

TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

Doc. Ing. V. Šimko, CSc. - Doc. Ing. D. Kováč, CSc.

ZBIERKA PRÍKLADOV Z TEORETICKEJ ELEKTROTECHNIKY

I

ISBN 80 - 88786 - 98 - 3

academic press

elfa

1999

ZBIERKA PRÍKLADOV Z TEORETICKEJ ELEKTROTECHNIKY I

Za odbornú náplň tohoto vysokoškolského učebného textu zodpovedajú autori. Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

ISBN 80 - 88786 - 98 - 3

OBSAH

PREDSLOV

1	JEDNOSMERNÉ OBVODY	1
1.1	Základné vzťahy	1
1.2	Riešené príklady	3
1.3	Úlohy na riešenie	15
2	JEDNOFÁZOVÉ HARMONICKÉ OBVODY	29
2.1	Základné vzťahy	29
2.2	Riešené príklady	31
2.3	Úlohy na riešenie	44
3	DIELEKTRICKÉ OBVODY	59
3.1	Základné vzťahy	59
3.2	Riešené príklady	61
3.3	Úlohy na riešenie	66
4	MAGNETICKÉ OBVODY	71
4.1	Základné vzťahy	71
4.2	Riešené príklady	74
4.3	Úlohy na riešenie	85
	POUŽITÁ LITERATÚRA	89

Zbierka príkladov z Teoretickej elektrotechniky I, je určená ako doporučená literatúra pre študentov 1. ročníka FEI v Košiciach. Je prepracovaním zbierky príkladov, ktorá bola v minulosti na KTEEM zostavená. V zbierke sú príklady len k niektorým častiam učebnej látky, ktorá sa v predmete Teoretická elektrotechnika I preberá.

Jednotlivé kapitoly obsahujú všeobecnú časť danej problematiky, kde sú uvedené niektoré základné vzťahy potrebné pre riešenie príkladov. Je treba pripomenúť, že všeobecná časť so základnými vzťahmi (vzorcami) nenahradzuje v plnom rozsahu preberanú látku z danej problematiky, slúži len k ľahšej orientácii pri riešení príkladov. Potom sú uvedené typové vypočítané príklady. V tretej časti každej kapitoly sú úlohy na samostatné riešenie a zároveň sú uvedené číselné výsledky na porovnanie správnosti riešenia.

Ďakujeme Doc. Ing. I. Kováčovej, Csc., a Ing. J. Klanicovi za prečítanie rukopisu a za pripomienky. Čitateľom zbierky a riešiteľom úloh, ktoré sú v zbierke uvedené, želáme, aby im zbierka pomohla zvládnuť učebnú látku.

Košice, január 1999

Autori

1 JEDNOSMERNÉ OBVODY

1.1 ZÁKLADNÉ VZŤAHY

Ohmov zákon

$$I = \frac{U}{R}, \quad \text{kde}$$

I je jednosmerný elektrický prúd; [A]

U je jednosmerné elektrické napätie; [V]

R je elektrický odpor; [Ω]

Elektrický odpor vodiča kruhového prierezu

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad \text{kde}$$

ρ je elektrický memý odpor; [Ωm]

l je dĺžka vodiča; [m]

S je prierez vodiča; [m^2]

Závislosť odporu od teploty

$$R_{\vartheta} = R_0 [1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0)], \quad \text{kde}$$

R_{ϑ} je elektrický odpor pri teplote ϑ ; [Ω]

R_0 je elektrický odpor pri teplote okolia (pri teplote 20°C); [Ω]

α je teplotný súčiniteľ odporu; [$1/^\circ\text{C}$]

ϑ je teplota, pri ktorej sa zisťuje odpor; [$^\circ\text{C}$]

ϑ_0 je teplota okolia (predpokladá sa 20°C); [$^\circ\text{C}$]

Výkon jednosmerného prúdu a napätia

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}, \quad \text{kde}$$

P je výkon; [W]

Účinnosť

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}, \quad \text{kde}$$

P_1 je príkon; [W]

P_2 je výkon; [W]

Práca jednosmerného prúdu a napätia

$A = U I t$, kde t je čas; [s]

Hodnota výsledného odporu z „n“ odporov zapojených do série

$$R = \sum_{k=1}^n R_k$$

Hodnota výsledného odporu z „n“ odporov zapojených paralelne

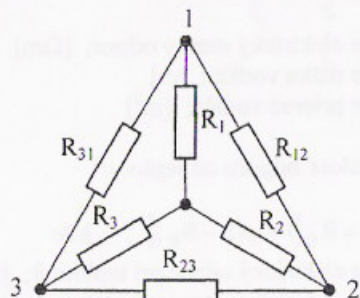
$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}, \text{ kde } R \text{ je výsledný odpor, } R_k \text{ je } k\text{-tý odpor v zapojení}$$

Transfigurácia trojlúčovej odporovej hviezdy na trojuholník, obr. 1.1-1

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$



Obr. 1.1-1

Transfigurácia odporového trojuholníka na trojlúčovú odporovú hviezdu

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

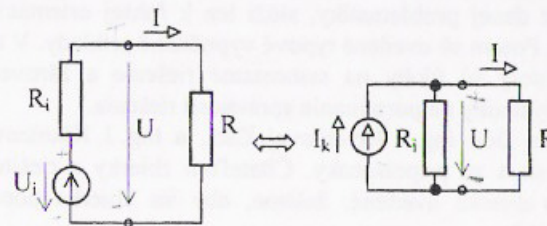
Prvý Kirchhoffov zákon (1.K.z.) – pre uzol elektrickej schémy. Kladné znamienko priradíme prúdom orientovaným von z uzla, záporné znamienko priradíme prúdom orientovaným do uzla. Nezáleží na tom, či sa jedná o prúd prúdového zdroja, alebo vetvový prúd v schéme.

