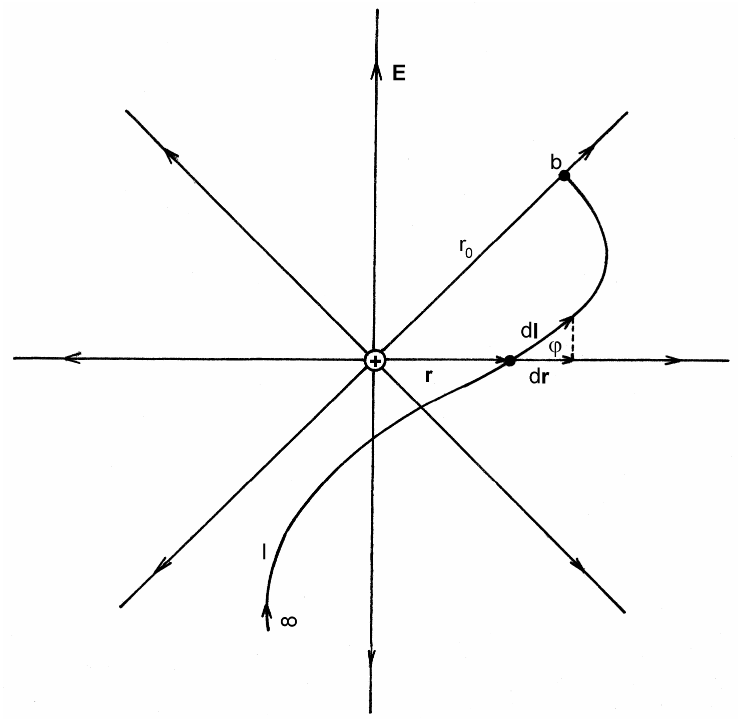
$$\boldsymbol{r}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = r\,\mathrm{d}l \cos\varphi = r\mathrm{d}l_r = r\mathrm{d}r$$

Po dosadení do výrazu pre potenciál dostaneme

$$V(r_0) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\bigg|_{\infty}^{r_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

Takto sme dostali potenciál vo vzdialenosti r_0 od bodového náboja q. Potenciálová funkcia v okolí bodového náboja má tvar

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{2.73}$$

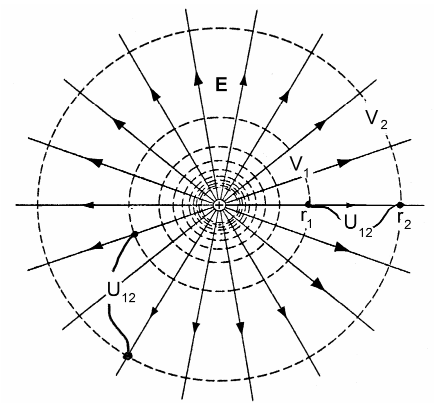


Obr. 2.31

Všimnime si vlastnosti tejto funkcie. Je to jednoduchá, guľovo symetrická, skalárna funkcia, taká, že jej hodnota je konštantná na guľovej ploche a mení sa s prevrátenou hodnotou vzdialenosti r od náboja. K potenciálu (2.73) môžeme pripočítať ľubovoľný konštantný potenciál – výraz bude opisovať to isté elektrostatické pole. Plochy konštantného potenciálu nazývame ekvipotenciálne plochy a pre bodový náboj sú znázornené na *obr. 2.32*. Ekvipotenciálne plochy majú zaujímavú a dôležitú vlastnosť, že vektory intenzity poľa sú na ne kolmé. To znamená, že pri akomkoľvek pohybe nejakého iného náboja po ekvipotenciálnej ploche sa nekoná žiadna práca, pretože náboj sa pohybuje kolmo na intenzitu elektrického poľa, teda kolmo na pôsobiacu silu. Rozdiel potenciálov medzi dvoma bodmi danými polomermi r_1 a r_2 dvoch ekvipotenciálnych plôch (*obr. 2.32*) dostaneme ako rozdiel hodnôt vzťahu (2.73)

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{2.74}$$

Je zrejmé, že rozdiel potenciálov alebo napätie je rovnaké medzi ľubovoľnou dvojicou bodov na dvoch ekvipotenciálnych plochách.



Obr. 2.32

Potenciál od *n* bodových nábojov. Ak sa v priestore nachádza n bodových nábojov, potom potenciál v nejakom bode danom polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ je daný superpozíciou jednotlivých potenciálov príslušných bodových nábojov, teda

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} V_i(\boldsymbol{r})$$

kde $V_i(\boldsymbol{r})$ je potenciál i-tého náboja q_i, ktorého poloha je daná polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_i$, teda

$$V_i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|}$$

Výsledný potenciál je daný výrazom

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i'} \tag{2.75}$$

kde $r_i' = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|$ je vzdialenosť náboja od bodu, v ktorom sa potenciál počíta. Predpokladá sa, že v bode, v ktorom sa potenciál určuje, nie je žiadny náboj, teda že $\boldsymbol{r}_i \neq \boldsymbol{r}$.

V prípade, ak je náboj rozložený s nejakou hustotou, možno tiež využiť princíp superpozície tak, ako vo výraze (2.75) s tým, že sa náboj q_i nahradí nábojovým elementom dq, jeho vzdialenosť od bodu, v ktorom sa potenciál počíta, označíme r' a diskrétna suma prejde na integrál cez oblasť, v ktorej je náboj rozložený.

Ak je náboj rozložený na čiare dĺžky l ako na *obr. 2.9* s dĺžkovou hustotou $\lambda(\boldsymbol{r}_0)$, bude potenciál v ľubovoľnom bode mimo čiary daný výrazom

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\mathrm{d}q}{r'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda(\boldsymbol{r}_0)}{r'}\mathrm{d}l \tag{2.76}$$

V prípade plošného rozloženia nábojov podľa *obr. 2.12* bude potenciál v bode P

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}_0)}{r'}\mathrm{d}S \tag{2.77}$$

a ak sú náboje rozložené priestorovo ako na *obr. 2.14*, potom v bode P je potenciál

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(\boldsymbol{r}_0)}{r'}\mathrm{d}\tau \tag{2.78}$$

Treba upozorniť, že výrazy (2.76) až (2.78) sa nedajú použiť pre výpočet potenciálu vo všetkých prípadoch, menovite nie vtedy, ak nábojové rozloženie siaha do nekonečna. Musíme si uvedomiť, že uvedené výrazy majú pôvod v potenciáli bodového náboja, ktorého potenciál v nekonečne sme zvolili rovný nule. Tak napríklad, ak by sme chceli využiť vzťah (2.76) na výpočet potenciálovej funkcie náboja rovnomerne rozloženého na nekonečne dlhej priamke a použili pritom rutinu podobnú tej, ako pri výpočte zodpovedajúcej intenzity poľa [pozri *obr. 2.10a* a výrazy (2.24) až (2.26)], zistili by sme, že príslušný integrál diverguje. Je to z toho fyzikálneho dôvodu, že v nekonečne, kde už potenciál má byť nulový, sa ešte nachádzajú náboje.

Potenciál nábojov na nekonečne dlhej priamke. Potenciál od nekonečne dlhej nabitej priamky však môžeme určiť z výrazu (2.71) s využitím vzťahu (2.26) pre intenzitu elektrického poľa v tvare

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') = \frac{\lambda\boldsymbol{r}'}{2\pi\varepsilon_0 r'^2}$$

Dosadením $\boldsymbol{E}$ do výrazu (2.71) máme

$$V(r) = -\int_\infty^r \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}').\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{\boldsymbol{r}'.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r'^2} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{\mathrm{d}r'}{r'} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r'\Big|_\infty^r =$$
$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C(\infty)$$

Pri integrácii sme využili skutočnosť, že

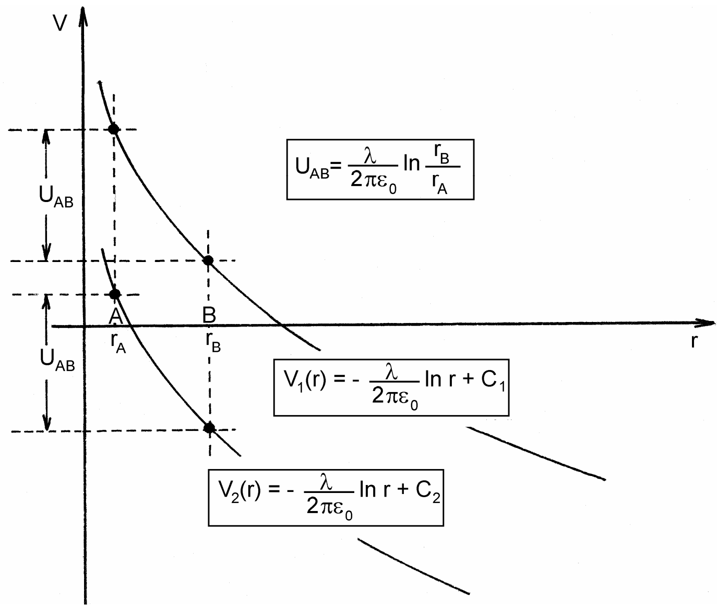
$$\boldsymbol{r}'.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -r'\mathrm{d}l = r'\mathrm{d}r'$$

pretože vektory $\boldsymbol{r}'$ a d$\boldsymbol{l}$ smerujú opačne a dr' = – dl (prírastok dl znamená úbytok dr' – nezabúdajme, že postupujeme z bodu ∞ do bodu $\boldsymbol{r}$).

Potenciálová funkcia obsahuje nekonečne veľkú konštantu $C(\infty)$, ktorej hodnota je nepodstatná, pretože pri výpočte rozdielov potenciálov vypadne. Tak teda potenciálová funkcia nekonečne dlhej, rovnomerne nabitej priamky ako funkcia kolmej vzdialenosti r od priamky má tvar

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C \tag{2.79}$$

Je to valcovo symetrická funkcia, takže ekvipotenciálne plochy sú valcové plochy koaxiálne s nabitou priamkou.



Obr. 2.33

Rozdiel potenciálov (napätie) U_{AB} medzi bodmi A a B na dvoch ekvipotenciálnych plochách s polomermi r_A a r_B vypočítame ako rozdiel dvoch hodnôt výrazu (2.79), teda

$$U_{AB} = V(r_A) - V(r_B) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r_A} \tag{2.80}$$

Ak je λ kladné a $r_A < r_B$, rozdiel potenciálov je kladný, teda potenciál so vzdialenosťou r klesá. Na *obr. 2.33* sú grafické závislosti dvoch potenciálových funkcií s rôznymi konštantami C. Z obrázka vidieť, že obidve funkcie poskytujú rovnaké napätie U_{AB} pre pevné hodnoty r_A a r_B.

Potenciál od nábojov na nekonečnej valcovej ploche. Aká potenciálová funkcia opisuje pole náboja rozloženého plošne a rovnomerne s konštantnou hustotou σ na ploche nekonečne dlhého valca polomeru r_0? Spomeňme si, že elektrické pole v okolí nabitej valcovej plochy ($r > r_0$) je rovnaké ako v prípade priamky nabitej dĺžkovým nábojom $\lambda = 2\pi r_0 \sigma$, teda aj potenciál vo vonkajších bodoch v okolí valca bude daný priebehom (2.79), t. j.

$$V(r) = -\frac{r_0 \sigma}{\varepsilon_0} \ln r + C \tag{2.81}$$

Otázkou je, aký bude potenciál v dutine valca, kde nie je žiadny náboj? Z našej doterajšej skúsenosti vyplýva, že v dutinách nábojových rozložení sa intenzita elektrického poľa rovná nule. Dráhový integrál nulovej intenzity medzi dvoma bodmi sa rovná nule, a teda podľa výrazu (2.70) potenciál v oblasti s nulovou intenzitou poľa je konštantný. A ako zvoliť túto konštantu? Neskôr uvidíme, že potenciálová funkcia musí byť z fyzikálnych dôvodov spojitá. Ak by v nejakom bode bola nespojitá, potom by tam intenzita elektrického poľa musela byť nekonečná (formálne by prenos náboja na nulovej vzdialenosti musel byť spojený s nenulovou prácou). Teda v dutine valca pre $r < r_0$ je potenciál taký istý, ako na jeho nabitom povrchu, t. j.

$$V(r) = -\frac{r_0 \sigma}{\varepsilon_0} \ln r_0 + C = \text{konšt.} \tag{2.82}$$

Potenciálová funkcia nekonečne dlhej valcovej nábojovej plochy je dôležitá pre výpočet elektrického poľa v koaxiálnom kábli.

Potenciál nábojov na kružnici. Vráťme sa však k možnostiam výpočtu ďalších potenciálových funkcií podľa vzťahov (2.76) až (2.78). Výraz (2.76) možno napr. využiť pri výpočte potenciálu náboja Q rovnomerne rozloženého na kružnici s polomerom R ako na *obr. 2.11a*. Na osi kružnice vo vzdialenosti z od jej stredu je potenciál

$$V(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \tag{2.83}$$

ktorý získame jednoduchou integráciou elementárnych príspevkov spôsobom podobným ako pri výpočte intenzity.

Potenciál od nábojov na kruhovej ploche. Ďalším príkladom je potenciál na osi kruhovej plochy s polomerom R rovnomerne nabitej plošným nábojom $\sigma = Q/(\pi R^2)$ podľa *obr. 2.13a*. S využitím výrazu (2.77) dostaneme

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|\right) \tag{2.84}$$

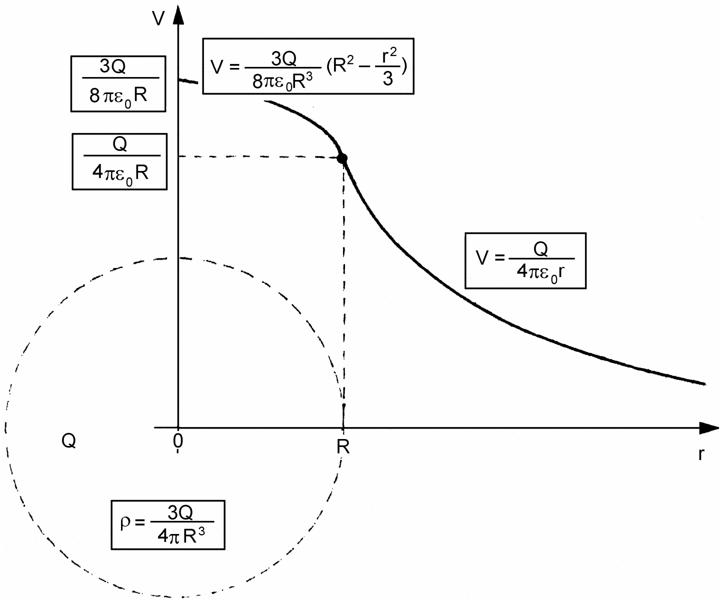
Potenciál od nábojov rozložených v objeme gule. Dôležitým prípadom je potenciál náboja Q rovnomerne rozloženého v objeme gule polomeru R, s objemovou hustotou $\rho = 3Q/(4\pi R^3)$. Fyzikálna intuícia nám napovedá, že tento potenciál vo vzdialenostiach $r > R$ od stredu je taký istý, ako potenciál bodového náboja Q uloženého v strede symetrie, teda

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.85}$$

o čom sa môžeme presvedčiť priamou, ale nepríjemnou integráciou podľa výrazu (2.78) s použitím podobného postupu ako pri výpočte intenzity poľa ilustrovaného na *obr. 2.15*. Podobnou nepríjemnou integráciou možno dôjsť k výrazu pre potenciál vo vnútri guľového rozloženia

$$V(r) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) \qquad (r < R) \tag{2.86}$$

Na *obr. 2.34* je graficky znázornená závislosť potenciálu guľového rozloženia náboja v závislosti od *r*.



