M1 —— PRÍKLADY 1

1. KOMPLEXNÉ ČÍSLA

1. Nájdite výsledok operácie v tvare $x+yi$, kde $x, y \in R$.
   a. $3+7i-(5-2i)(4-i)$
   b. $i(1+i)(1-i)(1+2i)(1-2i)$
   c. $\frac{(1-7i)}{(2+3i)}$
   d. $\frac{a+bi}{a-bi}$, $a, b \in R$
   e. $\frac{i(2+3i)}{3+5i}$
2. Nájdite $x, y \in R$ také, e
   a. $(2x+3y)+i(x-y)=-1+2i$
   b. $(ix+y)(2x-3iy)=2i$
   c. $\dfrac{-y+ix}{1-2i}+\dfrac{x+iy}{2+3i}=1$
3. Dané komplexné číslo znázornite a nájdite jeho goniometrický tvar.
   a. -5
   b. $1-i$
   c. $\sqrt{3}-i$
   d. $-5i$
   e. $2+3i$
   f. $-3-7i$
4. Vypočítajte $zu, \frac{z}{u}, z^n$.
   a. $z=\sqrt{3}(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5})$, $u=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$, $n=5$
   b. $z=3(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$, $u=6(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8})$, $n=2004$
5. V obore komplexných čísel riešte rovnicu.
   a. $z^4=4$
   b. $z^4=-4$
   c. $z^3=-8i$
   d. $z^4=-1-i\sqrt{3}$
6. Vypočítajte.
   a. i^{101}
   b. $(1+i)^4$
   c. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$

Výsledky

1. a) $-15+20i$, b) $10i$, c) $-\frac{19}{13}-\frac{17}{13}i$,
   d) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$, e) $\frac{1}{34}+\frac{21}{34}i$
2. a) $x=1,\ y=-1$, b) $x=\pm 1,\ y=0$, c) $x=-4$, $y=\frac{1}{2}$
3. a) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$, b) $\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi)$,
   c) $2(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi)$, d) $5(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi)$,
   e) $\sqrt{13}\big(\cos\big(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\big)+i\sin\big(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\big)\big)$
   f) $\sqrt{58}\big(\cos\big(\pi+\operatorname{arctg}\frac{7}{3}\big)+i\sin\big(\pi+\operatorname{arctg}\frac{7}{3}\big)\big)$
4. a) $2\sqrt{3}(\cos\frac{26}{15}\pi+i\sin\frac{26}{15}\pi)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{16}{15}\pi+i\sin\frac{16}{15}\pi)$, $-9\sqrt{3}$
   b) $18\big(\cos\frac{5}{8}\pi+i\sin\frac{5}{8}\pi\big)$, $\frac{1}{2}\big(\cos\frac{1}{8}\pi-i\sin\frac{1}{8}\pi\big)$, -3^{2004}
5. a) $z_k=\sqrt{2}\big(\cos k\frac{\pi}{2}+i\sin k\frac{\pi}{2}\big)$, $k=0,1,2,3$.
   b) $z_k=\sqrt{2}\big(\cos\big(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\big)\big)$, $k=0,1,2,3$.
   c) $z_k=2\big(\cos\big(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}\big)\big)$, $k=0,1,2$.
   d) $z_k=\sqrt[4]{2}\big(\cos\big(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\big)+i\sin\big(\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\big)\big)$, $k=0,1,2,3$.
6. a) i, b) -4, c) 1

