Moment zotrvačnosti telies, ktoré majú jednoduché symetrické tvary so *spojitým rozložením hmoty* sa počíta nie sumáciou ako vo vzťahu (4.2.1.2), ale integráciou cez objem telesa:

$$J = \int x^2 \, \mathrm{d}m \, , \qquad J = J_T + mb^2$$

Steinerovu vetu možno pomerne ľahko odvodiť v prípade, že ide o teleso v tvare rovinného útvaru. Na obrázku (4.2.2.1) sú znázornené dve rovnobežné osi kolmé na rovinný útvar, jedna prechádza jeho ťažiskom T , druhá bodom O . Malým krúžkom je znázornený hmotný element (hmotný bod) telesa, ku ktorému idú polohové vektory $\boldsymbol{r}_i$, resp. $\boldsymbol{t}_i$. Polohový vektor bodu T vzhľadom na bod O je označený ako $\boldsymbol{b}$. Medzi týmito vektormi platí vzťah $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}_i$, takže do definičného vzťahu (4.2.1.2) , dosadíme výraz: $(\boldsymbol{r}_i)^2 = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}_i)^2 = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}_i)\cdot(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}_i) = b^2 + \boldsymbol{t}_i^2 + 2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t}_i)$:

$$J_O = \sum_{i=1}^{n} m_i b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{r}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i b^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i t_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t}_i) \, ,$$

$$J_O = b^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + \sum_{i=1}^{n} m_i t_i^2 = Mb^2 + J_T \, ,$$

lebo

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M \, , \quad \sum_{i=1}^{n} m_i t_i^2 = J_T \, , \quad \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t}_i) = \boldsymbol{b}\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{t}_i = 0 \, .$$

Posledný výraz sa rovná nule preto, lebo sumáciou, ktorá v ňom vystupuje, sa počíta polohový vektor ťažiska - v tomto prípade vzhľadom na ťažisko, čo musí dať nulový výsledok (pozri vzťah 4.1.1.4).

Steinerovu vetu si môžeme overiť pomocou výsledkov príkladov 4.2.1.1 a 4.2.1.2, v ktorých sú vypočítané momenty zotrvačnosti tyče vzhľadom na dve rovnobežné osi, pričom jedna prechádza ťažiskom. Moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom tyče je $J_T = (1/12)mL^2$, moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu krajom tyče je $J_O = (1/3)mL^2$, pričom vzdialenosť medzi osami je $b = (L/2)$. Podľa Steinerovej vety v tomto prípade skutočne platí $J_O = mb^2 + J_T$, o čom sa ľahko presvedčíme dosadením vypočítaných hodnôt J_T a J_O .

16 $\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{z} + \boldsymbol{h}) \times [m\,(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h})] = m(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{h}) \times [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h})] =$$

$$= \{m\boldsymbol{z} \times [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h})]\} + \{m\boldsymbol{h} \times [(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{h})]\} =$$

$$= \{m\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{h}) - m\,\boldsymbol{h}\,(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{\omega})\} + \{m\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}) - m\,\boldsymbol{h}\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{h})\}.$$

$$\boldsymbol{L} = m\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}) - m\,\boldsymbol{h}\,(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{\omega}) = mh^2\,\boldsymbol{\omega} - m(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{h} = \boldsymbol{L}_T + \boldsymbol{L}_k$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_T + \boldsymbol{L}_k = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{L}_T)_i + \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{L}_k)_i = \boldsymbol{\omega}\sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{h}_i (\boldsymbol{z}_i\, \boldsymbol{\omega})$$

$$\boldsymbol{L}_T = J\boldsymbol{\omega} \qquad J = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 \qquad \boldsymbol{L}_k = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{h}_i (\boldsymbol{z}_i\, \boldsymbol{\omega})$$

17 Podľa druhej pohybovej rovnice

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{L}_T + \boldsymbol{L}_k)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_T}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\,\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_k}{\mathrm{d}t} = J\,\boldsymbol{\alpha} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_k}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_t + \boldsymbol{M}_k$$

$$\boldsymbol{M}_t = J\boldsymbol{\alpha}$$

čo je ***pohybová rovnica telesa na pevnej osi***

18 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_T + \boldsymbol{w}_i + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{t}_i)$

