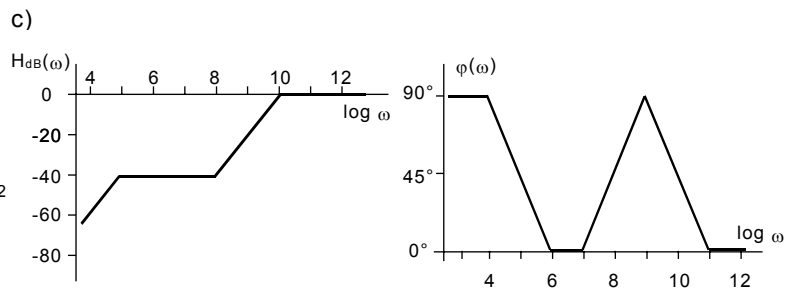
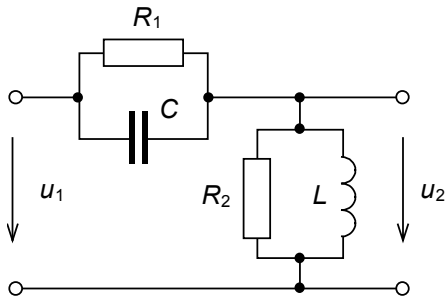


1 Frekvenčné charakteristiky lineárnych sústav

Príklad 1



$$R_1 = 10\text{k}\Omega, R_2 = 100\Omega, C = 1\text{pF}, L = 1\text{mH}$$

- Odvoďte vzťah pre komplexný napäťový prenos $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Vypočítajte nuly a póly $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Nakreslite asymptotické frekvenčné charakteristiky.

Riešenie:

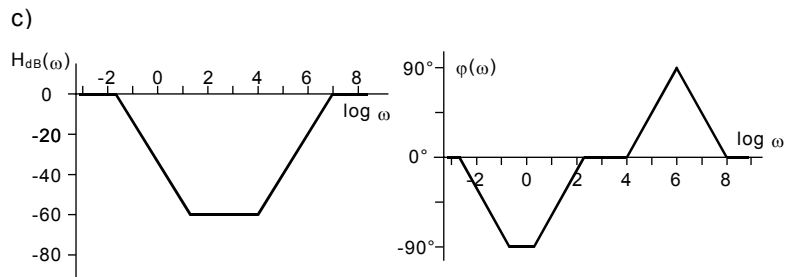
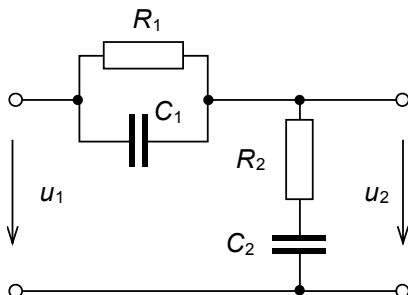
a)

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{j\omega \left(j\omega + \frac{1}{R_1 C} \right)}{(j\omega)^2 + j\omega \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} \right) + \frac{1}{LC}}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{nuly: } \xi_1 &= 0, \xi_2 = -10^8 \text{ s}^{-1} \\ \text{póly: } \eta_1 &= -9,9 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}, \eta_2 = -1,01 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Príklad 2



$$R_1 = 10\text{k}\Omega, R_2 = 100\Omega, C_1 = 1\text{nF}, C_2 = 500\mu\text{F}$$

- Odvoďte vzťah pre komplexný napäťový prenos $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Vypočítajte nuly a póly $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Nakreslite asymptotické frekvenčné charakteristiky.
- Určte prenos v pásme zadržovania.

Riešenie:

a)

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + j\omega \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}{(j\omega)^2 + j\omega \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}$$

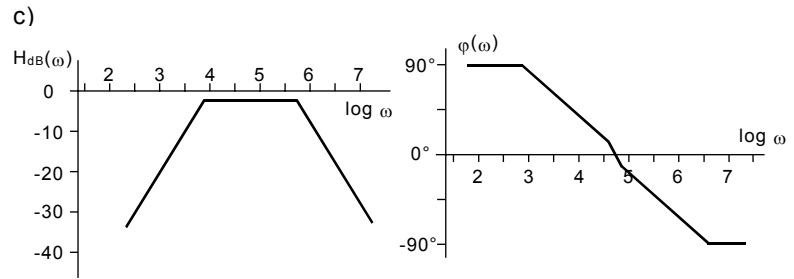
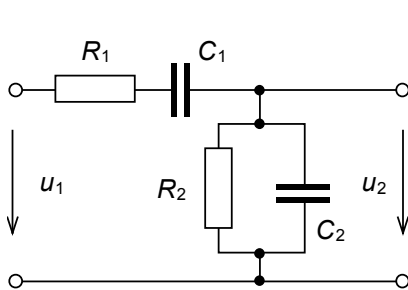
b)

$$\begin{aligned} \text{nuly: } \xi_1 &= -20 \text{ s}^{-1}, \xi_2 = -10^4 \text{ s}^{-1} \\ \text{póly: } \eta_1 &= -0,02 \text{ s}^{-1}, \eta_2 = -10^7 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} H_{\text{dB}} &= -60\text{dB} \\ H &= 10^{-3} \end{aligned}$$

Príklad 3



$$R_1 = 100\Omega, R_2 = 1\text{k}\Omega, C_1 = 100\text{nF}, C_2 = 33\text{nF}$$

- Odvoďte vzťah pre komplexný napäťový prenos $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Vypočítajte nuly a póly $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Nakreslite asymptotické frekvenčné charakteristiky.
- Určte prenos v pásme prepúšťania.

Riešenie:

a)

$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{1}{R_1 C_2} \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + j\omega \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}$$

b)

nuly: $\xi_1 = 0$

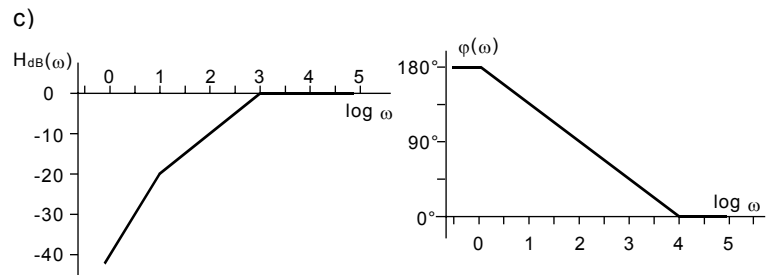
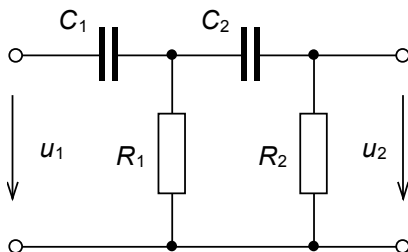
póly: $\eta_1 = -7,109 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$, $\eta_2 = -4,262 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$

d)

$H_{\text{dB}} = -3,107\text{dB}$

$H = 0,7$

Príklad 4



$$R_1 = 100\Omega, R_2 = 10\Omega, C_1 = 1000\mu\text{F}, C_2 = 100\mu\text{F}$$

- Odvoďte vzťah pre komplexný napäťový prenos $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Vypočítajte nuly a póly $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Nakreslite asymptotické frekvenčné charakteristiky.

Riešenie:

a)

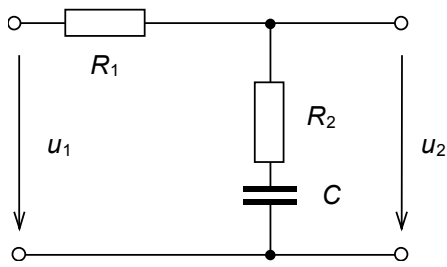
$$\mathcal{H}(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + j\omega \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}$$

b)

nuly: $\xi_1 = \xi_2 = 0$

póly: $\eta_1 = -9,083 \text{ s}^{-1}$, $\eta_2 = -1,1 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$

Príklad 5



$$R_1 = 5\text{k}\Omega, R_2 = 5\text{k}\Omega, C = 10\text{nF}$$

a) Odvodte symbolický vzťah pre komplexný napäťový prenos $\mathcal{H}(j\omega)$ a upravte ho do tvaru vhodného pre kreslenie približnej amplitúdovej a fázovej frekvenčnej charakteristiky pomocou Bodeho metódy.

b) Pre $|\mathcal{H}(j\omega)|$ vypočítajte symbolicky aj číselne body zlomu.

c) Vypočítajte symbolicky aj číselne limitnú hodnotu prenosu pri nekonečnej frekvencii.

d) Nakreslite amplitúdovú a fázovú charakteristiku pomocou Bodeho metódy.

Riešenie:

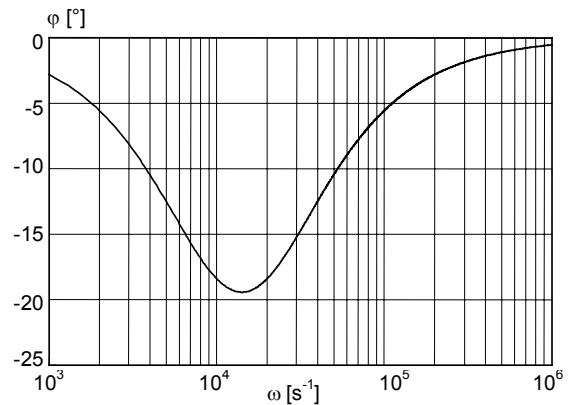
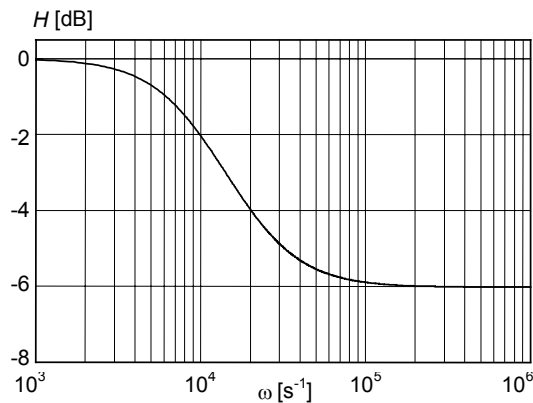
$$\text{a) } \mathcal{H}(j\omega) = \frac{j\omega CR_2 + 1}{j\omega C(R_1 + R_2) + 1}$$

$$\text{b) } \text{čitateľ: } \omega_1 = 1/CR_2 = 2 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

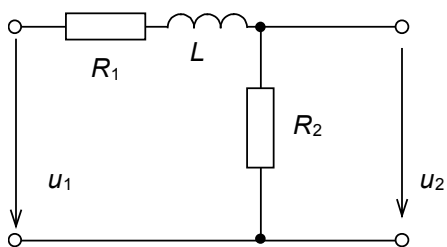
$$\text{menovateľ: } \omega_2 = 1/C(R_1 + R_2) = 1 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{c) } H_{\text{dB}}(\omega \rightarrow \infty) = 20 \log \left| \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right|, H_{\text{dB}}(\omega \rightarrow \infty) = -6,02 \text{ dB}$$

d) presné charakteristiky:



Príklad 6



$$R_1 = 20\text{k}\Omega, R_2 = 5\text{k}\Omega, L = 0,5\text{H}$$

a) Odvodte symbolický vzťah pre komplexný napäťový prenos $\mathcal{H}(j\omega)$ a upravte ho do tvaru vhodného pre kreslenie približnej amplitúdovej a fázovej frekvenčnej charakteristiky pomocou Bodeho metódy.

b) Pre $|\mathcal{H}(j\omega)|$ vypočítajte symbolicky aj číselne body zlomu.

c) Vypočítajte symbolicky aj číselne limitnú hodnotu prenosu pri nulovej frekvencii.

d) Nakreslite amplitúdovú a fázovú charakteristiku pomocou Bodeho metódy.

Riešenie:

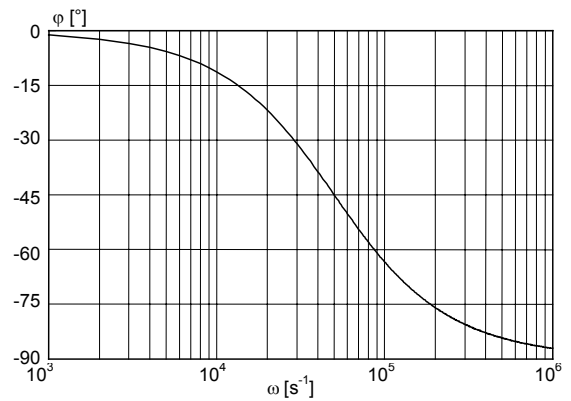
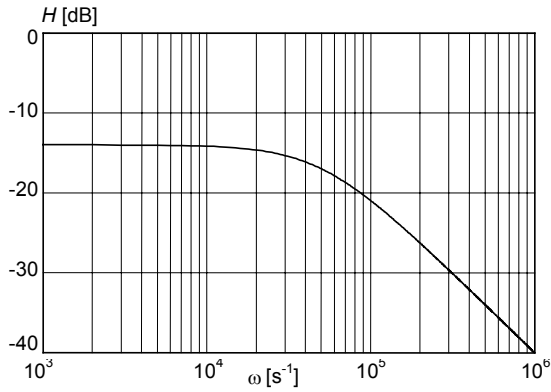
$$\text{a) } \mathcal{H}(j\omega) = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \frac{1}{\frac{j\omega L}{R_1 + R_2} + 1}$$

$$\text{b) } \text{čitateľ: } \text{nemá koreň}$$

$$\text{menovateľ: } \omega_1 = (R_1 + R_2)/L = 5 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

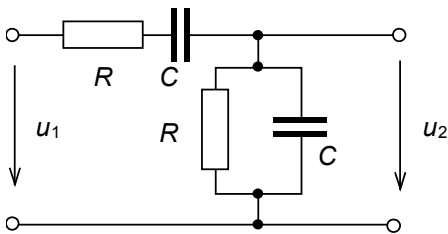
$$\text{c) } H_{\text{dB}}(\omega = 0) = 20 \log \left| \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right|, H_{\text{dB}}(\omega = 0) = -13,979 \text{ dB}$$

d) presné charakteristiky:



Príklad 7

$$R = 1\text{k}\Omega, C = 2\mu\text{F}$$



a) Odvodte symbolický vzťah pre komplexný napätový prenos $\mathcal{H}(j\omega)$.

b) Pre $|\mathcal{H}(j\omega)|$ vypočítajte symbolicky aj číselne body zlomu, resp. priesečníky s horizontálnou osou.

c) Vypočítajte symbolicky aj číselne uhlovú frekvenciu, pri ktorej prenos dosahuje maximálnu hodnotu.

d) Vypočítajte symbolicky aj číselne maximálnu hodnotu prenosu v decibeloch.

e) Nakreslite amplitúdovú a fázovú charakteristiku pomocou Bodeho metódy.

Riešenie:

$$\text{a) } \mathcal{H}(j\omega) = \frac{j\omega CR}{(j\omega CR)^2 + 3j\omega CR + 1}$$

$$\text{b) čitateľ: } \omega_1 = 1/CR = 500 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \text{ (priesečník s horizontálnou osou - nulový koreň)}$$

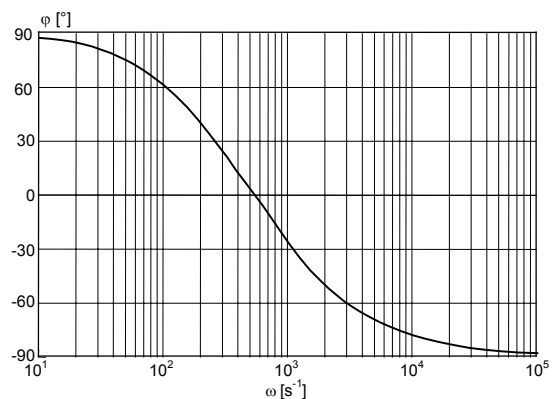
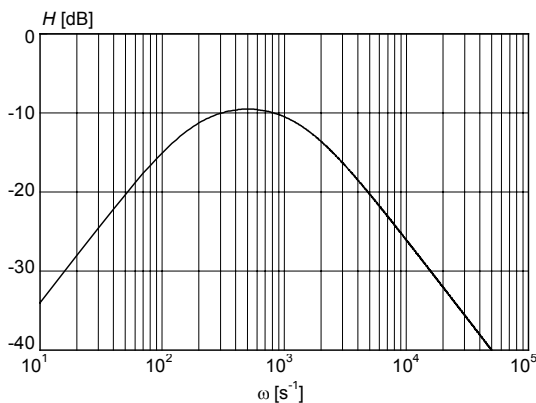
$$\text{menovateľ: } \omega_2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) / CR = 190,983 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\omega_3 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) / CR = 1,309 \times 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

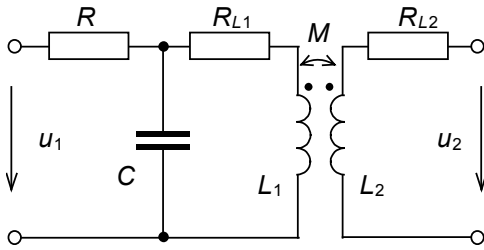
$$\text{c) } \omega_{\max} = 1/CR = 500 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\text{d) } H_{\text{dB}}(\omega = \omega_{\max}) = 20 \log \left| \frac{1}{3j} \right|, H_{\text{dB}}(\omega = \omega_{\max}) = -9,542 \text{ dB}$$

e)



Príklad 8



$$R = 10\Omega, C = 10\mu\text{F}, L_1 = 2\text{H}, L_2 = 4\text{H}, \\ R_{L1} = 20\Omega, R_{L2} = 40\Omega, v = 0,9$$

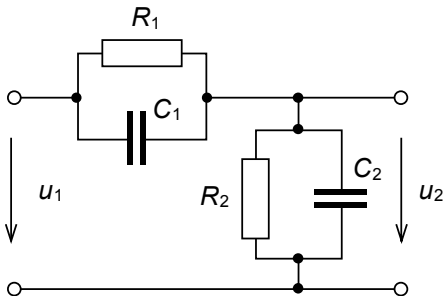
- Odvoďte vzťah pre komplexný napäťový prenos $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Vypočítajte nuly a póly $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Nakreslite asymptotické frekvenčné charakteristiky.
- Určte prenos v pásme prepúšťania.

