# Písomka 17. 03. 2009

1. Antilopa gnu utekala čas $t_1 = 10$ s konštantným zrýchlením $a_1 = 2.0$ m/s$^2$, a potom čas $t_2 = 20$ s s konštantným spomalením $a_2 = 0.1$ m/s$^2$. Akú vzdialenosť prebehla ? Akú mala rýchlosť na konci dráhy ?
(2 body)

   Riešenie: Za čas $t_1$ prebehne antilopa vzdialenosť $s_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$. Na konci tejto dráhy bude mať rýchlosť $v_1 = a_1 t_1$. Potom začne spomaľovať, preto jej rýchlosť klesá s časom

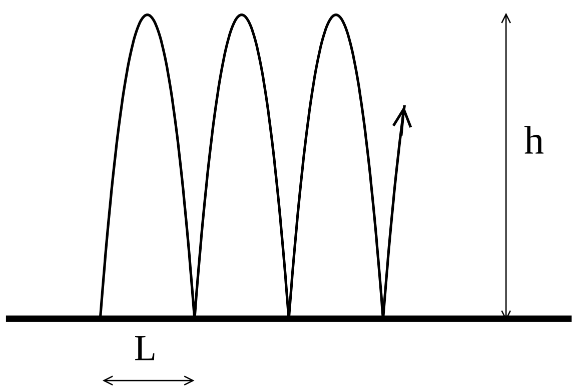
$$v(t) = v_1 - a_2 t \qquad t > t_1. \tag{1}$$

   V druhej časti dráhy $t_2$ preto prebehne dráhu $s_2 = v_1 t_2 - \frac{1}{2}a_2 t^2$. Celková dráha je preto

$$s = s_1 + s_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 t_1^2 - a_2 t_2^2\right) + v_1 t_2. \tag{2}$$

   Rýchlosť antilopy na konci dráhy je $v(t_2) = v_1 - a_2 t_2 = a_1 t_1 - a_2 t_2$.

2. Loptička hmotnosti $m = 100$ g sa pružne odráža od podlahy; vzdialenosť dvoch dopadov na podlahu je $L = 10$ m. Vo svojom najvyššom bode je loptička vo výške $h = 5$ m.
Aký čas uplynie emdzi dvoma dopadmi loptičky na podložku? (1)
Gravitačné zrýchlenie $g = 10$ m/s$^2$.
(3 body)




   Riešenie. Označme rýchlosť loptičky $\vec{v}$ a jej vodorovnú a zvislú zložku $v_x$ a $v_z$. Rýchlosť $v_x$ je konštantná, ale rýchlosť $v_z$ sa mení v závislosti od polohy loptičky: je nulová v najvyššom bode dráhy, a maximálna v najnižšom.

   Z najvyššieho bodu dráhy loptička padá rovnomerne zrýchlene so zrýchlením $g$ a trvá jej to čas $t = \sqrt{2h/g}$, teda $t = 1$ s. Čas $T$ medzi dvoma dopadmi loptičky na podlahu je dvojnásobkom času $t$,

$$T = 2t = 2\sqrt{2h/g} = 2 \text{ s}. \tag{3}$$

3. Po naklonenej rovine, ktorá s vodorovnou podložkou zviera uhol $\theta$, sa pohybuje smerom nadol teleso hmotnosti $M$. Koeficient kinetického trenia medzi telesom a rovinou je $\mu_k$.
(a) Aké je zrýchlenie telesa? (1)
(b) Nájdite vodorovnú silu $F$, ktorou musíte pôsobiť na teleso, aby sa pohybovalo nadol

rovnomerne, t.j. s konštantnou rýchlosťou. (2)
(3 body)

Riešenie. (a) Na teleso pôsobí len tiažová sila $G = Mg$. Do pohybu ju môže uviesť len jej zložka rovnobežná s naklonenou podložkou, $G_\| = G \sin\theta$. Proti pohybu pôsobí sila trenia, $F_t = \mu_k N$, kde $N = G\cos\theta$. Zrýchlenie telesa je teda

$$a = \frac{G_\| - F_t}{M} = g\left(\sin\theta - \mu_k \cos\theta\right). \tag{4}$$

(b) Silu $F$ rozložíme do zložiek $F_\|$ a $F_\perp$ (rovnobežnej a kolmej na podložku). Dostaneme $F_\| = F\cos\theta$ a $F_\perp = F\sin\theta$.

V smere rovnobežnom s podložkou pôsobí na teleso sila $G_\| - F_\|$ smerom nadol, a sila trenia, $N = \mu_k(F_\perp + G_\perp)$. Pretože sa teleso pohybuje rovnomernou rýchlosťou, sú tieto sily rovnaké v absolútnej hodnote, ale opačne orientované. máme preto rovnicu

$$Mg\sin\theta - F\cos\theta = \mu_k N = \mu_k(F\sin\theta + Mg\cos\theta) \tag{5}$$

z ktorej vyjadríme silu

$$F = Mg\,\frac{\sin\theta - \mu_k\cos\theta}{\cos\theta + \mu_k\sin\theta}. \tag{6}$$

4. Na lane dĺžky $L = 1$ m roztáčame kameň hmotnosti $m = 0.1$ kg. Uhlová rýchlosť otáčok rovnomerne rastie so zrýchlením $\varepsilon = 0.1$ s$^{-2}$. Nájdite čas, kedy sa lano pretrhne, ak vieme, že maximálne zaťaženie lana je $F = 102,4$ N.
(2 body)

Riešenie. Uhlová rýchlosť $\omega$ narastá s lineárne s časom, $\omega = \varepsilon t$. Preto odstredivá sila narastá s časom

$$F_{\mathrm{od}} = m\omega^2 L = mL\varepsilon^2 t^2 \tag{7}$$

V kritickom čase $F_{\mathrm{od}} = F$, takže kritický čas je

$$t = \sqrt{\frac{F}{mL\varepsilon^2}}. \tag{8}$$

Po dosadení $t = 320$ s.