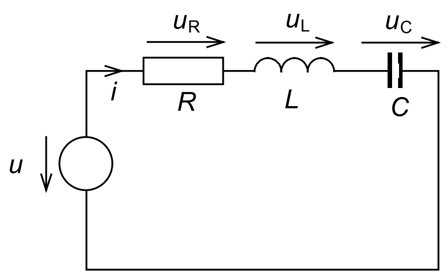
Sériový rezonančný obvod

Všeobecne

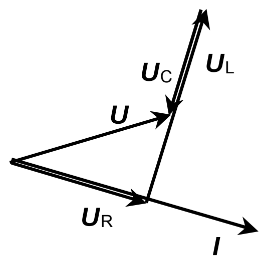
Tak ako v rôznych iných fyzikálnych sústavách, aj v elektrických obvodoch, vyznačujúcich sa určitými vlastnosťami dôjde pri zhode vnútených a vlastných kmitov sústavy k výraznému zväčšeniu amplitúdy kmitov, teda k tzv. rezonančnému javu. Elektrické obvody využívajúce tento jav nazývame rezonančné obvody a túto ich vlastnosť využívame napr. na výber (detekciu) alebo potlačenie (filtráciu) napätia, resp. prúdu určitých frekvencií. K javu rezonancie môže dôjsť v elektrickom obvode len vtedy, ak sa v ňom vyskytujú súčasne prvky akumulujúce elektrickú a magnetickú energiu, teda kapacitory a induktory.

Najjednoduchší sériový rezonančný obvod vytvoríme spojením troch základných prvkov, a to rezistora, kapacitora a induktora za sebou. V takom prípade, aj keď použijeme reálne, tzv. technické prvky, teda nie ideálne prvky s jediným určujúcim parametrom, môžeme z hľadiska riešenia použiť ako náhradný obvod ideálny elektrický obvod, zostavený z troch ideálnych prvkov s hodnotami parametrov *R*, *L* a *C* (obr.1). Samotné vyšetrovanie rezonančného javu potom predstavuje riešenie takéhoto ideálneho elektrického obvodu v harmonickom ustálenom stave. Riešenie môžeme vykonať v komplexnom tvare (použitím fázorov), čo umožňuje názorné sledovanie pomerov v obvode pomocou fázorových diagramov. Na grafické znázorňovanie sledovaných komplexných funkcií prúdu, napätia alebo ich pomeru, v závislosti od zvolenej reálnej alebo komplexnej premennej využívame tzv. fázorové nomogramy. Praktické využitie majú z nich odvodené, tzv. amplitúdové a fázové charakteristiky.

Vyšetrujme zvolený sériový obvod s prvkami *R*, *L*, *C*, pripojený k harmonickému zdroju napätia $u(t) = U_m.cos(\omega t+\varphi_U)$ znázornený na obr.1.



a) sériový RLC obvod



b) fázorový diagram obvodu

Obr. 1

Podľa II. Kirchoffovho zákona pre fázory napätia v obvode platí

$$-\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}_R + \boldsymbol{U}_L + \boldsymbol{U}_C = 0$$

teda

$$-\boldsymbol{U} + R \cdot \boldsymbol{I} + j\omega L \cdot \boldsymbol{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \boldsymbol{I} = 0$$

Fázor prúdu je

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{U}}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

Fázorový diagram napätí a prúdu obvodu, zakreslený pre jeden zvolený stav, je na obr.1 b.

Z výrazu pre prúd obvodu vyplýva, že zmenou parametrov *C, L* alebo ω je možné dosiahnuť stav, keď sa obvod chová ako obvod len s rezistorom *R*. Podmienkou pre tento stav obvodu, ktorý označujeme ako rezonančný stav, je splnenie rovnosti

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Túto podmienku možno pri konštantných hodnotách parametrov *C, L* splniť zmenou uhlovej frekvencie ω, pričom pre túto význačnú frekvenciu $\omega = \omega_{rez}$, tzv. rezonančnú uhlovú frekvenciu, platí