Obr. 2.34

Potenciál od nábojov rozložených na guľovej ploche. Ak je náboj *Q* rozložený rovnomerne plošne na guľovej ploche s polomerom *R*, potom potenciál pre $r > R$ je daný tiež výrazom (2.85). Vo vnútri guľovej plochy je konštantný a z dôvodov spojitosti rovnaký ako na povrchu gule, teda

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (r < R) \tag{2.87}$$

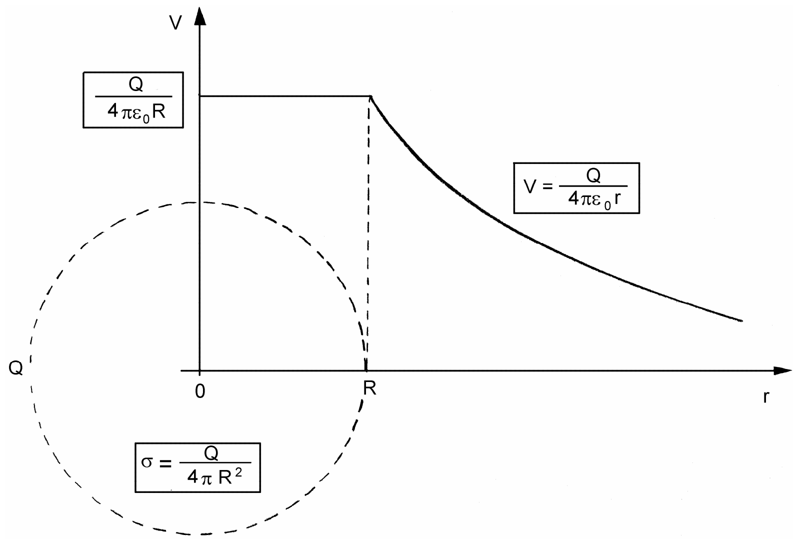
Na *obr. 2.35* je grafická závislosť potenciálu plošne rozloženého guľového náboja.

Potenciál od nábojov rozložených s guľovou symetriou. Nakoniec, ak je náboj rozložený v priestore s guľovou symetriou s objemovou hustotou $\rho(r')$ závislou iba od vzdialenosti r' od stredu symetrie (pozri *obr. 2.26*), potom potenciál vo vzdialenosti r je daný súčtom potenciálu $V_1(r)$, ktorý vo vzdialenosti r produkujú náboje uzavreté v guli s polomerom r a potenciálom $V_2(r)$, ktorý produkujú ostatné náboje mimo objemu gule s polomerom r, teda náboje vo vzdialenosti väčšej ako r, prípadne až do nekonečna. Celkový náboj uzavretý v guli je

$$Q_1(r) = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2 \mathrm{d}r' = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 \mathrm{d}r'$$

takže potenciál V_1 je

$$V_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1(r)}{r} = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\int_0^r \rho(r')r'^2 \mathrm{d}r'$$



Obr. 2.35

Na výpočet potenciálu V_2 treba zvoliť nekonečne tenké guľové vrstvy s polomerom $r' > r$ a hrúbkou dr'. Celkový náboj na vrstve

$$\mathrm{d}Q_2(r') = 4\pi\rho(r')r'^2\mathrm{d}r'$$

budí na vrstve a v jej vnútri potenciál

$$\mathrm{d}V_2(r') = \frac{\mathrm{d}Q_2(r')}{4\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{\rho(r')r'\mathrm{d}r'}{\varepsilon_0}$$

Celkový potenciál nábojov mimo zvolenej gule dostaneme integráciou týchto príspevkov od r po ∞, teda

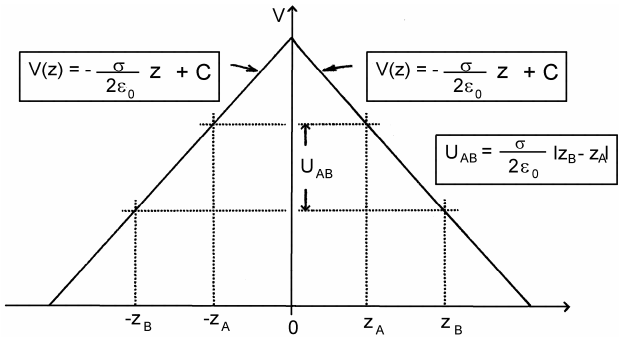
$$V_2(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^{\infty} \rho(r')r'\mathrm{d}r'$$

Výsledný potenciál vo vzdialenosti r je potom

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r}\int_0^{r} \rho(r')r'^2\mathrm{d}r' + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_r^{\infty} \rho(r')r'\mathrm{d}r' \tag{2.88}$$

Ekvipotenciálne plochy uvažovaných guľových rozložení nábojov sú guľové plochy koncentrické so stredom symetrie. V prípade, ak nábojové rozloženie nesiaha do nekonečna, ale končí pri nejakom polomere r_0, treba nekonečno nahradiť týmto polomerom.

Samozrejme, že všetky tu uvedené potenciály možno vypočítať aj pomocou vzťahu (2.71) zo známych intenzít elektrostatického poľa.



Obr. 2.36

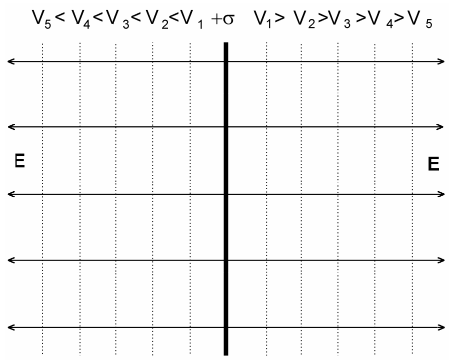
Potenciál od náboja na nekonečnej rovine. Pre naše ďalšie úvahy bude obzvlášť dôležitá potenciálová funkcia v okolí nekonečnej rovnomerne nabitej roviny s konštantnou nábojovou hustotou σ. Túto potenciálovú funkciu dostaneme zväčšovaním polomeru R kruhovej plochy a limitným prechodom vo výraze (2.84) pre $R \to \infty$. Takto dostaneme potenciál v okolí nekonečnej roviny v tvare

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z| + C_\infty \tag{2.89}$$

Konštanta C_∞, získaná limitným prechodom, je síce nekonečne veľká, ale možno ju nahradiť ľubovoľnou konečnou konštantou. Vidíme, že potenciál je lineárna klesajúca funkcia na obidve strany od roviny (pozri *obr. 2.36*). Ekvipotenciálne plochy sú všetky roviny planparalelné s nábojovou rovinou. Napätie U_{BA} medzi dvoma ekvipotenciálnymi plochami vo vzdialenostiach z_B a z_A je dané rozdielom príslušných hodnôt (2.89), teda

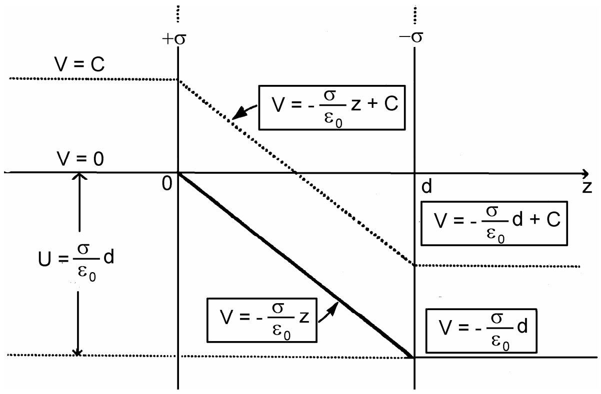
$$U_{AB} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(|z_B| - |z_A|\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d \tag{2.90}$$

kde $d = |z_B| - |z_A|$ je absolútna vzdialenosť potenciálnych rovín. Napätie medzi dvoma ekvipotenciálnymi rovinami je úmerné vzdialenosti rovín. Na *obr. 2.37* je znázornená sieť siločiar a ekvipotenciálnych plôch nekonečnej nabitej roviny.



Obr. 2.37

Potenciál nábojov na dvoch planparalelných rovinách. Dôležitejší ako potenciál osamotenej nabitej roviny je priebeh potenciálu v priestore dvoch nekonečne veľkých planparalelných rovín nabitých plošnými nábojmi $\pm\sigma$, uložených vo vzájomnej vzdialenosti d (*obr. 2.23a*). Potenciál získame ako superpozíciu potenciálov každej z rovín. Ak os z je kolmá na roviny, a ak rovina s kladným nábojom je v začiatku $z = 0$ (pozri *obr. 2.38*), potom potenciál medzi rovinami ($0 \le z \le d$) je daný výrazom



Obr. 2.38

$$V(z) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + C \tag{2.91}$$

Mimo rovín je potenciál konštantný a rovnaký ako potenciál priľahlej roviny. Ak zvolíme potenciál kladnej roviny nulový $V(0) = 0$, potom nulový bude všade vľavo od nej (pozri *obr. 2.38*). Potenciál medzi rovinami, pre $0 \le z \le d$

$$V(z) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z \tag{2.92}$$

Potenciál zápornej roviny a priestoru vpravo od nej je konštanta

$$V(z) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

Samozrejme, potenciálovú funkciu možno posunúť nahor o $\sigma d/\varepsilon_0$, takže potenciál kladnej roviny bude $\sigma d/\varepsilon_0$ a potenciál zápornej bude nulový. Rozdiel potenciálov (napätie) U kladnej roviny oproti zápornej je

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \tag{2.93}$$

Medzi rovinami je intenzita elektrického poľa $E = \sigma/\varepsilon_0$ a smeruje doprava, z vonkajšej strany rovín je intenzita nulová.

Nábojové roviny v praxi často predstavujú nabité kovové plochy (kondenzátor – pozri odsek 3.5) na ktorých napätie U a ich vzdialenosť d možno merať. Zo vzťahu (2.93) potom plynie jednoduchý výraz

$$E = \frac{U}{d} \tag{2.94}$$

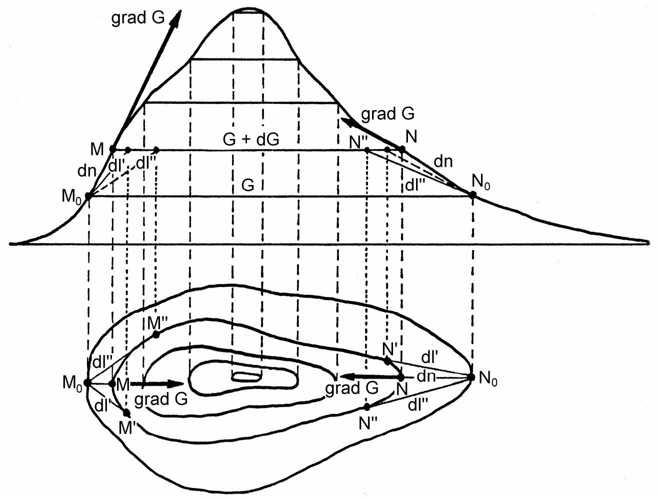
ktorý umožňuje vypočítať intenzitu homogénneho elektrického poľa medzi dvoma kovovými platňami. Z výrazu (2.94) je jasné, prečo v praxi používanou jednotku intenzity elektrického poľa je 1 V/m (= 1 N/C).

2.8.3 Gradient skalárnej funkcie. Vzťah medzi intenzitou a potenciálom elektrostatického poľa

Vo fyzike je veľa skalárnych polí, ktoré z matematického hľadiska predstavujú funkcie priestorových súradníc. Takýto funkčný vzťah môže byť zapísaný ako skalárna funkcia polohového vektora $f(\boldsymbol{r})$ alebo skalárna funkcia pravouhlých súradníc $f(x, y, z)$. Budeme predpokladať, že každá takáto funkcia je spojitá a diferencovateľná v nejakej oblasti alebo v celom priestore, a že je jednoznačná, čo platí o prevažnej väčšine funkcií používaných vo fyzike.

Ako príklad takého skalárneho poľa môžeme uviesť teplotné pole v nejakom telese, ktoré je v istej oblasti ohrievané a v inej chladené, takže po istom čase sa v telese ustáli rovnovážny stav. Jednotlivé body telesa majú istú teplotu $T(\boldsymbol{r})$, ktorá je v čase konštantná a mení sa od miesta k miestu. Ak by sme mali možnosť pohybovať sa v telese s imaginárnym teplomerom, zistili by sme, že v telese existujú plochy, na ktorých je teplota rovnaká. Takéto plochy rovnakej teploty, alebo vo všeobecnosti rovnakej hodnoty skalárnej funkcie, nazývame ekviskalárne plochy.

Inou názornou ilustráciou ekviskalárnych plôch sú vrstevnice na geografických mapách, ktoré udávajú konštantnú nadmorskú výšku v teréne, a tak aj konštantnú hodnotu gravitačného potenciálu G. Na *obr. 2.39* je znázornený profil hory a jej vrstevnice, jedna označená ako G a druhá nekonečne blízka ako $G + \mathrm{d}G$. O vrstevniciach vieme, že v miestach, kde sú husté, je terén strmý a naopak, kde sú riedke, tam je svah mierny. Pre pohodlného turistu môže byť dôležitou veličina, ktorá udáva veľkosť nárastu výšky (gravitačného potenciálu) $\mathrm{d}G$ v pomere k prejdenej dráhe $\mathrm{d}l$ po svahu medzi dvoma vrstevnicami, teda veličina $\mathrm{d}G/\mathrm{d}l$. Prekonať výšku $\mathrm{d}G$ alebo prejsť medzi vrstevnicami možno rôznymi spôsobmi. Možno napr. vyjsť z bodu M_0 na *obr. 2.39* a prejsť po dráhe $\mathrm{d}l'$ do bodu M', alebo po dráhe $\mathrm{d}l''$ do bodu M'', alebo postupovať najkratšie v smere normály k vrstevnici a prejsť dráhu $\mathrm{d}n$ do bodu M. Pri každom z týchto výstupov sa prekonáva rovnaká výška, ale najväčší nárast veličiny $\mathrm{d}G/\mathrm{d}l$, teda najväčšie stúpanie na svahu, je v smere normály k vrstevnici, teda $\mathrm{d}G/\mathrm{d}n$. Táto veličina má všetky vlastnosti vektora – má veľkosť $\mathrm{d}G/\mathrm{d}n$ a má smer. Je to smer maximálnej strmosti funkcie G, ktorý môžeme opísať jednotkovým vektorom $\boldsymbol{n}_0$ v smere normály k ekviskalárnej ploche smerujúcim na tú stranu, na ktorú funkcia G narastá. Takúto vektorovú veličinu nazývame gradient.