2. POLYNÓMY

1. Určte stupeň polynómu $f(x)$
   a. $f(x)=1+x+ix$
   b. $f(x)=3x+2-5x^3$
   c. $f(x)=1+x+x^2+\dots x^n$, $n\in N$.
2. Vynásobte a nájdite stupeň súčinu $f(x)\cdot g(x)$
   a. $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x^3-1$
   b. $f(x)=x^3+x+1$, $g(x)=(x-i)$
3. Del'te (určte podiel a zvyšok).
   a. $(x^4+1):(x-1)$,
   b. $(x^3+x^2+x+1):(x+1)$
   c. $(x^3+x^2+x+1):(x^2+1)$
4. Daný polynóm rozložte na súčin mocnín ireducibilných polynómov nad R a nad C.
   a. $2x^2-x-1$
   b. $2x^2-x+1$
   c. $3x^3-x^2+3x-1$
   d. x^4+4
   e. $2x^3-x-1$
   f. $2x^4-x^3+7x^2-4x-4$
5. Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte hodnotu $f(c)$, ak
   a. $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16$, $c=4$
   b. $f(x)=6x^4-7x^3+4x+2$, $c=-\frac{1}{3}$
   c. $f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7$, $c=-2-i$
6. Nájdite takú hodnotu parametra a, že c bude koreňom polynómu $f(x)$.
   a. $f(x)=x^3+2x^2-ax+2$, $c=3$
   b. $f(x)=2x^6-ax^4-x^3+ax^2+3a$, $c=-1$
7. Nájdite násobnosť koreňa c polynómu $f(x)$.
   a. $f(x)=x^6-4x^5+6x^4-8x^3+10x^2-8x+8$, $c=2$
   b. $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$, $c=2$
   c. $f(x)=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$, $c=-2$
   d. $f(x)=x^6-2ix^5-x^4-x^2+2ix+1$, $c=i$
8. Nájdite všetky racionálne korene polynómu
   a. $2x^7-13x^6+6x^5+13x^4-18x^3+29x^2-22x+3$
   b. $6x^4-11x^3-x^2-4$
   c. $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$
   d. $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$
9. Nájdite všetky korene polynómu.
   a. x^4-30x^2+289
   b. x^3+i
   c. x^8-16

Výsledky

1. a) 1, b) 3, c) n
2. a) $x^5+x^3-x^2-1$, 5, b) $x^4-ix^3+x^2+(1-i)x-i$, 4
3. a) $(x^4+1)=(x-1)(x^3+x^2+x+1)+2$, (zv. 2)
   b) $(x^3+x^2+x+1)=(x+1)(x^2+1)$, (zv. 0),
   c) $(x^3+x^2+x+1)=(x^2+1)(x+1)$, (zv. 0)
4. Nad R:
   a) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, b) $2x^2-x+1$, c) $(x^2+1)(3x-1)$,
   d) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$, e) $(2x^2+2x+1)(x-1)$,
   f) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x^2+4)$
   nad C:
   a) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, b) $2(x-\frac{1+i\sqrt{7}}{4})(x-\frac{1-i\sqrt{7}}{4})$,
   c) $(x+i)(x-i)(3x-1)$,
   d) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$,
   e) $2(x-1)(x+\frac{1+i}{2})(x+\frac{1-i}{2})$,
   f) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+2i)(x-2i)$
5. a) 136, b) 1, c) $-1-44i$
6. a) $\frac{47}{3}$, b) -1
7. a) 2, b) 3, c) 4, d) 3,
8. a) $1,1,-\frac{3}{2}$, b) $-\frac{2}{3},2$, c) $\emptyset$, d) $-1,-1,-1,-1,3$
9. a) $\pm 4\pm i$, b) $i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, c) $\pm\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{2}$, $\pm 1\pm i$

3. RACIONÁLNE FUNKCIE

1. Napíšte, či je daná funkcia elementárnym zlomkom nad R.
   a. $\dfrac{2x+1}{x^2+5x+6}$
   b. $\dfrac{2x+1}{(x^2+4x+5)^n}$, $n\in N$
   c. $\dfrac{2x+1}{(x-2)^2}$
   d. $\dfrac{1}{(x-2)^2}$
2. Danú racionálnu funkciu napíšte v tvare súčtu polynómu a elementárnych zlomkov nad R aj nad C.
   a. $\dfrac{x^4+2x^3+4x^2+2x+1}{x^3+x^2-2}$
   b. $\dfrac{x^2+2x}{x^3+3x^2+3x+1}$
   c. $\dfrac{x^2-6x+7}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}$
   d. $\dfrac{3x^3-12x^2+12x-1}{x^4-6x^3+13x^2-12x+4}$
   e. $\dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$
   f. $\dfrac{2x^3+7x^2+14x+8}{(x^2+2x+2)^2}$
3. Napíšte tvar rozkladu danej racionálnej funkcie na súčet elementárnych zlomkov.
   a. $\dfrac{f(x)}{(2x+1)^3(x-1)^2(2x^2-2x+1)}$, st $f(x)=6$
   b. $\dfrac{x}{(x^2+1)^3(x^2-1)^3}$