$$\sum_{i=1}^m \pm I_i = 0, \text{ m je počet vetiev v uzle.}$$

Druhý Kirchhoffov zákon (2.K.z.) – pre slučky elektrického obvodu. Kladné znamienko priradíme napätiu, ktoré má zhodnú orientáciu s orientáciou slučky a opačne. Nezáleží, či sa jedná o napätie napätového zdroja, alebo o napätie, ktoré je vytvorené na pasívnom prvku od pretekaného prúdu.

$$\sum_{v=1}^p \pm U_v = 0, \text{ kde p je počet vetiev v slučke.}$$

Náhrada reálneho napätového zdroja reálnym prúdovým zdrojom a opačne, obr. 1.1-2.



Obr. 1.1-2

$$I_k = \frac{U_i}{R_i}$$

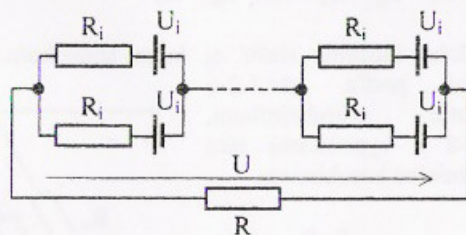
1.2 RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 1.2-1 Pri výpočte vinutia cievky sa uvažoval približne merný odpor vodiča $\rho = 0,02 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$ namiesto presnejšej hodnoty $0,0178 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$. S akým oteplením vinutia je už nepriamo počítané? ($\alpha = 0,00392 \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$)

Riešenie:

$$\Delta \vartheta = \vartheta - \vartheta_0 = \frac{R_9 - R_0}{\alpha R_0} = \frac{\rho_9 - \rho_0}{\alpha \rho_0} = \frac{0,02 - 0,0178}{0,00392 \cdot 0,0178} = 31,5 ^{\circ}\text{C}$$

Príklad 1.2-2 Dvanásť článkov s vnútorným napätím $U_i = 1,5 \text{ V}$ a s vnútorným odporom $R_i = 0,75 \Omega$ sú zapojené v sérioparalelnej kombinácii, obr.1.2-1. Zátťažný odpor je $R = 5 \Omega$. Určte vnútorné napätie náhradného napät'ového zdroja, svorkové napätie a prúd tečúci obvodom!



Obr. 1.2-1

Riešenie:

Obvod nahradíme jedným zdrojom podľa obr.1.2-2. Celkove môžeme urobiť „s“ sériových skupín s „p“ paralelnými zapojeniami. V našom prípade $s = 6$ a $p = 2$. Celkové vnútorné napätie náhradného zdroja je

$$U_{ic} = s U_i = 6 \cdot 1,5 = 9 \text{ V}$$

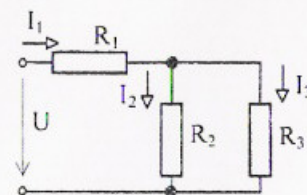
Prúd tečúci v obvode

$$I = \frac{s U_i}{\frac{s R_i}{p} + R} = \frac{6 \cdot 1,5}{\frac{6 \cdot 0,75}{2} + 5} = 1,24 \text{ A}$$

Svorkové napätie

$$U = U_{ic} - \frac{s R_i}{p} I = 9 - 3 \cdot 0,75 \cdot 1,24 = 6,2 \text{ V}$$

Príklad 1.2-3 Určte prúdy tečúce v jednotlivých vetvách obvodu podľa schémy na obr.1.2-3 a celkový výkon odoberaný zo zdroja, ak napätie $U = 21 \text{ V}$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$!

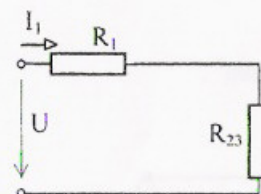


Obr. 1.2-3

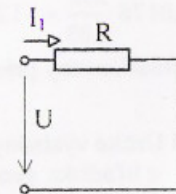
Riešenie:

Úlohu budeme riešiť zjednodušaním zapojenia. Schému budeme postupne prekresľovať a vypočítavať potrebné veličiny.

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \Omega$$



Obr. 1.2-4



Obr. 1.2-5

$$R = R_1 + R_{23} = 5 + 2 = 7 \Omega ; \quad I_1 = \frac{U}{R} = \frac{21}{7} = 3 \text{ A} ;$$

Prúdy v jednotlivých vetvách obvodu môžeme určiť z prúdového deliča a z I.K.Z.

$$I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 3 \frac{6}{3 + 6} = 2 \text{ A} ; \quad I_3 = I_1 - I_2 = 3 - 2 = 1 \text{ A}$$

Celkový odoberaný výkon je

$$P = U I_1 = 21 \cdot 3 = 63 \text{ W}$$

Príklad 1.2-4 Určte prierez medeného vedenia, ktorým je pripojený spotrebič s príkonom 10 kW a napätím 110 V vzdialeným 100 m od jednosmerného zdroja, aby úbytok napätia na vedení bol maximálne 2,5 % napätia spotrebiča! ($\rho_{Cu} = 0,0178 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$)

Riešenie:

Maximálny úbytok napätia na vedení je

$$\Delta U = \frac{U}{100} u \% = \frac{110}{100} 2,5 = 2,75 \text{ V}$$

Prúd tečúci zo zdroja je

$$I = \frac{P}{U} = \frac{10^4}{110} = 90,9 \text{ A}$$

Odpor napájacieho vedenia

$$R = \frac{\Delta U}{I} = \frac{2,75}{90,9} = 0,03 \Omega$$

Prierez vedenia

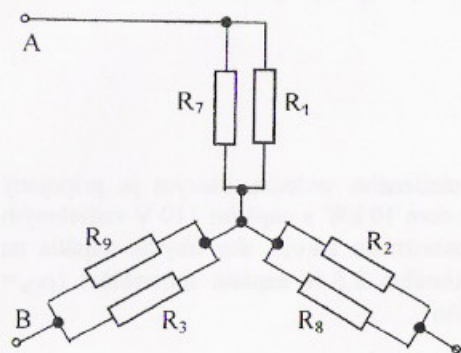
$$S = \rho \frac{l}{R} = 0,0178 \frac{200}{0,03} = 117,68 \text{ mm}^2$$

Najbližší normalizovaný prierez vodiča je 120 mm^2 .

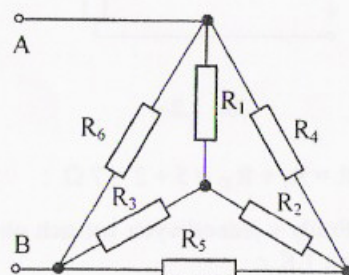
Príklad 1.2-5 Určite výsledný odpor z hľadiska svoriek A a B v zapojení na obr.1.2-6, $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$, $R_4 = R_5 = R_6 = 3 \Omega$!

Riešenie:

Odpory R_4, R_5, R_6 sú zapojené do trojuholníka. Nahradíme ich zapojením do trojlúčovej hviezdy, obr. 1.2-7.



Obr. 1.2-7



Obr. 1.2-6

Pretože odpory v trojuholníku majú rovnakú hodnotu, budú mať rovnakú hodnotu aj ich náhrady v trojlúčovej hviezde

$$R_7 = \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3 + 3} = \frac{R_4}{3} = 1 \Omega$$

$$R_7 = R_8 = R_9$$

Odpory R_1 a R_7 sú zapojené paralelne. Podobne sú zapojené odpory R_3 a R_9 . Z hľadiska svoriek A a B sú tieto dve paralelné kombinácie zapojené do série, takže

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_7}{R_1 + R_7} + \frac{R_3 R_9}{R_3 + R_9} = \frac{R_1}{2} + \frac{R_3}{2} = 0,5 + 0,5 = 1 \Omega,$$

pretože $R_1 = R_2 = R_3 = R_7 = R_8 = R_9$

Úlohu môžeme riešiť aj iným spôsobom. Odpory R_1, R_2, R_3 zapojené podľa obr.1.2-6 nahradíme trojuholníkom, obr.1.2-8 a vypočítame túto sérioparalelnú kombináciu.

$$R_E = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

V našom prípade $R_1 = R_2 = R_3$, takže aj $R_E = R_F = R_G$ a môžeme napísať

$$R_E = 3 R_1 = 3 \cdot 1 = 3 \Omega$$

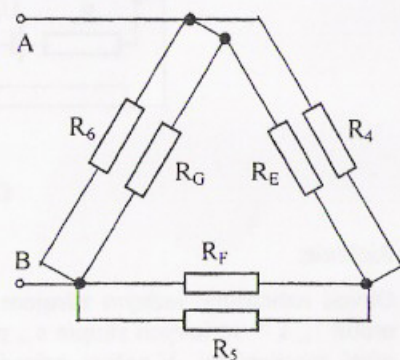
Potom podľa schémy na obr.1.2-9

$$R_C = \frac{R_4 R_E}{R_4 + R_E} + \frac{R_5 R_F}{R_5 + R_F} =$$

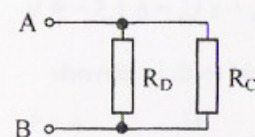
$$= \frac{R_4}{2} + \frac{R_5}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 \Omega$$

$$R_D = \frac{R_6 R_G}{R_6 + R_G} = \frac{R_6}{2} = 1,5 \Omega$$

$$R_{AB} = \frac{R_C R_D}{R_C + R_D} = \frac{3 \cdot 1,5}{3 + 1,5} = 1 \Omega$$

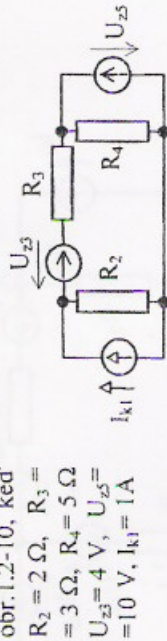


Obr. 1.2-8



Obr. 1.2-9

Príklad 1.2-6 Určte prúdy tečúce v jednotlivých vetvách v obvode podľa obr.1.2-10, keď

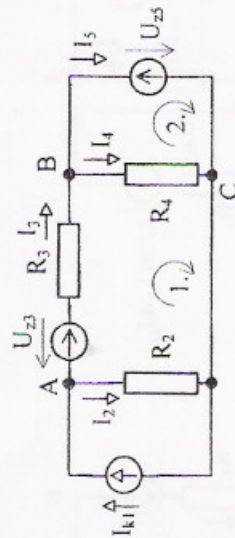


Riešenie: a)

Obvod budeme riešiť priamym

použitím Kirchhoffových zákonov.

Zvolíme ľubovoľne počítacie smery (zmysly) prúdov v jednotlivých vetvách a orientáciu nezávislých (hlavných) slučiek, obr.1.2-11.