Riešenie:

$$\text{a) } \mathcal{H}(j\omega) = v \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cdot \frac{1}{RC} \cdot \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + j\omega \left(\frac{1}{RC} + \frac{R_{L1}}{L_1} \right) + \left(1 + \frac{R_{L1}}{R} \right) \frac{1}{L_1 C}}$$

- nuly: $\xi_1 = 0$
póly: $\eta_1 = -15 \text{ s}^{-1}$, $\eta_2 = -10^4 \text{ s}^{-1}$
- $H_{\text{dB}} = +3,056 \text{ dB}$ (prečo je v tomto prípade *napäťový* prenos $H > 1$ (t.z. $H_{\text{dB}} > 0$)?)

Príklad 9



$$R_1 = 10\text{k}\Omega, C_1 = 10\text{nF}, R_2 = 100\text{k}\Omega, C_2 = 100\text{nF}$$

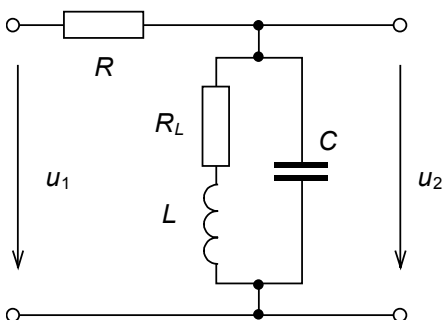
- Odvoďte vzťah pre komplexný napäťový prenos $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Vypočítajte nuly a póly $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Nakreslite asymptotické frekvenčné charakteristiky.
- Nájdite podmienku, pri ktorej je prenos nezávislý od frekvencie.

Riešenie:

$$\text{a) } \mathcal{H}(j\omega) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{j\omega + \frac{1}{R_1 C_1}}{j\omega + \frac{1}{R_1 R_2} \frac{R_1 + R_2}{C_1 + C_2}}$$

- nuly: $\xi_1 = -10^4 \text{ s}^{-1}$
póly: $\eta_1 = -10^3 \text{ s}^{-1}$
- ak $R_1 C_1 = R_2 C_2$: $\mathcal{H}(j\omega) = C_1 / (C_1 + C_2) = R_2 / (R_1 + R_2)$

Príklad 10



$$R = 10\text{k}\Omega, C = 10\mu\text{F}, R_L = 20\Omega, L = 0,5\text{H}$$

- Odvoďte vzťah pre komplexný napäťový prenos $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Vypočítajte nuly a póly $\mathcal{H}(j\omega)$.
- Aký je prenos pri rezonančnej frekvencii?

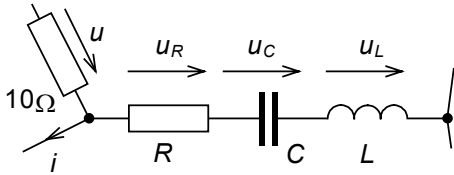
Riešenie:

$$\text{a) } \mathcal{H}(j\omega) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{j\omega + \frac{R_L}{L}}{(j\omega)^2 + j\omega \left(\frac{R_L}{L} + \frac{1}{RC} \right) + \left(1 + \frac{R_L}{R} \right) \frac{1}{LC}}$$

- nuly: $\xi_1 = -40 \text{ s}^{-1}$
póly: $\eta_{12} = -25 \pm j44696 \text{ s}^{-1}$
- $H^{\text{rez}} = \frac{1}{1 + \frac{R_L}{R} RC} = 0,2$, $H_{\text{dB}}^{\text{rez}} = -13,98 \text{ dB}$

2 Lineárne obvody v neharmonickom ustálenom stave

Príklad 11



V časti obvodu na obrázku platí:

$$u = 10 + 25 \cdot \cos(2 \cdot 10^3 t + 45^\circ) + 10 \cdot \cos(4 \cdot 10^3 t - 45^\circ) \text{ [V]}$$

$$i = 1 + 1,5 \cdot \cos 2 \cdot 10^3 t + 0,75 \cdot \sin 4 \cdot 10^3 t \text{ [A]}$$

$$R = 20 \Omega, C = 20 \mu\text{F}, L = 6 \text{ mH}$$

- Vypočítajte u_R, u_C, u_L .
- Vypočítajte efektívne hodnoty $U_{\text{Ref}}, U_{\text{Cef}}, U_{\text{Lef}}$.

Riešenie:

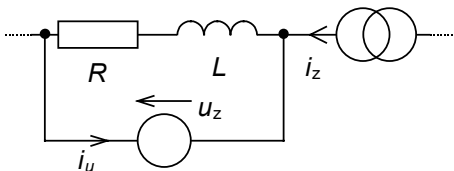
$$a) u_R = 35,76 \cdot \cos(2 \cdot 10^3 t + 81,39^\circ) + 14,17 \cdot \cos(4 \cdot 10^3 t + 3,47^\circ) \text{ [V]}$$

$$u_C = 44,7 \cdot \cos(2 \cdot 10^3 t - 8,61^\circ) + 8,86 \cdot \cos(4 \cdot 10^3 t - 86,53^\circ) \text{ [V]}$$

$$u_L = 21,46 \cdot \cos(2 \cdot 10^3 t + 171,39^\circ) + 17,0 \cdot \cos(4 \cdot 10^3 t + 93,47^\circ) \text{ [V]}$$

$$b) U_{\text{Ref}} = 27,20 \text{ V}, U_{\text{Cef}} = 32,22 \text{ V}, U_{\text{Lef}} = 19,36 \text{ V}$$

Príklad 12



V časti obvodu na obrázku platí:

$$u_z = 40 + 50 \cdot \cos 500 t - 25 \cdot \cos 1000 t \text{ [V]}$$

$$i_z = 0,5 + 0,1 \cdot \sin 500 t - 0,05 \cdot \cos 1500 t \text{ [A]}$$

$$R = 50 \Omega, L = 25 \text{ mH}$$

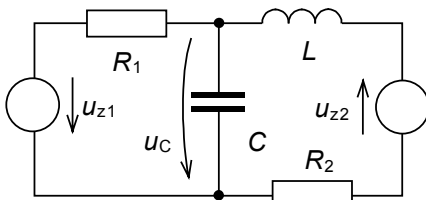
Vypočítajte prúd cez napäťový zdroj i_u a jeho efektívnu hodnotu.

Riešenie:

$$i_u = 0,3 + 0,9509 \cdot \cos(500 t - 8,18^\circ) + 0,4472 \cdot \cos(1000 t + 153,4^\circ) + 0,05 \cdot \cos 1500 t \text{ [A]}$$

$$I_{\text{ef}} = 0,802 \text{ A}$$

Príklad 13



$$R_1 = 50 \Omega, R_2 = 20 \Omega, C = 20 \mu\text{F}, L = 0,02 \text{ H}$$

$$u_{z1} = 100 + 150 \cdot \cos(10^3 t) + 50 \cdot \sin(2 \cdot 10^3 t) \text{ [V]}$$

$$u_{z2} = 10 + 20 \cdot \sin(10^3 t + 120^\circ) \text{ [V]}$$

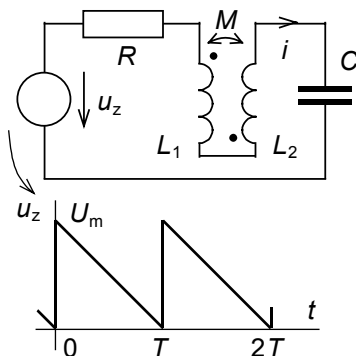
- Vypočítajte časový priebeh napätia u_C a jeho efektívnu hodnotu.
- Vypočítajte činný, jalový, zdanlivý a deformačný výkon na kapacitore C.

Riešenie:

$$a) u_C = 21,429 + 51,333 \cdot \cos(10^3 t + 10,86^\circ) + 27,735 \cdot \cos(2 \cdot 10^3 t - 123,69^\circ) \text{ [V]; } U_{\text{Cef}} = 46,49 \text{ V}$$

$$b) P = 0 \text{ W}; Q = -41,735 \text{ VAR}; S = 49,69 \text{ VA}; P_D = 26,968 \text{ VA}_D$$

Príklad 14



$$R = 100 \Omega; L_1 = L_2 = 0,5 \text{ H}; v = 0,5; C = 10 \mu\text{F}$$

$$U_m = 200 \text{ V}; T = 62,8 \text{ ms}$$

- Vypočítajte efektívnu hodnotu napätia zdroja.
- Vypočítajte časový priebeh prúdu i a jeho efektívnu hodnotu (použite prvé 4 nenulové harmonické zložky).

Riešenie:

$$a) U_{\text{ef}} = U_m / \sqrt{3} = 115,47 \text{ V}$$

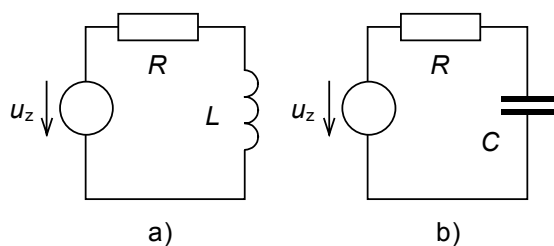
$$b) i = 0,07438 \cdot \cos(100 t - 6,71^\circ) + 0,14235 \cdot \cos(200 t - 26,56^\circ) + 0,1381 \cdot \cos(300 t - 139,4^\circ) + 0,04372 \cdot \cos(400 t - 164,06^\circ) + \dots$$

$$I_{\text{ef}} = 0,15294 \text{ A}$$

Príklad 15

$$R = 50\Omega, C = 150\mu\text{F}, L = 500\text{mH}$$

$$u_z = 100 \cdot |\sin 200t| \text{ [V]}$$



Vypočítajte činný, jalový, zdanlivý a deformačný výkon na zdroji u_z (použite prvé 4 nenulové harmonické zložky).

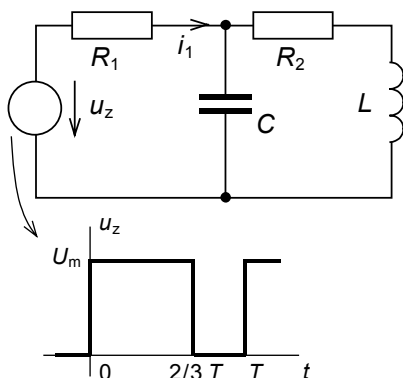
Riešenie:

- a) $P = -41,6\text{W}; Q = -4,34\text{VAr}$
 $S = 90,59\text{VA}; P_D = 80,36\text{VA}_D$
 b) $P = -17,084\text{W}; Q = 5,539\text{VAr}$
 $S = 41,325\text{VA}; P_D = 37,218\text{VA}_D$

Príklad 16

$$R_1 = 10\Omega, C = 40\mu\text{F}, L = 80\text{mH}$$

$$U_m = 20\text{V}, T = 20\text{ms}$$



- a) Vypočítajte hodnotu odporu R_2 , pri ktorej je obvod v rezonancii pre základnú (prvú) harmonickú.
 b) Vypočítajte časový priebeh prúdu i_1 a jeho efektívnu hodnotu (použite prvé 3 nenulové harmonické zložky).

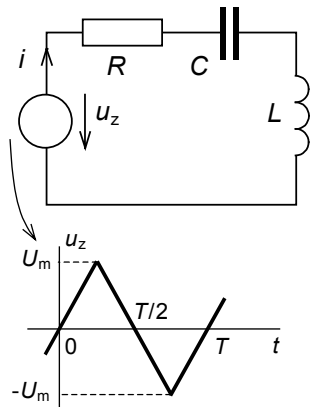
Riešenie:

- a) $R_2 = 37\Omega$
 b) $i_1 = 0,2837 + 0,1721 \cdot \cos(\omega_0 t - 120^\circ) + 0,07747 \cdot \cos(2\omega_0 t - 14,21^\circ) +$
 $+ 0,1032 \cdot \cos(4\omega_0 t - 56,35^\circ) + \dots$
 $I_{1\text{ef}} = 0,3356\text{A}$

Príklad 17

$$R = 20\Omega, C = 40\mu\text{F}, L = 50\text{mH}$$

$$U_m = 20\text{V}$$



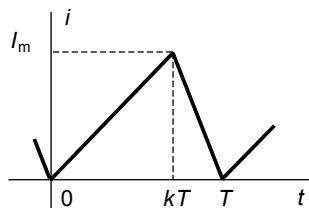
- a) Aká musí byť perióda T napätia zdroja, aby bol obvod v rezonancii pre 3. harmonickú?
 b) Pre T vypočítane v úlohe a) vypočítajte efektívnu hodnotu 3-tej harmonickej prúdu.

Riešenie:

- a) $T = 26,657\text{ms}$
 b) $I_{\text{ef}}^{(3)} = 63,684\text{mA}$

Príklad 18

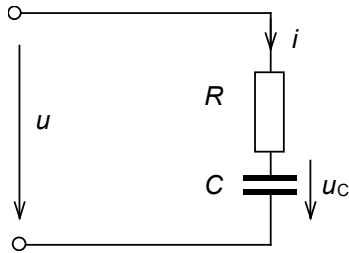
Aká musí byť hodnota k , aby spektrum prúdu i neobsahovalo 3. harmonickú?



Riešenie:

- $k = 1/3$
 $k = 2/3$

Príklad 19



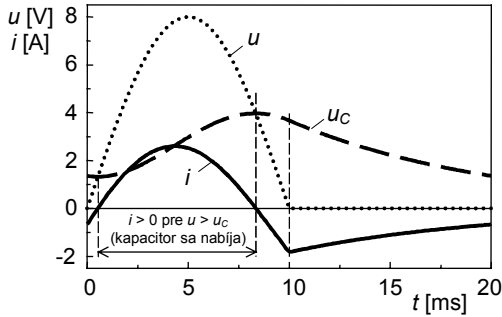
$R = 2\Omega, C = 5\text{mF}, f = 50\text{Hz}, U_m = 8\text{V},$

$$u = \begin{cases} U_m \sin(\omega t) & \text{pre } t \in \langle 0, kT/2 \rangle \\ 0 & \text{pre } t \in \langle kT/2, kT \rangle, k \in Z \text{ (celé číslo)} \end{cases}$$

a) Odvodte **symbolický** vzťah pre jednotlivé členy komplexného Fourierovho radu periodického neharmonického napätia u na sériovom RC obvode.

b) Vypočítajte amplitúdové aj fázové spektrum napätia na kapacitore u_C pre prvých 5 harmonických zložiek (vrátane jednosmernej).

c) Vypočítajte amplitúdové aj fázové spektrum prúdu i pre prvých 5 harmonických zložiek (vrátane jednosmernej).