Obr. 2.39

Naše úvahy môžeme zovšeobecniť na ľubovoľnú skalárnu funkciu $f(r)$ a definovať gradient nasledovne:

Gradient skalárnej funkcie $f(\boldsymbol{r})$ [grad $f(\boldsymbol{r})$] *je vektor, ktorý v danom bode skalárneho poľa udáva veľkosť a smer maximálneho nárastu funkcie $f(\boldsymbol{r})$, teda*

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n}\boldsymbol{n}_0 \qquad (2.95)$$

kde dn *je prírastok nezávislej premennej pozdĺž normály k ekviskalárnej ploche a $\boldsymbol{n}_0$ je jednotkový vektor v smere normály.*

Pamätajte si, že gradient v každom bode priestoru je kolmý na ekviskalárnu plochu.

Ak si pozorne všimneme výraz (2.95) vidíme, že hľadiska matematiky jeho pravá strana je úplnou deriváciou funkcie f a teda df je úplný diferencial tejto funkcie. Úplný diferenciál – ako vieme – je nekonečne malá zmena funkcie pri nekonečne malom náraste všetkých nezávislých premenných. Podľa definície gradientu (2.95) táto nekonečne malá zmena df musí byť daná súčinom absolútnej hodnoty gradientu a posunutia dn v smere normály k ekviskalárnej ploche, teda

$$\mathrm{d}f = |\mathrm{grad}\, f|\, \mathrm{d}n$$

Kolmá vzdialenosť dn medzi ekviskalárnymi plochami sa dá vyjadriť ako ľubovoľnú vzdialenosť dl medzi dvoma bodmi na dvoch ekviskalárnych plochách, ktorú možno zaviesť ako vektor d$\boldsymbol{l}$, pričom dn = dl cos φ = $\boldsymbol{n}_0$.d$\boldsymbol{l}$, kde φ je uhol medzi smermi d$\boldsymbol{l}$ a $\boldsymbol{n}_0$. Možno teda písať

$$\mathrm{d}f = \left|\mathrm{grad}\ f\right| \mathrm{d}l \cos\varphi = \mathrm{grad}\ f \boldsymbol{.} \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.96}$$

Vlastnosti úplných integrálov majú aj výrazy –$\boldsymbol{E}$.d$\boldsymbol{l}$ pod integrálmi (2.66) a (2.69), ktorým sme definovali napätie medzi dvoma bodmi ako rozdiel hodnôt potenciálovej funkcie V, teda

$$\mathrm{d}V = -\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.97}$$

Potenciálová funkcia je z matematického hľadiska skalárna funkcia, ktorá spĺňa podmienky pre definíciu gradientu, t. j. je spojitá a diferencovateľná. Pre jej úplný diferenciál možno napísať podobný výraz ako (2.96) v tvare

$$\mathrm{d}V = \mathrm{grad}V.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.98}$$

Ak porovnáme výrazy (2.97) a (2.98), dostaneme nový vzťah medzi potenciálom a intenzitou elektrostatického poľa

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}V} \tag{2.99}$$

ktorý je inverzný k výrazu (2.71) a umožňuje zo známeho potenciálu vypočítať intenzitu. Zo vzťahu (2.99) vidíme, že intenzita poľa je vektor, ktorého veľkosť sa rovná prírastku potenciálu na jednotku dĺžky kolmo na ekvipotenciálne plochy a je orientovaný v smere poklesu potenciálu, čo je v súhlase s našou predstavou o elektrickom poli.

Nakoniec treba odpovedať na otázku, ako sa gradienty funkcií počítajú, ak je daná konkrétna funkčná závislosť, pretože definičný vzťah (2.95) takú možnosť priamo neposkytuje. Veľmi často sú potenciály dané ako funkcie pravouhlých súradníc $V(x,y,z)$. V takom prípade vektor posunutia

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k} \tag{2.100}$$

kde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory v smere súradnicových osi x, y, z. Úplný diferenciál dV je potom

$$\mathrm{d}V(x,y,z)=\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right).\left(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}\right)$$

Ak porovnáme tento výraz s výrazom (2.98) s uvážením výrazu (2.100), vidíme že výraz vo veľkej zátvorke je gradientom potenciálu, teda

$$\boxed{\mathrm{grad}V(x,y,z)=\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}} \qquad (2.101)$$

a intenzita elektrostatického poľa v pravouhlých súradniciach je daná výrazom

$$\boxed{\boldsymbol{E}(x,y,z)=-\mathrm{grad}V(x,y,z)=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)} \qquad (2.102)$$

Druhou skupinou často sa vyskytujúcich potenciálových funkcií sú guľovo a valcovo symetrické potenciály závislé iba od vzdialenosti r od stredu symetrie, teda potenciály $V(r)$, ktorých ekvipotenciálne plochy sú guľové alebo valcové plochy. Gradienty takýchto funkcií sú vektory smerujúce radiálne od alebo do smeru symetrie s nárastom $\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$ a intenzity poľa možno počítať podľa vzťahu

$$\boldsymbol{E}(r)=-\mathrm{grad}V(r)=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{r}_0 \qquad (2.103)$$

kde $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}/r$ je jednotkový vektor v smere nárastu r.

Uvedieme niekoľko často sa vyskytujúcich gradientov guľovo a valcovo symetrických funkcií:

$$\mathrm{grad}\ln r=\frac{1}{r}\boldsymbol{r}_0=\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \qquad \text{(nekonečná nabitá priamka)} \qquad (2.104)$$

$$\mathrm{grad}\, r=\boldsymbol{r}_0=\frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad \text{(nekonečná nabitá rovina)} \qquad (2.105)$$

$$\mathrm{grad}\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}_0=-\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad \text{(bodový náboj)} \qquad (2.106)$$

$$\mathrm{grad}\frac{1}{r^2}=-\frac{2}{r^3}\boldsymbol{r}_0=-\frac{2}{r^4}\boldsymbol{r} \qquad \text{(bodový dipól)} \qquad (2.107)$$

$$\mathrm{grad}\frac{1}{r^3}=-\frac{3}{r^4}\boldsymbol{r}_0=-\frac{3}{r^5}\boldsymbol{r} \qquad \text{(bodový kvadrupól)} \qquad (2.108)$$

atď.

Možno sa presvedčiť, že všetky doteraz vypočítané potenciály a im zodpovedajúce intenzity spĺňajú základný vzťah (2.99), alebo vzťahy (2.102) prípadne (2.103).

2.9 POLE ELEKTROSTATICKÉHO DIPÓLU A VYŠŠÍCH MULTIPÓLOV

2.9.1 Bodový elektrostatický dipól

Elektrostatickým dipólom nazývame dvojicu rovnako veľkých nábojov opačného znamienka $\pm q$ uložených v pevnej vzájomnej vzdialenosti d. Čitateľa môže okamžite napadnúť otázka, čím sa táto dvojica líši od dvojice nábojov na *obr. 2.6* s analýzou poľa podľa *obr. 2.4.* Dvojica sa ničím nelíši, odlišný bude prístup k analýze. Budeme sa zaujímať o jej potenciál a pole iba v relatívne veľkej vzdialenosti r, takej, že $r \gg d$, alebo $d/r \ll 1$. Táto podmienka vysvetľuje, prečo dipól nazývame bodovým. Z veľkej vzdialenosti ho totiž vnímame ako bod. Dôležitou charakteristikou bodového dipólu je jeho *elektrický dipólový moment (vektorová veličina)* $\boldsymbol{p}$, *definovaný ako súčin kladného náboja* q *a vektorovej vzdialenosti* $\boldsymbol{d}$, *orientovanej od záporného ku kladnému náboju*, teda

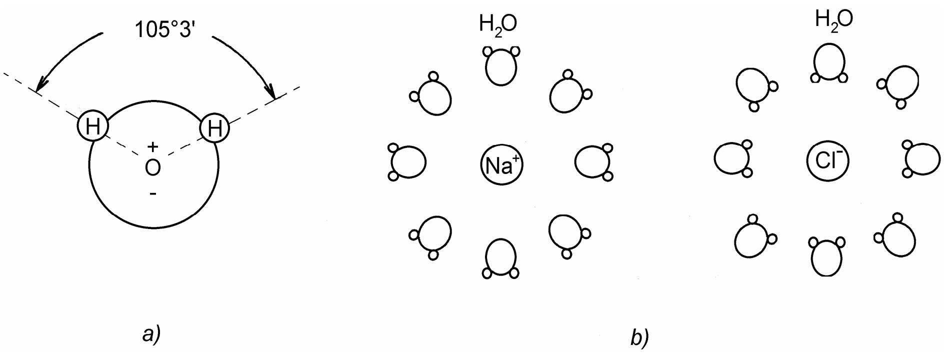
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d} \tag{2.109}$$

Elektrický dipólový moment sa meria v jednotkách coulombmeter (C.m). Z praktického hľadiska je to jednotka veľmi veľká, vo fyzikálnej chémii a v molekulárnej spektroskopii sa ešte stále používa vhodnejšia jednotka 1 debye (D) = $3{,}33.10^{-30}$ C.m, i keď SI-sústava jednotiek ju nepripúšťa.

Po takomto úvode do problematiky je namieste ešte jedna otázka; prečo venujeme až takú veľkú pozornosť elektrickému poľu vo veľkej vzdialenosti od dvojice blízkych rovnako veľkých nábojov opačného znamienka? Veď vo veľkej vzdialenosti dvojicu vidíme ako takmer nulový náboj, ktorého pole je nepatrné. Je to pravda, ale práve toto nepatrné elektrické pole je zodpovedné za silové pôsobenie medzi molekulami látok v prírode. O molekulách vieme, že sú elektricky neutrálne, teda že obsahujú rovnaké množstvo kladného a záporného náboja (protónov a elektrónov). Ak v okolí molekuly predsa len existuje elektrické pole, potom náboj v molekule musí byť rozložený tak, že v nej existujú ťažiská kladného a záporného náboja, ktoré nie sú totožné, ale sú v molekule navzájom posunuté. V molekule môže byť teoreticky ľubovoľný počet párov takýchto ťažísk. Ak má molekula dve takéto ťažiská, hovoríme o elektrickom dipóle, ak ich má štyri (dve kladné a dve záporné) o kvadrupóle, pri ôsmich o oktupóle atď. Každej konfigurácii prislúcha moment rozloženia. V prípade dvoch nábojov je to už spomínaný dipólový moment, v prípade štyroch nábojov kvadrupólový moment atď. Pole vyšších n–pólov posúdime na inom mieste. Najnižší v hierarchii n–pólov je monopól (n = 1), bodový, alebo guľovo rozložený náboj rovnakého znamienka.

Vhodným príkladom molekuly s vlastnosťami elektrického dipólu je molekula najrozšírenejšej a životne dôležitej tekutiny – molekula vody. Molekula pozostáva z jedného atómu kyslíka O a z dvoch atómov vodíka H, ktoré sú v kovalentnej väzbe a vytvárajú štruktúru zobrazenú na *obr. 2.40a*, v ktorej vodíkové atómy zvierajú uhol 105°3′ vzhľadom k stredu kyslíkového atómu. Takáto konfigurácia atómov nie je vrtochom prírody, je to energeticky najvýhodnejšie zoskupenie, čo však možno dokázať iba prostriedkami kvantovej fyziky. Uvedené rozloženie atómov v molekule H_2O vedie k tomu, že ťažisko kladných nábojov je na *obr. 2.40a* nad stredom O atómu a ťažisko záporných je pod jeho stredom. Molekula vody je teda elektrickým dipólom s dipólovým momentom

$6{,}14.10^{-30}$ C.m. Medzi bežnými molekulami v prírode je to molekula s najväčším dipólovým momentom a keďže dipólový moment určuje elektrické vlastnosti dipólu, je aj jej elektrické pôsobenie jedno z najsilnejších. Elektrické dipólové momenty niekoľkých molekúl sú uvedené v tabuľke 1.



Obr. 2.40

Tabuľka 1

Molekula	**Dipólový moment $p.10^{30}$ (C.m)**
H_2O	6,14
CH_3OH	5,67
NH_3	4,77
HCl	3,44
CO	0,33

O vode je známe, že je najlepším rozpúšťadlom rôznych solí. Ak do nej nasypeme kuchynskú soľ, dôjde k procesu, ktorý chemici nazývajú **elektrolytická disociácia**. Molekula NaCl sa rozpadne na ióny Na^+ a Cl^-. Stane sa tak pod účinkom intenzívneho chaotického dorážania molekúl vody na molekulu soli, ktorej iónová väzba nakoniec povolí a molekula sa rozpadne. Vzniklé fragmenty sú okamžite obalené molekulami vody (dipólmi) a vzniknú hydráty ako na *obr. 2.40b*. Dipóly sa otočia svojimi kladnými pólmi k iónu Cl^- a zápornými k iónu Na^+.

Lekári vystríhajú pacientov s vysokým krvným tlakom pred príliš slanými jedlami. Soľ v elektrolytoch ľudského tela vyvoláva vznik hydratačných "strapcov" pozostávajúcich z viac ako 30 molekúl vody na jeden ión Na^+, čo zvyšuje prevodnenie organizmu a vedie následne k vysokému krvnému tlaku.

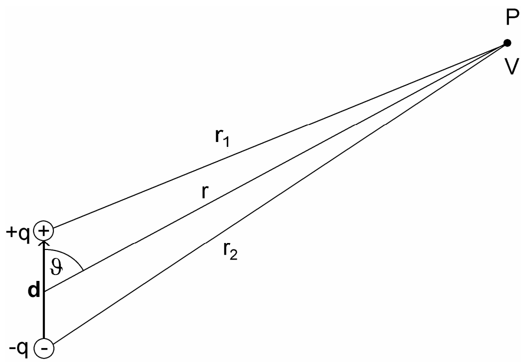
Tento úvod je dostatočným motívom k potrebe analýzy potenciálu a elektrického poľa dipólu. Uvažujme teda elektrický dipól podľa *obr. 2.41*. V bode *P* bude potenciál daný superpozíciou potenciálov jednotlivých nábojov, teda

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (2.110)$$

Pomocou kosínusovej vety môžeme vzdialenosti r_1 a r_2 na *obr. 2.41* vyjadriť výrazmi

$$r_1 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - rd\cos\vartheta} = r\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \frac{d}{r}\cos\vartheta}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + rd\cos\vartheta} = r\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \frac{d}{r}\cos\vartheta}$$



Obr. 2.41

Ak zoberieme do úvahy podmienku veľkej vzdialenosti, teda ak

$$\frac{d}{r} \ll 1$$

potom člen $(d/2r)^2$ pod odmocninami posledných výrazov môžeme oproti jednotke zanedbať a pre recipročné vzdialenosti písať

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\cos\vartheta}} \tag{2.111a}$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{d}{r}\cos\vartheta}} \tag{2.111b}$$

Výrazy (2.111) rozvinieme do mocninového MacLaurinovho radu podľa mocnín $x = (d/r)\cos\vartheta$, t. j.