Obr. 1.2-11

Nakreslíme orientovaný topologický graf, obr.1.2-12. V obr.1.2-12 vetvy prúdu sú označené plnou čiarou, ostatné vetvy sú nezávislé vetvy.

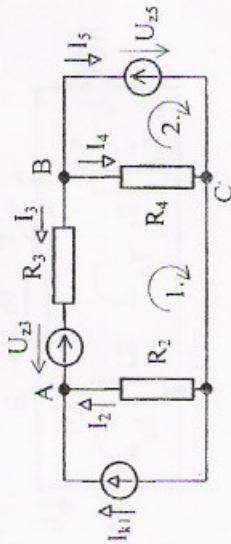
V danom obvode sú dva nezávislé uzly A, B a dve nezávislé slučky 1 a 2. Napíšeme teda dve rovnice podľa 1.K.z. a dve rovnice podľa 2.K.z.

$$\begin{aligned} -I_{k1} + I_3 + I_2 &= 0 \\ -I_3 + I_4 + I_5 &= 0 \\ -R_2 I_2 - U_{23} + R_3 I_3 + R_4 I_4 &= 0 \\ -R_4 I_4 + U_{25} &= 0 \end{aligned}$$

Sústavu rovníc riešime a vypočítame neznáme veličiny – prúdy I_2, I_3, I_4, I_5 .

Rovnice pre riešenie obvodu použijeme K.z. môžeme zapísať aj pomocou incidenčnej matice nezávislých uzlov [A] a matice nezávislých slučiek [B].

Pre tento zápis je výhodné prúd tečúci cez odpor pripojený paralelne k ideálnemu prúdovému zdroju, tento odpor počítame za vnútorný odpor reálneho prúdového zdroja, orientovať v tom istom zmysle ako je orientovaný prúd ideálneho prúdového zdroja. Prúd tečúci vo vetve, kde je zapojený napäťový zdroj, orientovať v tom istom zmysle, ako je orientované napätie napäťového zdroja, obr.1.2-13.



Obr. 1.2-13

Potom rovnice pre 1. a 2. K.z. majú tvar

$$\begin{aligned} [A][i] &= -[A][I_z] \\ [B][R][i] &= -[B][U_z] \end{aligned}$$

Za hore uvedeného predpokladu orientácie prúdov, do stĺpcových matic $[I_z]$ a $[U_z]$ sa zapíšu hodnoty zdrojov vždy s kladným znamienkom. Takže

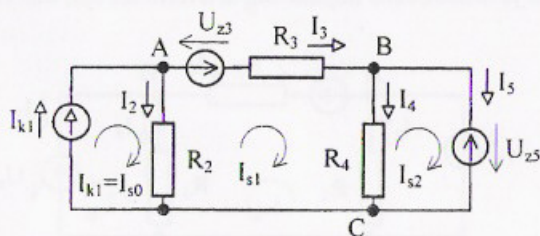
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} [i] = - \begin{bmatrix} I_{k1} \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [i] = - \begin{bmatrix} U_{23} \\ R_2 I_2 + U_{23} + R_3 I_3 + R_4 I_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maticový zápis rovníc je výhodný pre počítačové spracovanie.

Riešenie: b)

Obvod budeme riešiť *metódou slučkových prúdov*. Orientácii slučiek priradíme význam slučkového prúdu a napíšeme rovnice podľa 2. K.z. Tým sa redukuje počet rovníc voči predchádzajúcemu riešeniu. Schéma je na obr.1.2-14.



Obr. 1.2-14

Prúd v slučke I_{s0} je známy, je to prúd I_{k1} , ale napätie ním vytvorené na vzájomnom odpore sa musí zapísať do rovnice. Odpory vlastné sa vynásobia príslušným slučkovým prúdom. Rovnice majú tvar

$$\begin{aligned} -R_2 I_{k1} + (R_2 + R_3 + R_4) I_{s1} - R_4 I_{s2} &= U_{z3} \\ -R_4 I_{s1} + R_4 I_{s2} &= -U_{z5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 I_{s1} - 5 I_{s2} &= 4 + 2 \\ -5 I_{s1} + 5 I_{s2} &= -10 \end{aligned}$$

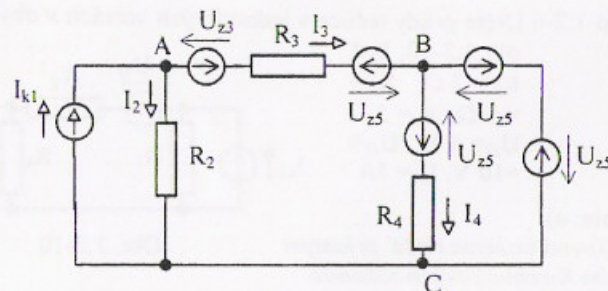
$$I_{s1} = -0,8 \text{ A}, \quad I_{s2} = -2,8 \text{ A}$$

$$\begin{aligned} I_2 = I_{k1} - I_{s1} &= 1,8 \text{ A}, & I_3 = I_{s1} &= -0,8 \text{ A} \\ I_4 = I_{s1} - I_{s2} &= 2 \text{ A}, & I_5 = I_{s2} &= -2,8 \text{ A} \end{aligned}$$