Riešenie

$$a) \mathcal{U}_n = \begin{cases} -U_m \frac{\exp(-j \cdot n \cdot \pi) + 1}{\pi \cdot (n^2 - 1)} & \text{pre } n \neq 1 \\ -\frac{j \cdot U_m}{2} & \text{pre } n = 1 \end{cases}$$

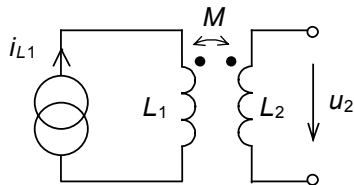
b)

n	$ U_{Cn} $ [V]	$\varphi_{U_{Cn}}$ [°]
0	2,546	0,000
1	1,213	-162,343
2	0,267	99,043
3	0,000	-38,170
4	0,027	94,550
5	0,000	-162,321

c)

n	$ I_n $ [A]	φ_{I_n} [°]
0	0,000	0,000
1	1,906	-72,343
2	0,838	-170,957
3	0,000	51,830
4	0,169	-175,450
5	0,000	-72,321

Príklad 20



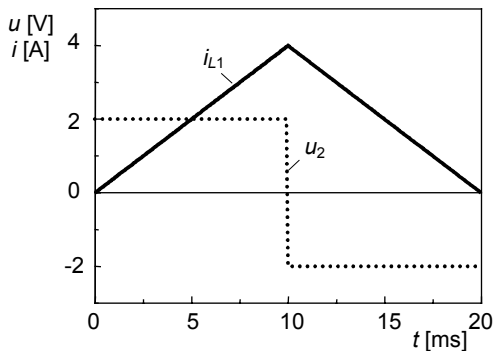
$L_1 = 10\text{mH}, L_2 = 15\text{mH}, M = 5\text{mH}, I_m = 4\text{A}, T = 20\text{ms}$

$$i_{L1} = \begin{cases} \frac{2I_m}{T} t & \text{pre } t \in \langle 0, kT/2 \rangle \\ 2I_m \left(1 - \frac{t}{T}\right) & \text{pre } t \in \langle kT/2, kT \rangle, k \in Z \text{ (celé číslo)} \end{cases}$$

a) Vypočítajte **symbolicky** amplitúdové aj fázové spektrum prúdu i_{L1} v obvode na obrázku.

b) Na základe vlastností koeficientov komplexného Fourierovho radu určte **symbolicky** amplitúdové aj fázové spektrum napätia u_2 .

c) Na základe všeobecného riešenia daného obvodu nakreslite časový priebeh napätia u_2 pre dané číselné hodnoty.

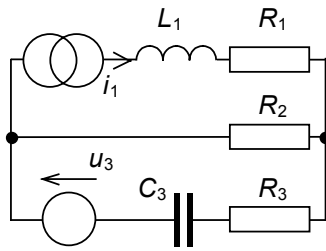


Riešenie:

$$a) \mathcal{I}_{L1n} = \begin{cases} 2I_m \frac{\exp(-j \cdot n \cdot \pi) - 1}{n^2 \pi^2} & \text{pre } n \neq 0 \\ \frac{I_m}{2} & \text{pre } n = 0 \end{cases}$$

$$b) \mathcal{U}_{2n} = \begin{cases} 2j \cdot \omega \cdot M \cdot I_m \frac{\exp(-j \cdot n \cdot \pi) - 1}{n \cdot \pi^2} & \text{pre } n \neq 0 \\ 0 & \text{pre } n = 0 \end{cases}$$

Príklad 21



$L_1 = 10\text{mH}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 8\Omega$, $C_3 = 5\text{mF}$,
 $\omega_0 = 100\text{rad/s}$

$$i_1 = 2 + 3 \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3 \cdot \omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$$

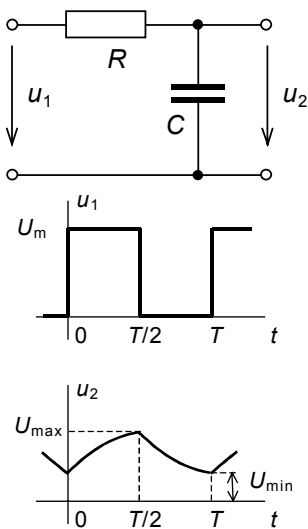
$$u_3 = 10 + 5 \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{8}\right) + 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Vypočítajte činné, jalové, zdanlivé a deformačné výkony na jednotlivých zdrojoch a impedanciách v obvode a urobte výkonovú bilanciu pre činné a jalové zložky.

Riešenie:

Obvodový prvok	P [W]	Q [VAr]	P_D [VAd]	S [VA]
prúdový zdroj (i_1)	-132,964	-2,545	5,569	133,105
impedancia v prvom úseku (R_1, L_1)	90,000	6,000	6,708	90,449
impedancia v druhom úseku (R_2)	41,748	0,000	0,000	41,748
impedancia v treťom úseku (R_3, C_3)	1,311	-2,423	1,047	2,947
napätový zdroj (u_3)	-0,095	-1,032	4,206	4,332
Spolu:	0,000	0,000		

Príklad 22



$R = 5\text{k}\Omega$
 $U_m = 50\text{V}$, $T = 50\text{ms}$

Po pripojení periodického obdĺžnikového priebehu u_1 na vstup integrátora je výstupné napätie u_2 dané exponenciálnym nabíjaním a vybíjaním kapacitára C , pričom v ustálenom stave platí:

$$U_{\max} = \frac{U_m}{1 + \exp(-T/2\tau)}, \quad U_{\min} = \frac{U_m}{1 + \exp(-T/2\tau)} \cdot \exp(-T/2\tau)$$

kde $\tau = RC$.

a) Aká musí byť minimálna hodnota kapacity kapacitára, aby napätie u_2 nekleslo pod 90% svojej maximálnej hodnoty? Prečo je to minimálna hodnota?

b) Vypočítajte U_{\max} a U_{\min} .

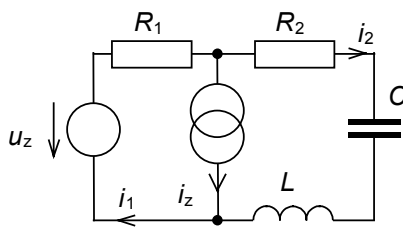
c) Vypočítajte strednú a efektívnu hodnotu napätia u_2 (exponenciálny priebeh u_2 môžete nahradiť úsečkami – prečo?).

Riešenie:

a) $C_{\min} = 47,456\mu\text{F}$

b) $U_{\max} = 26,316\text{V}$; $U_{\min} = 23,684\text{V}$

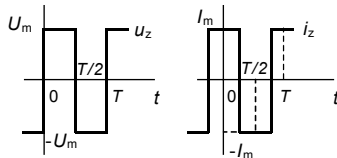
c) $U_{20} = 25\text{V}$, $U_{2\text{ef}} = 25\text{V}$ (s čím súvisí táto hodnota?)

Príklad 23

$$R_1 = 500\Omega; R_2 = 200\Omega; L = 50\text{mH}; C = 1\mu\text{F}$$

$$U_m = 500\text{V}; I_m = 2\text{A}; T = 10\text{ms}$$

- a) Vypočítajte efektívnu hodnotu napätia zdroja u_z a efektívnu hodnotu prúdu zdroja i_z .
 b) Vypočítajte časové priebehy prúdov i_1 a i_2 a ich efektívne hodnoty (použite prvé 3 nenulové harmonické zložky).



Riešenie:

a) $U_{\text{ef}} = U_m = 500\text{V}; I_{\text{ef}} = I_m = 2\text{A}$

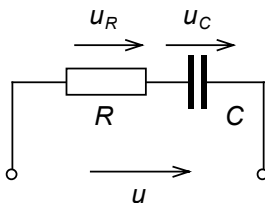
b) $i_1 = 2,712 \cdot \cos(628t - 17,86^\circ) + 0,2813 \cdot \cos(1885t + 168,97^\circ) +$
 $+ 0,3242 \cdot \cos(3142t - 51,1^\circ) + \dots$

$$I_{1\text{ef}} = 1,9416\text{A}$$

$$i_2 = 0,8325 \cdot \cos(628t - 87,6^\circ) + 0,5753 \cdot \cos(1885t + 5,37^\circ) +$$

 $+ 0,3963 \cdot \cos(3142t - 140,5^\circ) + \dots$

$$I_{2\text{ef}} = 0,7685\text{A}$$

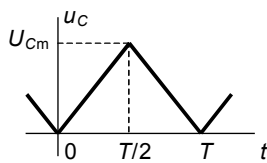
Príklad 24

$$R = 1\text{k}\Omega, C = 25\mu\text{F}$$

$$U_{\text{Cm}} = 20\text{V}, T = 50\text{ms}$$

V obvode na obrázku poznáme časový priebeh napätia u_C na kapacitore.

- a) Vypočítajte presne (analyticky) jednosmernú zložku napätia na odpore U_{R0} a jeho efektívnu hodnotu U_{Ref} .
 b) Vypočítajte presne (analyticky) jednosmernú zložku celkového napätia U_0 a jeho efektívnu hodnotu U_{ef} .



Riešenie:

Po označení $\tau = RC$:

a) $U_{R0} = 0; U_{\text{Ref}} = 2 \frac{\tau}{T} U_{\text{Cm}} = 20\text{V}$

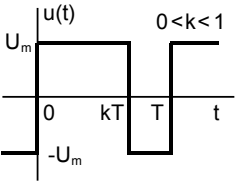
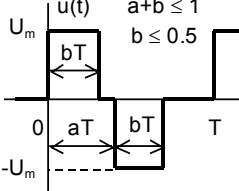
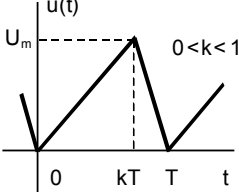
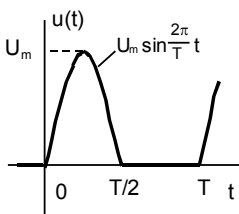
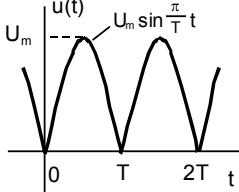
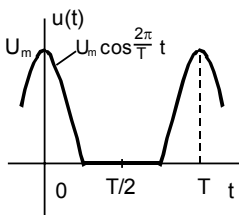
b) $U_0 = U_{C0} = U_{\text{Cm}}/2 = 10\text{V}; U_{\text{ef}} = U_{\text{Cm}} \sqrt{4 \left(\frac{\tau}{T}\right)^2 + \frac{1}{3}} = 23,094\text{V}$

Pozn. Využite vzťah medzi prúdom a napätím kapacitora v časovej oblasti a graficky "zostrojte" časové priebehy hľadaných napätí.

Fourierove koeficienty, rady a efektívne hodnoty vybraných periodických neharmonických funkcií

Vo všetkých vzťahoch $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

	$U_0 = 0$	$\mathcal{U}_n = -j \frac{4U_m}{\pi} \frac{1}{n}, n \dots \text{nepárne}$	$U_{\text{ef}} = U_m$
$u(t) = \frac{4U_m}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin([2k+1]\omega_0 t) =$ $= \frac{4U_m}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{4U_m}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) + \frac{4U_m}{5\pi} \sin(5\omega_0 t) + \dots$			
	$U_0 = 0$	$\mathcal{U}_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{4U_m}{\pi} \frac{1}{n}, n \dots \text{nepárne}$	$U_{\text{ef}} = U_m$
$u(t) = \frac{4U_m}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos([2k+1]\omega_0 t) =$ $= \frac{4U_m}{\pi} \cos(\omega_0 t) - \frac{4U_m}{3\pi} \cos(3\omega_0 t) + \frac{4U_m}{5\pi} \cos(5\omega_0 t) - \dots$			
	$U_0 = 0$	$\mathcal{U}_n = -j(-1)^{n-1} \frac{2U_m}{\pi} \frac{1}{n}$	$U_{\text{ef}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$
$u(t) = \frac{2U_m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(n\omega_0 t) =$ $= \frac{2U_m}{\pi} \sin(\omega_0 t) - \frac{2U_m}{2\pi} \sin(2\omega_0 t) + \frac{2U_m}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) - \dots$			
	$U_0 = \frac{U_m}{2}$	$\mathcal{U}_n = j \frac{U_m}{\pi} \frac{1}{n}$	$U_{\text{ef}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$
$u(t) = \frac{U_m}{2} - \frac{U_m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega_0 t) =$ $= \frac{U_m}{2} - \frac{U_m}{\pi} \sin(\omega_0 t) - \frac{U_m}{2\pi} \sin(2\omega_0 t) - \frac{U_m}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) - \dots$			
	$U_0 = 0$	$\mathcal{U}_n = (-j)^n \frac{8U_m}{\pi^2} \frac{1}{n^2}, n \dots \text{nepárne}$	$U_{\text{ef}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$
$u(t) = \frac{8U_m}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin([2k+1]\omega_0 t) =$ $= \frac{8U_m}{\pi^2} \sin(\omega_0 t) - \frac{8U_m}{9\pi^2} \sin(3\omega_0 t) + \frac{8U_m}{25\pi^2} \sin(5\omega_0 t) - \dots$			
	$U_0 = 0$	$\mathcal{U}_n = -j \frac{2}{\pi^2} \frac{U_m}{n} \left(\pi - j \frac{2}{n} \right), n \dots \text{nepárne}$	$U_{\text{ef}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$
$u(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{U}_{2k+1} e^{j(2k+1)\omega_0 t} \right\} =$ $= 0.7547U_m \cos(\omega_0 t - 122.5^\circ) + 0.2169U_m \cos(3\omega_0 t - 102^\circ) + \dots$			

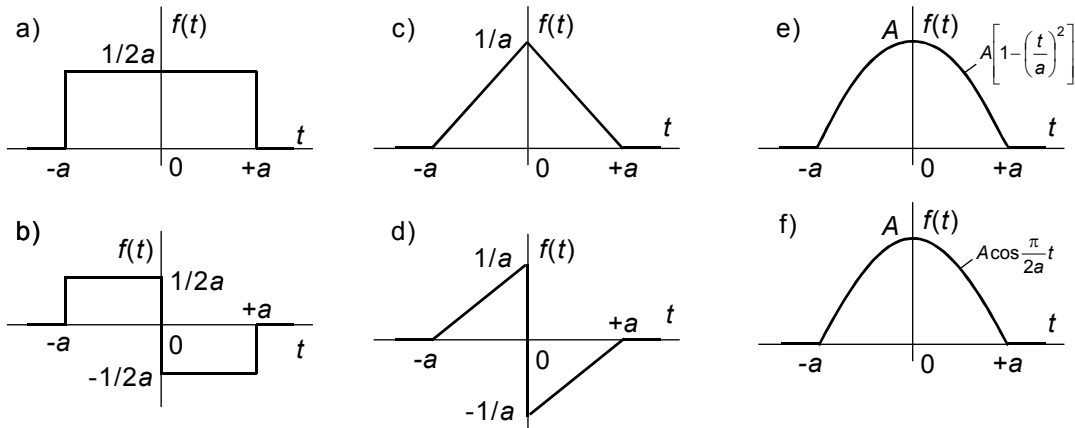
	$U_0 = (2k - 1) U_m$	$u_n = j \frac{2U_m}{\pi} \frac{1}{n} (e^{-jk2\pi n} - 1)$	$U_{ef} = U_m$
$u(t) = (2k - 1)U_m + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{jn\omega_0 t} \right\}$			
	$U_0 = 0$	$u_n = -j \frac{U_m}{\pi} \frac{1}{n} (e^{-ja2\pi n} - 1)(e^{-jb2\pi n} - 1)$	$U_{ef} = \sqrt{2b}U_m$
$u(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{jn\omega_0 t} \right\}$			
	$U_0 = \frac{U_m}{2}$	$u_n = \frac{U_m}{2\pi^2} \frac{1}{k(1-k)} \frac{1}{n^2} (e^{-jk2\pi n} - 1)$	$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$
$u(t) = \frac{U_m}{2} + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{jn\omega_0 t} \right\}$			
	$U_0 = \frac{U_m}{\pi}$	$u_1 = -j \frac{U_m}{2}$ $u_n = \frac{2U_m}{\pi} \frac{1}{1-n^2}, n \dots \text{párne}$	$U_{ef} = \frac{U_m}{2}$
$u(t) = \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2} \sin(\omega_0 t) + \frac{2U_m}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2k\omega_0 t) =$ $= \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2} \sin(\omega_0 t) - \frac{2U_m}{3\pi} \cos(2\omega_0 t) - \frac{2U_m}{15\pi} \cos(4\omega_0 t) \dots$			
	$U_0 = \frac{2U_m}{\pi}$	$u_n = -\frac{4U_m}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}$	$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$
$u(t) = \frac{2U_m}{\pi} - \frac{4U_m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(n\omega_0 t) =$ $= \frac{2U_m}{\pi} - \frac{4U_m}{3\pi} \cos(\omega_0 t) - \frac{4U_m}{15\pi} \cos(2\omega_0 t) - \frac{4U_m}{35\pi} \cos(3\omega_0 t) - \dots$			
	$U_0 = \frac{U_m}{\pi}$	$u_1 = \frac{U_m}{2}$ $u_n = (-1)^n \frac{2U_m}{\pi} \frac{1}{1-n^2}, n \dots \text{párne}$	$U_{ef} = \frac{U_m}{2}$
$u(t) = \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{2U_m}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-(2k)^2} \cos(2k\omega_0 t) =$ $= \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{2U_m}{3\pi} \cos(2\omega_0 t) - \frac{2U_m}{15\pi} \cos(4\omega_0 t) \dots$			

Príklad 25

Ovďte vzťahy uvedené v predchádzajúcej tabuľke.