$$\omega_{rez} = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

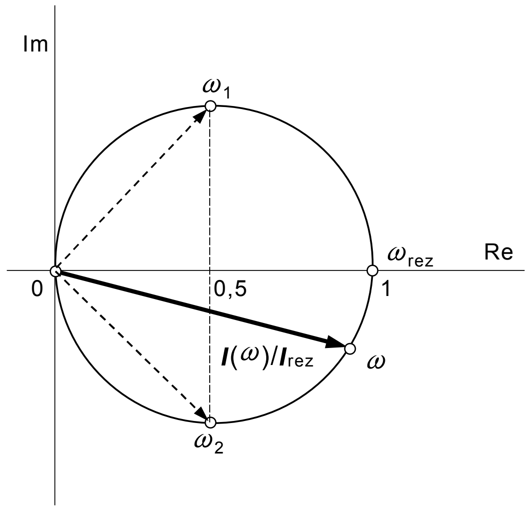
Pri splnení tejto rezonančnej podmienky bude veľkosť napätia na induktore rovnaká ako na kapacitore, pričom tieto napätia sú v protifáze (pozri obr.1b), na rezistore objaví celé napätie zdroja. Prúd obvodu je maximálny a fáza prúdu je rovnaká ako fáza napätia zdroja. Fázor prúdu v rezonančnom stave je

$$\boldsymbol{I}(\omega = \omega_{rez}) = \boldsymbol{I}_{rez} = \frac{\boldsymbol{U}}{R}$$

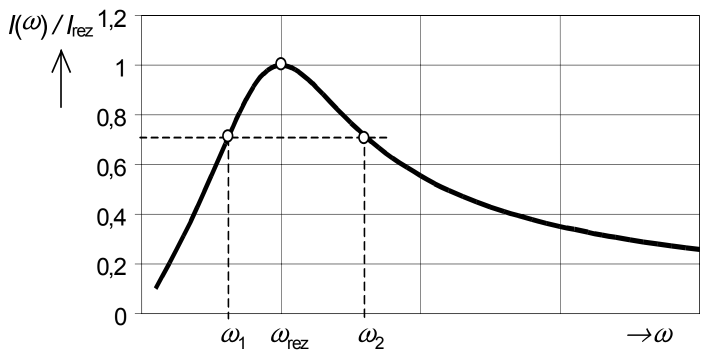
Ak z praktických dôvodov zavedieme pomerný prúd, bude tento vo fázorovom tvare

$$\frac{\boldsymbol{I}(\omega)}{\boldsymbol{I}_{rez}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j} \cdot \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]^2}} \cdot e^{-\mathrm{j} \cdot arctg\left[\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}.$$

Závislosť pomerného prúdu od uhlovej frekvencie môžeme graficky zobrazovať ako komplexnú funkciu a to využitím komplexného nomogramu (obr.2 a) alebo ako samostatnú amplitúdovú charakteristiku (obr.2 b).



a)



b)

Obr. 2

Z výrazu pre pomerný prúd vidno, že hodnota pomerného prúdu závisí od uhlovej frekvencie, pričom pre $\omega < \omega_{rez}$ je závislosť od uhlovej frekvencie strmšia ako pri $\omega > \omega_{rez}$. Zvykne sa preto zavádzať vyjadrenie priebehu prúdu pomocou novej nezávisle premennej, tzv. faktora pomerného rozladenia Ω (bezrozmerná veličina)

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{rez}} - \frac{\omega_{rez}}{\omega}$$

nasledovným spôsobom

$$\frac{\boldsymbol{I}(\Omega)}{\boldsymbol{I}_{rez}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j} \cdot \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right)} = \frac{1}{1 + \mathrm{j} \cdot \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\omega_{rez}} - \frac{\omega_{rez}}{\omega}\right)} = \frac{1}{1 + \mathrm{j} \cdot Q \cdot \Omega}$$

kde Q je tzv. faktor kvality sériového rezonančného obvodu

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Faktor kvality Q priamo súvisí s tzv. pásmom priepustnosti rezonančného obvodu. Za pásmo priepustnosti rezonančného obvodu považujeme interval uhlovej frekvencie, v ktorom veľkosť pomerného prúdu neklesne pod hodnotu $1/\sqrt{2}$ (pokles o 3 dB). Z tejto podmienky vyplývajú hraničné hodnoty pomerného rozladenia

