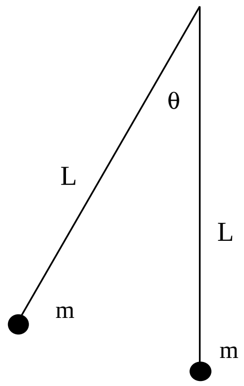
Písomka 07. 04. 2009

1. Dve telieska s rovnakými hmotnosťami m visia na nehmotných nitiach dĺžky L. Teliesko 1 vychýlime o uhol θ (pozri obrázok) a potom pustíme.
   (a) akú rýchlosť má teliesko 1 v najnižšom bode dráhy etsne pred zrážkou s druhým telesom?
   (b) akú rýchlosť budú mať telieska 1 a 2 po zrážke, ak je zrážka **pružná**?
   (c) akú rýchlosť budú mať telieska 1 a 2 po zrážke, ak sa zrážkou zlepia dohromady ?
   (3 body)



Riešenie. (a) Teleso 1 získa kinetickú energiu $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ z potenciálnej energie $E_p = mgh$, kde $h = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$. Preto jeho rýchlosť tesne pred zrážkou je

$$v = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}. \tag{1}$$

(b) Zo zákona zachovania hybnosti plynie, že

$$mv = mv_1 + mv_2 \tag{2}$$

Pretože zrážka je pružná, zachováva sa aj kinetická energia, takže máme

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \tag{3}$$

Z týchto rovníc dostaneme rovnice

$$v = v_1 + v_2 \tag{4}$$

a

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 \tag{5}$$

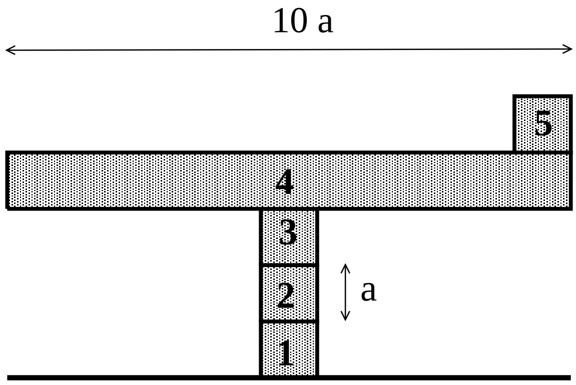
Z prvej rovnice dostaneme $v_2 = v - v_1$, a z druhej $v_2^2 = v^2 - v_1^2 = (v+v_1)(v-v_1) = (v+v_1)v_2$, takže máme $v_2 = v - v_1$ a zároveň $v_2 = v + v_1$. Riešením je $v_1 = 0$ a $v_2 = v$.

(c) Ak je zrážka nepružná, tak zákon zachovania hybnosti dáva

$$mv = (2m)v_1, \tag{6}$$

takže $v_1 = v/2$.

2. Jožko postavil z kociek vežu podľa obr. 2. Každá kocka má rozmer $a \times a \times a$, dlhá kocka má rozmer $a \times a \times 10a$. Všetky kocky sú z toho istého materiálu.
   (a) Nájdite ťažisko veže
   (b) Rozhodnite, či je veža stabilná
   (3 body)



Riešenie

(a) Položme počiatok súradnicovej sústavy do stredu podstavy spodnej kocky. Potom ťažiská jednotlivých kociek sú

$$\vec{r}_1 = (0,0,a/2),\ \vec{r}_2 = (0,0,3a/2),\ \vec{r}_3 = (0,0,5a/2),\ \vec{r}_4 = (0,0,7a/2),\ \vec{r}_5 = (9a/2,0,9a/2), \quad (7)$$

a ich hmotnosti sú $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = m$, ale $m_4 = 10m$. Dosadíme do rovnice pre ťažisko

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}, \quad (8)$$

a dostaneme

$$\vec{R} = \frac{1}{14}(9a/2, 0, 44a) = \left(\frac{9a}{28}, 0, \frac{22a}{7}\right). \quad (9)$$

(b) Horizontálna súradnica ťažiska **horných dvoch kociek** sa nachádza vo vzdialenosti $9a/22$ od stredu veže. Pretože $9/22 < 1/2$, je systém stabilný.

Poznámka. Stabilitu je treba posudzovať pre každú kocku zvlášť. Kocka 5 je OK, lebo jasne enspadne z kocky 4. V ďalšom kroku je treba posúdiť stabilitu kociek 4 a 5. Dôvod: predstavte si, že kocky 1,2 a 3 budú 1000000× ťažšie ako kocka 5. Potom je ťažisko celej veže takmer totožné s ťažiskom kociek 1-3, a to nezávisle od toho, ako umiestnime kocky 4 a 5 - aj keby sme ich vysunuli úplne doprava. Posudzovať ťažisko celej veže teda nestačí.

3. Na valci s hmotnosťou M a polomerom R je namotané lano, na ktorom visí závažie hmotnosti m. V čase $t = 0$ sa závažie dá do pohybu. Akú bude mať rýchlosť v okamihu, keď kleslo do hĺbky h ?
(2 body)

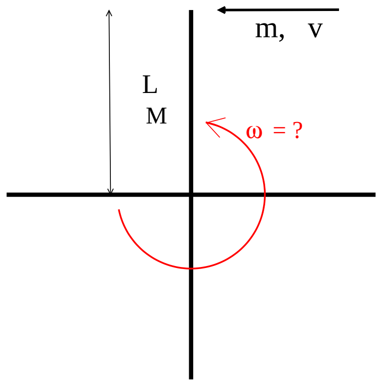
Riešenie

Potenciálna energia $E_p = mgh$ sa zmenila na kinetickú energiu valca, $E_1 = \frac{1}{2}J\omega^2$ a na kinetickú energiu telesa, $E_2 = \frac{1}{2}mv^2$. Moment zotrvačnosti valca $J = \frac{1}{2}MR^2$ a platí $v = R\omega$. Po dosadení dostaneme vzťah

$$mgh = \frac{1}{2}\left[m + \frac{1}{2}M\right]v^2, \quad (10)$$

z ktorého vyjadríme rýchlosť v.

4. Vo vodorovnej rovine leží kríž zložený zo štyroch ramien, každé rameno má dĺžku L a hmotnosť M. Do okraja jedného ramena narazí rýchlosťou v mucha hmotnosti m. Nájdite uhlovú rýchlosť otáčania sústavy kríž + mucha. (2 body)



Riešenie. Využijeme zákon zachovania momentu hybnosti. Pred zrážkou bol

$$L_0 = mvL \tag{11}$$

Po zrážke

$$L_f = 4 \times J\omega + mL^2\omega. \tag{12}$$

kde J je moment zotrvačnosti jedného ramena kríža, $J = \frac{1}{3}mL^2$. Porovnaním oboch členov dostaneme

$$\omega = \frac{m}{\frac{4}{3}M + m}\frac{v}{L}. \tag{13}$$