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \ldots \tag{2.112}$$

a obmedzíme sa na prvé dva členy. Takto dostaneme približné vyjadrenia

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r\sqrt{1-\frac{d}{r}\cos\vartheta}} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{d}{2r}\cos\vartheta\right)$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r\sqrt{1+\frac{d}{r}\cos\vartheta}} \approx \frac{1}{r}\left(1-\frac{d}{2r}\cos\vartheta\right)$$

Dosadením týchto výrazov do (2.110) pre potenciál dostaneme

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{qd\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.113}$$

alebo v tvare

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{2.114}$$

Potenciál dipólu klesá so vzdialenosťou ako funkcia $1/r^2$ a závisí od uhla ϑ na rozdiel od bodového náboja, kde pokles je $1/r$ a samozrejme bez uhlovej závislosti.

Intenzita poľa dipólu podľa vzťahu (2.99) je

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}V(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{grad}\left(\frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \tag{2.115}$$

Gradient z výrazu v zátvorke vypočítame tak, že zlomok napíšeme v tvare súčinu dvoch funkcií $\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}$ a $1/r^3$ a využijeme skutočnosť, že

$$\mathrm{grad}\,(ab) = b\,\mathrm{grad}\,a + a\,\mathrm{grad}\,b$$

teda

$$\mathrm{grad}\,\frac{\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}}{r^3} = (\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r})\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\,\mathrm{grad}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r})$$

Gradient v prvom člene je daný výrazom (2.108), v druhom, kde je $\boldsymbol{p}$ = konšt. vektor

$$\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}) = p\,\mathrm{grad}\,(r\cos\vartheta) = p\,\mathrm{grad}\,r_p = \boldsymbol{p}$$

a $r_p = r\cos\vartheta$ je priemet vektora $\boldsymbol{r}$ do smeru vektora $\boldsymbol{p}$. Gradient tohto priemetu je jednotkový vektor v smere dipólového momentu. Po dosadení vo vzťahu (2.115) a elementárnych úpravách dostaneme konečný výraz pre intenzitu elektrického poľa dipólu

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] \tag{2.116}$$

Výraz (2.116) je zložitý a neprehľadný, vidieť z neho iba to, že intenzita klesá so vzdialenosťou ako funkcia $1/r^3$, má valcovú symetriu a zložitú uhlovú závislosť. Lepšiu predstavu o poli získame, ak vo zvolenej rovine, v ktorej leží dipól, rozložíme pole pozdĺž dvoch súradníc. Najvhodnejšie sú polárne súradnice r, ϑ, ako na *obr. 2.42*. Z obrázka je zrejmé, že

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{p} = p\cos\vartheta\,\boldsymbol{e}_r - p\sin\vartheta\,\boldsymbol{e}_\vartheta$$

$$\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r} = pr\cos\vartheta$$

kde $\boldsymbol{e}_r$ a $\boldsymbol{e}_\vartheta$ sú jednotkové vektory v smeroch polárnych súradníc. Dosadením týchto vyjadrení do výrazu (2.116) a po jeho úprave dostaneme

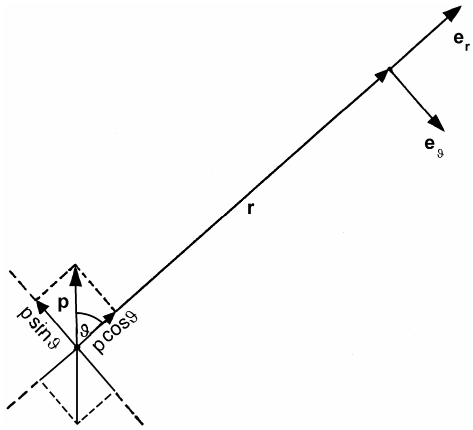
$$\boldsymbol{E}(r,\vartheta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\vartheta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\vartheta\,\boldsymbol{e}_\vartheta) = E_r(r,\vartheta)\boldsymbol{e}_r + E_\vartheta(r,\vartheta)\boldsymbol{e}_\vartheta$$

kde

$$E_r(r,\vartheta) = \frac{2p\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_\vartheta(r,\vartheta) = \frac{p\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (2.117)$$

Absolútna hodnota intenzity

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\vartheta^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1} \qquad (2.118)$$



Obr. 2.42

Zo vzťahov (2.117) a (2.118) vidno, že pre danú vzdialenosť je intenzita maximálna na osi dipólu pre $\vartheta = 0, \pi$, má smer dipólového momentu a veľkosť

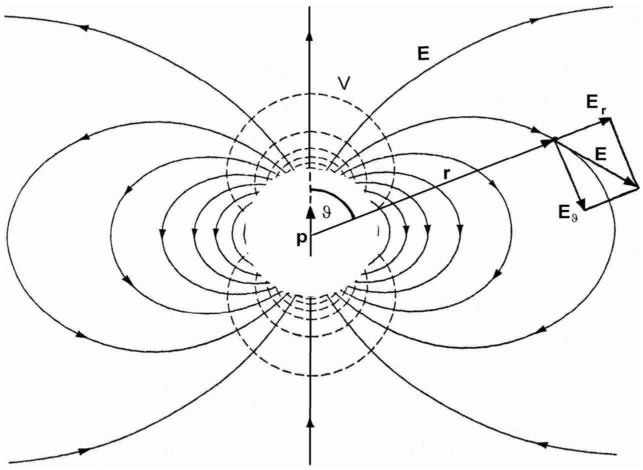
$$E_r = E = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_\vartheta = 0 \qquad (2.119a)$$

a v priečnej rovine, pre $\vartheta = \pi/2$

$$E_r = 0 \qquad\qquad E_\vartheta = E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{2.119b}$$

a má smer opačný ako dipólový moment [porovnaj výrazy (2.119) s výrazmi (2.21)]. Pole elektrického dipólu je znázornené siločiarami na *obr. 2.43*. V bezprostrednej blízkosti dipólu vzťahy (2.116) až (2.118) samozrejme neplatia, a preto tam pole nie je zobrazené. V tejto oblasti ho treba počítať ako pole dvojice bodových nábojov tak, ako to bolo urobené v odseku 2.2 a zobrazené na *obr. 2.6*.

Nakoniec treba povedať, že pojem elektrostatický dipól je jedným zo základných pojmov, na ktorých je vybudovaná teória dielektrík.



Obr. 2.43

2.9.2 Energia dipólu v elektrostatickom poli

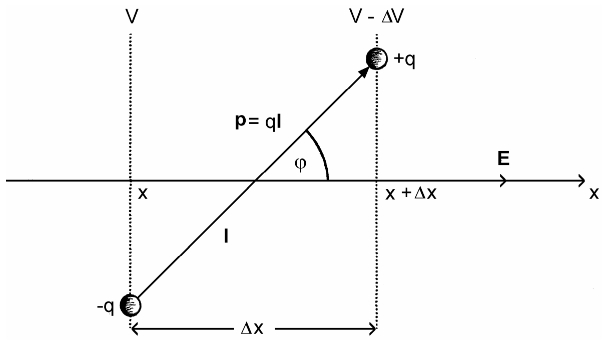
Odhliadnuc od vlastnej energie dipólu, každá zmena jeho orientácie vo vonkajšom elektrickom poli je spojená s vykonanou alebo prijatou prácou. Každej orientácii dipólu v homogénnom elektrostatickom poli prislúcha istá potenciálna energia. Pri všeobecnej orientácii v poli ako na *obr. 2.44* je jeho potenciálna energia

$$W = qV - q(V - \Delta V) = q\Delta V$$

kde $\Delta V = -E\Delta x = -El\cos\varphi$. Z obrázka vidieť, že $q\boldsymbol{l} = \boldsymbol{p}$, teda

$$W = -pE\cos\varphi = -\boldsymbol{p}.\boldsymbol{E} \tag{2.120}$$

Dipól má v poli maximálnu energiu s hodnotou $W_{max} = pE$ ak mieri proti smeru poľa ($\varphi = \pi$). Ak $\varphi = \pi/2$, vtedy $W = 0$, a ak $\varphi = 0$ energia je minimálna a má hodnotu $W_{min} = -pE$. Zo stavu s maximálnou energiou v labilnej polohe sa voľný dipól môže preklopiť do stavu s minimálnou energiou a tento stav je preň stabilný.



Obr. 2.44

2.9.3 Silové účinky elektrostatického poľa na dipól

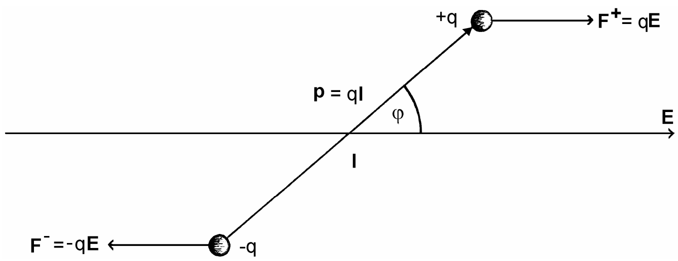
V homogénnom elektrickom poli pôsobí na dipól dvojica síl $F = \pm qE$ na ramene, ktorého dĺžka sa rovná dĺžke dipólu podľa *obr. 2.45*, teda silový točivý moment

$$M = Fl\sin\varphi = qEl\sin\varphi = pE\sin\varphi$$

alebo vo vektorovom tvare

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E} \qquad [\mathrm{N.m}] \tag{2.121}$$

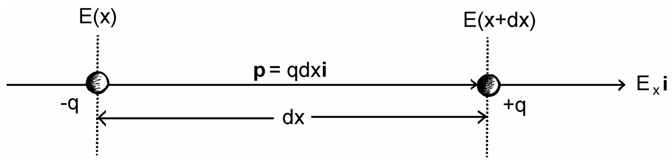
Na dipól orientovaný v smere alebo proti smeru poľa ($\varphi = 0, \pi$) nepôsobí žiadny točivý moment, teda $\boldsymbol{M}_{min} = 0$. V kolmej polohe ($\varphi = \pi/2, 3\pi/2$) na dipól pôsobí maximálny moment $M_{max} = pE$. Voľný dipól sa teda v homogénnom poli otočí do smeru tohto poľa a táto poloha je preň stabilná. V homogénnom poli na dipól nepôsobí žiadna translačná sila.



Obr. 2.45

Ak pole, v ktorom sa dipól nachádza, je nehomogénne, pôsobí naň okrem točivého momentu aj translačná sila, ktorá má tendenciu premiestniť ho do miesta, kde je absolútna hodnota intenzity poľa väčšia. Ak dipól smeruje pozdĺž siločiary v smere x ako na *obr. 2.46*, potom na každý z jeho nábojov pôsobia dve opačné sily, ktoré sa veľkosťou nepatrne líšia, takže výsledná pôsobiaca sila

$$F_x = qE_x(x+\mathrm{d}x) - qE_x(x) = q\left[E_x(x+\mathrm{d}x) - E_x(x)\right] = q\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x}$$



Obr. 2.46

Sila je úmerná súčinu priemetu dipólového momentu $q\mathrm{d}x$ do smeru x a zmene intenzity na jednotku dĺžky $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$, teda gradientu x-ovej zložky poľa. Všeobecne možno napísať

$$F_x = \boldsymbol{p}.\mathrm{grad}\, E_x \tag{2.122}$$

Podobné výrazy platia aj pre F_y a F_z. Vo vektorovom tvare

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}.\mathrm{grad})\,\boldsymbol{E} \tag{2.123}$$

Ak sa voľný dipól ocitne v nehomogénnom poli, natočí sa do smeru siločiary a bude sa pohybovať pozdĺž nej, až skončí na zdrojoch poľa.

2.10 MULTIPÓLOVÝ ROZKLAD POTENCIÁLU

Predpokladajme, že v nejakom objeme τ je rozložený náboj s objemovou hustotou ρ, celkový integrálny náboj môže byť nenulový, ak počet elektrónov a protónov je rôzny, alebo aj nulový, ak je počet rovnaký. Také zoskupenie nábojov môže predstavovať chemický radikál alebo zložitú molekulu. Budeme sa zaujímať o potenciál takého rozloženia v nejakej vzdialenosti r od zvoleného začiatku 0 v objeme τ, alebo aj mimo objemu. Situácia je ilustrovaná na *obr. 2.47*. Podľa všeobecného vzťahu (2.78) s označením podľa obrázka potenciál v bode P je

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau}{R}$$

kde vzdialenosť R elementu $\mathrm{d}\tau$ od bodu P podľa kosínusovej vety

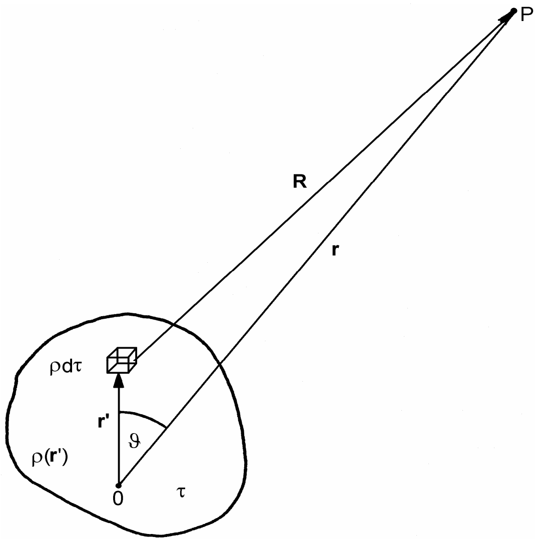
$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta} = r\sqrt{1 + \left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{2r'}{r}\cos\vartheta\right]}$$

Vytvorme prevrátenú hodnotu R a výraz rozviňme do mocninového radu podľa mocnín $x = (r'/r)^2 - (2r'/r)\cos\vartheta$ s využitím vzorca (2.112)

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r\sqrt{1+\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2-\frac{2r'}{r}\cos\vartheta\right]}}=$$

$$=\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2-\frac{2r'}{r}\cos\vartheta\right]+\frac{3}{8}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2-\frac{2r'}{r}\cos\vartheta\right]^2-...\right\}=$$

$$=\frac{1}{r}\left[1+\frac{r'}{r}\cos\vartheta+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2\vartheta-1\right)+\textit{členy vyšších rádov}\right]$$



Obr. 2.47

Ak tento zložitý výraz dosadíme do výrazu pre V_P, po usporiadaní dostaneme

$$V_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_\tau \rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_\tau \rho(\mathbf{r}')r'\cos\vartheta\mathrm{d}\tau+$$
$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int_\tau \frac{1}{2}\rho(r')r'^2\left(3\cos^2\vartheta-1\right)\mathrm{d}\tau+\cdots \qquad (2.124)$$

Všimnime si zvláštnu štruktúru výrazu (2.124). Je to superpozícia potenciálov, ktoré so vzdialenosťou r klesajú postupne ako $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ atď., teda ako potenciál bodového náboja, potenciál dipólu, potenciál kvadrupólu atď. Integrály vo výraze závisia iba od charakteru rozloženia náboja v objeme a nazývajú sa momenty rozloženia. Ak ich označíme postupne symbolmi K_1, K_2, K_3 atď., možno dať potenciálu jednoduchšiu formu

$$V_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{K_1}{r}+\frac{K_2}{r^2}+\frac{K_3}{r^3}+\cdots\right) \qquad (2.125)$$

Prvý koeficient (moment) $K_1 = \int\limits_\tau \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau = Q$

je celkový náboj rozloženia, nazývaný tiež monopólový moment.