Výsledky

1. a) $D=5^2-4\cdot 6=1>0 \implies$ nie je,
   b) $D=-4<0$, $\mathrm{st}(2x+1)=1 \implies$ áno, c) nie je,
   d) áno
2. a) $(x+1)+\frac{2}{x-1}+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ — nad R
   $(x+1)+\frac{2}{x-1}+\frac{(1/2)}{x+1+i}+\frac{(1/2)}{x+1-i}$ — nad C
   b) $\frac{-1}{(x+1)^3}+\frac{1}{x+1}$, c) $\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}$
   d) $\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}$, e) $\frac{1+(i/2)}{x+1+i}+\frac{1-(i/2)}{x+1-i}$
   f) $\frac{2x+3}{x^2+2x+2}+\frac{4x+2}{(x^2+2x+2)^2}$ — nad R
   $\frac{1+(i/2)}{x+1+i}+\frac{i}{(x+1+i)^2}+\frac{1-(i/2)}{x+1-i}+\frac{-i}{(x+1-i)^2}$ — nad C
3. a) nad R:
   $\frac{a}{(2x+1)^3}+\frac{b}{(2x+1)^2}+\frac{c}{2x+1}++\frac{d}{(x-1)^2}+\frac{e}{x-1}+\frac{fx+g}{2x^2-2x+1}$,
   $a,b,c,d,e,f,g\in R$
   nad C:
   $\frac{a}{(2x+1)^3}+\frac{b}{(2x+1)^2}+\frac{c}{2x+1}++\frac{d}{(x-1)^2}+\frac{e}{x-1}+\frac{f}{x-(1+i)/2}+\frac{g}{x-(1-i)/2}$, $a,b,c,d,e,f,g\in C$
   b) nad R
   $\frac{ax+b}{(x^2+1)^3}+\frac{cx+d}{(x^2+1)^2}+\frac{ex+f}{x^2+1}+\frac{g}{(x-1)^3}+\frac{h}{(x-1)^2}+\frac{k}{x-1}+\frac{l}{(x+1)^3}+\frac{m}{(x+1)^2}+\frac{n}{x+1}$, $a,b,c,d,e,f,g,h,k,l,m,n\in R$
   Nad C:
   $\frac{a}{(x+i)^3}+\frac{b}{(x+i)^2}+\frac{c}{x+i}+\frac{d}{(x-i)^3}+\frac{e}{(x-i)^2}+\frac{f}{x-i}+\frac{g}{(x-1)^3}+\frac{h}{(x-1)^2}+\frac{k}{x-1}+\frac{l}{(x+1)^3}+\frac{m}{(x+1)^2}+\frac{n}{x+1}$,
   $a,b,c,d,e,f,g,h,k,l,m,n\in C$

4. SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

1. Riešte systémy lineárnych rovníc.

a.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ 3x_2 &= -6 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 11 \\ -3x_2 + x_3 &= -3 \\ 7x_3 &= 21 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -x_2 + x_3 &= i \\ 2x_3 &= 2 + 2i \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -4 \\ x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2. Napíšte sústavu lineárnych rovníc a množinu všetkých jej riešení, ak jej rozšírená matica je

a. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ b. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

c. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 2 & i \\ 0 & 0 & 1 & 1+i \end{array}\right)$ d. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

e. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ f. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

3. Rozhodnite, či je daná matica stupňovitá.

a. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

4. Riešte sústavy lineárnych rovníc

a.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -2 \\ -3x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 12x_1 - x_2 + 5x_3 &= 30 \\ 3x_1 - 13x_2 + 2x_3 &= 21 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -10x_1 + 15x_2 - 11x_3 &= 4 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 9x_3 &= 5 \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

g.
$$\begin{aligned} 2x_1 + (2-i)\, x_2 &= 9 \\ -x_1 + x_2 &= i \end{aligned}$$

h.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_2 &= 2 + i \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 14 - 3i \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 8 - 2i \end{aligned}$$

5. Riešte dva systémy s rovnakou maticou pomocou eliminácie na matici 3×5.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

6. Riešte homogénne sústavy lineárnych rovníc

a.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Výsledky

1. a) $(1, -2)$, b) $(1, 2, 3)$, c) $(-i, 1, 1+i)$
   d) $\{(-3+a, 2+a, a) \colon a \in R\}$
2. a) $\{(2+p, p, 0, -1) \colon p \in R\}$, b) $\emptyset$,
   c) $(-1-2i, -1+2i, 1+i)$, d) $\{(a, -2, 0, -1) \colon a \in R\}$,
   e) $\{(1+b-a, b, 0, a) \colon a, b \in R\}$,
   f) $\left\{\left(\frac{1+p+q}{2}, 1-p, p, q\right) \colon p, q \in R\right\}$
3. a) áno, b) nie, c) áno
4. a) $(1, 3)$, b) $(2, -1, 1)$, c) $\left(\frac{1}{60}, \frac{83}{180}, \frac{1}{4}\right)$
   d) $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, e) $\left(0, 2, \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right)$, f) $\emptyset$, g) $(2, 2+i)$,
   h) $(i, -i, 2)$
5. $(-1, 2, 1)$, $(3, 1, -2)$
6. a) $\{a(-2, 4, 1, 5) \colon a \in R\}$, b) $\{(0, 0, 0, 0)\}$

