

Nekonečné číselné rady

Mocninové rady

V príkladoch 1.–6. vyšetrite konvergenciu nekonečných číselných radov.

$$\begin{array}{ll}
 1.a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}, & b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}. \\
 2.a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}, & b) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2n^2} \right). \\
 3.a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n+1}}, & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!3^n}. \\
 4.a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n}, & b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3} \right)^{n+1}. \\
 5.a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+5} \right)^{2n}, & b) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)}. \\
 6.a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}, & b) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2} \right)^{n^3}.
 \end{array}$$

7. Vyšetrite konvergenciu radu a nájdite súčet radu

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^{n+1}}{2^{2n}}$$

8. Vyšetrite konvergenciu radu so striedavými znamienkami. Rozhodnite, či je rad absolútne alebo relatívne konvergentný.

$$\begin{array}{ll}
 a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}, & b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}, \\
 c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}, & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2-1}.
 \end{array}$$

Výsledky: 1. a), b) konvergentný, 2. a), b) konvergentný, 3. a) divergentný, b) konvergentný, 4. a) divergentný, b) konvergentný, 5. a), b) konvergentný, 6. a) divergentný, b) konvergentný, 7. a) konvergentný, súčet radu $s = \frac{1}{3}$, b) konvergentný súčet radu $s = \frac{16}{3}$. 8. a) relat. konvergentný, b) divergentný, c) relat. konvergentný, d) abs. konvergentný.

1. Nájdite obor konvergence a súčet radu

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} (x+2)^n, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} x^n.$$

2. Nájdite obor konvergence mocninových radov.

$$\begin{array}{ll}
 a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{n+1}} (x+1)^n, & b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^{2n}} (x-2)^n. \\
 c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} (x-5)^n, & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n} (x+1)^n. \\
 e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-2)}{2^n} (x+3)^n, & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.
 \end{array}$$

3. Nájdite obor konvergence mocninových radov.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n x^{4n}}{n^2}, \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n+1}}{2n+1}.$$

4. Njdite Taylorov rad funkcie f v bode a .

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = e^{2x+1}, \quad a = -1 & b) f(x) = \cos^2 x, \quad a = 0, \\
 c) f(x) = \sin 2x, \quad a = \pi & b) f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad a = 1,
 \end{array}$$

Výsledky: 1. a) $O_k = (-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$, set radu $s(x) = \frac{-9}{2x+1}$, b) $O_k = (-2, 2)$, set radu $s(x) = \frac{x}{x+2}$, 2. a) $O_k = (-3, 1)$, b) $O_k = (0, 4)$, c) $O_k = R$, d) $O_k = \{-1\}$, e) $O_k = (-5, -1)$, f) $O_k = (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$, 3. a) $O_k = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ b) $O_k = (-4, -2)$.

$$\begin{array}{l}
 4. a) e^{2x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{e n!} (x+1)^n, \quad \forall x \in R, \\
 b) \cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in R, \\
 c) \sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} (x-\pi)^{2n+1}, \quad \forall x \in R, \\
 d) \frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n, \quad \forall x \in (-1, 3).
 \end{array}$$