Druhý koeficient (moment) $K_2 = \int\limits_\tau \rho(\boldsymbol{r}')r'\cos\vartheta\,\mathrm{d}\tau$

udáva relatívne posunutie ťažiska kladných a záporných nábojov pozdĺž vzdialenosti r a nazýva sa dipólový moment rozloženia. Ak sa v objeme τ nachádzajú iba dva bodové náboje $\pm q$, kladný v mieste nábojového elementu $\rho\mathrm{d}\tau$ vo vzdialenosti $r' = d/2$ a záporný otočený o 180°, potom koeficient

$$K_2 = q\frac{d}{2}\cos\vartheta + (-q)\frac{d}{2}\cos(\pi + \vartheta) = qd\cos\vartheta = p\cos\vartheta$$

Vidíme, že v prípade dvoch bodových nábojov je K_2 priemet dipólového momentu do smeru r.

Tretí koeficient (moment) $K_3 = \frac{1}{2}\int\limits_\tau \rho(\boldsymbol{r}')r'^2\left(3\cos^2\vartheta - 1\right)\mathrm{d}\tau$

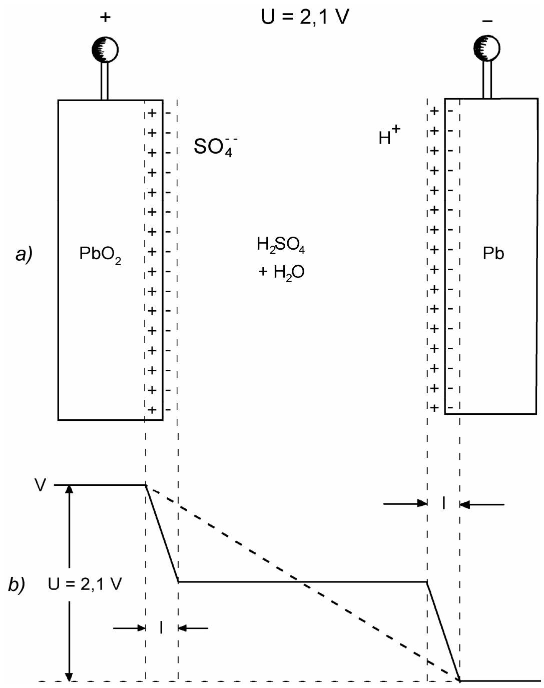
charakterizuje kvadrupólové rozloženie náboja atď.

Ak sa v objeme τ integrálny náboj rovná nule, teda ak ide napr. o neutrálnu molekulu, v tom prípade $K_1 = Q = 0$ a výsledný potenciál bude daný radom bez prvého člena. V prípade, že nás zaujíma iba potenciál vo veľkej vzdialenosti r, možno členy s mocninami vyššími ako $1/r^2$ zanedbať. Pole v tomto priblížení je poľom dipólu. Ak má rozloženie vyšší stupeň symetrie a jeho dipólový moment je nulový, potom nenulový môže byť kvadrupólový moment a vo veľkej vzdialenosti bude potenciál daný závislosťou $1/r^3$ atď. Kvadrupólové rozloženie nábojov je napr. také, že ťažiská štyroch rovnako veľkých zoskupení so striedavými znamienkami sú rozložené vo vrcholoch štvorca. Kvadrupólové pole a jemu zodpovedajúce silové pôsobenie je už veľmi jemné a v mikrosvete ovplyvňuje také efekty, ako je napr. hyperjemná štruktúru spektrálnych čiar – pojem, s ktorým sa čitateľ stretne v atómovej fyzike, prípadne v kvantovej mechanike.

2.11 POTENCIÁL A POLE ELEKTRICKEJ DVOJVRSTVY

V praxi sa vyskytuje ešte jedno rozloženie elektrických nábojov, ktoré si zaslúži našu pozornosť. Sú to dve veľmi blízke nábojové vrstvy s rovnako veľkou, ale opačnou plošnou hustotou náboja $\pm\sigma$. Ako príklad možno uviesť plastovú fóliu, ktorá bola zelektrizovaná tak, že na svojej jednej strane má kladný a na druhej strane záporný náboj. Lepším a prakticky významnejším príkladom je elektrická dvojvrstva, ktorá vzniká pri polarizácii elektród galvanického zdroja, napr. oloveného akumulátora.

Bez toho, aby sme na tomto mieste podrobnejšie skúmali elektrické pochody, ktoré prebiehajú vo vnútri akumulátora, uvedieme iba, že pri povrchu kladnej PbO_2 elektródy nabitého akumulátora sa vo vodnom roztoku H_2SO_4 vytvorí monomolekulárna vrstva aniónov SO_4^{--} a pri zápornej Pb elektróde vrstva katiónov H^+ tak, ako to vidieť na *obr. 2.48a*. Takto vytvorené dvojvrstvy na obidvoch elektródach vytvárajú dva potenciálové skoky, ktoré v súčte určujú elektromotorické napätie jedného článku akumulátora. Na *obr. 2.48b* je plnou čiarou znázornený priebeh potenciálu vo vnútri nabitého článku od jeho kladnej po zápornú elektródu. Hrúbka každej z dvojvrstiev l je veľmi malá, rádovo molekulárnych rozmerov, takže intenzita elektrického poľa $E \sim U/l$ je veľmi vysoká a dosahuje hodnôt 10^5 – 10^6 V/m. Prerušovanou čiarou na obrázku je znázornený priebeh potenciálu na nenabitom článku v okamihu jeho pripojenia na nabíjací zdroj s napätím ~2,1 V.



Obr. 2.48

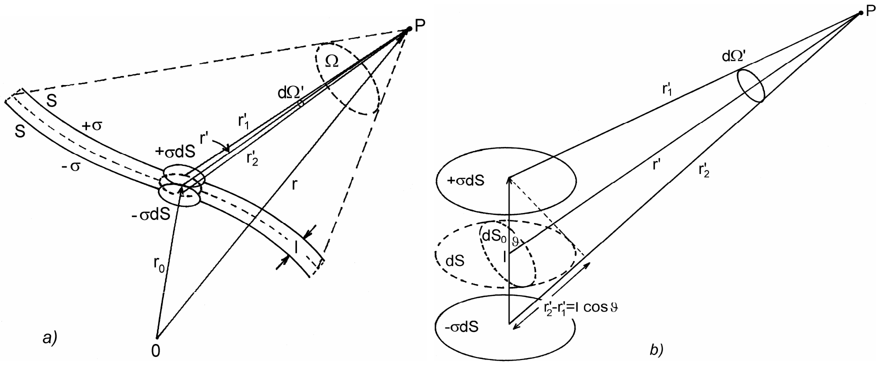
Venujme sa teraz analýze potenciálu dvojvrstvy pozostávajúcej z dvoch rovnakých plôch S, ktoré sú umiestnené blízko seba vo vzdialenosti l oveľa menšej ako lineárne rozmery vrstiev, viď *obr. 2.49a*. Každá z vrstiev nesie plošný náboj $\pm\sigma(\boldsymbol{r}_0)$, kde $\boldsymbol{r}_0$ je polohový vektor miesta na vrstve. Podobne ako sme pre dvojicu bodových nábojov zaviedli dipólový moment, môžeme pre dvojvrstvu zaviesť plošný dipólový moment

$$\boldsymbol{p}'(\boldsymbol{r}_0) = \sigma(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{l}(\boldsymbol{r}_0) \tag{2.126}$$

V praxi máme najčastejšie dočinenia s dvojvrstvami, ktorých absolútna hodnota dipólového momentu p' je konštantná. Takéto dvojvrstvy nazývame homogénne.

Uvažujme element dvojvrstvy s nábojovými elementmi $\pm\sigma\mathrm{d}S$, ktoré sú zväčšene znázornené na *obr. 2.49b*. Elementárny príspevok k potenciálu vo vzdialenosti r' je

$$\mathrm{d}V = \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}\right) = \frac{\sigma \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2' - r_1'}{r_1' r_2'}$$



Obr. 2.49

S využitím *obr. 2.49b* možno pre $r' \gg l$ písať

$$r_2' - r_1' = l\cos\vartheta \qquad \text{a} \qquad r_1' r_2' \approx r'^2$$

Ak okrem toho uvážime, že $\mathrm{d}S\cos\vartheta = \mathrm{d}S_0$ je priemet plôšky $\mathrm{d}S$ do roviny kolmej na smer r' a že

$$\frac{\mathrm{d}S_0}{r'^2} = \mathrm{d}\Omega'$$

je elementárny priestorový uhol, pod ktorým vidieť plôšku $\mathrm{d}S$, teda uvažovaný element dvojvrstvy, z bodu P vo vzdialenosti r', potom elementárny príspevok k potenciálu

$$\mathrm{d}V = \frac{\sigma l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\vartheta\,\mathrm{d}S}{r'^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p'\frac{\mathrm{d}S_0}{r'^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p'\mathrm{d}\Omega'$$

Výsledok môžeme integrovať cez celý priestorový uhol Ω, pod ktorým vidíme vrstvu z bodu P daného polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ a výsledok vyjadriť v nasledovnom tvare

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega p'\mathrm{d}\Omega' \qquad (2.127)$$

Tento nevinne vyzerajúci integrál môže byť veľmi zložitý, ak si uvedomíme, že dipólový moment p' a následne aj $\mathrm{d}\Omega'$ sú funkciami polohy r na dvojvrstve. Našťastie, v praxi sa vyskytujúce dvojvrstvy sú vo väčšine prípadov homogénne s jednoduchou geometriou (rovina, guľová plocha a pod.). V takých prípadoch možno p' spod integrálu vybrať a dostaneme

$$V = \frac{p'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega'$$

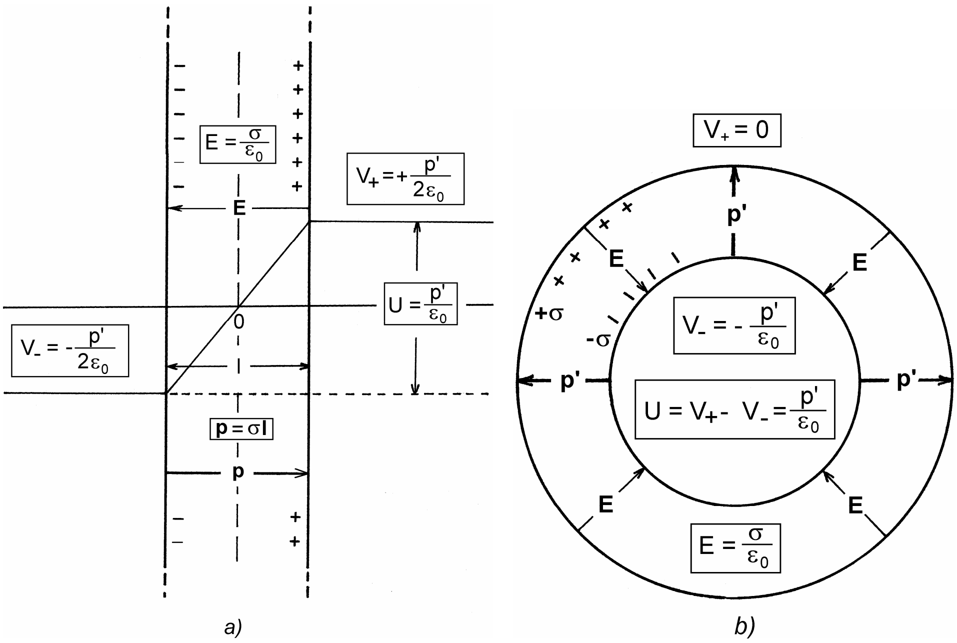
Pre ilustráciu uvedieme dve prakticky dôležité dvojvrstvy: rovinná, nekonečne veľká dvojvrstva a guľová dvojvrstva, v obidvoch prípadoch je $p' = \sigma l$ = konšt.

Pre rovinnú, nekonečne veľkú dvojvrstvu podľa *obr. 2.50a* v ľubovoľnom bode vpravo od nej je potenciál

$$V_+ = \frac{p'}{2\varepsilon_0} \tag{2.128a}$$

a v ľubovoľnom bode vľavo od nej

$$V_- = -\frac{p'}{2\varepsilon_0} \tag{2.128b}$$



Obr. 2.50

pretože dvojvrstvu zo všetkých bodov vpravo vidíme pod uhlom $\Omega_+ = 2\pi$ a z bodov vľavo, pod uhlom $\Omega_- = -2\pi$. Potenciál je teda konštantný vpravo aj vľavo. Rozdiel potenciálov alebo napätie na dvojvrstve

$$U = V_+ - V_- = \frac{p'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} l \qquad (2.129)$$

To je ale známy výraz pre napätie medzi dvoma nekonečnými rovinami nabitými plošnými nábojmi $\pm\sigma$. Intenzita poľa v dvojvrstve $E = \sigma/\varepsilon_0$. Výrazy (2.128) a (2.129) platia približne aj pre roviny konečných rozmerov, ak sa zaujímame o potenciály bodov blízkych k dvojvrstve. V bodoch bezprostredne na oboch stranách dvojvrstvy výrazy platia presne pre ľubovoľné rozmery a tvar. Pri prechode cez dvojvrstvu sa potenciál vždy mení o hodnotu p'/ε_0.

Guľovú dvojvrstvu na *obr. 2.50b* vidíme zo všetkých vonkajších bodov pod priestorovým uhlom $\Omega = 0$ a zo všetkých vnútorných bodov pod priestorovým uhlom $\Omega = -4\pi$. Potenciál z vonkajšej strany $V_+ = 0$ a vo vnútri $V_- = -p'/\varepsilon_0$. Pri prechode cez dvojvrstvu sa aj v tomto prípade potenciál mení o p'/ε_0, a to je súčasne napätie na vrstve. Takáto dvojvrstva modeluje nabitý guľový kondenzátor, alebo napríklad aj bunečnú membránu biologického tkaniva.

Záverom možno povedať, že pojem dvojvrstvy je užitočný v takých prípadoch, keď pri plošnom rozložení opačných nábojov je dôležitý potenciálový skok medzi plochami, a nie elektrické pole.