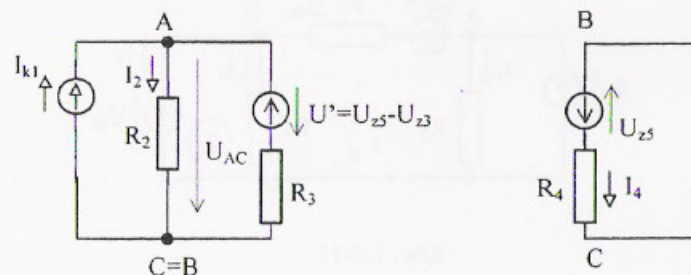
Riešenie: c)

Obvod budeme riešiť *metódou uzlových napätí*. Pretože v piatej vetve je ideálny napäťový zdroj a pri metóde uzlových napätí píšeme východiskové rovnice podľa 1. K.z., nedá sa určiť prúd nakrátko tohoto ideálneho napäťového zdroja, takže sa modifikuje základná schéma z obr.1.2-10 tým, že ideálny napäťový zdroj premiestnime za uzol, obr.1.2-15. Obvod sa rozdelil na dve samostatné časti, obr.1.2-16.

V prvej časti obvodu je len jeden nezávislý uzol, takže stačí napísať len jednu rovnicu podľa 1. K.z. Uzlové napätie sa vynásobí vlastnými vodivosťami a na druhú stranu rovnice sa napíšu prúdy



Obr. 1.2-15



Obr. 1.2-16

nakrátko napäťových zdrojov s ohľadom na znamienko, takže rovnica bude mať tvar

$$\begin{aligned} (G_2 + G_3) U_{AC} &= G_3 U' + I_{k1} \\ 0,833 U_{AC} &= 0,333 \cdot 6 + 1 \\ U_{AC} &= 3,6 \text{ V} \end{aligned}$$

$$I_3 = G_3 (U_{AC} - U') = -0,8 \text{ A}$$

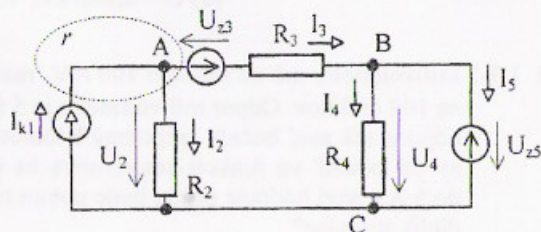
Pre druhú časť obvodu môžeme napísať

$$I_4 = G_4 U_{z5} = 2 \text{ A}, \quad \text{potom z pôvodnej schémy platí}$$

$$I_5 = I_3 - I_4 = -2,8 \text{ A}$$

Riešenie: d)

Analýzu obvodu urobíme pomocou *rezových napätí*. Metóda je vhodná pre obvody, ktoré obsahujú ideálne napäťové zdroje, prúdové zdroje. Východiskové rovnice píšeme podľa 1.K.z. pre nezávislé uzly, ale počet rovníc sa zníži o toľko, koľko je v obvode zapojených ideálnych napäťových zdrojov. Urobíme v schéme hlavné rezy tak, že hlavný rez nemôže rezať vetvu, ktorá obsahuje ideálne napäťové zdroje, obr.1-2.17. Na obr.1-2.18 je nakreslený graf pre daný obvod.



Obr. 1.2-17

Pre zvolený rez napíšeme rovnicu

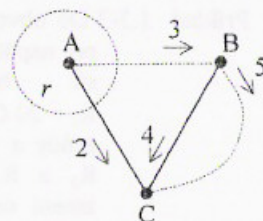
$$-I_{k1} + G_2 U_2 + G_3 (U_2 - U_{z5}) + G_3 U_{z3} = 0$$

$$U_2 = \frac{G_3 U_{z5} + I_{k1} - G_3 U_{z3}}{G_2 + G_3} = 3,6 \text{ V}$$

$$I_2 = G_2 U_2 = 1,8 \text{ A}, \quad I_3 = I_{k1} - I_2 = -0,8 \text{ A},$$

$$I_4 = G_4 U_4 = G_4 U_{z5} = 2 \text{ A},$$

$$I_5 = I_3 - I_4 = -2,8 \text{ A}$$



Obr. 1.2-18

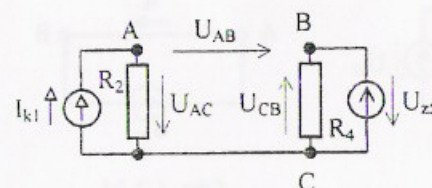
Riešenie: e)

V nasledujúcej časti si ukážeme, ak by bolo potrebné riešiť prúd len v tretej vetve obvodu. K riešeniu použijeme *Theveninovú vetu*. Pre určenie vnútorného napätia náhradného zdroja je schéma na obr.1.2- 19.

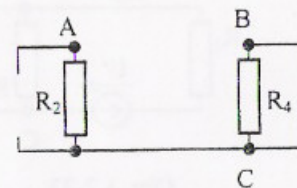
$$U_i = U_{AB} = U_{CB} + U_{AC} = -U_{z5} + R_2 I_{k1} = -8 \text{ V}$$

Vnútorný odpor náhradného zdroja určíme zo schémy na obr.1. 2-20.

$$R_i = R_{AB} = R_2 = 2 \Omega$$

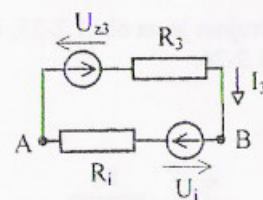


Obr. 1.2-19



Obr. 1.2-20

Prúd tečúci v tretej vetve sa vypočíta z náhradného obvodu, obr.1.2-21.