5. MATICOVÉ OPERÁCIE

1. Vypočítajte $2A$, $A+B$, AB, BA (ak existujú) pre matice:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

2. K danej matici nájdite inverznú maticu.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ h. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

i. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

j. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ k. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Výsledky

1. a) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $AB \nexists$, $BA \nexists$

b) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$A + B \nexists$, $BA \nexists$

d) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$A + B \nexists$, $BA \nexists$

2. a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\nexists$,

d) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, e) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -7 & -1 \\ -6 & 8 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, g) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

h) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, i) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

j) $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$,

k) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

6. DETERMINANTY

1. Vypočítajte nasledujúce determinanty.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 2+i & 2 \\ 5 & 5-i \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} a-2 & a+2 \\ b-2 & b+2 \end{vmatrix}$, f. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

2. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Vypočítajte hodnoty $\det A_{31}$, $\det A_{32}$, $\det A_{33}$, kde A_{ij} je matica, ktorá vznikne z matice A vynechaním riadku R_i a stĺpca S_j.

(b) Vypočítajte hodnoty algebraických doplnkov $\tilde{a}_{31}$, $\tilde{a}_{32}$, $\tilde{a}_{33}$.

(c) Pomocou výsledkov z častí a), b) vypočítajte det A

3. Platí tvrdenie: Ak $A, B \in C^{3\times 3}$, tak $\det(A+B) = \det a + \det B$? Svoje tvrdenie odôvodnite.

4. Napíšte hodnotu determinantu

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, f. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

5. Vypočítajte determinanty

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & b & a & b \\ c & d & c & d \end{vmatrix}$, c. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$, e. $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

6. Vypočítajte determinanty matíc stupňa $n, n > 1$

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Výsledky

1. a) -4, b) 0, c) $1+3i$, d) 4, e) $4(a-b)$, f) 1
2. (a) 11, 1, -4, (b) 11, -1, -4, c) -3
3. Nie. Návod na odôvodnenie: nájdite maticu $A \in C^{3\times 3}$, pre ktorú $\det 2A \neq 2\det A$.
4. a) 0, b) 0, c) -30, d) -45, e) -15, f) 1.
5. a) 0, b) $(ad-bc)^2$, c) -48, d) -2, e) 19×6^4
6. a) $(-1)^{n+1}n$, b) $\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$

6. CRAMEROVO PRAVIDLO

1. Použite determinanty na nájdenie inverznej matice

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

2. Pomocou Cramerovho pravidla riešte sústavy:

a. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -3 \\ 3x_1 + 8x_2 &= 2 \end{aligned}$ b. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 5i - 3 \end{aligned}$ d. $\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 11x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= -4 \end{aligned}$ f. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

Výsledky

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & -5 \\ -3 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

2a) $(-2,1)^\top$, b) $(0,2)^\top$, c) $(i,1-i)^\top$
d) $\left(\frac{3}{11},\frac{2}{11},-\frac{1}{11}\right)^\top$, e) $\left(-\frac{26}{11},\frac{23}{11},-\frac{7}{11}\right)^\top$, f) $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)^\top$

7. LINERNA ZVISLOS A NEZVISLOS V C^n

1. Rozhodnite, či sú nasledujúce podmnožiny C^3 lineárne nezávislé, tie ktoré sú nezávislé doplňte na bázu C^3.

a. $\{(1,1,1),(1,1,-1)\}$,

b. $\{(1,1,1),(1,1,-1),(0,0,2)\}$,

c. $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$,

2. Zistite, či $\mathbf{b}$ patrí do linerneho obalu množiny $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$, ak

a. $\mathbf{b}=(1,2,3)$, $\mathbf{b}_1=(1,1,1)$ $\mathbf{b}_2=(1,1,-1)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,2)\}$.

b. $\mathbf{b}=(1,2,3)$, $\mathbf{b}_1=(1,1,1)$ $\mathbf{b}_2=(1,1,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,1,1)\}$.

c. $\mathbf{b}=(1,2,3)$, $\mathbf{b}_1=(1,2,0)$ $\mathbf{b}_2=(1,2,-1)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,1)\}$.