$$\Omega_{1,2} = \mp\frac{1}{Q}$$

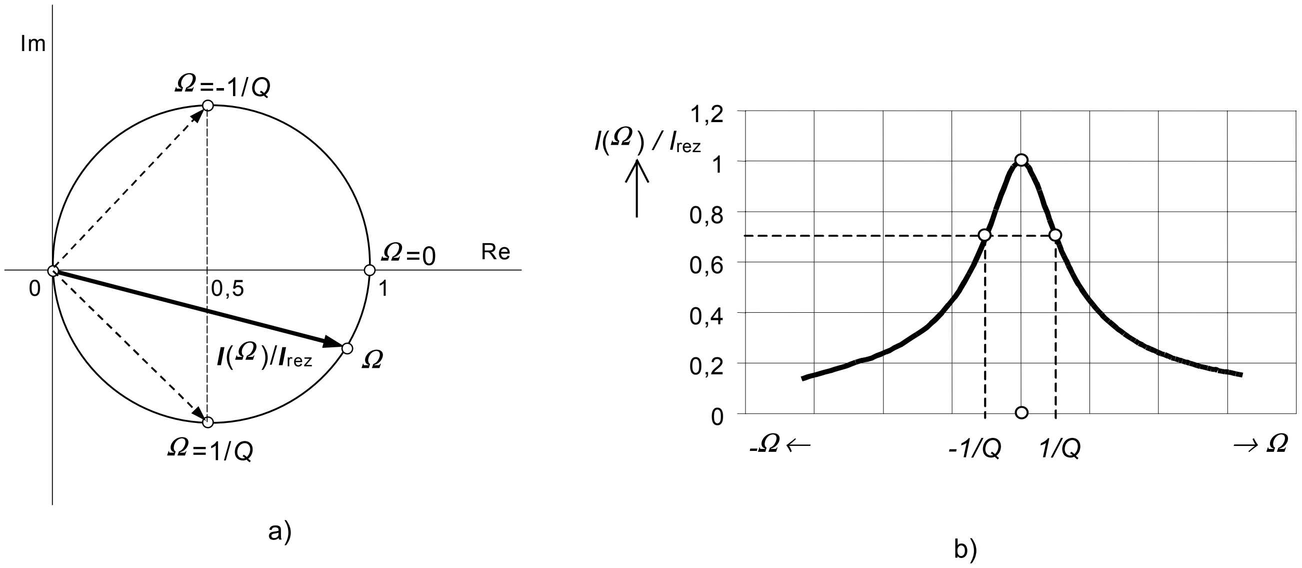
a tiež hraničné hodnoty uhlovej frekvencie

$$\omega_{1,2} = \omega_{rez} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q} \right]$$

Pásmo priepustnosti rezonančného obvodu je

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_{rez} \cdot \frac{1}{Q}$$

Tu je vhodné upozorniť na skutočnosť, ktorá vyplýva z posledného vzťahu, že obvody s väčšou hodnotou faktora kvality Q majú užšie pásmo priepustnosti $\Delta\omega$ a naopak.



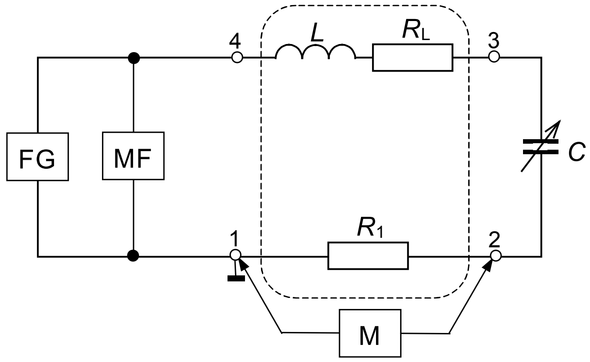
Obr. 3

Úlohy

1. V sériovom obvode podľa obr.4 so zadanými hodnotami L, R_L a R_1 zvoľte hodnotu kapacity C a vypočítajte hodnotu uhlovej rezonančnej frekvencie ω_{rez} a rezonančnej frekvencie f_{rez}.
2. Vypočítajte hodnotu faktora kvality Q a predpokladanú šírku pásma priepustnosti $\Delta\omega$ daného sériového rezonančného obvodu.
3. V obvode nastavte predpísanú hodnotu napätia U a hodnotu rezonančnej frekvencie f_{rez} a odmerajte veľkosť prúdu v rezonancii I_{rez}.
4. Pri predpísanej konštantnej hodnote veľkosti napätia U odmerajte rezonančnú charakteristiku obvodu $\dfrac{I(f)}{I_{rez}}$.

   Meranie vykonajte v rozsahu frekvencií tak, aby namerané hodnoty vystihovali priebeh rezonančnej charakteristiky obvodu.
5. Odmeranú rezonančnú charakteristiku obvodu $\dfrac{I(f)}{I_{rez}}$ znázornite graficky.
6. Z odmeraného priebehu rezonančnej charakteristiky odčítajte hodnotu rezonančnej frekvencie f_{rez} a porovnajte ju s vypočítanou hodnotou z úlohy 1.
7. Na základe rezonančnej charakteristiky určte šírku pásma priepustnosti $\Delta\omega$, hodnotu faktora kvality Q a porovnajte ich s vypočítanými hodnotami.
8. Z nameranej hodnoty prúdu I_{rez} stanovte efektívny odpor cievky pri danej frekvencii a porovnajte ho s hodnotou odporu, odmeranou jednosmerným prúdom. Urobte diskusiu o výsledkoch merania.