2.12 ROTÁCIA VEKTOROVEJ FUNKCIE. DIFERENCIÁLNE OPERÁTORY POLÍ

2.12.1 Rotácia elektrostatického poľa. Stokesova veta

Pri definovaní potenciálu elektrostatického poľa sme zistili závažnú vlastnosť elektrostatického poľa, že práca pri prenose náboja po ľubovoľnej uzavretej dráhe l v elektrostatickom poli sa rovná nule, teda že integrál intenzity poľa po tejto dráhe sa rovná nule

$$\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \qquad (2.130)$$

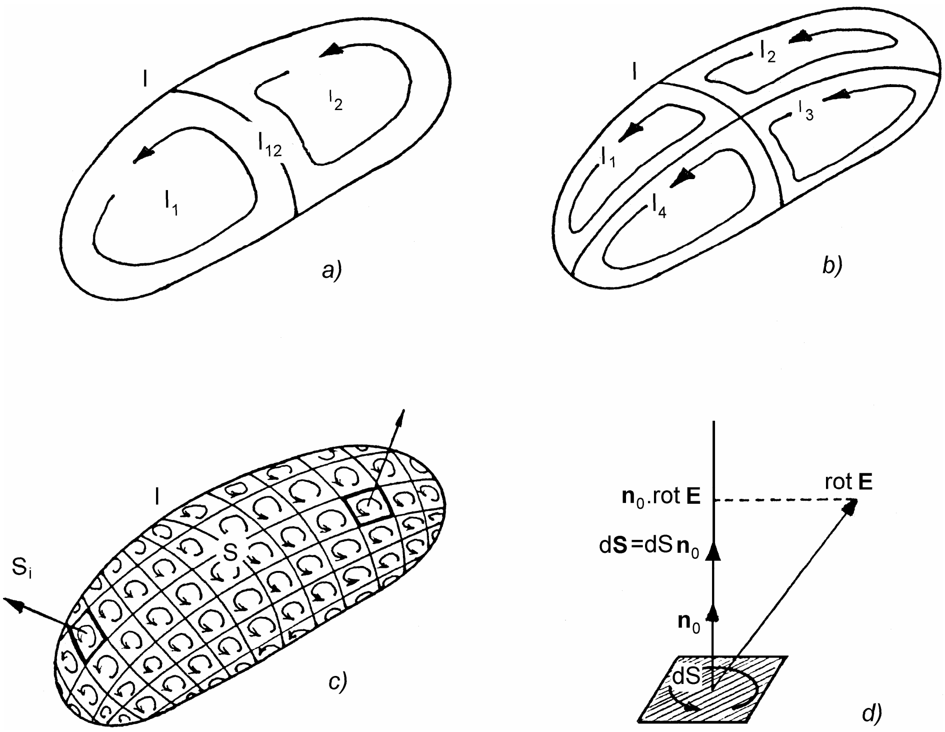
O tejto skutočnosti sme vyhlásili, že vyjadruje základnú vlastnosť elektrostatického poľa a jej závažnosť je porovnateľná s Gaussovým zákonom. Môžeme si položiť rovnakú otázku ako pri zavedení divergencie poľa, či výraz (2.130) nevyjadruje nejakú lokálnu vlastnosť poľa v ľubovoľnom jeho bode. Výraz skutočne vyjadruje jednu vlastnosť poľa, ktorá súvisí s jeho rotáciou. Prv než ju sformulujeme, posúdime niektoré dôležité vlastnosti dráhových integrálov typu (2.130), pre ľubovoľné vektorové pole.

Predpokladajme, že v priestore je definovaná nejaká vektorová funkcia $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, pričom tento symbol nemusí vyjadrovať intenzitu elektrostatického poľa, ale ľubovoľnú matematickú funkciu, ktorá spĺňa štandardné podmienky požadované vo fyzike – spojitosť a diferencovateľnosť. Dráhový integrál typu (2.130) sa v matematickej literatúre nazýva cirkuláciou vektora $\boldsymbol{E}$ a budeme ho označovať C, teda

$$C = \oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.131}$$

Hodnotu cirkulácie môžeme vypočítať aj tak, že dráhu l premostíme spojkou l_{12}, ako na *obr. 2.51a*, takže vzniknú dve uzavreté dráhy l_1 a l_2. Treba si uvedomiť, že ani dráha l, ani premostenie nemusia ležať v rovine nákresne. Po každej z takto vzniklých uzavretých dráh môžeme vypočítať cirkuláciu pri zachovaní smeru obehu. Súčet cirkulácií

$$C_1 = \oint_{l_1} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \qquad \text{a} \qquad C_2 = \oint_{l_2} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$$



Obr. 2.51

sa rovná cirkulácii C, teda

$$C = C_1 + C_2 = \oint_{l_1} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 + \oint_{l_2} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$$

Na spoločnom úseku l_{12} integrácie jedným a druhým smerom sa tieto príspevky k jednotlivým integrálom navzájom rušia. V delení môžeme pokračovať ďalším premostením ako na *obr. 2.51b,* čím vzniknú štyri uzavreté dráhy, po ktorých sa súčet cirkulácií tiež rovná C atď. Po dostatočne veľkom množstve (n) delení vznikne sieť ako na *obr. 2.51c* a cirkulácia

$$C = \sum_{i=1}^{n} \oint_{l_i} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i \tag{2.132}$$

Členy tohto radu sa zmenšujú so zvyšovaním n, pretože súčet sa rovná C. Všimnite si, že postupné delenie dráh prebieha na nejakej ploche S, ktorá má tú vlastnosť, že jej hranicu tvorí uzavretá krivka l, ale ináč má plocha v priestore ľubovoľnú formu a veľkosť, pretože vznikla ako dôsledok istého, v podstate ľubovoľného, spôsobu nášho delenia. Každá uzavretá dráha l_i obopína plôšku S_i s nejakou orientáciou v priestore a túto orientáciu môžeme vyjadriť plošným vektorom $\boldsymbol{S}_i$.

Ak budeme v delení pokračovať do nekonečna, jednotlivé dráhy sa skracujú na nulu a obopínajú stále lepšie definovaný bod. Žiaľ, aj zodpovedajúce cirkulácie budú klesať k nule, a teda nepredstavujú tú informáciu, po ktorej pátrame. K nule však klesajú aj plôšky, ktoré dráhy obopínajú, to znamená, že hľadanou veličinou by mohol byť limitný pomer cirkulácie a plochy, pri súčasnom poklese obidvoch veličín k nule. Vynásobme a súčasne vydeľme teda jednotlivé členy radu (2.131) plochami S_i, takže dostaneme

$$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{\oint_{l_i} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i}{S_i} S_i$$

Ak v tomto výraze určíme limitu pre nekonečný počet delení, teda pre $S_i \to 0$, resp. k nekonečne malej veličine dS, prejde suma na plošný integrál po ploche S, teda

$$C = \int_S \lim_{S \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{S} \mathrm{d}S \tag{2.133}$$

Pri interpretácii tohto výrazu nám môže poslúžiť *obr. 2.51d*, na ktorom je zobrazený vybraný plošný element dS po nekonečnom delení plochy S. Jemu odpovedá vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}_0 \mathrm{d}S$, kde $\boldsymbol{n}_0$ je jednotkový vektor normály k plôške v orientácii pravotočivej skrutky. Zložitá funkcia pod integrálom musí byť v skutočnosti priemetom nejakého vektora do smeru normály $\boldsymbol{n}_0$. Túto vektorovú funkciu nazývame rotáciou vektorovej funkcie $\boldsymbol{E}$, označujeme "rot $\boldsymbol{E}$" a jej definičným výrazom je

$$\boldsymbol{n}_0 . \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{S} \tag{2.134}$$

Na základe uvedených úvah, môžeme vysloviť nasledovnú definíciu rotácie vektorovej funkcie:

*Rotácia vektorovej funkcie **E** (rot **E**) v nejakom bode priestoru je vektor, ktorého priemet do smeru jednotkového vektora $\boldsymbol{n}_0$ je daný limitným pomerom cirkulácie vektora **E** (dráhového integrálu $\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$) po obvode l ľubovoľnej plochy S kolmej na $\boldsymbol{n}_0$ a veľkosti plochy S, ak $S \to 0$, teda*

$$\boldsymbol{n}_0.\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \lim_{S\to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{S} \tag{2.134}$$

Uvedená definícia má nedostatok, pretože neudáva ani smer, ani veľkosť vektora rotácie, iba jeho priemet do smeru normály k zvolenej plôške. Tento priemet je viac-menej ľubovoľný, pretože závisí od našej voľby orientácie plochy. Ak budeme vo výraze (2.134) meniť smer vektora $\boldsymbol{n}_0$, teda v skutočnosti meniť orientáciu plôšky *S*, a tým aj priestorovú orientáciu jej hraničnej čiary *l*, bude integrál pod limitou nadobúdať rôzne hodnoty, pričom existuje jedna taká orientácia, že limita výrazu je maximálna. Priemet je najväčší, ak je uhol medzi oboma vektormi na ľavej strane rovnice (2.134) nulový ($\cos 0 = 1$), teda smer vektora rotácie je rovnaký ako $\boldsymbol{n}_0$ ($|\boldsymbol{n}_0| = 1$) a veľkosť jeho priemetu sa rovná veľkosti vektora rotácie.

Ak teraz výraz (2.134) vynásobíme s d*S*, prejde na tvar

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \lim_{S\to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{S}\mathrm{d}S$$

a po jeho integrácii na ploche *S* dostaneme

$$C = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \lim_{S\to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{S}\mathrm{d}S \tag{2.135}$$

Porovnaním posledného výrazu s výrazom (2.131) dostaneme jednu z integrálnych viet teórie vektorového poľa

$$\boxed{\oint_l \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}} \tag{2.136}$$

ktorá sa nazýva **Stokesova veta** [Sir Georg Gabriel Stokes (1819 – 1903) – anglický matematik a fyzik]. Podľa Stokesovej vety existujú dva rovnocenné spôsoby výpočtu cirkulácie vektora ***E*** po uzavretej dráhe *l*:

1. vychádzajúc z hodnôt funkcie ***E*** na čiare *l*;

2. vychádzajúc z "vírovosti" funkcie ***E*** (rot***E***) na ľubovoľnej ploche *S* ohraničenej čiarou *l*.

Často sa tiež hovorí, že použitím Stokesovej vety možno premeniť dráhový integrál poľa na plošný a naopak.

V priebehu mnohých rokov prednášok som dospel k poznaniu, že študenti majú ťažkosti s chápaním pojmov ako sú rotácia, divergencia a gradient, a nerobím si ilúzie, že po čítaní tohto textu to bude inak, a že všetko bude okamžite jasné. Je však jasné, že vzťah (2.134) nie je vhodný na priamy výpočet rotácie vektorovej funkcie. Na to treba celú úvahu urobiť znovu pre funkciu zadanú v konkrétnom súradnicovom systéme. Žiaľ, nepoznám matematickú príručku, v ktorej by problém diferenciálnych operácií typu divergencie, prípadne rotácie, bol na úrovni základného kurzu fyziky uspokojivo podaný a bolo by zohľadnené fyzikálne chápanie matematiky. Elegantný výklad pojmov divergencia a rotácia možno nájsť v učebnici "Electricity and Magnetism – – Berkeley Physics Course" od nositeľa Nobelovej ceny Edwarda Millsa Purcella citovanej v závere tejto učebnice.

Nuž ale vráťme sa k fyzike! Ak platí vzťah (2.130), potom zo Stokesovej vety plynie, že

$$\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

a to po ľubovoľnej ploche S s jedinou hraničnou čiarou l. To je možné iba vtedy, ak

$$\boxed{\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0} \qquad (2.137)$$

v každom bode priestoru, v ktorom je elektrostatické pole definované. Výraz (2.137) je hľadaný lokálny vzťah, ktorý hovorí, že elektrostatické pole má nulovú rotáciu, je to pole gradientové, pole žriedlové, ktoré nemá uzavreté siločiary. Treba povedať, že elektrické pole ktoré vznikne pri elektromagnetickej indukcii opísanej v kapitole 7 už nebude poľom žriedlovým, jeho rotácia je totiž nenulová. Gravitačné pole je poľom s nulovou rotáciou. Naopak, magnetické pole je typickým vírovým poľom, poľom s nenulovou rotáciou. Dráhový integrál takého poľa sa nerovná nule. Viac sa problematike polí s nenulovou rotáciou budeme venovať v kapitole o magnetizme a elektromagnetickej indukcii.

Rovnica (2.137) je tiež jednou z Maxwellových rovníc pre statické elektrické pole.

2.12.2 Rotácia vektorovej funkcie v pravouhlých súradniciach

Predpokladajme, že vektorové pole je určené funkciou $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ a v pravouhlých súradniciach je daná čiara l ohraničujúca nejakú všeobecnú plochu S podľa *obr. 2.52*, na ktorej je definovaná funkcia rot $\boldsymbol{E}$. Rozložme túto funkciu do zložiek

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \operatorname{rot}_x \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{i} + \operatorname{rot}_y \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{j} + \operatorname{rot}_z \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{k}$$

Vektorový plošný element d$\boldsymbol{S}$ rozložme takisto do zložiek

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S_x\, \boldsymbol{i} + \mathrm{d}S_y\, \boldsymbol{j} + \mathrm{d}S_z\, \boldsymbol{k}$$

Vytvoríme skalárny súčin

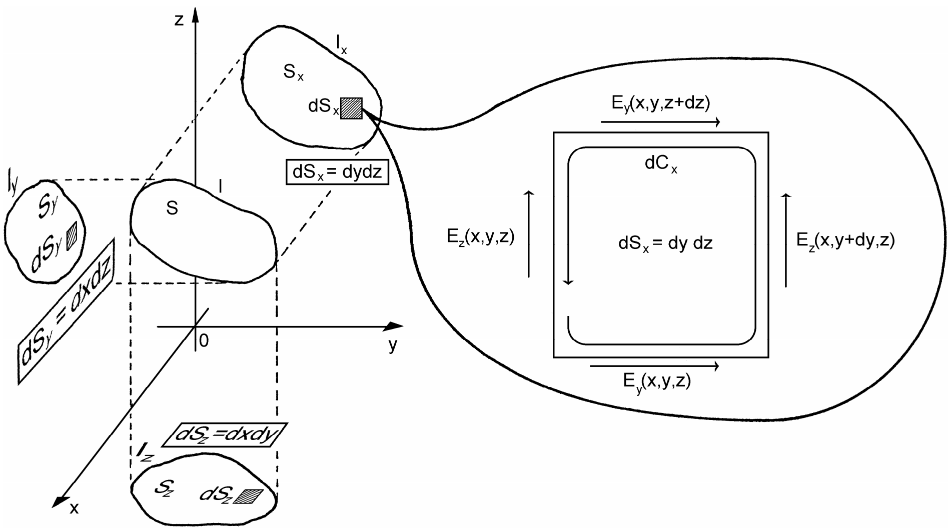
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \operatorname{rot}_x \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}S_x + \operatorname{rot}_y \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}S_y + \operatorname{rot}_z \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}S_z$$

premietneme plochu S do rovín yz, xz a xy, ako na *obr. 2.52* a priemety plochy označme postupne S_x, S_y a S_z. Z obrázka vidíme, že

$$\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}S_y = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Cirkuláciu vektora $\boldsymbol{E}$ po dráhe l môžeme na jednej strane vyjadriť ako integrál rotácie vektora $\boldsymbol{E}$ po ploche S, teda

$$C = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_x} \mathrm{rot}_x\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S_x + \int_{S_y} \mathrm{rot}_y\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S_y + \int_{S_z} \mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S_z$$