3 Fourierova transformácia, spektrá neperiodických funkcií

Príklad 26



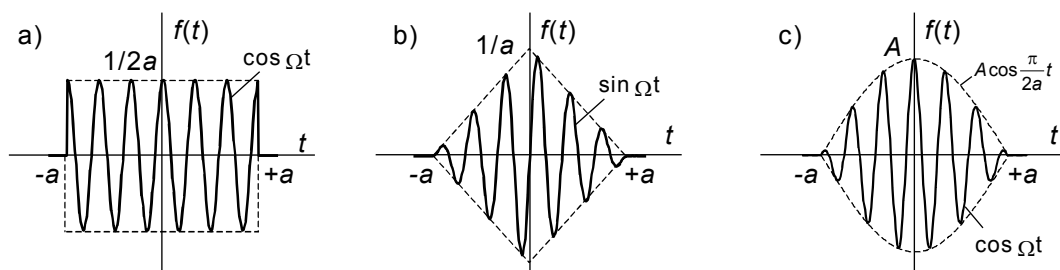
Odvodte vzťahy pre spektrum signálov na obrázku.

Riešenie:

a)	c)	e)
$\mathcal{F}(\omega) = \frac{\sin \omega a}{\omega a}$	$\mathcal{F}(\omega) = \frac{\sin^2 \omega \frac{a}{2}}{\left(\omega \frac{a}{2}\right)^2}$	$\mathcal{F}(\omega) = \frac{4A}{\omega^2 a} \cdot \left(\frac{\sin \omega a}{\omega a} - \cos \omega a \right)$
b)	d)	f)
$\mathcal{F}(\omega) = j \frac{\sin^2 \omega \frac{a}{2}}{\omega \frac{a}{2}}$	$\mathcal{F}(\omega) = j \frac{2}{\omega a} \left(1 - \frac{\sin \omega a}{\omega a} \right)$	$\mathcal{F}(\omega) = 4A \cdot \frac{\pi a}{\pi^2 - (2a\omega)^2} \cdot \cos \omega a$

Prečo sú spektrá a), c) e), f) čisto reálne a párne funkcie? Prečo sú spektrá b), d) čisto imaginárne a nepárne funkcie?

Príklad 27



Odvodte vzťahy pre spektrum modulovaných signálov na obrázku.

Riešenie:

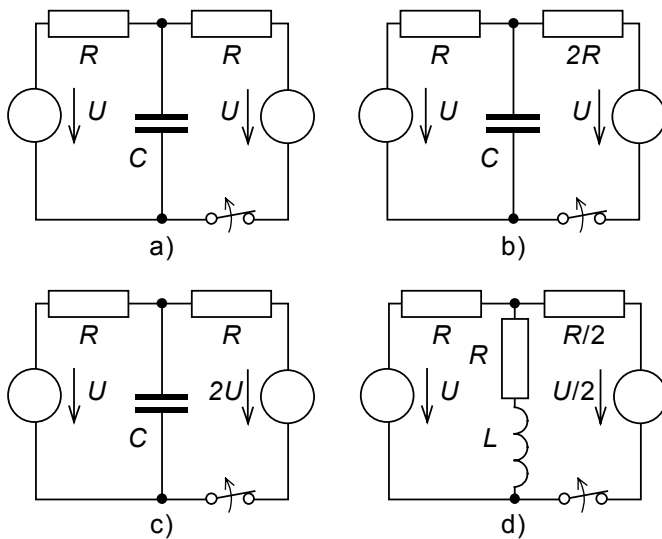
Použite jednu z vlastností Fourierovej transformácie:

$$\text{ak } f(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(\omega), \text{ potom: } f(t) \cos(\Omega t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \{ \mathcal{F}(\omega - \Omega) + \mathcal{F}(\omega + \Omega) \}$$

$$f(t) \sin(\Omega t) \leftrightarrow \frac{1}{2j} \{ \mathcal{F}(\omega - \Omega) - \mathcal{F}(\omega + \Omega) \}$$

4 Prechodné javy v lineárnych obvodoch

Príklad 28

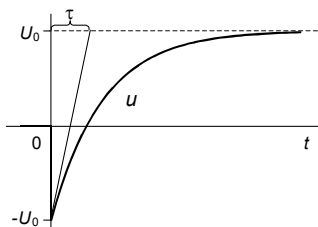
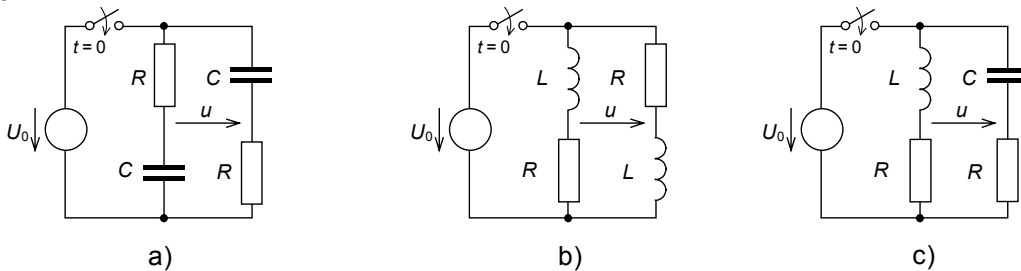


Rozhodnite, v ktorom z prípadov na obrázku dôjde k prechodnému javu. Svoje rozhodnutie zdôvodnite.

Riešenie:

K prechodnému javu dôjde v prípade c).

Príklad 29

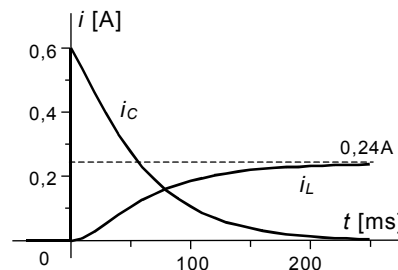
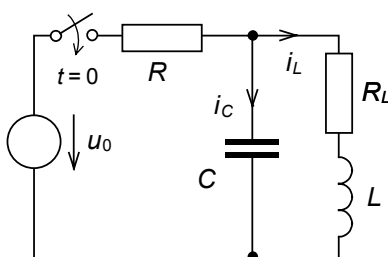


Za predpokladu $RC = L/R = \tau$ vypočítajte a nakreslite (všeobecne) časový priebeh napätia u po pripojení jednosmerného zdroja U_0 . Uvažujte nulové počiatkové podmienky. (Úloha je riešiteľná aj bez použitia operátorového počtu.)

Riešenie:

Vo všetkých troch prípadoch $u = U_0 \cdot [1 - 2 \cdot e^{-t/\tau}] \cdot 1(t)$

Príklad 30



$R = 200\Omega$, $R_L = 300\Omega$, $C = 50\mu\text{F}$,
 $L = 0,5\text{H}$, $u_0 = 120\text{V}$

V čase $t = 0$ pripojíme na obvod zdroj napätia u_0 . Kapacitor C nebol nabitý.

a) Vypočítajte a nakreslite časový priebeh prúdov i_C a i_L .

b) Vypočítajte ustálenú hodnotu napätia $U_{C\infty}$ na kapacitore.

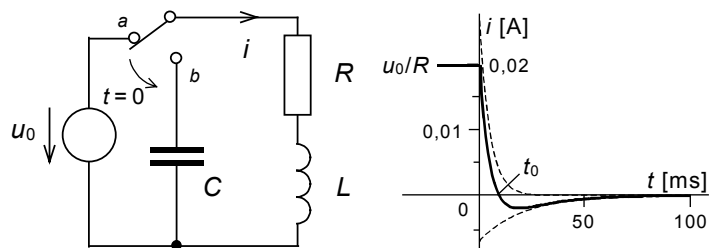
Riešenie:

a) $i_C = \{ -0,2 e^{-500t} + 0,8 e^{-200t} \} \cdot 1(t)$ [A]

$i_L = 0,24 \cdot 1(t) + \{ 0,16 e^{-500t} - 0,4 e^{-200t} \} \cdot 1(t)$ [A]

b) $U_{C\infty} = 72\text{V}$

Príklad 31



$$R = 500\Omega, C = 50\mu\text{F}, L = 2\text{H}, u_0 = 10\text{V}$$

V čase $t = 0$ prepneme prepínač z polohy a do polohy b . Obvod bol pred prepnutím v ustálenom stave a kapacitor C nebol nabitý.

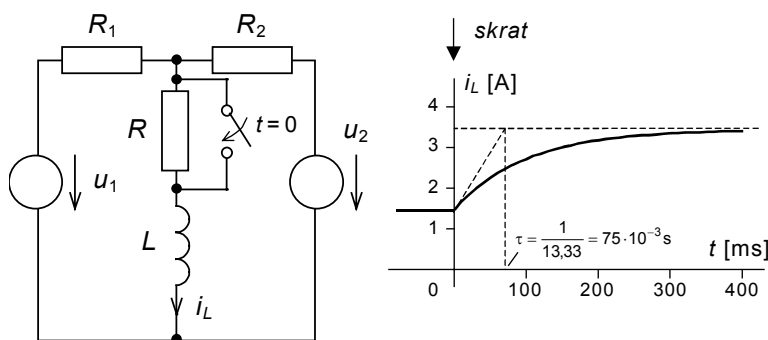
- Vypočítajte a nakreslite časový priebeh prúdu i pred a po prepnutí.
- Vypočítajte čas t_0 , kedy dôjde k zmene orientácie prúdu v obvode.

Riešenie:

$$a) i = 0,02 \cdot 1(-t) + 0,02 \cdot \left\{ \frac{4}{3} e^{-200t} - \frac{1}{3} e^{-50t} \right\} \cdot 1(t) \text{ [A]}$$

$$b) t_0 = 9,242\text{ms}$$

Príklad 32



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega, R = 10\Omega, L = 0,5\text{H}, u_1 = 20\text{V}, u_2 = 30\text{V}$$

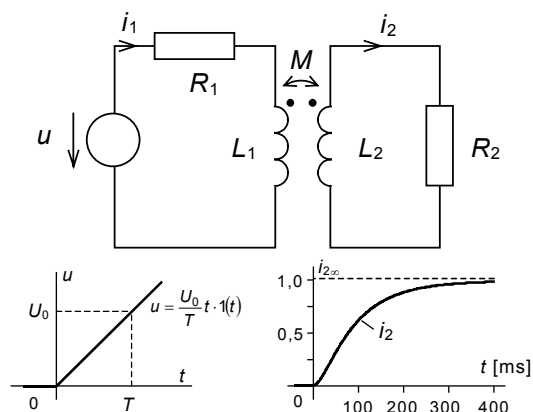
V čase $t = 0$ skratujeme rezistor R . Obvod bol pred skratom v ustálenom stave.

Vypočítajte a nakreslite časový priebeh prúdu i_L pred a po skrate R .

Riešenie:

$$i_L = i_L^- + i_L^+ = 1,4 \cdot 1(-t) + \left\{ 3,5 - 2,1 \cdot e^{-13,33t} \right\} \cdot 1(t) \text{ [A]}$$

Príklad 33



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega, L_1 = 0,5\text{H}, L_2 = 1\text{H}, v = 0,6, U_0 = 50\text{V}, T = 100\text{ms}$$

V obvode na obrázku je napätie zdroja pre $t > 0$ lineárnou funkciou času.

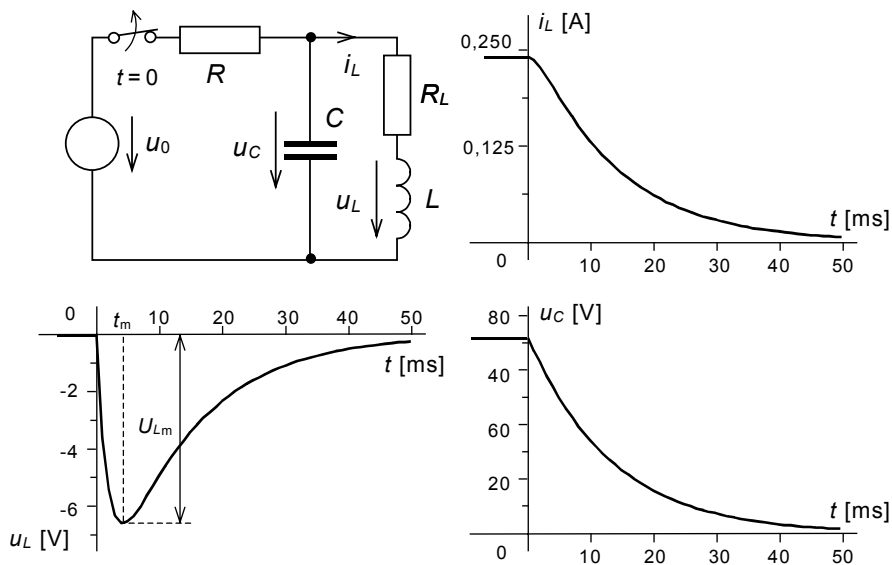
- Vypočítajte a nakreslite časový priebeh prúdu i_2 na sekundárnej strane transformátora.
- Určte ustálenú hodnotu prúdu i_2 pre $t \rightarrow \infty$

Riešenie:

$$a) i_2 = \left\{ 1,0607 + 0,3535 e^{-50t} - 1,4142 e^{-125t} \right\} \cdot 1(t) \text{ [A]}$$

$$b) i_{2\infty} = \frac{U_0}{T} \cdot \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R_1 R_2} = 1,0607\text{A}$$

Príklad 34



$$R = 200\Omega, R_L = 300\Omega, \\ C = 50\mu\text{F}, L = 0,5\text{H}, \\ u_0 = 120\text{V}$$

V čase $t = 0$ odpojíme zdroj napätia u_0 . Obvod bol pred odpojením v ustálenom stave. (Pozri tiež príklad 30)

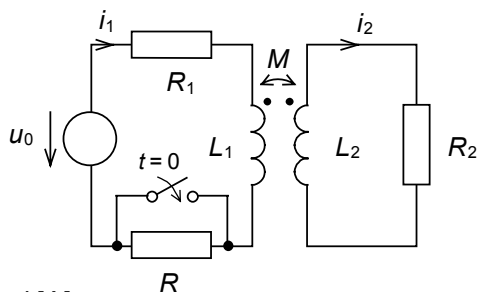
- a) Vypočítajte a nakreslite časový priebeh prúdu i_L a napätia u_L a u_C pred a po odpojení zdroja.
b) Vypočítajte maximálnu hodnotu napätia na induktore U_{Lm} a čas t_m , v ktorom túto hodnotu nadobudne.

Riešenie:

$$\text{a) } i_L = 0,24 \cdot (-t) + \{0,281e^{-76,39t} - 0,041e^{-523,6t}\} \cdot 1(t) \text{ [A]} \\ u_L = -10,733 \cdot \{e^{-76,39t} - e^{-523,6t}\} \cdot 1(t) \text{ [V]} \\ u_C = 72 \cdot (-t) + \{73,566e^{-76,39t} - 1,566e^{-523,6t}\} \cdot 1(t) \text{ [V]}$$

$$\text{b) } t_m = 4,304\text{ms}, U_{Lm} = 6,598\text{V}$$

Príklad 35



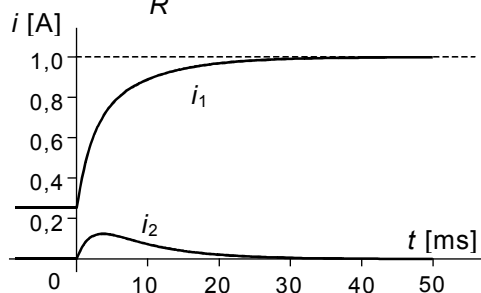
$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega, R_2 = 30\Omega \\ L_1 = 0,05\text{H}, L_2 = 0,1\text{H}, v = 0,6 \\ u_0 = 10\text{V}$$

V obvode na obrázku v čase $t = 0$ skratujeme rezistor R . Obvod bol pred skratom v ustálenom stave.

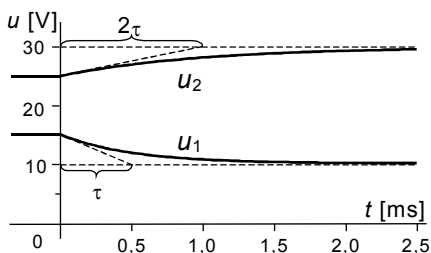
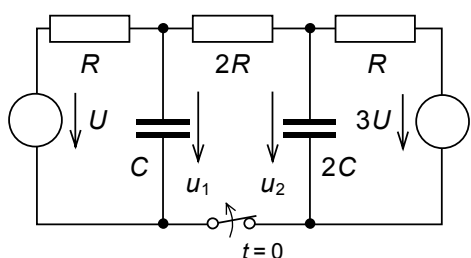
Vypočítajte a nakreslite časový priebeh prúdov i_1 a i_2 .