Schéma a popis zapojenia



obr.4

Prípravok (modul 1-2-3-4) zapojíme podľa obr.4.

Hodnoty prvkov sú:

L = 16,6 mH
R_L = 3,4 Ω
R_1 = 10,0 Ω

Prístroje:

FG – zdroj napätia (funkčný generátor)
MF – merač frekvencie
M – voltmeter (multimeter)
C – kapacitná dekáda

Postup pri meraní a vyhodnotení

1. Pre zvolenú hodnotu kapacity C vypočítame hodnotu rezonančnej uhlovej frekvencie $\omega_{rez} = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$

   a hodnotu rezonančnej frekvencie $f_{rez} = \frac{\omega_{rez}}{2\pi}$

2. Faktor kvality Q vypočítame zo vzťahu $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, pričom celková rezistancia je $R = R_1 + R_L$. Šírku pásma

   priepustnosti určíme z výrazu $\Delta\omega = \omega_{rez} \cdot \frac{1}{Q}$.

3. Na kapacitnej dekáde nastavíme hodnotu kapacity C, zvolenú v bode 1. Na funkčnom generátore nastavíme vypočítanú hodnotu rezonančnej frekvencie f_{rez} a predpísanú hodnotu výstupného napätia (U = 0,5 V). Odčítame hodnotu prúdu I_{rez}. Treba zdôrazniť, že na meranie prúdu nepoužívame prúdový vstup multimetra, nakoľko jeho vnútorná impedancia môže ovplyvniť meraný obvod. Multimetrom odčítame napätie U_{21} na rezistore R_1 (medzi svorkami 2-1) a hodnotu prúdu určíme z podielu $I = U_{21}/R_1$.

4. Postupne nastavujeme rôzne hodnoty frekvencie a meriame im zodpovedajúce hodnoty prúdov. Hodnoty frekvencie volíme tak, aby sme mohli odmerať minimálne 5 hodnôt prúdov pod rezonančnou frekvenciou a 5 hodnôt nad rezonančnou frekvenciou, a tak vystihli rezonančnú krivku obvodu. Pri meraní každej hodnoty treba dodržať podmienku konštantnej hodnoty vstupného napätia U a každú hodnotu prúdu určiť vždy výpočtom z odmeranej hodnoty napätia U_{21}.

5. Graficky zobrazíme závislosť veľkosti $\frac{I(f)}{I_{rez}}$ a pre extrém tejto závislosti, ktorý vieme stanoviť napríklad

   grafickou interpoláciou, odčítame hodnotu rezonančnej frekvencie. Túto hodnotu porovnáme s vypočítanou hodnotou f_{rez} podľa bodu 1.

6. Na grafickej závislosti $\frac{I(f)}{I_{rez}}$ vyznačíme hodnoty, v ktorých pomerná veľkosť nadobúda hodnotu $1/\sqrt{2}$. Potom

   na osi frekvencie f odčítame príslušné hraničné hodnoty f_1 a f_2 a určíme šírku pásma priepustnosti Δf. Z takto odmeranej šírky pásma priepustnosti môžeme overiť hodnotu faktora kvality zo vzťahu

   $$Q = \frac{\omega_{rez}}{\Delta\omega} = \frac{f_{rez}}{\Delta f}$$

   Takto určenú hodnotu faktora kvality porovnáme s hodnotou vypočítanou na základe parametrov obvodu.

7. Až dosiaľ sme pre počítané hodnoty v obvode predpokladali, že sériový rezonančný obvod je zložený z ideálnych lineárnych prvkov. Reálne obvody také nie sú, a to platí aj pre obvod ktorý vyšetrujeme meraním. Zjavne sa v našom obvode, okrem iných vplyvov, prejavuje aj napr. vplyv striedavého magnetického poľa, zosilneného prítomnosťou feromagnetického jadra cievky a spôsobujúci tzv. skinefekt. To má za následok zvýšenie hodnoty odporu cievky (tzv. efektívny odpor). Tým sa menia aj základné vlastnosti rezonančného obvodu, ako šírka pásma a faktor kvality. Meraním zistíme efektívny odpor cievky z výrazu

   $R_{Lef} = \frac{U}{I_{rez}} - R_1$, pričom $R_{Lef} > R_L$.