3. Určte hodnosť matice:

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

b. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 5 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

d. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Zistite aká je dimenzia podpriestoru $M \subset R^4$ tak, e ho vyjadríte ako lineárny obal lineárne nezávislej množiny.

a. $M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4\colon x_1+2x_2-x_3+x_4=0\}$

a. $M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4\colon x_1+2x_2-x_3+x_4=0,$ $x_3+x_4=0\}$.

Výsledky

1. a) nezávislá, b) zvisl, c) nezávislá
2. a) nepatrí, b) patrí, c) patrí,
3. a) 2, b) 3, c) 4, d) 3, e) 2

4a. $M=\{(-2a+b-c,a,b,c)\colon a,b,c\in R\}=$ $\mathrm{Lo}\{(-2,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$, $\dim M=3$.

b. $M=\mathrm{Lo}\{(-2,1,0,0),(-2,0,-1,1)\}$, $\dim M=2$.

8. VEKTORY V 3–ROZMERNOM PRIESTORE.

1. Vypočítajte skalrny súčin $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ a zistite, i je ich uhol α ostrý, tupý alebo pravý.
a. $\mathbf{u}=(1,-1,2)\,,\ \mathbf{v}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$
b. $\mathbf{u}=(1,1,1)\,,\ \mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$
c. $\mathbf{u}=(2,-2,1)\,,\ \mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$
2. Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $\mathbf{u}$ do smeru vektora $\mathbf{v}$ a nájdite zložku kolmú na $\mathbf{v}$.
a. $\mathbf{u}=(3,-5,2)\,,\ \mathbf{v}=(-3,0,4)\,,$
b. $\mathbf{u}=(-1,2,1)\,,\ \mathbf{v}=(2,2,1)$
3. Ukážte, že $A=(2,-1,1)\,,\ B=(3,2,-1)$ a $C=(7,0,-2)$ sú vrcholy pravoúhleho trojuholníka. Pri ktorom vrchole je pravý uhol? Vypočítajte jeho obsah P_{ABC}.
4. Vypočítajte $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.
a. $\mathbf{u}=(1,-2,-1)\,,\ \mathbf{v}=(0,1,1)\,.$
b. $\mathbf{u}=(-2,1,3)\,,\ \mathbf{v}=(4,-2,-6)$
5. Nájdite vektor dĺžky 1 kolmý aj na $\mathbf{u}$ aj na $\mathbf{v}$.
a. $\mathbf{u}=(1,1,-1)\,,\ \mathbf{v}=(0,3,1)$
b. $\mathbf{u}=(2,1,0)\,,\ \mathbf{v}=(0,1,2)$
6. Nájdite obsah trojuholníka ABC.
a. $A=(2,0,1)\,,\ B=(3,-1,2)\,,\ C=(-3,4,2)$
b. $A=(1,3,2)\,,\ B=(5,3,1)\,,\ C=(-3,1,2)$
7. Nájdite objem rovnobežnostena vytvoreného vektormi $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.
a) $A=(-2,3,1)\,,\ B=(1,-2,3)\,,$ $C=(2,1,0)\,,\ D=(3,2,1)$
b) $A=(-1,4,2)\,,\ B=(2,3,4)\,,$ $C=(0,4,2)\,,\ D=(3,6,3)$
8. Vypočítajte $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$, ak
a. $\|\mathbf{a}\|=3\,,\ \|\mathbf{b}\|=2$ a uhol medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je 60°
b. $\|\mathbf{a}\|=5\,,\ \|\mathbf{b}\|=8$ a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=24$
9. Vypočítajte $\|(3\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-3\mathbf{b})\|$, ak
a. $\|\mathbf{a}\|=3\,,\ \|\mathbf{b}\|=5$ a uhol medzi $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je $\frac{\pi}{6}$,
b. $\|\mathbf{a}\|=2\,,\ \|\mathbf{b}\|=3$ a $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-3\sqrt{3}$

Výsledky

1. a) 0, pravý, b) -1, tupý, c) 3, ostrý
2. a) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=-\frac{1}{25}(-3,0,4)\,,\ (3,-5,2)+\frac{1}{25}(-3,0,4)\,,$
b) $P_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\frac{1}{3}(2,2,1)\,,\ (-1,2,1)-\frac{1}{3}(2,2,1)\,.$
3. Pri vrchole B. $P_{ABC}=\frac{7\sqrt{6}}{2}$.