Riešenie:

$$i_1 = 0,25 \cdot (-t) + \{1 - 0,375 \cdot (e^{-125t} + e^{-500t})\} \cdot 1(t) \text{ [A]} \\ i_2 = 0,53033 \cdot e^{-3125t} \cdot \sinh 187,5t \cdot 1(t) \text{ [A]}$$



Príklad 36



$$U = 10\text{V}, R = 10\Omega, \\ C = 50\mu\text{F}$$

Vypočítajte a nakreslite časové priebehy napätí u_1 a u_2 . Obvod bol pred rozpojením vypínača v ustálenom stave.

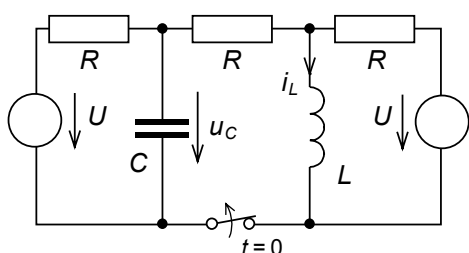
Riešenie:

$$u_1 = 15U \cdot 1(-t) + U \cdot \left[1 + 0,5 \cdot e^{-t/\tau} \right] \cdot 1(t)$$

$$u_2 = 25U \cdot 1(-t) + U \cdot \left[3 - 0,5 \cdot e^{-t/2\tau} \right] \cdot 1(t)$$

$$\tau = RC = 0,5\text{ms}$$

Príklad 37



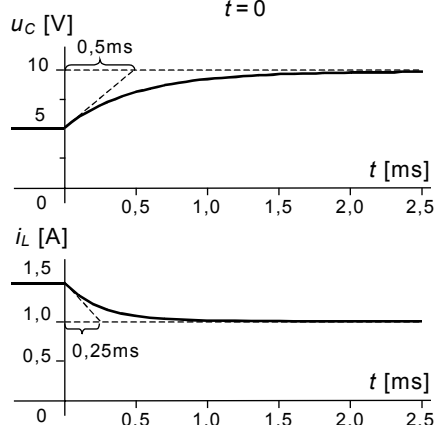
$$U = 10\text{V}, R = 10\Omega, L = 2,5\text{mH}, C = 50\mu\text{F}$$

Vypočítajte a nakreslite časový priebeh napätia u_C a prúdu i_L . Obvod bol pred rozpojením vypínača v ustálenom stave.

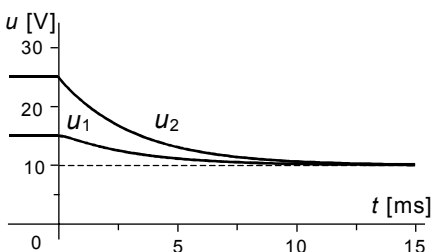
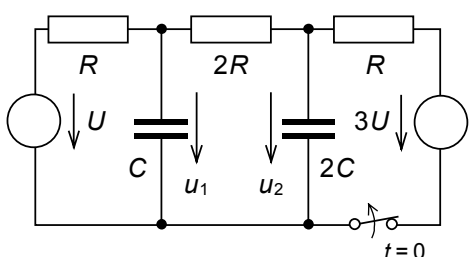
Riešenie:

$$u_C = 5 \cdot 1(-t) + \left[10 - 5 \cdot e^{-2000t} \right] \cdot 1(t) \text{ [V]}$$

$$i_L = 1,5 \cdot 1(-t) + \left[1 + 0,5 \cdot e^{-4000t} \right] \cdot 1(t) \text{ [A]}$$



Príklad 38



$$U = 10\text{V}, R = 10\Omega, \\ C = 50\mu\text{F}$$

Vypočítajte a nakreslite časové priebehy napätí u_1 a u_2 . Obvod bol pred rozpojením vypínača v ustálenom stave.

Riešenie:

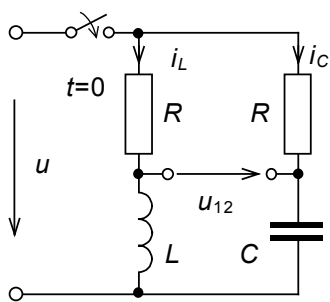
$$u_1 = 15 \cdot 1(-t) + \left\{ 10 + e^{-1750t} \cdot \left[5 \cosh(250\sqrt{33} \cdot t) + \frac{35}{\sqrt{33}} \sinh(250\sqrt{33} \cdot t) \right] \right\} \cdot 1(t) \text{ [V]}$$

$$u_2 = 25 \cdot 1(-t) + \left\{ 10 + e^{-1750t} \cdot \left[15 \cosh(250\sqrt{33} \cdot t) + \frac{85}{\sqrt{33}} \sinh(250\sqrt{33} \cdot t) \right] \right\} \cdot 1(t) \text{ [V]}$$

Príklad 39

$$R = 10\Omega, L = 0,5\text{mH}, C = 5\text{mF}, f = 20\text{Hz}, U_m = 5\text{V}$$

$$u = U_m \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$



- Odvodte vzťah pre prúdy i_L a i_C pre obvod na obrázku.
- Odvodte vzťah pre napätie u_{12}
- Nakreslite časové priebehy prúdov i_L a i_C a napätia u_{12} .

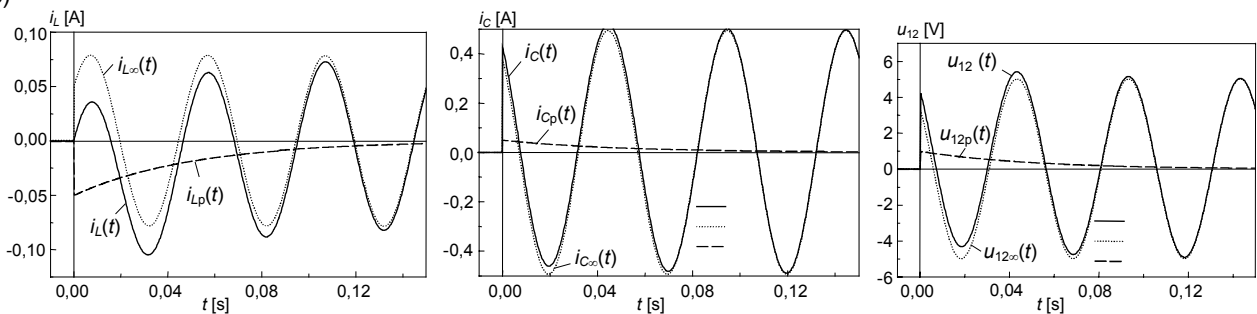
Riešenie:

$$a) i_L = (0,07859 \cdot \cos(125,7 \cdot t - 50,957^\circ) - 0,049502 \cdot e^{-20t}) \cdot 1(t)$$

$$i_C = (0,49378 \cdot \cos(125,7 \cdot t + 39,043^\circ) + 0,049502 \cdot e^{-20t}) \cdot 1(t)$$

$$b) u_{12} = (5 \cdot \cos(125,7 \cdot t + 48,086^\circ) + 0,989908 \cdot e^{-20t}) \cdot 1(t)$$

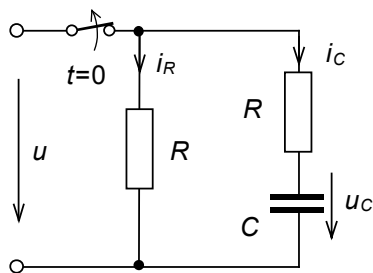
c)



Príklad 40

$$R = 2\Omega, C = 2\text{mF}, f = 100\text{Hz}, U_m = 5\text{V}$$

$$u = U_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$



- Odvodte vzťah pre prúdy i_R a i_C pre obvod na obrázku.
- Odvodte vzťah pre napätie u_C .
- Nakreslite časové priebehy prúdov i_R a i_C a napätia u_C pre dané číselné hodnoty.

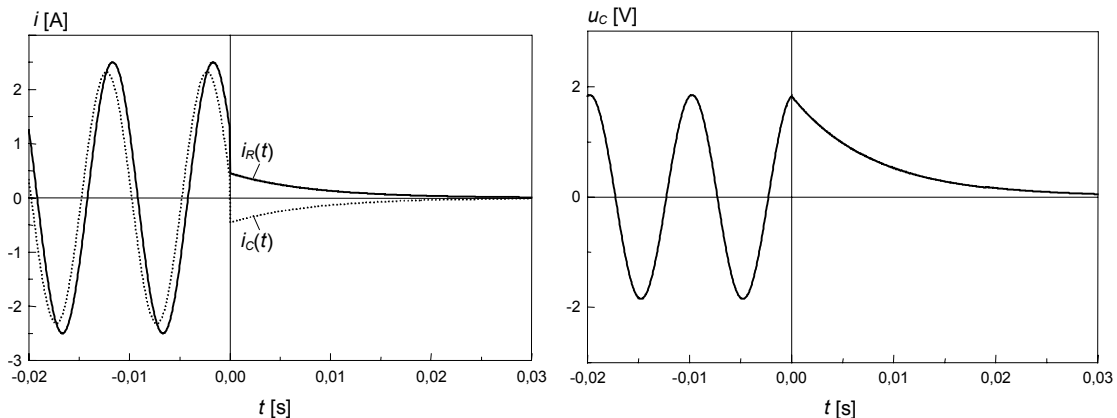
Riešenie:

$$a) i_R = 25 \cdot \cos(628,3 \cdot t + 60^\circ) \cdot 1(-t) + 0,45728 \cdot e^{-125t} \cdot 1(t)$$

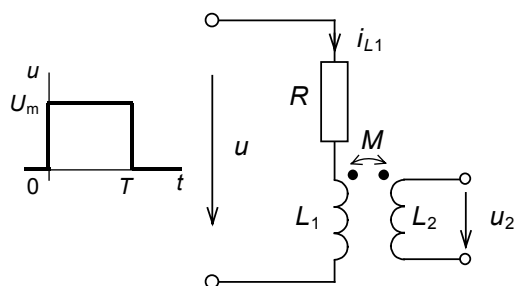
$$i_C = 2,32288 \cdot \cos(628,3 \cdot t + 81,697^\circ) \cdot 1(-t) - 0,45728 \cdot e^{-125t} \cdot 1(t)$$

$$b) u_C = 1,84849 \cdot \cos(628,3 \cdot t - 8,303^\circ) \cdot 1(-t) + 1,82911 \cdot e^{-125t} \cdot 1(t)$$

c)



Príklad 41

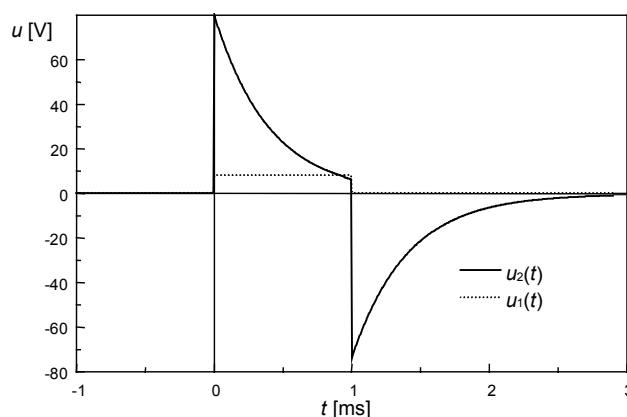
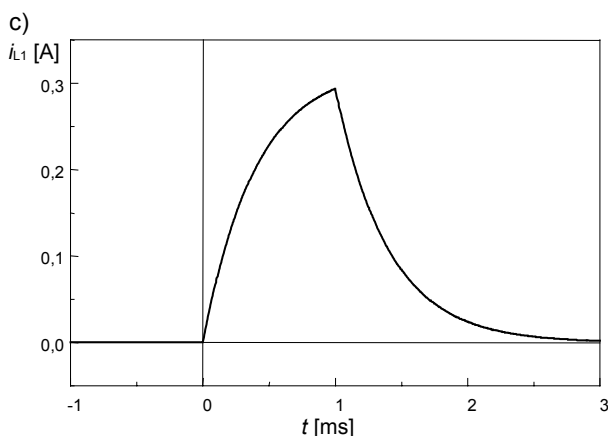


$$R = 25\Omega, L_1 = 0,01\text{mH}, L_2 = 1\text{H}, M = 0,1\text{H}, U_m = 8\text{V}, T = 0,001\text{s}, u = U_m[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T)]$$

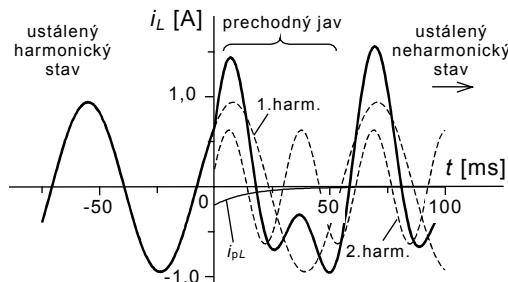
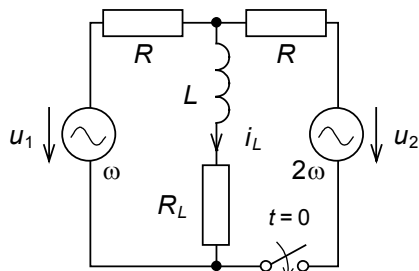
- Odvoďte vzťah pre prúd i_{L1} pre obvod na obrázku.
- Odvoďte vzťah pre napätie u_2 a vypočítajte jeho maximálnu hodnotu U_{2m} .
- Nakreslite časové priebehy prúdu i_{L1} a napätia u_2 pre dané číselné hodnoty.

Riešenie:

- $i_{L1} = 0,32 \cdot (1 - e^{-2500t}) \cdot \mathbf{1}(t) - 0,32 \cdot (1 - e^{-2500(t-0,001)}) \cdot \mathbf{1}(t - 0,001)$
- $u_2 = 80 \cdot (e^{-2500t}) \cdot \mathbf{1}(t) - 80 \cdot (e^{-2500(t-0,001)}) \cdot \mathbf{1}(t - 0,001), U_{2m} = 80\text{V}$



Príklad 42



$$R = 50\Omega, R_L = 25\Omega$$

$$L = 0,75\text{H}$$

$$u_1 = 100 \cdot \cos 100t \text{ [V]}$$

$$u_2 = 200 \cdot \cos 200t \text{ [V]}$$

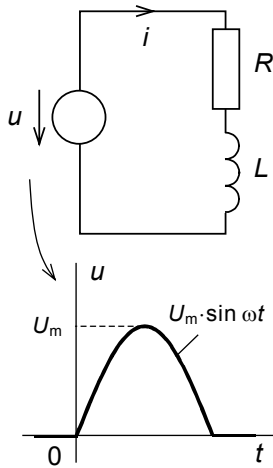
V čase $t = 0$ pripojíme na obvod v ustálenom harmonickom stave ďalší harmonický zdroj s dvojnásobnou frekvenciou.

- Vypočítajte prechodnú zložku prúdu cez induktor i_{pL} .
- Vypočítajte a nakreslite časový priebeh prúdu i_L .

Riešenie:

$$\text{a) } i_{pL} = -0,2 \cdot \exp\left(-\frac{200}{3}t\right) \cdot \mathbf{1}(t) \text{ [A]}$$

$$\text{b) } i_L = 0,9428 \cdot \cos(100t - 45^\circ) \cdot \mathbf{1}(-t) + \left\{ 0,9428 \cdot \cos(100t - 45^\circ) + 0,6325 \cdot \cos(200t - 7156^\circ) - 0,2 \cdot \exp\left(-\frac{200}{3}t\right) \right\} \cdot \mathbf{1}(t) \text{ [A]}$$

Príklad 43

- a) Nájdite operátorový obraz napätového impulzu u zdroja pripojeného na sériový RL obvod.
 b) Nájdite všeobecné riešenie pre časový priebeh prúdu i v RL obvode.

Riešenie:

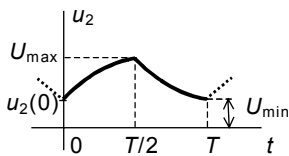
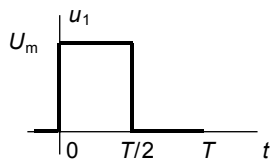
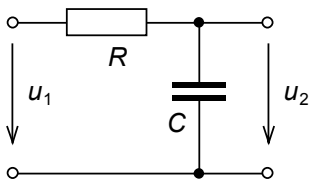
$$a) \hat{u} = U_m \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} + U_m \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} e^{-p\frac{\pi}{\omega}}$$

$$b) i = \frac{U_m}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right] \cdot 1(t) + \left[\sin\left(\omega\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) - \varphi\right) + \sin \varphi \cdot e^{-\frac{R}{L}\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)} \right] \cdot 1\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)$$

$$\text{kde } Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

Príklad 44

Odvodte vzťahy pre U_{\max} a U_{\min} z príkladu 22.