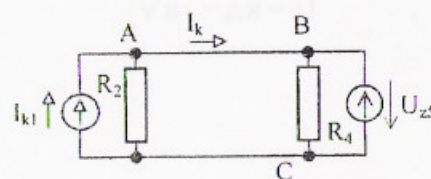
Obr. 1.2-21

$$(R_3 + R_i) - U_i - U_{z3} = 0$$

$$I_3 = \frac{U_i + U_{z3}}{R_3 + R_i} = -0,8 \text{ A}$$

Riešenie: f)

Pre výpočet prúdu v tretej vetve obvodu na obr.1.2-6 použijeme *Nortonovu vetu*.



Obr. 1.2-22

Je potrebné určiť prúd náhradného prúdového zdroja I_k , obr.1.2-22.

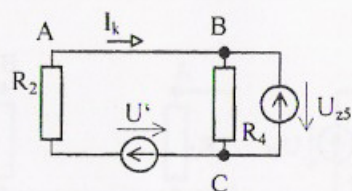
Reálny prúdový zdroj s prúdom I_{k1} a s odporom R_2 , nahradíme napäťovým zdrojom (U' , R_2), schéma je na obr.1.2-23 a určíme prúd I_k .

$$U_{z5} - U' + R_2 I_k = 0,$$

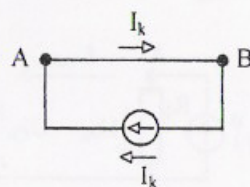
$$U' = R_2 I_k$$

$$I_k = \frac{U' - U_{z5}}{R_2} = -4 \text{ A}$$

Prúd cez skratovaciu spojku musí byť orientovaný opačne, aby ho mohol dodávať prúdový zdroj pripojený k svorkám A, B, obr.1.2-24.



Obr. 1.2-23

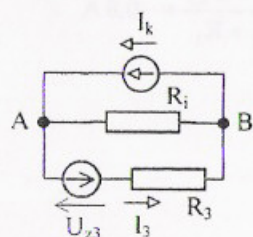


Obr. 1.2-24

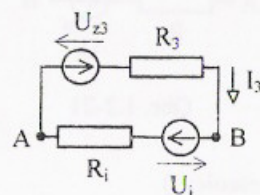
Vnútorný odpor R_i náhradného zdroja určíme ako pri Théveninovej vete, obr.1.2-20.

$$R_i = R_2 = 2 \Omega$$

Potom obvod s náhradným prúdovým zdrojom je na obr.1.2-25, resp. po náhrade zdrojom napäťovým podľa obr.1.2-26.



Obr. 1.2-25



Obr. 1.2-26

$$U_i + U_{z3} - (R_i + R_3) I_3 = 0$$

$$U_i = R_i I_k = -8 \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{U_i + U_{z3}}{R_i + R_3} = -0,8 \text{ A}$$

1.3 ÚLOHY NA RIEŠENIE

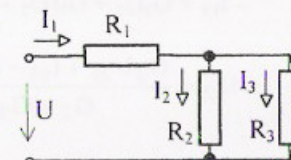
Príklad 1.3-1 Medeným vodičom s prierezom žily $S = 120 \text{ mm}^2$ sa má prenášať výkon 50 MW , od zdroja k spotrebiču pri účinnosti 90% . Aké musí byť napätie zdroja, ak zdroj a spotrebič sú vzdialené od seba a) 100 m , b) 1000 m ? Uvažuje sa, že memý odpor medi je $\rho = 0,0178 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$.

$$[a) U = 2,995 \text{ kV}; b) U = 299,5 \text{ kV}]$$

Príklad 1.3-2 Milivoltmeter má na rozsahu 100 mV , rozdelenú stupnicu na 100 dielikov. Odpor milivoltmetra je 5Ω . Akú hodnotu odporu má mať bočník pripojený k tomuto prístroju, aby sa dal použiť vo funkcii ampérmetra na meranie prúdov do 5 A a akej hodnote prúdu bude potom odpovedať jeden dielik stupnice?

$$[R = 20,08 \cdot 10^{-3} \Omega; I = 0,05 \text{ A}]$$

Príklad 1.3-3 Do obvodu na obr.1.3-1 sa dodáva výkon $P = 31,25 \text{ kW}$ pri napätí $U = 625 \text{ V}$. Známe sú hodnoty odporov $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$. Určte prúdy a výkon na odporoch R_2 a R_3 ! Stanovte ako sa zmení celkový výkon P , ak napätie stúpne o 20% a odpory ostanú nezmenené?

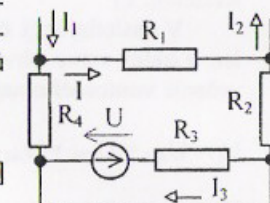


Obr. 1.3-1

$$[I_2 = 30 \text{ A}, I_3 = 20 \text{ A}, P_2 = 18 \text{ kW}, P_3 = 12 \text{ kW}, P = 45 \text{ kW}]$$

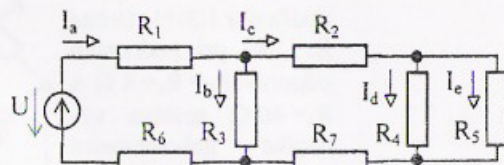
Príklad 1.3-4 V schéme na obr.1.3-2 vypočítajte veľkosť napätia U a prúdu I , ak všetky odpory majú hodnotu 1Ω a $I_1 = I_2 = I_3 = 3 \text{ A}$.

$$[U = 4 \text{ V}, I = 2 \text{ A}]$$



Obr. 1.3-2

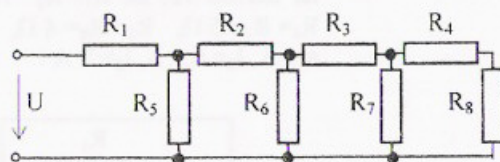
Príklad 1.3-5 Určite prúdy I_a, I_b, I_c, I_d, I_e v schéme na obr.1.3-3, ak $U = 48 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = R_6 = R_7 = 1 \Omega$, $R_3 = 12 \Omega$, $R_4 = 3 \Omega$, $R_5 = 6 \Omega$!