4a) $(-1,-1,1)\,,$ b) $(0,0,0)$
5a) $\frac{\pm1}{\sqrt{26}}(4,-1,3)\,,$ b) $\frac{\pm1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$
6a) $\frac{1}{2}\sqrt{62}\,,$ b) $\sqrt{21}\,.$
7a) $34\,,$ b) 5
8a)
a. $3\sqrt{3}\,,$ b) 32
9a) $\frac{15}{2}\,,$ b) 3

9. PRIAMKY A ROVINY V PRIESTORE

1. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny s normálovým vektorom $\mathbf{n}$, ktorá prechádza bodom P.
a. $P=(1,2,3)\,,\ \mathbf{n}=(2,-3,1)$
b. $P=(-2,3,5)\,,\ \mathbf{n}=(3,7,-2)$
2. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu cez body A,B,C.
a. $A=(1,0,-1)\,,\ B=(0,2,3)\,,\ C=(-2,1,1)$
b. $A=(-1,3,2)\,,\ b=(2,1,-1)\,,\ C=(3,2,1)$
3. Rozhodnite, či roviny sú rovnobežné.
a. $2x-y+3z+3=0\,,\ -4x+2y+9z+1=0$
b. $-x+3y+2z+1=0\,,\ 2x-6y-4z+5=0$
4. Rozhodnite, či priamka p a rovina ρ sú rovnobežné.
a. $p\colon x=1+2t, y=3-t, z=-1-4t,\ t\in R;$ $\rho\colon 3x+2y+5z-7=0$
b. $p\colon x=t, y=2t, z=2t,\ t\in R;\ \rho\colon 2x+4y-5z+3=0$
5. Rozhodnite, či sú priamka p a rovina ρ kolmé.
a. $p\colon x=1+2t, y=3-t, z=-1-4t,\ t\in R;$ $\rho\colon -4x+2y+8z+3=0$
b. $p\colon x=4+3t, y=1-2t, z=-1+4t,\ t\in R;$ $\rho\colon x-5y+2z-7=0$
6. Nájdite parametrické rovnice priamky p, ktorá je priesečnicou rovín
a) $\rho_1\colon -2x+3y+7z+2=0\,,\ \rho_2\colon x+2y-3z+5=0$
b) $\rho_1\colon 3x-5y+2z=0\,,\ \rho_2\colon x+z=0$
7. Nájdite rovnicu roviny prechadzajúcej cez bod $(-1,4,-3)$, ktorá je kolmá na priamku $x=2+t, y=-3+2t, z=-t,\ t\in R$.
8. Nájdite rovnicu roviny ρ prechadzajúcej cez bod $(-1,2,4)$, ktorá je rovnobežná s rovinou
a. xy, b. xz, c. $x+y+z+1=0$.
9. Nájdite rovnicu roviny, prechádzajúcej cez bod $(-1,4,2)$, ktorá obsahuje priesečnicu rovín $4x-y+z-2=0$ a $2x+y-2z-3=0$.
10. Nájdite rovnicu roviny, ktorá je rovinou súmernosti bodov (2, - 1, 1) a (3, 1, 5).
11. Nájdite priesečník priamok
a. $p\colon x=-1+4t, y=3+t, z=1,\ t\in R$ a $q\colon x=-13+12t, y=1+6t, z=2+3t,\ t\in R$.
b. $p\colon x=-1+4t, y=3+t, z=1,\ t\in R$ a $q\colon x=-13+12t, y=1+6t, z=1+3t,\ t\in R$.

Výsledky

1a) $2x-3y+z+1=0\,,$ b) $3x+7y-2z-5=0\,.$
2a) $2y-z-1=0\,,$ b) $x+9y-5z-16=0\,.$
3a) rôznobežné, b) rovnoben.
4a) nie, b) áno $p\parallel\rho$.
5a) áno, $p\perp\rho$, b) nie.
6a) $p\colon x=-41-5t, y=t, z=-12-t,\ t\in R,$
b) $p\colon x=5t, y=t, z=-5t,\ t\in R.$
7. $\rho\colon (x+1)+2(y-4)-(z+3)=0$
8a) $\rho\colon z=4\,,$ b) $\rho\colon y=2\,,$
c) $\rho\colon (x+1)+(y-2)+(z-4)=0\,.$
9. $4x-13y+21z-14=0\,.$
10. $\left(x-\frac{5}{2}\right)+y+4(z-3)=0$
11a) $p\cap q=(-17,-1,1)\,,$ b) $p\cap q=\emptyset\,.$