Riešenie:

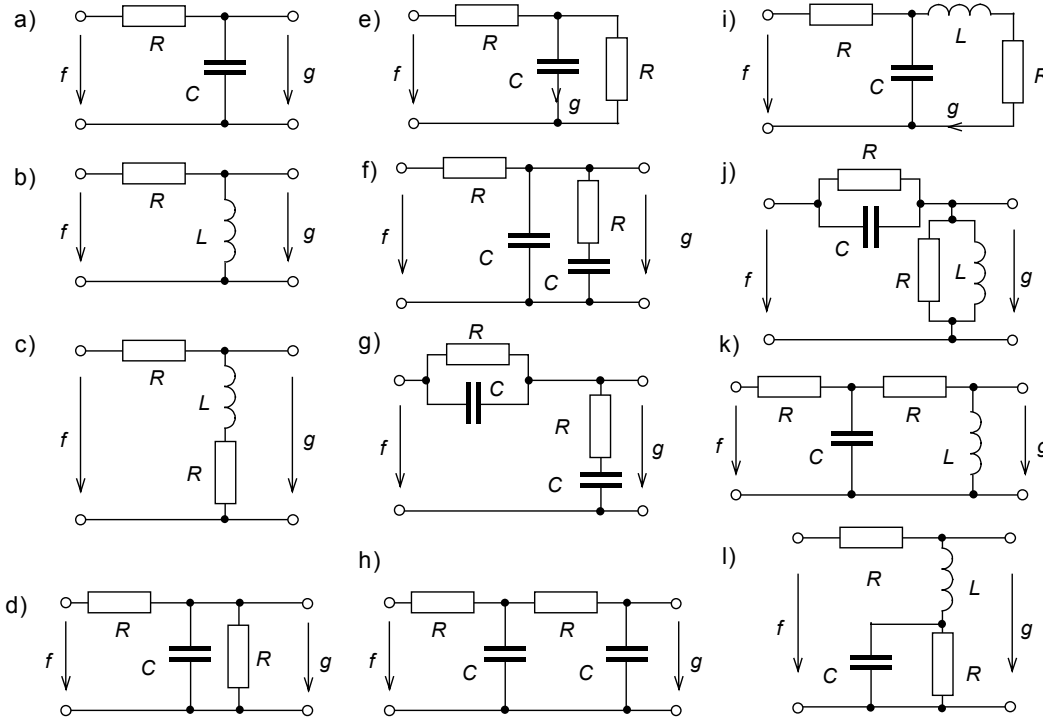
Naprav nájdite všeobecné riešenie pre napätie u_2 na intervale $\langle 0, T \rangle$ pri počiatočnej podmienke $u_2(0)$. V ustálenom stave potom platí $u_2(0) = u_2(T) = U_{\min}$ a $u_2(T/2) = U_{\max}$.

5 Analýza lineárnych sústav, impulzové a prechodové charakteristiky

Príklad 45

V lineárnych sústavách na obrázku je vstupnou veličinou f a výstupnou veličinou g . Vo všetkých prípadoch platí $RC = L/R = \tau$.

- a) Odvodte vzťah pre operátorový prenos \hat{H} .
b) Vypočítajte a nakreslite impulzovú h a prechodovú g_{Γ} charakteristiku.



Riešenie:

$\hat{H} = \frac{1}{p\tau + 1}$ $h = \tau^{-1} \cdot \exp(-t/\tau) \cdot 1(t)$ $g_{\Gamma} = [1 - \exp(-t/\tau)] \cdot 1(t)$	a)	$\hat{H} = \frac{1}{R} \frac{p\tau}{p\tau + 2}$ $h = R^{-1} \cdot \left\{ \delta(t) - 2\tau^{-1} \cdot \exp(-t/\tau) \cdot 1(t) \right\}$ $g_{\Gamma} = R^{-1} \cdot \exp(-2t/\tau) \cdot 1(t)$	e)	$\hat{H} = \frac{1}{R} \frac{1}{p^2\tau^2 + 2p\tau + 2}$ $h = R^{-1} \cdot \left\{ \delta(t) - 2\tau^{-1} \cdot \exp(-t/\tau) \cdot 1(t) \right\}$ $g_{\Gamma} = 0.5R^{-1} \cdot 1(t) - 0.5R^{-1} \cdot \exp(-t/\tau) \cdot \left\{ \cos(t/\tau) - \sin(t/\tau) \right\} \cdot 1(t)$	i)
$\hat{H} = \frac{p\tau}{p\tau + 1}$ $h = \delta(t) - \tau^{-1} \cdot \exp(-t/\tau) \cdot 1(t)$ $g_{\Gamma} = \exp(-t/\tau) \cdot 1(t)$	b)	$\hat{H} = \frac{p\tau + 1}{p^2\tau^2 + 3p\tau + 1}$ $h = \tau^{-1} \cdot \exp(-3t/2\tau) \cdot \left\{ \cosh(\sqrt{5}t/2\tau) - \frac{1}{\sqrt{5}} \sinh(\sqrt{5}t/2\tau) \right\} \cdot 1(t)$ $g_{\Gamma} = 1(t) - \exp(-3t/2\tau) \cdot \left\{ \cosh(\sqrt{5}t/2\tau) - \frac{1}{\sqrt{5}} \sinh(\sqrt{5}t/2\tau) \right\} \cdot 1(t)$	f)	$\hat{H} = \frac{p(p\tau + 1)}{p^2\tau^2 + 2p\tau + 1} = \frac{p\tau}{p\tau + 1}$ $h = \delta(t) - \tau^{-1} \cdot \exp(-t/\tau) \cdot 1(t)$ $g_{\Gamma} = \exp(-t/\tau) \cdot 1(t)$	j)
$\hat{H} = \frac{p\tau + 1}{p\tau + 2}$ $h = \delta(t) - \tau^{-1} \cdot \exp(-2t/\tau) \cdot 1(t)$ $g_{\Gamma} = 0.5 \cdot [1 + \exp(-2t/\tau)] \cdot 1(t)$	c)	$\hat{H} = \frac{p^2\tau^2 + 2p\tau + 1}{p^2\tau^2 + 3p\tau + 1}$ $h = \delta(t) - \tau^{-1} \cdot \exp(-3t/2\tau) \cdot \left\{ \cosh(\sqrt{5}t/2\tau) + \frac{3}{\sqrt{5}} \sinh(\sqrt{5}t/2\tau) \right\} \cdot 1(t)$ $g_{\Gamma} = 1(t) - \exp(-3t/2\tau) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\sqrt{5}t/2\tau) \cdot 1(t)$	g)	$\hat{H} = \frac{p\tau}{p^2\tau^2 + 2p\tau + 2}$ $h = \tau^{-1} \cdot \exp(-t/\tau) \cdot \left\{ \cos(t/\tau) - \sin(t/\tau) \right\} \cdot 1(t)$ $g_{\Gamma} = \exp(-t/\tau) \cdot \sin(t/\tau) \cdot 1(t)$	k)
$\hat{H} = \frac{1}{p\tau + 2}$ $h = \tau^{-1} \cdot \exp(-2t/\tau) \cdot 1(t)$ $g_{\Gamma} = 0.5 \cdot [1 - \exp(-2t/\tau)] \cdot 1(t)$	d)	$\hat{H} = \frac{1}{p^2\tau^2 + 3p\tau + 1}$ $h = \exp(-3t/2\tau) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\sqrt{5}t/2\tau) \cdot 1(t)$ $g_{\Gamma} = 1(t) - \exp(-3t/2\tau) \cdot \left\{ \cosh(\sqrt{5}t/2\tau) - \frac{3}{\sqrt{5}} \sinh(\sqrt{5}t/2\tau) \right\} \cdot 1(t)$	h)	$\hat{H} = \frac{p^2\tau^2 + p\tau + 1}{p^2\tau^2 + 2p\tau + 2}$ $h = \delta(t) - \tau^{-1} \cdot \exp(-t/\tau) \cdot \cos(t/\tau) \cdot 1(t)$ $g_{\Gamma} = 0.5 \cdot 1(t) - 0.5 \cdot \exp(-t/\tau) \cdot \left\{ \cos(t/\tau) - \sin(t/\tau) \right\} \cdot 1(t)$	l)

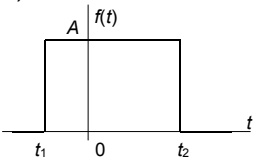
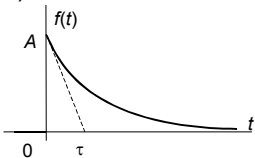
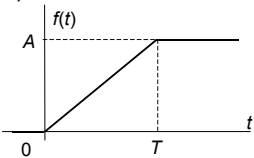
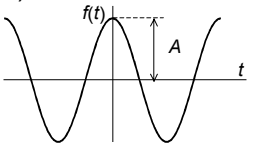
Príklad 46

Prechodová charakteristika lineárnej sústavy je

$$g_T = e^{-at} \cdot 1(t), \quad a > 0$$

a) Vypočítajte a nakreslite impulzovú charakteristiku h .

b) Vypočítajte a nakreslite (všeobecne) výstupnú veličinu g , ak vstupná veličina f je:

<p>1)</p>  $f(t) = A \cdot \{1(t - t_1) - 1(t - t_2)\}$	<p>3)</p>  $f(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot 1(t)$
<p>2)</p>  $f(t) = \frac{A}{T} \cdot \{t \cdot 1(t) - (t - T) \cdot 1(t - T)\}$	<p>4)</p>  $f(t) = A \cos(\Omega t)$

Úlohu b) riešte:

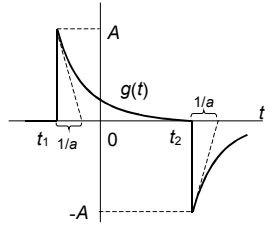
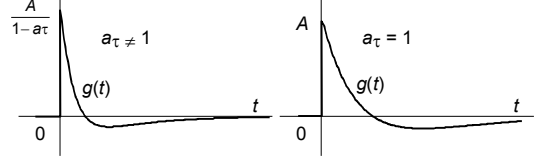
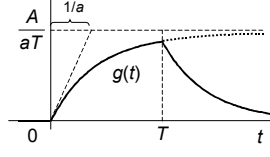
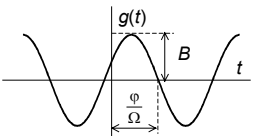
i) Pomocou Laplace-Carsonovej, resp. Fourierovej transformácie.

ii) Pomocou konvolúcie v časovej oblasti.

Riešenie:

a) $h(t) = \delta(t) - a \cdot e^{-at} \cdot 1(t)$

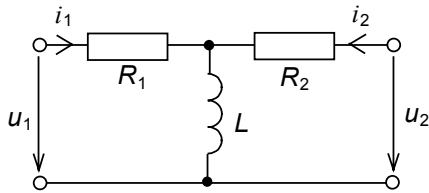
b)

<p>1)</p> $g(t) = A \cdot \{e^{-a(t-t_1)} \cdot 1(t-t_1) - e^{-a(t-t_2)} \cdot 1(t-t_2)\}$ 	<p>3)</p> $g(t) = \begin{cases} \frac{A}{1-a\tau} \cdot \left\{ e^{-\frac{t}{\tau}} - a\tau \cdot e^{-at} \right\} \cdot 1(t) & \text{ak } a\tau \neq 1 \\ A \cdot e^{-at} \{1-at\} \cdot 1(t) & \text{ak } a\tau = 1 \end{cases}$ 
<p>2)</p> $g(t) = \frac{A}{aT} \cdot \{[1 - e^{-at}] \cdot 1(t) - [1 - e^{-a(t-T)}] \cdot 1(t-T)\}$ 	<p>4)</p> $g(t) = -B \cdot \sin(\Omega t - \varphi),$ <p>kde $B = A \cdot \frac{\Omega}{\sqrt{a^2 + \Omega^2}}$, $\varphi = \arctg \frac{\Omega}{a}$</p> 

Porovnajtie tiež s príkladom 45b) - obvod na obrázku 45b) zodpovedá lineárnej sústave v príklade 46. Všimnite si priebeh vstupného napätia (vstupná veličina $f(t)$) a zodpovedajúci priebeh výstupného napätia (výstupná veličina $g(t)$). Na základe týchto priebehov porozmýšľajte, kedy sa bude uvedený obvod správať ako derivačný člen.

6 Lineárne dvojbrany a trojpóly

Príklad 47



$$R_1 = 10\Omega, L = 2\text{mH}, R_2 = 30\Omega, \omega = 1000\text{s}^{-1}$$

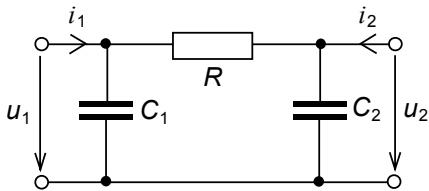
- Určte impedančné parametre T – článku.
- Uveďte či ide o reciprokový a/alebo súmerný dvojbran. Pri riešení použite niektorú z obecných metód analýzy.

Riešenie:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 10 + j2 & j2 \\ j2 & 30 + j2 \end{pmatrix} [\Omega]$$

- Pre daný dvojbran platí $z_{12} = z_{21}$ a teda je to reciprokový dvojbran. Keďže prvky na hlavnej diagonále (z_{11}, z_{22}) sú navzájom rôzne, ide o (pozdĺžne) nesúmerný dvojbran.

Príklad 48



$$C_1 = 10\mu\text{F}, R = 50\Omega, C_2 = 20\mu\text{F}, \omega = 1000\text{s}^{-1}$$

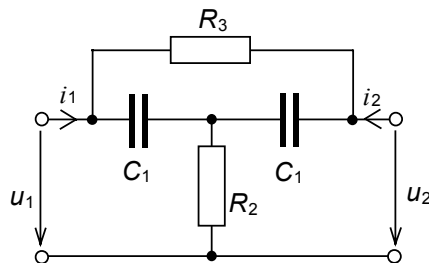
- Určte admitančné parametre π – článku.
- Uveďte či ide o reciprokový a/alebo súmerný dvojbran. Pri riešení použite niektorú z obecných metód analýzy.

Riešenie:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0,02 + j0,01 & -0,02 \\ -0,02 & 0,02 + j0,02 \end{pmatrix} [\text{S}]$$

- Pre daný dvojbran platí $y_{12} = y_{21}$ a teda je to reciprokový dvojbran. Keďže prvky na hlavnej diagonále (y_{11}, y_{22}) sú navzájom rôzne, ide o (pozdĺžne) nesúmerný dvojbran.

Príklad 49



$$C_1 = 5\mu\text{F}, R_2 = 100\Omega, R_3 = 200\Omega, \omega = 100\text{s}^{-1}$$

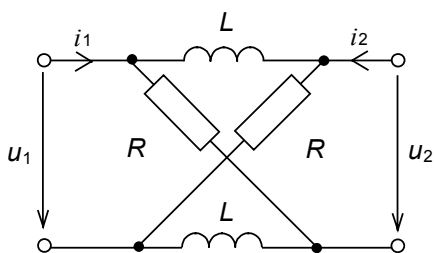
- Určte admitančné parametre premosteného T – článku.
- Uveďte či ide o reciprokový a/alebo súmerný dvojbran. (Úlohu je možné riešiť pomocou paralelného radenia jednoduchších dvobranov).

Riešenie:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^{-3} \angle 5,73^\circ & -4,98 \cdot 10^{-3} \\ -4,98 \cdot 10^{-3} & 5 \cdot 10^{-3} \angle 5,73^\circ \end{pmatrix} [\text{S}]$$

- Pre daný dvojbran platí $y_{12} = y_{21}$ a teda je to reciprokový dvojbran. Súčasne platí $y_{11} = y_{22}$, a teda ide aj o (pozdĺžne) súmerný dvojbran.

Príklad 50



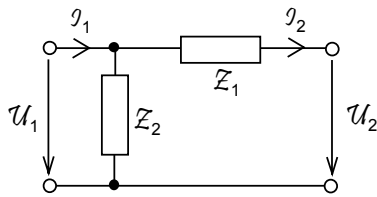
$$R = 8\Omega, L = 40\text{mH}, \omega = 2\pi 50\text{s}^{-1}$$

Určte impedančnú maticu súmerného reciprokeho krížového článku zo stavu naprázdno (tj. priamo z definície impedančných parametrov).

Riešenie:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 7,45 \angle 57,5^\circ & 7,45 \angle 57,5^\circ \\ 7,45 \angle 57,5^\circ & 7,45 \angle 57,5^\circ \end{pmatrix} [\Omega]$$

Príklad 51



- Určte všeobecne prvky priamej kaskádnej matice \mathbf{A} obvodu (Γ -článku).
- Uvedte o aký typ dvojbranu ide, či je súmerný alebo nesúmerný (dokážte).
- Pomocou stavu nakrátko a naprázdno určte vstupnú Z_{01} a Z_{02} výstupnú vlnovú impedanciu dvojbranu.
- Určte strednú vlnovú impedanciu Z_0 dvojbranu pre obecné hodnoty impedancií Z_1 a Z_2 a tiež pre prípad, keď $Z_1 = R_0 + j\omega L_0$ a $Y_2 = G_0 + j\omega C_0$.
- Ako by ste určili strednú vlnovú impedanciu súmerného dvojbranu, keď poznáte vhodné dva prvky \mathbf{A} matice?