Obr. 1.3-3

$[I_a = 8 \text{ A}, I_b = 2 \text{ A}, I_c = 6 \text{ A}, I_d = 4 \text{ A}, I_e = 2 \text{ A}]$

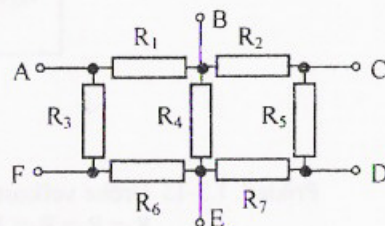
Príklad 1.3-6 V schéme na obr.1.3-4 určte: a) Prúd cez odpor R_5 pri napätí $U = 225 \text{ V}$; b) pri akom napätí U bude mať prúd pretekajúci odporom R_8 hodnotu 3 A ! Hodnoty odporov sú $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = R_6 = R_7 = 20 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 12 \Omega$, $R_5 = 60 \Omega$, $R_8 = 8 \Omega$.



Obr. 1.3-4

$[a) I_{R5} = 3 \text{ A}, b) U = 450 \text{ V}]$

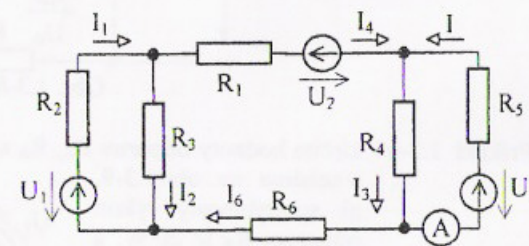
Príklad 1.3-7 V schéme na obr.1.3-5 majú všetky odpory hodnotu 1Ω . Určte hodnotu ekvivalentného náhradného odporu medzi svorkami AB, AC, AD AF, BD, BE, DF !



Obr. 1.3-5

$[R_{AB} = R_{AF} = 0,733 \Omega, R_{AC} = R_{DF} = 1,33 \Omega, R_{BD} = 0,933 \Omega, R_{BE} = 0,6 \Omega, R_{AD} = 1,4 \Omega]$

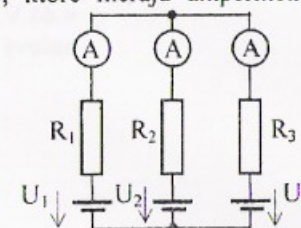
Príklad 1.3-8 Ampérmeter v schéme na obr.1.3-6 ukazuje hodnotu prúdu 8 A . Určte prúdy v ostatných vetvách obvodu! $U_1 = 120 \text{ V}$, $U_2 = 6 \text{ V}$, $U_3 = 80 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = R_4 = 2 \Omega$, $R_3 = R_5 = 6 \Omega$, $R_6 = 3 \Omega$.



Obr. 1.3-6

$[I_1 = 21 \text{ A}, I_2 = 13 \text{ A}, I_3 = 16 \text{ A}, I_4 = I_6 = 8 \text{ A}]$

Príklad 1.3-9 Vypočítajte veľkosti prúdov, ktoré merajú ampérmetry zapojené v schéme na obr.1.3-7, ak $U_1 = 40 \text{ V}$, $U_2 = 5 \text{ V}$, $U_3 = 30 \text{ V}$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$.

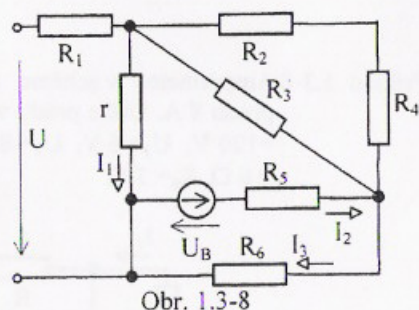


$[I_{A1} = 5 \text{ A}, I_{A2} = 10 \text{ A}, I_{A3} = 5 \text{ A}]$

Obr. 1.3-7

Príklad 1.3-10 V schéme na obr.1.3-8 stanovte napätie U , odpor r a napätie zdroja U_B ! $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 3 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$, $R_6 = 4 \Omega$, $I_1 = 5 \text{ A}$, $I_2 = 1 \text{ A}$, $I_3 = 2 \text{ A}$.

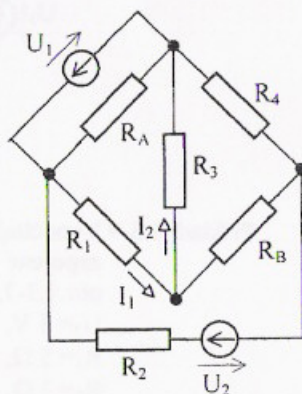
$[U = 34 \text{ V}, r = 2 \Omega, U_B = 9 \text{ V}]$



Obr. 1.3-8

Príklad 1.3-11 Určite hodnoty odporov R_A , R_B a veľkosti napätí U_1 , U_2 v schéme na obr.1.3-9, ak spotrebovaný výkon odporom R_B je 20 W, a $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 5 \Omega$, $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = 1 \text{ A}$!