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i [\boldsymbol{v}_T + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{t}_i)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_T^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{t}_i)^2 + 2\boldsymbol{v}_T \cdot \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{t}_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_T^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) v_T^2 = \frac{1}{2} M v_T^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{t}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i [\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{t}_{ri} + \boldsymbol{t}_{ki})]^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{t}_{ki})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \omega^2 m_i t_{ki}^2 = \frac{1}{2} J_T\, \omega^2$$

$$2\boldsymbol{v}_T \cdot \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{t}_i\right) = \boldsymbol{v}_T \cdot \boldsymbol{\omega}\times\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{t}_i = 0 \, .$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} J_T\, \omega^2$$

19 **harmonický oscilátor** – periodicky kmitajúca sústava, pri ktorej závislosť výchylky od času sa vyjadruje pomocou funkcií sínus, alebo kosínus

$$\boldsymbol{F} = F_y \boldsymbol{j} = m\boldsymbol{a} = m\, a_y \boldsymbol{j} \qquad F_y = m\, a_y = -\, m\,\omega^2 y = -\, k\, y \qquad m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -ky$$

$$k = m\,\omega^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m} y = 0 \quad \textit{diferenciálna rovnica harmonického oscilátora}$$

a) $y_1(t) = \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$ b) $y_2(t) = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$

a) $y_1(t) = \sin(\omega t)$ b) $y_2 = \cos(\omega t)$

$y(t) = A\, y_1(t) + B\, y_2(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

Konštanty A a B vo všeobecnom riešení (4.1.2.7) diferenciálnej rovnice závisia od počiatočných podmienok. Nech v okamihu $t_o = 0$ má oscilátor výchylku $y = y_o$ a rýchlosť $v_y = v_o$. Potom pre okamih $t_o = 0$ podľa rovnice (4.1.2.7) platí: $y_o = B$. Vychádzajúc z rovnice (4.1.2.7) pre rýchlosť platí :

$v_y = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)$

$y(t) = (v_o/\omega)\sin(\omega t) + y_o\cos(\omega t)$

$y(t) = C\sin(\omega t + \varphi)$

$y(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = C\cos(\varphi)\sin(\omega t) + C\sin(\varphi)\cos(\omega t) = C\sin(\omega t + \varphi)$

C *amplitúda* (harmonického pohybu)

ω *uhlová frekvencia*

$(\omega t + \varphi)$ *fáza*

φ *fázové posunutie* .

$\omega = 2\pi f$, $T = 1/f$

$E_k = (1/2)\, m v^2$

$E_p = W = \int_0^y F_y \,\mathrm{d}y = \int_0^y ky \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} ky^2 \qquad y(t) = C\sin(\omega t + \varphi)$

$v_y(t) = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}t) = C\omega\cos(\omega t + \varphi)$

Pre kinetickú a pre potenciálnu energiu tak dostaneme výrazy :

$$E_k = (1/2)\, m\, C^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi),$$

$$E_p = (1/2)\, k\, C^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = (1/2)\, m\omega^2 C^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Pri výpočte potenciálnej energii sme využili vzťah $k = m\omega^2$. Súčet kinetickej a potenciálnej energie sa preto rovná výrazu

$$E = (1/2)\, m\, C^2\omega^2 [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] = (1/2)\, m\, C^2\omega^2 \, ,$$

$$E = (1/2)\, mC^2\omega^2$$

20 $F_1 = -\, k_1 y$

$F_2 = -\, k_2 v_y = -\, k_2 (\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = F_1 + F_2 = -\, k_1 y - k_2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

pohybová rovnica tlmeného harmonického oscilátora.

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice tlmeného harmonického oscilátora má potom tvar :

$$y = A_1 \exp(a_1 t) + A_2 \exp(a_2 t) = A_1 \exp[(-b + \sqrt{b^2 - \omega_o^2})\, t] + A_2 \exp[(-b - \sqrt{b^2 - \omega_o^2})\, t] =$$

$$= \exp(-bt)[A_1 \exp(t\sqrt{b^2 - \omega_o^2}) + A_2 \exp(-t\sqrt{b^2 - \omega_o^2})]$$

Podľa vzájomnej veľkosti veličín b a ω_o rozlišujú sa tri prípady riešenia :

a) $b^2 - \omega_o^2 < 0$ - periodický tlmený pohyb

b) $b^2 - \omega_o^2 > 0$ - neperiodický tlmený pohyb

c) $b^2 - \omega_o^2 = 0$ - prechodný (hraničný) prípad .