Obr. 2.52

a na druhej strane ako súčet troch cirkulácií po obvodových čiarach l_x, l_y, l_z jednotlivých priemetov S, t. j.

$$C = \oint_{l_x} \mathrm{d}C_x + \oint_{l_y} \mathrm{d}C_y + \oint_{l_z} \mathrm{d}C_z$$

Elementárne cirkulácie $\mathrm{d}C_x$, $\mathrm{d}C_y$, $\mathrm{d}C_z$ sú cirkulácie po nekonečne malých obdĺžnikoch dydz, dzdx, dxdy, z ktorých prvá je zväčšene zobrazená na *obr. 2.52*. Porovnaním posledných dvoch výrazov vidíme, že platí

$$\mathrm{rot}_x\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}C_x \tag{2.138a}$$

$$\mathrm{rot}_y\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S_y = \mathrm{d}C_y \tag{2.138b}$$

$$\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}C_z \tag{2.138c}$$

Vypočítajme elementárnu cirkuláciu dC_x. Z *obr. 2.52* vidíme, že

$$\mathrm{d}C_x = [E_z(x, y + \mathrm{d}y, z) - E_z(x, y, z)]\mathrm{d}z - [E_y(x, y, z + \mathrm{d}z) - E_y(x, y, z)]\mathrm{d}y$$

Výrazy v hranatých zátvorkách sú nekonečné malé prírastky *z*-ovej zložky ***E*** v smere *y* a *y*-ovej zložky ***E*** v smere *z*, teda

$$\mathrm{d}C_x = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{\partial E_y}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \right) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right)\mathrm{d}S_x$$

Ak porovnáme tento výraz s výrazom (2.138a). Vidíme, že *x*-ová zložka rotácie vektora ***E*** má tvar

$$\mathrm{rot}_x\, \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \tag{2.139a}$$

Ak tú istú úvahu urobíme pre cirkulácie vo zvyšných dvoch súradných rovinách alebo cyklickou zámenou súradníc, dostaneme *y*-ovú a *z*-ovú zložku rotácie ***E*** v tvaroch

$$\mathrm{rot}_y\, \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{2.139b}$$

$$\mathrm{rot}_z\, \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{2.139c}$$

Vektor rotácie intenzity elektrického poľa v pravouhlých súradniciach má teda tvar

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E}(x, y, z) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)\boldsymbol{k} \tag{2.140}$$

Výraz pre rotáciu sa často zapisuje vo formálnom tvare determinantu

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \tag{2.141}$$

Skutočnosť, že rotácia elektrostatického poľa sa rovná nule, vyjadrená rovnicou (2.137), môže teraz byť pre pole dané v pravouhlých súradniciach vyjadrená výrazom

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)\boldsymbol{k} = 0 \tag{2.142}$$

alebo vo formálnom tvare

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0 \tag{2.143}$$

Diferenciálne operácie gradient, divergencia a rotácia v skalárnom a vektorovom poli v pravouhlých, cylindrických a sférických súradniciach sú zhrnuté v tabuľke 22.

2.12.3 Diferenciálne operátory vektorových polí. Poissonova a Laplaceova rovnica

Pri odvodzovaní takých základných vzťahov elektrostatiky, ako je vzťah intenzity elektrického poľa a potenciálu, Gaussov zákon v diferenciálnom tvare a rotácie elektrostatického poľa v pravouhlých súradniciach, sme definovali diferenciálne operácie gradient [pozri vzťah (2.101)], divergenciu [vzťah (2.63)] a rotáciu [vzťahy (2.140), resp. (2.141)]. Všetky tieto operácie majú jeden spoločný rys, že sú vytvorené parciálnymi deriváciami potenciálu, resp. zložiek intenzity poľa podľa súradníc x, y, z. Každú parciálnu deriváciu týchto funkcií (t. j. potenciálu alebo zložky poľa) možno formálne považovať za súčin predpisu o operácii na funkcii (operátora) a samotnej funkcie. V tomto odstavci operátormi sú symboly derivácií podľa súradníc $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ a $\dfrac{\partial}{\partial z}$, ktoré možno "násobiť" skalárnymi funkciami ako sú $V(x, y, z)$ alebo napr. $E_x(x, y, z)$. Operácie násobenia nie sú komutatívne napr. výraz $-\dfrac{\partial V}{\partial x}$ má význam x-ovej zložky intenzity poľa, ale samostatne stojaci výraz $V\dfrac{\partial}{\partial x}$ má význam iba ďalšieho operátora. Zo spomínaných operátorov možno vytvoriť symbolický vektor, ak každý zo symbolov derivácií postupne vynásobíme jednotkovými vektormi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ v smeroch súradnicových osí a výsledky sčítame. Dostaneme tak vektorový operátor

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{2.144}$$

kde symbol ∇ sa číta ako **"operátor nabla"** a bol nazvaný podľa starohebrejského (podľa niektorých autorov fenického) strunového hudobného nástroja podobného tvaru. V literatúre sa tento operátor uvádza aj pod názvom **Hamiltonov operátor**.

Vynásobme teraz operátor nabla potenciálovou funkciou V sprava. Vidíme, že tento súčin je vlastne gradient potenciálu, t. j.

$$\nabla V = \mathrm{grad}\ V \tag{2.145}$$

Podobne, ak operátor nabla vynásobíme skalárne sprava s intenzitou elektrostatického poľa $\boldsymbol{E}$ a výsledok porovnáme s výrazom (2.63) vidíme, že je to divergencia vektora $\boldsymbol{E}$, teda

$$\nabla . \boldsymbol{E} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{E} \tag{2.146}$$

a nakoniec, ak operátor nabla vynásobíme vektorovo sprava s intenzitou poľa $\boldsymbol{E}$, porovnaním výsledku s výrazom (2.140) alebo (2.141) sa presvedčíme, že ide o rotáciu vektora $\boldsymbol{E}$, teda

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} \tag{2.147}$$

Na základe vzťahov (2.145) až (2.147) sa môžu základné zákony elektrostatiky nábojov vo vákuu napísať vo forme

$$\nabla . \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.148}$$

čo je vzťah (2.61) a

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathbf{0} \tag{2.149}$$

čo je zase výraz (2.137). Vzťah intenzity elektrostatického poľa a potenciálu (2.99) prijme formálny tvar

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V \tag{2.150}$$

Vráťme sa však ešte raz k výrazom (2.61) a (2.99), z ktorých možno získať dôležitý lokálny vzťah medzi objemovou hustotou náboja ρ a potenciálom V v okolí nejakého bodu. Ak do výrazu pre Gaussov zákon dosadíme za intenzitu poľa jeho vyjadrenie cez potenciál podľa vzťahu (2.99), dostaneme

$$\mathrm{div}(-\,\mathrm{grad}\, V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Po úprave s využitím vzťahov (2.145) a (2.146) dostaneme výraz

$$(\nabla . \nabla)V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.151}$$

v ktorom sa objavil ďalší diferenciálny operátor

$$\nabla . \nabla = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \nabla^2 = \Delta \tag{2.152}$$

vzniknutý skalárnym súčinom operátora nabla samého so sebou, takže

$$\nabla . \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 = \Delta \tag{2.153}$$

Tento skalárny operátor sa nazýva **Laplaceov operátor**. Treba však podotknúť, že operátorová identita (2.152) platí iba pre operátory v pravouhlých súradniciach. Pre funkcie dané v iných súradnicových systémoch treba namiesto operátora $\nabla . \nabla = \Delta$ používať jednoducho postupnú operáciu div(grad). V tabuľke 23 je uvedený Laplaceov operátor aj v cylindrických a sférických súradniciach.

Pomocou Laplaceovho operátora možno rovnicu (2.151) prepísať do tvaru

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.154a}$$

alebo jednoducho

$$\Delta V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.154b}$$

Rovnica (2.154) sa nazýva **Poissonova rovnica**. V oblastiach, v ktorých nie sú makroskopické náboje, teda tam, kde $\rho = 0$, rovnica prejde na tvar

$$\Delta V = 0 \tag{2.155}$$

a nazýva sa **Laplaceova rovnica**.

Poissonovej a Laplaceovej rovnici vzhľadom na ich dôležitosť a komplexnosť je venované veľké množstvo vedeckých prác a monografií a tvorí podstatnú časť matematickej fyziky. Z matematického pohľadu sú to lineárne parciálne diferenciálne rovnice druhého rádu, prvá je nehomogénna a druhá homogénna. Poissonova rovnica pri známej potenciálovej funkcii umožňuje nájsť priestorové rozloženie elektrického náboja. Opačná úloha – nájsť potenciál zo známeho rozloženia nábojov – je na prvý pohľad zložitá. Na naše prekvapenie, my toto riešenie už dávno poznáme. Je to integrálny výraz (2.78) pre výpočet potenciálu náboja rozloženého spojito v priestore. S využitím Greenovej vety sa dá dokázať, že integrál (2.78) je skutočne riešením Poissonovej rovnice.[1]

Poissonova rovnica vystupuje pri riešení mnohých praktických problémov fyzikálnej elektroniky súvisiacich s priestorovým nábojom produkovaným katódou elektrónovákuových zariadení. Využíva sa aj v štatistickej teórii atómu.

Laplaceova rovnica má vo fyzike ešte širšie uplatnenie a neobmedzuje sa iba na elektrické javy. Vystupuje napríklad aj pri štúdiu elastických kmitov, pri stacionárnom prúdení tepla, pri difúzii a i. Vlnová rovnica a Schrödingerova rovnice v kvantovej mechanike sú z matematického hľadiska vlastne iba časovým rozšírením Laplaceovej rovnice.

Na záver tohto odseku uvádzame v tabuľke 2 niekoľko matematických vektorových identít s nabla operátorom, ktoré sa často vyskytujú vo fyzike. Symboly T a V tu predstavujú skalárne a $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ vektorové funkcie súradníc.

Okrem identít uvedených v tabuľke 2, pre ľubovoľné funkcie V a $\boldsymbol{A}$ vždy platí

$$\nabla \times (\nabla V) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad} V) = \mathbf{0} \tag{2.156}$$

a

$$\nabla . (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = 0 \tag{2.157}$$

pretože v prvom prípade formálny vektorový súčin $\nabla \times \nabla = \mathbf{0}$, a v druhom prípade skalárny súčin ∇-operátora s vektorom $\nabla \times \boldsymbol{A}$, ktorý je naň kolmý sa tiež rovná nule. Z týchto čisto matematických vzťahov priamo plynú fyzikálne zákony:

[1] Pozri napr. Jackson, J. D.: Classical Electrodynamics, J. Wiley and Sons, Inc. New York – London 1962

1. v elektrostatike rot $\boldsymbol{E} = \nabla \times \boldsymbol{E} = \mathbf{0}$, pretože $\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\,\mathrm{grad}\, V$

2. v magnetizme div $\boldsymbol{B} = \nabla . \boldsymbol{B} = 0$, za predpokladu, že $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}$.

Vektor $\boldsymbol{B}$ je čitateľovi už určite známy vektor magnetickej indukcie a $\boldsymbol{A}$ je vektorový potenciál. K poslednému však ešte vedie dlhá cesta.

Tabuľka 2

(T, V – skalárne funkcie, $\boldsymbol{A}$**,** $\boldsymbol{B}$ **–** vektorové funkcie)

$\nabla(TV)$	=	$T\nabla V + V\nabla T$
	=	$T\mathrm{grad}\ V + V\mathrm{grad}\ T$
	=	$\mathrm{grad}(VT)$
$\nabla\ .\ (V\boldsymbol{A})$	=	$V(\nabla\ .\ \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\ .\ (\nabla V)$
	=	$V\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\ .\ \mathrm{grad}\ V$
	=	$\mathrm{div}(V\boldsymbol{A})$
$\nabla \times (V\boldsymbol{A})$	=	$V(\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \times (\nabla V)$
	=	$V\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \times \mathrm{grad}\ V$
	=	$\mathrm{rot}(V\boldsymbol{A})$
$\nabla\ .\ (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$	=	$\boldsymbol{B}\ .\ (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}.\ (\nabla \times \boldsymbol{B})$
	=	$\boldsymbol{B}.\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\ .\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{B}$
	=	$\mathrm{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$
$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$	=	$\boldsymbol{A}(\nabla\ .\ \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\ .\ \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}.\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\ .\nabla)\boldsymbol{B} =$
	=	$\boldsymbol{A}\mathrm{div}\ \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B}.\mathrm{grad})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\ .\ \mathrm{grad})\boldsymbol{B}$
	=	$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$
$\nabla(\boldsymbol{A}\ .\ \boldsymbol{B})$	=	$\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}.\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\ .\nabla)\boldsymbol{B}$
	=	$\boldsymbol{A} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B}\ .\mathrm{grad})\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\ .\ \mathrm{grad})\boldsymbol{B}$
	=	$\mathrm{grad}(\boldsymbol{A}\ .\ \boldsymbol{B})$
$\nabla\ .\ (\nabla V)$	=	$(\nabla.\nabla)V$
	=	$(\mathrm{grad}\ .\ \mathrm{grad})V$
	=	$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\ V)$
	=	$\nabla^2 V$
	=	ΔV
$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$	=	$\nabla(\nabla\ .\ \boldsymbol{A}) - (\nabla.\nabla)\boldsymbol{A}$
	=	$\nabla(\nabla\ .\ \boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}$
	=	$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$
	=	$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A})$

Úlohy 1 – 37

1. Dva bodové náboje q_1 a q_2 sú umiestnené vo vzájomnej vzdialenosti d. Nájdite miesto na priamke prechádzajúcej nábojmi, v ktorom sila pôsobiaca na tretí naboj q_0 je nulová.

2. Vypočítajte príťažlivú silu medzi jadrom a elektrónom v atóme vodíka! Za polomer atómu považujte hodnotu 5.10^{-11} m! Náboj protónu a elektrónu v absolútnej hodnote je $1{,}6.10^{-19}$ C.

3. Vypočítajte klasickú obežnú rýchlosť elektrónu okolo jadra v atóme vodíka! Hmotnosť elektrónu je $9{,}1.10^{-31}$ kg.

4. Thomsonov model atómu predstavuje rovnomerne rozložený kladný náboj v guľovom objeme s bodovými elektrónmi rozloženými vo vnútri gule. Ukážte, že elektrón vo vnútri takejto gule vykonáva jednoduchý harmonický kmitavý pohyb okolo stredu atómu! Vypočítajte číselne frekvenciu oscilácií elektrónu vo vodíkovom atóme a porovnajte ju s frekvenciami spektrálnych čiar vodíka! Za polomer Thomsonovho vodíkového atómu považujte hodnotu $R = 5.10^{-11}$ m.