Riešenie:

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ Y_2 & 1 + Z_1 Y_2 \end{pmatrix}$$

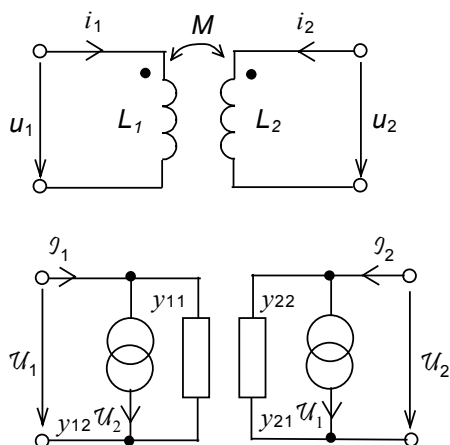
- Je to (pozdĺžne) nesúmerný dvojbran lebo platí: $a_{11} \neq a_{22}$ čo súčasne znamená, že pri zámene vstupných svoriek za výstupné sa zmení funkcia dvojbranu.

$$c) Z_{01} = \sqrt{Z_{1K} \cdot Z_{10}} = Z_2 \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}; \quad Z_{02} = \sqrt{Z_{2K} \cdot Z_{20}} = Z_2 \sqrt{Z_1 \cdot (Z_1 + Z_2)}$$

$$d) Z_0 = \sqrt{Z_{01} \cdot Z_{02}} = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

$$e) Z_0 = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}$$

Príklad 52



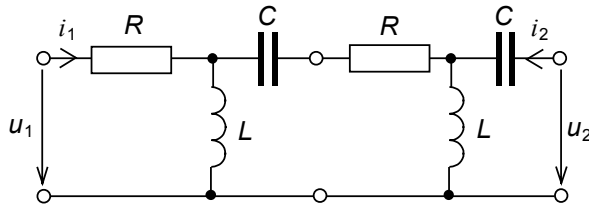
Nájdite náhradnú schému dvoch magneticky viazaných induktorov s riadenými (prúdovými) zdrojmi vyplývajúcu z admitančných (\mathbf{Y}) parametrov dvojbranu.

Riešenie:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{L_2}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} & -\frac{M}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} \\ -\frac{M}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} & \frac{L_1}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} \end{pmatrix}$$

Na obrázku vľavo je náhradná schéma v komplexnej oblasti vyplývajúca priamo z definície admitančných parametrov.

Príklad 53



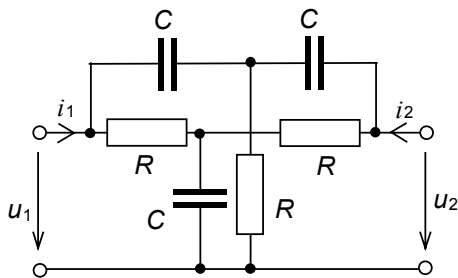
$$R = 100\Omega, X_L = 200\Omega, X_C = 100\Omega$$

Určte prvky výslednej priamej kaskádnej matice zapojenia, tvoreného dvomi do kaskády zapojenými pasívnymi T-článkami.

Riešenie:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,25 - j125 & 25 - j175 \\ -(25 + j75) \cdot 10^{-4} & -0,25 - j0,25 \end{pmatrix}$$

Príklad 54



$$C = 0,5\mu\text{F}, R = 500\Omega, \omega = 314\text{s}^{-1}$$

Určte admitančné parametre dvojitého T-článku pomocou paralelného radenia jednoduchších dvojbranov.

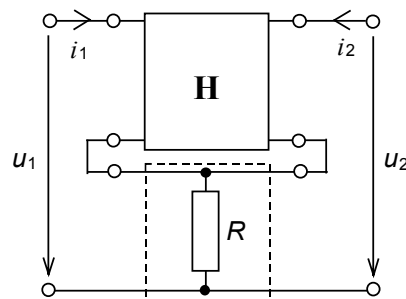
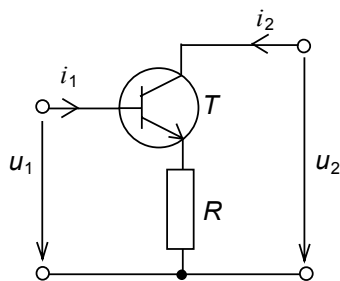
Riešenie:

Uvedené zapojenie si možno predstaviť ako paralelné zapojenie dvoch T-článkov. Po číselnom určení ich admitančných matíc treba pre určenie výslednej admitančnej matice zapojenia tieto čiastkové matice sčítať.

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 9,97 \cdot 10^{-4} \angle -25,4^\circ & 9,19 \cdot 10^{-4} \angle -217^\circ \\ 9,19 \cdot 10^{-4} \angle -217^\circ & 9,97 \cdot 10^{-4} \angle -25,4^\circ \end{pmatrix} [\text{S}]$$

Všimnite si, že pre daný dvojbran platí $y_{12} = y_{21}$ a teda je to recipročný dvojbran. Súčasne platí $y_{11} = y_{22}$, a teda ide aj o (pozdĺžne) súmerný dvojbran.

Príklad 55



Vlastnosti bipolárneho tranzistora v zadanom pracovnom bode sú popísané sério-paralelnými (hybridnými) parametrami: $h_{11} = 2,7\text{k}\Omega$, $h_{12} = 0$, $h_{21} = 160$, $h_{22} = 0,8\mu\text{S}$. Zistite, ako sa tieto parametre zmenia, ak do emitora zaradíme rezistor $R = 100\Omega$.

Riešenie:

Uvedené zapojenie si môžeme prekresliť podľa obrázku vľavo dole, z ktorého vidieť, že dvojbran reprezentujúci tranzistor je sériovo spojený s degenerovaným dvojbranom, tvoreným jediným rezistorom R . Je to regulárne sériové spojenie. Stačí teraz len nájsť impedančnú maticu tranzistora a degenerovaného dvojbranu:

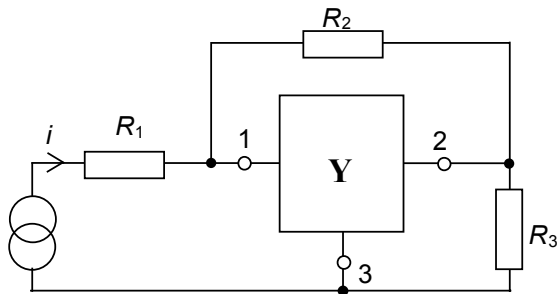
$$\mathbf{Z}_T = \begin{pmatrix} |H|/h_{22} & h_{12}/h_{22} \\ -h_{21}/h_{22} & 1/h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \cdot 10^3 & 0 \\ -2 \cdot 10^8 & 125 \cdot 10^6 \end{pmatrix} [\Omega]$$

$$\mathbf{Z}_R = \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix} [\Omega]$$

Výsledná impedančná matica zapojenia: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_T + \mathbf{Z}_R = \begin{pmatrix} 2800 & 100 \\ -2 \cdot 10^8 & 125 \cdot 10^6 \end{pmatrix} [\Omega]$ a z toho výsledná hybridná matica:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} |Z|/z_{22} & z_{12}/z_{22} \\ -z_{21}/z_{22} & 1/z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 188 \cdot 10^4 & 8 \cdot 10^{-5} \\ 160 & 8 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}.$$

Príklad 56



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 6\Omega, R_3 = 4\Omega, i = 2A$$

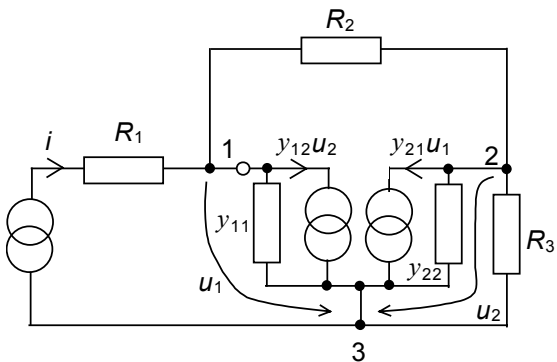
$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,02 \\ 0,02 & 0,04 \end{pmatrix} [\text{S}]$$

Lineárny trojpól je charakterizovaný admitančnou maticou \mathbf{Y} .

a) Prekreslite obvod pomocou náhradnej schémy obsahujúcej riadené zdroje na základe príslušného modelu trojpólu daného pomocou \mathbf{Y} -matice.

b) Sformulujte sústavu rovníc potrebnú na výpočet všetkých neznámych veličín pomocou najvhodnejšej metódy riešenia.

c) Vyriešte sústavu rovníc z bodu b) a výsledky použite na výpočet výkonu dodávaného do obvodu prúdovým zdrojom a výkonu spotrebovaného rezistorom R_3 .



Riešenie:

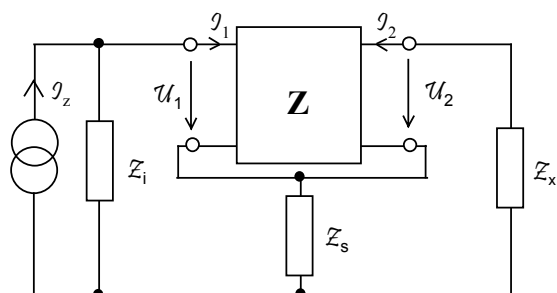
a) Uvedené zapojenie si môžeme prekresliť podľa obrázku vľavo.

b) Najvhodnejšou metódou pri použití zdrojov riadených napätím je metóda uzlových (resp. vetvových) napätí:

$$\begin{cases} \left(y_{11} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot u_1 + \left(y_{12} - \frac{1}{R_2}\right) \cdot u_2 = i \\ \left(y_{21} - \frac{1}{R_2}\right) \cdot u_1 + \left(y_{22} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \cdot u_2 = 0 \end{cases}$$

c) Výkon prúdového zdroja: $P_i = -63,6\text{W}$, výkon spotrebovaný rezistorom R_3 je: $P_R = 3,6\text{W}$.

Príklad 57



$$Z_i = 50\Omega, Z_s = -j50\Omega, Z_x = j50\Omega, I_z = 0,02 \angle 45^\circ \text{A}$$

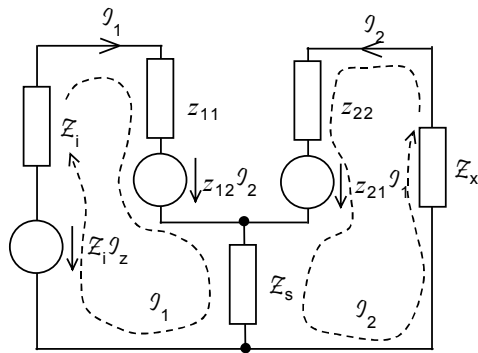
$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 50 + j50 & 4 + j50 \\ 4 + j50 & 2 \end{pmatrix} [\Omega]$$

Lineárny dvojbran je charakterizovaný impedančnou maticou \mathbf{Z} .

a) Prekreslite obvod pomocou náhradnej schémy obsahujúcej riadené zdroje na základe príslušného modelu dvojbranu daného pomocou \mathbf{Z} -matice.

b) Sformulujte sústavu rovníc potrebnú na výpočet všetkých neznámych veličín pomocou najvhodnejšej metódy riešenia.

c) Vyriešte sústavu rovníc z bodu b) a výsledky použite na výpočet komplexného výkonu na záťaži Z_x .



Riešenie:

a) Uvedené zapojenie si môžeme prekresliť podľa obrázku vľavo.

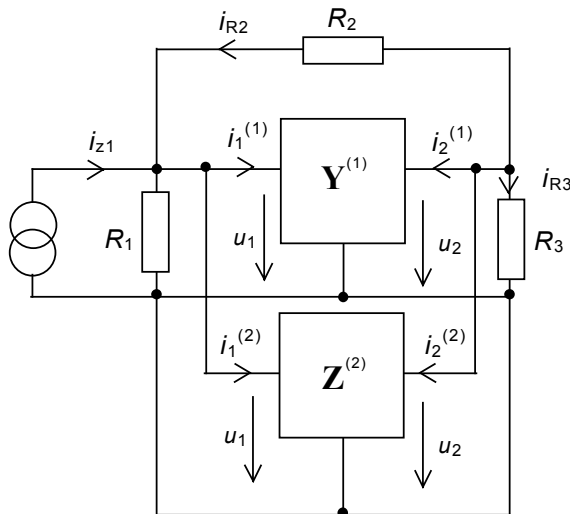
b) Najvhodnejšou metódou pri použití riadených napäťových zdrojov je metóda slučkových prúdov:

$$(z_{11} + z_i + z_s) \cdot i_1 + (z_s + z_{12}) \cdot i_2 = z_i i_z$$

$$(z_s + z_{21}) \cdot i_1 + (z_{22} + z_x + z_s) \cdot i_2 = 0$$

c) Komplexný výkon na záťaži: $S = 0,0242 \angle 90^\circ \text{ [VA]}$.

Príklad 58



$$R_1 = R_2 = 5\Omega, R_3 = 10\Omega, i_{z1} = 1A$$

$$Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \text{ [S]}$$

$$Z^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \text{ [\Omega]}$$

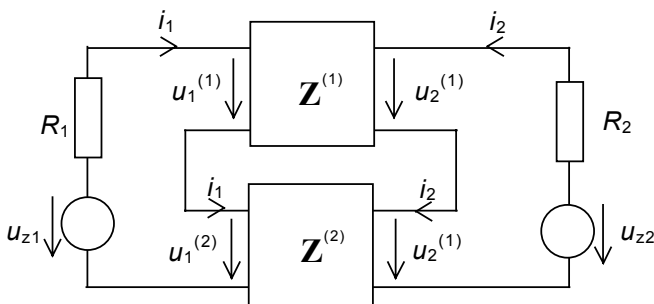
V obvode na obrázku je prvý lineárny trojpól charakterizovaný admitančnou maticou $Y^{(1)}$ a druhý impedančnou maticou $Z^{(2)}$. Pre zadané hodnoty parametrov obvodu vypočítajte prúdy i_{R2} , i_{R3} a výkon P_{R3} spotrebovaný rezistorom R_3 .

Riešenie:

Keďže sú obidva trojpóly zapojené paralelne na vstupe a výstupe, bude vhodné si najprv prepočítať impedančné parametre druhého trojpólu na zodpovedajúce admitančné parametre. Sčítajte dielčie admitančné matice. Potom si prekreslite obvod tak, že výsledný trojpól (popísaný jedinou admitančnou maticou) si nahradíte pomocou náhradnej

schémy obsahujúcej riadené zdroje na základe príslušného modelu trojpólu (s riadenými prúdovými zdrojmi). Sformulujte sústavu rovníc potrebnú na výpočet všetkých neznámych veličín pomocou metódy uzlových napätí (najvhodnejšia metóda). Vyriešte sústavu rovníc a výsledky použite na výpočet prúdov resp. výkonu spotrebovaného rezistorom R_3 : $i_{R2} = 0,349A$, $i_{R3} = 0,135A$ a $P_R = 0,182W$.

Príklad 59



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega, u_{z1} = 12V, u_{z2} = 9V$$

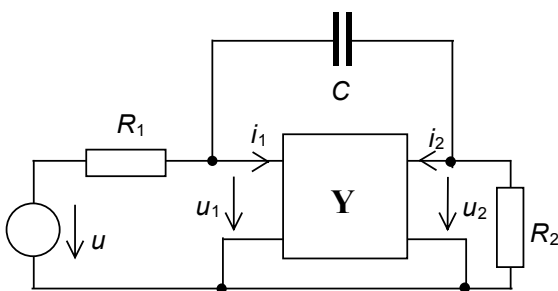
$$Z^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ [\Omega]}$$

$$Z^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ [\Omega]}$$

V obvode na obrázku sú obidva lineárne dvojbrany charakterizované impedančnými maticami. Pre zadané hodnoty parametrov obvodu určte prúdy I_1 a I_2 .

Riešenie:

Keďže sú obidva dvojbrany zapojené do série na vstupe aj výstupe, bude vhodné najprv sčítať impedančné parametre jednotlivých dvojbranov, čím získate jedinou impedančnú maticu. Potom si prekreslite obvod tak, že výsledný dvojbran si nahradíte pomocou náhradnej schémy obsahujúcej riadené (napäťové) zdroje na základe príslušného modelu dvojbranu (vyplývajúceho z impedančných parametrov). Sformulujte sústavu rovníc potrebnú na výpočet príslušných neznámych veličín pomocou metódy slučkových prúdov (najvhodnejšia metóda). Vyriešte sústavu rovníc a výsledky (slučkové prúdy) použite na výpočet neznámych prúdov: $i_1 = 0,415A$ a $i_2 = 0,271A$.