Rýchlosť poklesu amplitúdy s časom sa charakterizuje podielom dvoch po sebe nasledujúcich maximálnych výchyliek, čo je vlastne to isté, ako podiel dvoch ľubovoľných výchyliek, časovo posunutých o jednu periódu harmonického pohybu:

$$\lambda = \frac{y(t)}{y(t+T)} = \frac{C\exp(-bt)\sin(\omega t + \varphi)}{C\exp[-b(t+T)]\sin[\omega(t+T) + \varphi]} = \exp(bT)$$

Prirodzený logaritmus tohto podielu

$$\delta = \ln\lambda = bT$$

označovaný písmenom δ sa nazýva ***logaritmický dekrement***. Zmeraním veľkosti dvoch po sebe nasledujúcich maximálnych výchyliek získame veličinu λ , z ktorej možno vypočítať koeficient tlmenia b :

$$b = (1/T)\ln\lambda$$

21 $F_3 = F_o \sin(\Omega t)$

$F_1 = -\, k_1 y$, $F_2 = -\, k_2 v_y = -\, k_2 (\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)$, $F_3 = F_o \sin(\Omega t)$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = F_1 + F_2 + F_3 = -k_1 y - k_2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + F_o \sin(\Omega t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_o^2 y = \frac{F_o}{m}\sin(\Omega t)$$

$y = C\exp(-bt)\sin(\omega t + \varphi) + A\sin(\Omega t - \phi)$

$\mathrm{tg}(\Phi) = \frac{2\Omega b}{\omega_o^2 - \Omega^2}$, $A = \frac{F_o}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}}$

Z výsledku vidno, že keď sa frekvencia Ω vnucujúcej sily približuje frekvencii netlmeného oscilátora ω_o , amplitúda kmitavého pohybu A dosahuje maximum, dochádza k *rezonancii*. Presnú hodnotu rezonančnej frekvencie získame, keď nájdeme extrém závislosti deriváciou amplitúdy podľa vnucujúcej frekvencie:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{rez} = \sqrt{\omega_o^2 - 2b^2}$$

22 Pri skladaní rovnobežných kmitavých pohybov netreba používať vektorovú symboliku, stačí použiť súradnice vektorov výchyliek

$u = u_1 + u_2$

$u_1 = A\sin(\omega t)$ a $u_2 = B\sin(\omega t + \varphi)$

$u(t) = A\sin(\omega t) + B\sin(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t) + B\sin(\omega t)\cos\varphi + B\cos(\omega t)\sin\varphi =$

$= (A + B\cos\varphi)\sin(\omega t) + (B\sin\varphi)\cos(\omega t) =$

$= C\sin(\omega t + \alpha)$.

$(A + B\cos\varphi) = C\cos\alpha$, $(B\sin\varphi) = C\sin\alpha$

$\mathrm{tg}(\alpha) = (B\sin\varphi)/(A + B\cos\varphi)$, $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\varphi$

Výsledkom skladania je kmitanie rovnakou frekvenciou, s výslednou amplitúdou závisiacou od vzájomného fázového posunutia skladaných kmitavých pohybov. Zo vzorca (4.1.6.3) napríklad vyplýva, že ak amplitúdy skladaných kmitavých pohybov sú rovnaké t.j. $A = B$, a fázové posunutie nulové, vtedy výsledná amplitúda $C = 2A$. Ak by fázové posunutie $\varphi = \pi$, výsledná amplitúda by bola nulová.

$u(t) = A\sin(\omega_1 t) + A\sin(\omega_2 t) = 2A\sin[(\omega_1 t + \omega_2 t)/2]\cos[(\omega_1 t - \omega_2 t)/2]$

Ak je rozdiel frekvencií $(\omega_1 - \omega_2)$ malý, člen s kosínusom sa môže priradiť k amplitúde, a situáciu chápať tak, že amplitúda sa s časom pomaly periodicky mení, pričom vlastné kmitanie má frekvenciu $(\omega_1 + \omega_2)/2$ (obr. 4.1.6.2). Takéto kmitanie dostalo názov *rázy* .

Skladanie kolmých kmitavých pohybov

Ak ide o kmitavé pohyby *s rovnakou uhlovou frekvenciou* ω , amplitúdami A a B , ktoré sú fázovo navzájom posunuté o φ , zapíšeme ich v tvare :

$$x(t) = A\sin(\omega t) \, , \qquad y(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$$

Výsledok skladania, t.j. tvar čiary, po ktorej sa v rovine (x,y) bude pohybovať oscilátor, závisí od hodnoty fázového posunutia φ . Uvedieme dva špeciálne prípady.