5. Považujte atómové jadro za rovnomerne nabitú guľu a nájdite maximálnu hodnotu intenzity elektrického poľa! Polomer jadra $R = 1{,}5.10^{-15}A^{1/3}$ m, náboj $Q = Ze$ (A – atómová hmotnosť, Z – atómové číslo, e – elementárny náboj).

6. Daná je vektorová funkcia so zložkami v pravouhlých súradniciach $E_x = Ky$, $E_y = Kx$, $E_z = 0$, K = konšt.

a) Vypočítajte divergenciu a rotáciu tejto funkcie a rozhodnite, či môže predstavovať elektrostatické pole.

b) Vypočítajte dráhový integrál $\int \boldsymbol{E}.\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ medzi bodmi (0; 0) a (1; 1) po niekoľkých jednoduchých dráhach! Závisí hodnota integrálu od voľby dráhy?

c) Nájdite potenciálovú funkciu k danému vektorovému poľu.

7. Priestor medzi dvoma koncentrickými guľovými plochami s polomermi R_1 a R_2 ($R_1 > R_2$) je nabitý priestorovým nábojom

$$\rho(r) = \frac{Q}{4\pi(R_1 - R_2)r^2}$$

kde Q je konštanta. Vypočítajte:

a) celkový náboj medzi guľovými plochami,

b) intenzitu elektrického poľa ako funkciu vzdialenosti r od stredu symetrie,

c) potenciál ako funkciu r.

8. Isté guľovo symetrické rozloženie náboja vytvára potenciál

$$V(r) = \frac{q\,\mathrm{e}^{-ar}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

kde q a a sú konštanty. Nájdite rozloženie náboja, ktorému zodpovedá tento potenciál – dôležitý vo fyzike elementárnych častíc a v jadrovej fyzike nazývaný Yukawov potenciál! Hľadané priestorové rozloženie náboja zodpovedá rozloženiu náboja v atóme.

9. Podľa kvantovej mechaniky atóm vodíka v základnom stave má záporný náboj rozložený guľovo symetricky okolo kladného jadra s hustotou

$$\rho(r) = -\frac{e\,\mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_0}}}{\pi a_0^3}$$

kde e je elementárny náboj, $a_0 = 5{,}29.10^{-11}$ m je Bohrov polomer a e je základ prirodzených logaritmov. (V skutočnosti $\rho(r)$ predstavuje hustotu pravdepodobnosti výskytu elektrónu vo vzdialenosti r od jadra).

a) Dokážte, že celkový záporný náboj v celom priestore je $-e$.

b) Vypočítajte intenzitu elektrického poľa budenú atómom ako funkciu vzdialenosti r od stredu symetrie za predpokladu, že protón predstavuje bodový náboj v strede symetrie.

c) Vypočítajte potenciál ako funkciu r.

d) Znázornite priebehy intenzity a potenciálu graficky.

10. Molekulu vody možno považovať za elektrický dipól s momentom $p = 6{,}14.10^{-30}$ C.m:

a) Za predpokladu, že takýto dipól je tvorený bodovými nábojmi $\pm e$, nájdite jeho dĺžku.

b) Nájdite intenzitu elektrického poľa takého dipólu vo vzdialenosti 3.10^{-9} m na osi dipólu a kolmo na jeho os.

c) Nájdite maximálnu silu, ktorou dipól pôsobí na vodíkový ión vo vzdialenosti 3.10^{-8} m.

d) Nájdite elektrickú silu medzi dvoma molekulami vody, ktorých elektrické dipólové momenty ležia na priamke spájajúcej stredy molekúl. Vzdialenosť dipólov je 5.10^{-10} m.

11. Tri náboje $-q$ sú umiestnené vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka s dĺžkami strán a a náboj Q je v jeho ťažisku.

a) Odvoďte výraz pre silu, ktorá pôsobí na jeden z nábojov $-q$. Určte smer tejto sily.

b) Odvoďte výraz pre interakčnú energiu tejto sústavy nábojov.

c) Aký musí byť vzťah medzi hodnotami q a Q, aby sila pôsobiaca na náboj $-q$ bola nulová? Je tento systém elektrických nábojov stabilný?

12. Náboj $q = -5.10^{-9}$ C je rovnomerne rozložený na kružnici s polomerom $R = 10$ cm. Vypočítajte vzdialenosť na osi kružnice, v ktorej je intenzita elektrického poľa maximálna. Aká je intenzita v tejto vzdialenosti?

13. Dva bodové náboje Q a $-Q$ sú umiestnené vo vzájomnej vzdialenosti $2a$. Vypočítajte tok intenzity elektrického poľa kruhovou plochou polomeru R, ktorej stred leží na polovičnej vzdialenosti nábojov a plocha je kolmá na spojnicu nábojov.

14. Vypočítajte potenciál v strede štvorcovej dosky so stranou a, nabitej plošným nábojom $\sigma =$ konšt.

15. Potenciál vo sférických súradniciach je daný výrazom

$$V(\rho,\ \varphi,\ \vartheta) = \frac{a\cos\vartheta}{r^2} + \frac{b}{r}$$

nezávisí od súradnice φ, a a b sú konštanty. Nájdite zložky intenzity elektrického poľa.

16. Nekonečná rovinná vrstva hrúbky a je nabitá objemovým nábojom $\rho =$ konšt. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a potenciál v ľubovoľnom bode priestoru. Znázornite priebehy potenciálu a intenzity graficky.

17. Na nekonečnej rovinnej ploche nabitej plošným nábojom $\sigma =$ konšt. je nekonečná vrstva hrúbky a nabitá objemovým nábojom $\rho =$ konšt. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a potenciál v ľubovoľnom bode. Znázornite priebehy potenciálu a intenzity graficky.

18. Plošná hustota náboja na tenkom kruhovom disku s polomerom R je daná funkciou $\sigma = Ar$, kde A je konštanta a r je vzdialenosť od stredu disku. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a potenciál na osi disku.

19. Nájdite potenciál na okraji tenkého dielektrického disku nabitého plošným nábojom $\sigma =$ konšt. Polomer disku je R.

20. Dané je sféricky symetrické rozloženie objemového náboja s hustotou

$$\rho = Ar \qquad \text{pre} \qquad 0 \leq r \leq R$$

$$\rho = 0 \qquad \text{pre} \qquad r > R$$

Nájdite potenciál a intenzitu elektrického poľa ako funkciu vzdialenosti od stredu symetrie.

21. Daná je potenciálová funkcia

$$V = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0} e^{-\alpha r}$$

kde A a α sú konštanty, r je vzdialenosť od stredu symetrie. Nájdite objemové rozloženie náboja, ktoré budí takýto potenciál.

22. Potenciál elektrického poľa vo vnútri nabitej gule je daný výrazom $V = ar^2 + b$, kde r je vzdialenosť od stredu gule, a, b sú konštanty. Nájdite objemovú hustotu náboja v guli.

23. Potenciál nejakého elektrického poľa je daný výrazom

$$V = \alpha(xy - z^2)$$

Nájdite priemet vektora intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ do smeru vektora $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$ v bode $M(2; 1; -3)$.

24. Dva náboje $-q_1$ a $+q_2$ ($|q_1| < |q_2|$) sú rovnomerne rozložené na koncentrických guľových plochách s polomermi r_1 a r_2 ($r_1 < r_2$). Vypočítajte intenzitu elektrického poľa a potenciál ako funkcie vzdialenosti od stredu symetrie. Aký bude potenciál vo veľkej vzdialenosti $r \gg r_1, r_2$, ak sa guľa s polomerom r_2 posunie o malú vzdialenosť δx v smere osi x?

25. Dva nekonečne dlhé priamkové náboje sú uložené paralelne vo vzájomnej vzdialenosti d. Hustoty nábojov na priamkach sú $\pm\lambda$. Nájdite potenciál v kolmej vzdialenosti r od osi priamkových nábojov pre $r \gg d$. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa vo vzdialenosti r. Uvedené rozloženie nábojov sa nazýva priamkový dipól.

26. V cylindrických súradniciach je daná priestorová hustota náboja

$$\rho = 0 \qquad \text{pre} \qquad r < a$$

$$\rho(r) = k/r \qquad \text{pre} \qquad r > a$$

kde k a a sú konštanty. Hustota náboja nezávisí od súradníc φ a z. Riešením Poissonovej rovnice určite potenciál ako funkciu r.

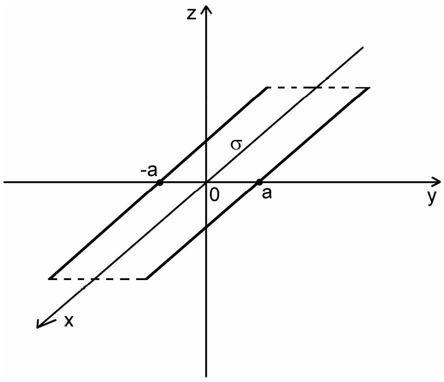
27. Nekonečne dlhý pásik šírky $2a$ je nabitý plošným nábojom tak, že veľkosť náboja závisí iba od súradnice paralelnej so šírkou pásika (*obr. 27*), teda $\sigma = \sigma(y)$. Nájdite výrazy pre zložky vektora intenzity elektrického poľa v ľubovoľnom bode. Uvažujte dva prípady:

a) $\sigma = \sigma_0 =$ konšt.,

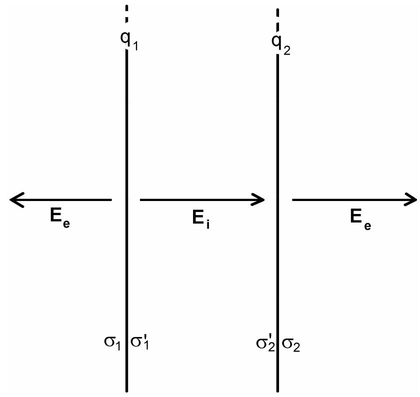
b) $\sigma = \sigma_0 \sin(2\pi/\lambda)y$, kde σ_0 a λ sú konštanty a $a \to \infty$.

28. Dve nekonečné kovové roviny sú umiestnené planparalelne. Na rovinách sú náboje q_1 a q_2 na jednotku plochy (*obr. 28*). Nájdite plošné hustoty nábojov a intenzity elektrického poľa.

29. V rovine xy ($z = 0$) je daný potenciál ako periodická obdĺžniková funkcia podľa *obr. 29*. Riešením Laplaceovej rovnice nájdite potenciál ako funkciu súradníc. Hľadaný potenciál nezávisí od z a pre $y \to \infty$ klesá k nule.

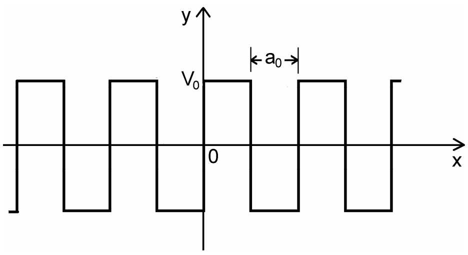


Obr. 27

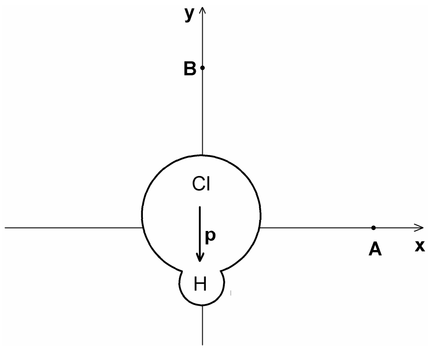


Obr. 28

30. Molekula kyseliny soľnej je umiestnená v začiatku súradníc tak, že os H–Cl je totožná s osou *y* (*obr. 30*). Aký je smer a veľkosť intenzity elektrického poľa v bode *A* na osi *x* vo vzdialenosti 10^{-9} m a v bode *B* na osi *y* v tej istej vzdialenosti od začiatku súradníc? Dipólový moment molekuly HCl je $3{,}44.10^{-30}$ C.m a smeruje od Cl k H.

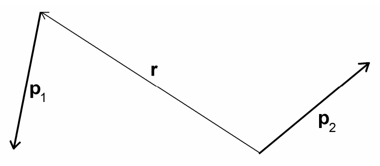


Obr. 29

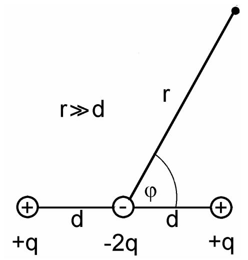


Obr. 30

31. Elektrický dipól s momentom $\boldsymbol{p_1}$ sa nachádza vo vzdialenosti $\boldsymbol{r}$ od dipólu s momentom $\boldsymbol{p_2}$ (*obr. 31*). Vypočítajte vzájomnú (interakčnú) energiu obidvoch dipólov.



Obr. 31



Obr. 33

32. Molekula s dipólovým momentom $\boldsymbol{p}$ je vo vzdialenosti $\boldsymbol{r}$ od nekonečne dlhej priamky nabitej dĺžkovým nábojom λ. Vypočítajte silu a moment sily pôsobiace na dipól, ak:

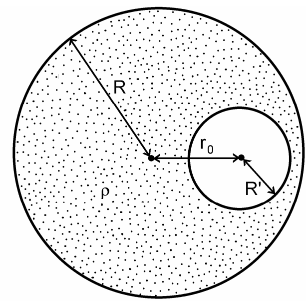
a) vektor $\boldsymbol{p}$ je kolmý na priamku,

b) vektor $\boldsymbol{p}$ je s priamkou paralelný.

33. Daná je konfigurácia nábojov na *obr. 33*, nazvaná lineárny kvadrupól. Nájdite potenciál vo vzdialenosti r od centrálneho náboja v ľubovoľnom smere. Platí: $r \gg d$.

34. Dvojvrstva v tvare kruhu s polomerom R má dipólový moment $\boldsymbol{p}'$ = konšt. vektor v smere rotačnej osi kruhu. Vypočítajte potenciál a intenzitu elektrického poľa na osi kruhu.

35. Polpriamka je nabitá nábojom λ na jednotku dĺžky. Nájdite veľkosť a smer intenzity elektrického poľa v kolmej vzdialenosti d od konca priamky.



Obr. 36

36. V guľovom objeme s polomerom R je rovnomerne rozložený náboj s hustotou ρ, až na guľovú dutinu s polomerom R', v ktorej je $\rho = 0$. Stred dutiny je vo vzdialenosti r od stredu gule (*obr. 36*).

a) Použitím zákona superpozície vypočítajte intenzitu elektrického poľa v dutine. Všimnite si, že pole v dutine je homogénne.

b) Ako treba zvoliť pomer polomerov R'/R, aby pri danom R bol súčin intenzity elektrického poľa v dutine a objemu dutiny maximálny?

37. Dva bodové náboje Q_1 a $-Q_2$ sú umiestnené vo vzájomnej vzdialenosti $2d$. Nájdite plochu nulového potenciálu.