Príklad 60

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0,01 + j0,02 & -0,01 \\ -0,01 & 0,01 + j0,01 \end{pmatrix} [\text{S}]$$

K dvojbranu podľa obrázka je pripojený zdroj napätia $u = \sqrt{2} 10 \cos(2\pi \cdot 10^3 t)$ [V] s vnútorným odporom $R_1 = 50\text{K}$, odporová záťaž $R_2 = 100\text{K}$ a spätnoväzbový kapacitor $C = 1,59\mu\text{F}$. Admitančné parametre dvojbranu pri danej frekvencii zdroja sú popísané hore uvedenou maticou.

Vypočítajte fázory napätí (komplexné amplitúdy) u_1 a u_2 metódou uzlových napätí s využitím náhradného modelu vyplývajúceho z admitančných parametrov.

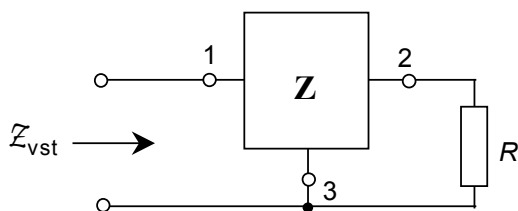
Riešenie:

Pri použití náhradnej schémy dvojbranu s riadenými prúdovými zdrojmi a pri zvolení vyznačených napätí u_1 a u_2 za uzlové napätia bude sústava rovníc vyzerať nasledovne:

$$\left(y_{11} + \frac{1}{R_1} + j\omega C \right) \cdot u_1 + (y_{12} - j\omega C) \cdot u_2 = \frac{u}{R_1}$$

$$(y_{21} - j\omega C) \cdot u_1 + \left(y_{22} + \frac{1}{R_2} + j\omega C \right) \cdot u_2 = 0$$

Riešením dostaneme fázory: $u_1 = 8 \angle -45^\circ$ [V] a $u_2 = 4 \angle -45^\circ$ [V].

Príklad 61

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} [\Omega]$$

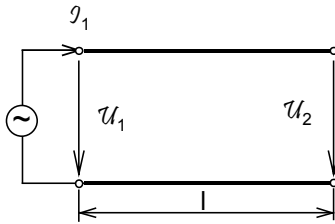
Lineárny trojpól je charakterizovaný impedančnou maticou a je zaťažovaný na výstupe odporovou záťažou $R = 20\Omega$. Určte vstupnú impedanciu zapojenia.

Riešenie:

Z impedančnej matice je vidieť, že daný trojpól je reciprokový a súčasne (pozdĺžne) súmerný. Možno ho teda nahradiť symetrickým T-článkom. Potom vstupná impedancia zapojenia je $Z_{vst} = 9,167\Omega$.

7 Homogénne vedenia v ustálenom harmonickom stave

Príklad 62



$$R_0 = 2\Omega/\text{km}, L_0 = 0,5\text{mH}/\text{km}, G_0 = 0\text{S}/\text{km}, C_0 = 8\text{nF}/\text{km}, \\ \ell = 125\text{km}, f = 10\text{kHz}$$

$$u_1(t) = 10 \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

- a) Vypočítajte charakteristickú impedanciu Z_0 a konštantu šírenia γ vedenia na obrázku v stave naprázdno.
b) Vypočítajte vstupnú impedanciu Z_1 .

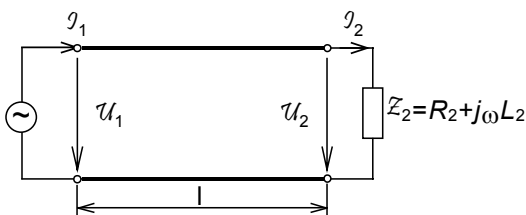
Riešenie:

$$\text{a) } Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0}{G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0}} = 250,126 - j7,954 \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot (G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0)} = \beta + j \cdot \alpha = 0,00399798 + j0,12572729 \text{ km}^{-1}$$

$$\text{b) } Z_1 = \frac{u_1}{i_1} = 541,136 - j24,542 \Omega$$

Príklad 63



$$R_0 = 0\Omega/\text{m}, L_0 = 0,25\mu\text{H}/\text{m}, G_0 = 0\text{S}/\text{m}, C_0 = 44\text{pF}/\text{m}, \\ \ell = 5000\text{m}, f = 20\text{MHz}$$

$$R_2 = 150\Omega, L_2 = 1\mu\text{H}$$

$$u_1(t) = 2 \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) [\text{V}]$$

- a) Vypočítajte komplexný výkon S_1 dodávaný napäťovým zdrojom.
b) Vypočítajte komplexný výkon S_2 na impedancii Z_2 pripojeného na koniec vedenia.
c) Vypočítajte komplexný výkon S_{ved} na vedení.

Riešenie:

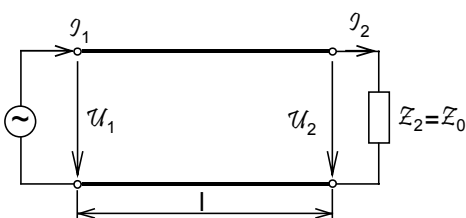
$$\text{a) } S_1 = \frac{u_1 \cdot \bar{i}_1}{2} = P_1 + jQ_1 = 0,013027 - j0,021692 \text{ VA}$$

$$\text{b) } S_2 = \frac{u_2 \cdot \bar{i}_2}{2} = P_2 + jQ_2 = 0,013027 + j0,010913 \text{ VA}$$

$$\text{c) } S_{\text{ved}} = S_1 - S_2 = P_{\text{ved}} + jQ_{\text{ved}} = 0 - j0,032606 \text{ VA}$$

Pozn.: Všimnite si, že na vedení je nulový činný výkon - je to ideálne (bezstratové) vedenie.

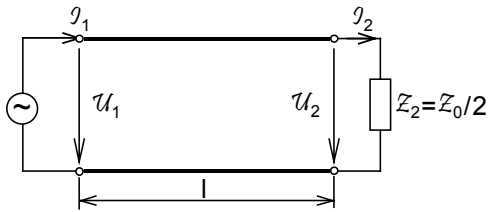
Príklad 64



Vypočítajte komplexný výkon S_{ved} na ideálnom vedení z predchádzajúceho príkladu, ak vedenie bude impedančne prispôbené.

Riešenie:

$$S_{\text{ved}} = S_1 - S_2 = P_{\text{ved}} + jQ_{\text{ved}} = 0 + j0 \text{ VA}$$

Príklad 65

$$R_0 = 27\text{m}\Omega/\text{m}, L_0 = 0,3\mu\text{H}/\text{m}, G_0 = 30\text{nS}/\text{m}, C_0 = 52\text{pF}/\text{m}, \\ \ell = 80\text{m}, f = 12\text{MHz}$$

$$u_1(t) = 1 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{3}\right) [\text{V}]$$

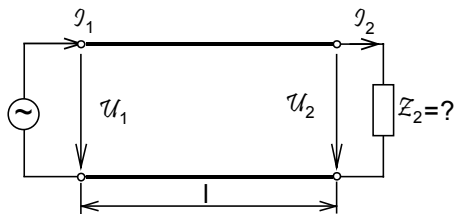
- Vypočítajte komplexný výkon napätového zdroja pripojeného na začiatok vedenia S_1 .
- Vypočítajte komplexný výkon S_2 na impedancii Z_2 pripojeného na koniec vedenia.
- Vypočítajte komplexný výkon S_{ved} na vedení.

Riešenie:

$$\text{a) } S_1 = \frac{U_1 \cdot \bar{I}_1}{2} = P_1 + jQ_1 = 3,75831 \cdot 10^{-3} + j2,031359 \cdot 10^{-3} \text{ VA}$$

$$\text{b) } S_2 = \frac{U_2 \cdot \bar{I}_2}{2} = P_2 + jQ_2 = 3,715418 \cdot 10^{-3} - j2,203261 \cdot 10^{-6} \text{ VA}$$

$$\text{c) } S_{\text{ved}} = S_1 - S_2 = P_{\text{ved}} + jQ_{\text{ved}} = 4,28923 \cdot 10^{-5} + j2,033562 \cdot 10^{-3} \text{ VA}$$

Príklad 66

$$R_0 = 15\text{m}\Omega/\text{m}, L_0 = 0,35\mu\text{H}/\text{m}, G_0 = 20\text{nS}/\text{m}, C_0 = 36\text{pF}/\text{m}, \\ \ell = 320\text{m}, f = 27\text{MHz}$$

$$u_1(t) = 25 \cdot \cos(\omega \cdot t) [\text{V}]$$

$$i_1(t) = 0,005 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{4}\right) [\text{A}]$$

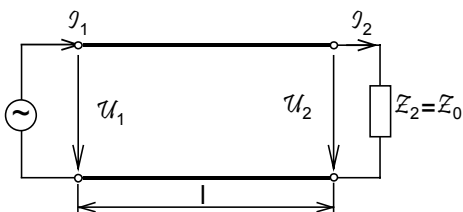
- Vypočítajte vstupnú impedanciu Z_1 vedenia.
- Vypočítajte, aká impedancia Z_2 je pripojená na koniec vedenia.
- Vypočítajte časový priebeh napätia a prúdu v polovici dĺžky vedenia.

Riešenie:

$$\text{a) } Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = 353,553 + j353,553 \Omega$$

$$\text{b) } Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U(l)}{I(l)} = 12,716 + j37,462 \Omega$$

$$\text{c) } u\left(t, \frac{l}{2}\right) = 1588 \cdot \cos(\omega \cdot t - 2967) \text{ V, rad} \quad i\left(t, \frac{l}{2}\right) = 20,103 \cdot \cos(\omega \cdot t - 1650) \text{ mA, rad}$$

Príklad 67

$$R_0 = 23\text{m}\Omega/\text{m}, L_0 = 0,5\mu\text{H}/\text{m}, G_0 = 0\text{nS}/\text{m}, C_0 = 30\text{pF}/\text{m}, \\ f = 350\text{MHz}$$

- Vypočítajte, akú dĺžku má impedančne prispôsobené vedenie na obrázku, ak amplitúda napätia na jeho konci je polovičná oproti amplitúde na jeho začiatku.
- Vypočítajte, aká je vstupná impedancia Z_1 takéhoto vedenia.
- Vypočítajte fázovú rýchlosť v_f .

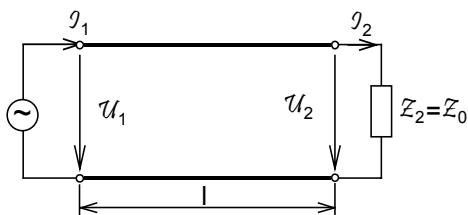
Riešenie:

$$\text{a) } l = \frac{\ln(2)}{\beta} = 7781,303 \text{ m}$$

$$\text{b) } Z_1 = Z_0 = 129,099 - j1,350 \cdot 10^{-3} \Omega$$

$$\text{c) } v_f = \omega/\alpha = 2,581 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Príklad 68



$$R_0 = 30\text{m}\Omega/\text{m}, L_0 = 0,45\mu\text{H}/\text{m}, G_0 = 50\text{nS}/\text{m}, C_0 = 42\text{pF}/\text{m}, \\ f = 300\text{MHz}$$

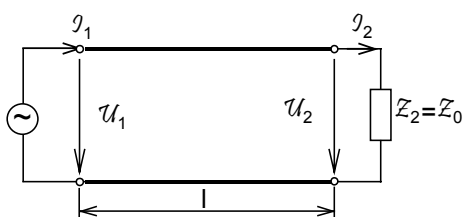
- a) Vypočítajte, akú impedanciu $Z_2 = R_2 \pm jX_2$ je potrebné pripojiť na koniec vedenia, aby bolo impedančne prispôbené.
 b) Vypočítajte, aká **skutočná** indukčnosť, resp. kapacita zodpovedá imaginárnej zložke tejto impedancie.

Riešenie:

$$\text{a) } Z_2 = R_2 - jX_2 = 103,510 - j1798 \cdot 10^{-3} \Omega$$

$$\text{b) } C_2 = \frac{1}{\omega \cdot X_2} = 295,097 \text{ nF}$$

Príklad 69



$$v_f = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}, f = 100\text{MHz}, \ell = 2500\text{m}$$

$$U_{1m} = 10\text{V}, U_{2m} = 8\text{V}$$

- a) Vypočítajte fázovú konštantu α impedančne prispôbeného vedenia na obrázku.
 b) Vypočítajte konštantu tlmenia β impedančne prispôbeného vedenia na obrázku.
 c) Vypočítajte vlnovú dĺžku λ signálov šíriacich sa po takomto vedení.

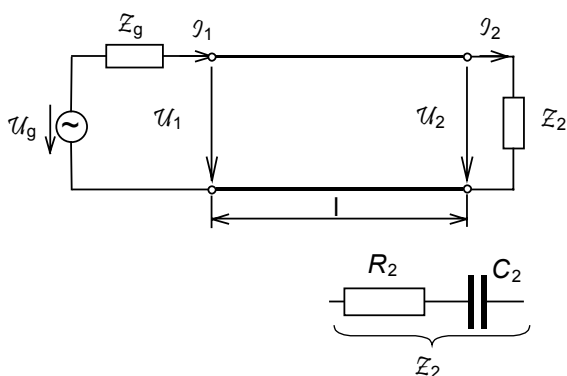
Riešenie:

$$\text{a) } \alpha = \frac{\omega}{v_f} = 2,51327 \text{ rad/m}$$

$$\text{b) } \beta = \frac{1}{l} \cdot \ln\left(\frac{U_{1m}}{U_{2m}}\right) = 8,92574 \cdot 10^{-5} \text{ Np/m}$$

$$\text{c) } \lambda = \frac{v_f}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\alpha} = 2,5 \text{ m}$$

Príklad 70



$$R_0 = 50\text{m}\Omega/\text{m}, L_0 = 0,5\mu\text{H}/\text{m}, G_0 = 30\text{nS}/\text{m},$$

$$C_0 = 52\text{pF}/\text{m}, \ell = 1000\text{m}, f = 10\text{MHz},$$

$$Z_g = R_g = 50\Omega, R_2 = 75\Omega, C_2 = 5,2\text{pF}$$

$$u_g(t) = 15 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ [V]}$$

- a) Vypočítajte, aká je vstupná impedancia Z_1 vedenia na obrázku.
 b) Vypočítajte napätie a prúd na začiatku vedenia.
 c) Vypočítajte napätie a prúd na konci vedenia.

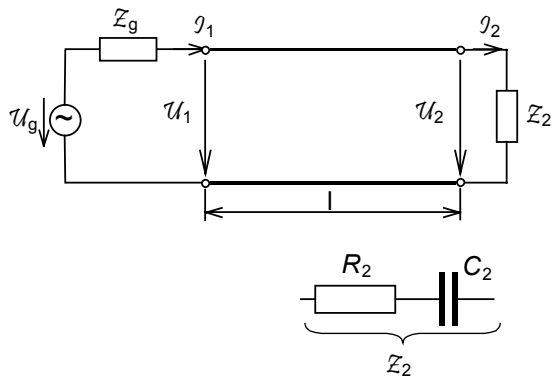
Riešenie:

$$\text{a) } Z_1 = 398,091 - j49,808 \Omega$$

$$\text{b) } u_1 = u_g \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_g} = 13,348 \cdot e^{-0,537 \cdot j} \text{ V}, i_1 = \frac{u_1}{Z_1} = 33,270 \cdot e^{-0,413 \cdot j} \text{ mA}$$

$$\text{c) } u_2 = 12,934 \cdot e^{-0,545 \cdot j} \text{ V}, i_2 = 4,224 \cdot e^{-1,001 \cdot j} \text{ mA}$$

Príklad 71



$$R_0 = 45\text{m}\Omega/\text{m}, L_0 = 0,35\mu\text{H}/\text{m}, G_0 = 22\text{nS}/\text{m},$$

$$C_0 = 45\text{pF}/\text{m}, \ell = 850\text{m}, f = 15\text{MHz},$$

$$R_2 = 75\Omega, C_2 = 8,5\text{pF}$$

$$u_2(t) = 5 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{4}\right) [\text{V}]$$

- Vypočítajte prúd na konci vedenia na obrázku.
- Vypočítajte napätie a prúd na začiatku vedenia.
- Vypočítajte výkon dodávaný do obvodu napäťovým zdrojom U_g , ak jeho vnútorná impedancia Z_g je rovná vstupnej impedancii vedenia Z_1 .

Riešenie:

$$\text{a) } i_2 = \frac{u_2}{Z_2} = 3998 \cdot e^{0,725 \cdot j} \text{ mA}$$

$$\text{b) } u_1 = 3,998 \cdot e^{2,537 \cdot j} \text{ V}, i_1 = \frac{u_1}{Z_1} = 38,703 \cdot e^{-2,610 \cdot j} \text{ mA}$$

$$\text{c) } S_g = \frac{u_g \cdot \bar{i}_g}{2} = u_1 \cdot \bar{i}_1 = P_g + jQ_g = 65,22545 \cdot 10^{-3} + j140,34151 \cdot 10^{-3} \text{ VA}$$