Ak $\varphi = 0$, pre podiel výchyliek v navzájom kolmých smeroch platí

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{B}{A} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{B}{A}x(t)$$

Ak $\varphi = \pi/2$, platí $y(t) = B\sin(\omega t + \pi/2) = B\cos(\omega t)$. Potom :

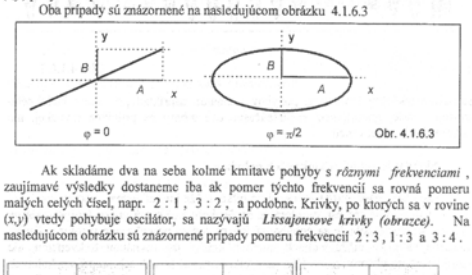
$$(x^2/A^2) + (y^2/B^2) = \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1 \, ,$$

a ďalšou úpravou :

$$\frac{x^2(t)}{A^2} + \frac{y^2(t)}{B^2} = 1$$

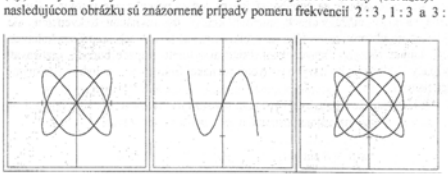
čo je rovnica elipsy. V špeciálnom prípade, ak by $A = B$, oscilátor by sa v rovine (x,y) pohyboval po kružnici.

Oba prípady sú znázornené na nasledujúcom obrázku 4.1.6.3



Obr. 4.1.6.3

Ak skladáme dva na seba kolmé kmitavé pohyby s *rôznymi frekvenciami* , zaujímavé výsledky dostaneme iba ak pomer týchto frekvencií sa rovná pomeru malých celých čísel, napr. 2 : 1 , 3 : 2 , a podobne. Krivky, po ktorých sa v rovine (x,y) vtedy pohybuje oscilátor, sa nazývajú *Lissajousove krivky (obrazce)*. Na nasledujúcom obrázku sú znázornené prípady pomeru frekvencií 2 : 3 , 1 : 3 a 3 : 4 .



25 $u_1(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$, $u_2(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right]$

kladnom smere osi x by mali tvar:

$$u_1(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right], \quad u_2(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x - x_o}{v}\right)\right] = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{\omega x_o}{v}\right]$$

$$\varphi = \frac{\omega x_o}{v}$$

Výsledná výchylka $u(x,t)$, po sčítaní výchyliek vyvolaných jednotlivými vlnami sa rovná:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] + A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right],$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha + \beta)/2]\cos[(\alpha - \beta)/2]$$

$$u(x,t) = 2A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{\varphi}{2}\right]\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

$$u(x,t) = 2A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \frac{\omega x_o}{2v}\right]\cos\left(\frac{\omega x_o}{2v}\right)$$

Na základe vzťahov (4.2.3.4) a (4.2.3.5) vidno, že frekvencia výslednej vlny je rovnaká ako frekvencia skladajúcich sa vĺn, fázové posunutie výslednej vlny je $\varphi/2$, pričom o amplitúde výslednej vlny rozhoduje člen $\cos(\varphi/2)$, ktorý ešte možno upraviť:

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\omega x_o}{2v}\right) = \cos\left(\frac{2\pi f x_o}{2v}\right) = \cos\left(\pi\frac{x_o}{\lambda}\right) \qquad \varphi = 2n\pi \quad x_o = n\lambda$$

Amplitúda výsledného vlnenia bude nulová, ak $\cos(\varphi/2) = 0$, čo nastane, keď

$$\varphi = (2n + 1)\pi \, ,$$

alebo pri vyjadrení pomocou vzdialenosti zdrojov vlnenia:

$$x_o = (2n + 1)\lambda/2 \, .$$

Slovné vyjadrenie týchto podmienok hovorí, že *interferenčné minimum* pri skladaní dvoch vĺn nastane, ak sú vlny v mieste skladania fázovo posunuté o nepárny násobok polperiódy, resp. ak sa vzdialenosti zdrojov vlnenia od miesta interferencie líšia o nepárny násobok polovice vlnovej dĺžky. Takémuto prípadu sa hovorí *deštruktívna interferencia*.

26 Christian Doppler ho objavil v roku 1842, keď pôsobil v Prahe. Ide o závislosť frekvencie vnímaného zvuku od rýchlosti pohybu zdroja zvuku a rýchlosti pohybu pozorovateľa. Predpokladajme že nefúka vietor, takže vzduch kolmým sa zvuk šíri, je v pokoji vzhľadom na súradnicovú sústavu spojenú so zemou. Vzhľadom na túto sústavu budeme opisovať ďalšie deje.

Nepohybujúci sa zdroj zvuku Z nech opakovane vysiela veľmi krátke zvukové signály (impulzy), s časovým intervalom T medzi dvomi po sebe nasledujúcimi impulzami. Frekvencia ktorou signály vysiela, je preto $f = 1/T$. Pozorovateľ P nachádzajúci sa v primeranej vzdialenosti od zdroja, vníma prichádzajúce impulzy s rovnakou frekvenciou f ako boli vysielané iba vtedy, ak aj on je v pokoji. Ak sa však zdroj, pozorovateľ, či obaja pohybujú (ku sebe, alebo od seba, nie kolmo na ich spojnicu), frekvencia impulzov vnímaná pozorovateľom sa zmení.

Rýchlosť zvuku vo vzduchu označíme písmenom c, rýchlosť zdroja v kladnom smere osi x súradnicovej sústavy (smerom k pozorovateľovi) písmenom u, a pozorovateľovu rýchlosť v kladnom smere osi x písmenom v. Posúdime niekoľko prípadov.

$$\lambda = cT \quad \lambda_2 = cT - uT = (c - u)T \quad T_2 = \frac{\lambda_2}{c} = \frac{c - u}{c}T \quad T^* = \frac{c - u}{c - v}T$$

Výsledkom je vzťah medzi časovými intervalmi prijímaných a vysielaných impulzov. Pre príslušné frekvencie (prevrátené hodnoty časových intervalov) dostávame výsledok

$$f^* = \frac{c - v}{c - u}f$$

A) Ak je zdroj v pokoji ($u = 0$), a pozorovateľ sa od zdroja vzďaľuje ($v > 0$), tak vníma nižšiu frekvenciu ako zdroj vysiela:

$$f^* = \frac{c - v}{c}f \, .$$

B) Ak sa pozorovateľ k zdroju približuje, ($v < 0$), vníma vyššiu frekvenciu:

$$f^* = \frac{c + |v|}{c}f$$

Pri $|v| = c$ frekvencia nadobúda dvojnásobnú hodnotu.

C) Ak je pozorovateľ v pokoji ($v = 0$) a zdroj sa od neho vzďaľuje ($u < 0$), pozorovateľ vníma nižšiu frekvenciu:

$$f^* = \frac{c}{c + |u|}f \, .$$

Ak rýchlosť zdroja dosiahne rýchlosť zvuku, vnímaná frekvencia bude polovičná.

D) Ak je pozorovateľ v pokoji a zdroj sa k nemu približuje ($u > 0$), pozorovateľ vníma vyššiu frekvenciu:

$$f^* = \frac{c}{c - u}f \, .$$

Kritická situácia nastane, ak sa zdroj približuje k pozorovateľovi rýchlosťou zvuku. Vtedy všetky impulzy, ktoré zdroj počas približovania k pozorovateľovi vyslal, prídu k nemu naraz. Pri $u \to c$ vnímaná frekvencia rastie nad všetky medze.

27 $A = \int_B^C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad A = -\int_B^C G\frac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

$$A = -\int_B^C G\frac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -G\int_B^C \frac{m_1 m_2}{r^3}\, r\,\mathrm{d}r = -Gm_1 m_2 \int_B^C \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -Gm_1 m_2\left(-\frac{1}{r_C} + \frac{1}{r_B}\right)$$

$$A = -Gm_1 m_2\left(-\frac{1}{r_C} + \frac{1}{r_B}\right) = -(W_{pC} - W_{pB})$$

$W_p(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} + C$, resp. $W_p(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} + W_o$

$W_p(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} + W_o \;\Rightarrow\; W_p(\infty) = 0 + W_o \;\Rightarrow\; W_o = 0 \qquad W_p(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

intenzita gravitačného poľa – vektorová veličina určená podielom sily pôsobiacej v danom bode poľa na časticu a hmotnosti tejto častice; má rozmer zrýchlenia, jednotka m/s^2.

gravitačná potenciálna energia – vzájomná potenciálna energia dvoch telies, ktoré na seba pôsobia iba gravitačnými silami. S rastúcou vzdialenosťou medzi telesami sa zväčšuje; jednotka – joule (J).

29 $F_1 = p_1 S_1$ a $F_2 = p_2 S_2 \qquad \Delta V = S_1\Delta\ell_1 = S_2\Delta\ell_2$

$W = F_1\,\Delta\ell_1 - F_2\,\Delta\ell_2 = p_1 S_1\Delta\ell_1 - p_2 S_2\Delta\ell_2 = p_1\Delta V - p_2\,\Delta V$

$W = \Delta E = (\frac{1}{2}\rho\Delta V v_2^2 + \rho\Delta V g\, y_2) - (\frac{1}{2}\rho\Delta V v_1^2 + \rho\Delta V g\, y_1)$

$p_1\,\Delta V - p_2\,\Delta V = (\frac{1}{2}\rho\Delta V v_2^2 + \rho\Delta V g\, y_2) - (\frac{1}{2}\rho\Delta V v_1^2 + \rho\Delta V g\, y_1)$

$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g\, y_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g\, y_2 + p_2 \qquad \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g\, y + p =$ konšt.

30 $pV = aRT$

$pV = aRT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{V}aN_A\frac{R}{N_A}T \;\Rightarrow\; p = \frac{N}{V}\frac{R}{N_A}T \;\Rightarrow\; p = n\,k_B T$

$p = nk_B T$

Stavová rovnica sa uvádza aj v inom tvare. Pri nasledujúcej úprave stavovej rovnice budú využité tieto vzťahy:

- Celkový počet molekúl plynu $N = aN_A$ sa získa súčinom počtu mólov a s Avogadrovou konštantou N_A , lebo Avogadrova konštanta vyjadruje počet molekúl v jednom móle látky.
- Keď celkový počet molekúl N vydelíme objemom plynu V, dostaneme hustotu počtu molekúl plynu $n = (N/V)$, čiže počet molekúl pripadajúci na jednotkový objem.
- Podiel molárnej plynovej konštanty R a Avogadrovej konštanty $k_B = R/N_A$, je **Boltzmannova konštanta** ($k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K).

Využitím uvedených vzťahov dostaneme :

$\Delta H = m\,v_2 - m\,v_1 = -\,2\,m\,v_1 \qquad \Delta H_1 = 2\,m\,v_1 \qquad z = \tau/\Delta t_1 = (\tau\, v_1)/(2b)$

$$\Delta H_{1\tau} = z\cdot 2\,m v_1 = \frac{\tau v_1}{2b}2\,m v_1 = \frac{2\tau}{b}\frac{1}{2}m v_1^2$$

$$\Delta H_{N/3} = \frac{2\tau}{b}(\tfrac{1}{2}m v_1^2 + \tfrac{1}{2}m v_2^2 + \tfrac{1}{2}m v_3^2 + \ldots) = \frac{2\tau}{b}\frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots)$$

$(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots) = \frac{N}{3}v_s^2$, v ktorom $v_s = \frac{1}{N}\sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_N^2)}$

$$\Delta H_{N/3} = \frac{2\tau}{b}\frac{N}{3}\frac{1}{2}m v_s^2 = \frac{2\tau}{b}\frac{N}{3}\varepsilon$$

$\varepsilon = (1/2)m v_s^2 \qquad U = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2) = \frac{1}{2}m N v_s^2 = N\varepsilon$

34 $p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa = pV^\kappa$

$$W' = \int_1^2 p\,\mathrm{d}V = \int_1^2 p_1 V_1^\kappa \frac{\mathrm{d}V}{V^\kappa} = p_1 V_1^\kappa\left[\frac{V^{-\kappa+1}}{-\kappa+1}\right]_1^2 = p_1 V_1^\kappa \frac{1}{1-\kappa}[V_2^{-\kappa+1} - V_1^{-\kappa+1}] =$$

$$= \frac{1}{\kappa - 1}[p_1 V_1 - p_2 V_2]$$

Prácu pri adiabatickom deji možno vyjadriť aj využitím vzťahu (5.3.6.1), teda vzťahu $p\,\mathrm{d}V = -C_V\,\mathrm{d}T$:

$$W' = \int_1^2 p\,\mathrm{d}V = -\int_1^2 C_V\,\mathrm{d}T = -C_V\,(T_2 - T_1)$$