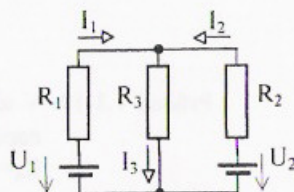
$[R_B = 20 \Omega$, $U_1 = 40 \text{ V}$, $U_2 = 44 \text{ V}$, R_A ľubovoľný nenulový]



Obr. 1.3-9

Príklad 1.3-12 V schéme na obr.1.3-10 stanovte veľkosti prúdov I_1 , I_2 , I_3 . Parametre obvodu sú: $U_1 = 80 \text{ V}$, $U_2 = 125 \text{ V}$, $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$!

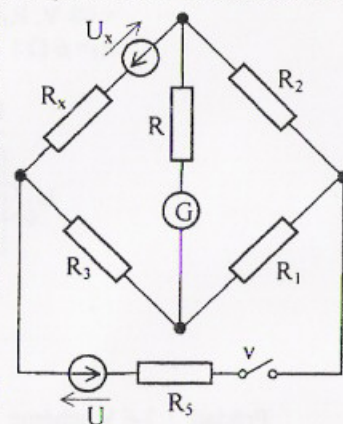
$[I_1 = -2,5 \text{ A}$, $I_2 = 7 \text{ A}$, $I_3 = 4,5 \text{ A}]$



Obr. 1.3-10

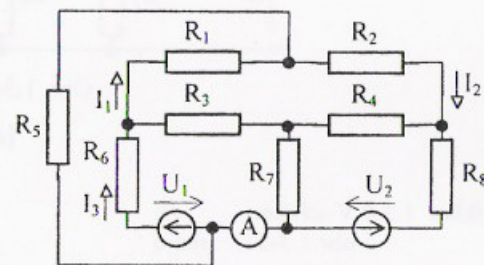
Príklad 1.3-13 Na zmeranie vnútorného odporu R_x a vnútorného napätia U_x napäťového zdroja bolo použité mostíkové zapojenie podľa obr.1.3-11. Určite R_x , ak pri hodnotách odporov $R_2 = R_3 = 4 \Omega$ a $R_1 = 40 \Omega$ zostáva výchylka galvanometra rovnaká pri zopnutom aj pri rozopnutom spínači v!

$[R_x = 0,4 \Omega]$



Obr. 1.3-11

Príklad 1.3-14 Určite akú hodnotu prúdu ukazuje ampérmeter v schéme na obr.1.3-12, ak $R_1 = R_3 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_6 = 40 \Omega$, $R_4 = R_7 = 5 \Omega$, $R_5 = R_8 = 4 \Omega$, $U_1 = 42 \text{ V}$, $U_2 = 8 \text{ V}$, $I_1 = 1 \text{ A}$, $I_2 = 0,5 \text{ A}$, $I_3 = 3 \text{ A}$!

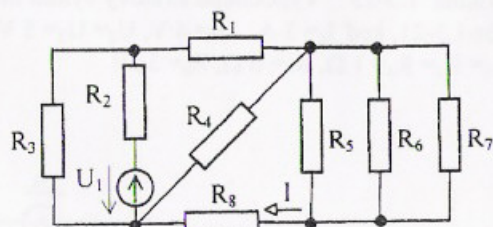


Obr. 1.3-12

$[I_A = 2,5 \text{ A}]$

Príklad 1.3-15 Určite veľkosť napätia U_1 v obvode na obr.1.3-13. $R_1 = R_2 = R_4 = R_8 = 1 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $R_5 = 2 \Omega$, $R_6 = 6 \Omega$, $R_7 = 3 \Omega$, $I = 2 \text{ A}$!

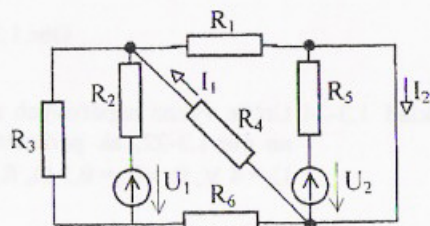
$[U_1 = 18 \text{ V}]$



Obr. 1.3-13

Príklad 1.3-16 Určite veľkosti napätí U_1 a U_2 v zapojení na obr.1.3-14, ak $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = R_6 = 1 \Omega$, $R_4 = 2 \Omega$, $I_1 = 1 \text{ A}$, $I_2 = 2 \text{ A}$!

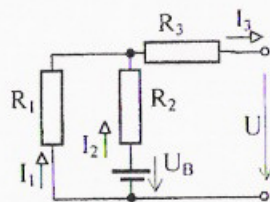
$$[U_1 = -13 \text{ V}, U_2 = 4 \text{ V}]$$



Obr. 1.3-14

Príklad 1.3-17 Vypočítajte prúdy v obvode podľa obr.1.3-15, pričom $U = 20 \text{ V}$, $U_B = 100 \text{ V}$, $R_1 = R_3 = 10 \Omega$, $R_2 = 25 \Omega$.

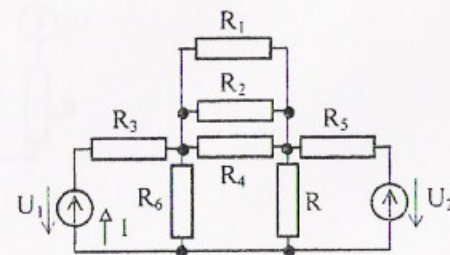
$$[I_1 = -2,5 \text{ A}, I_2 = 3 \text{ A}, I_3 = 0,5 \text{ A}]$$



Obr. 1.3-15

Príklad 1.3-18 Určite odpor R v schéme podľa obr.1.3-16! Platí, že

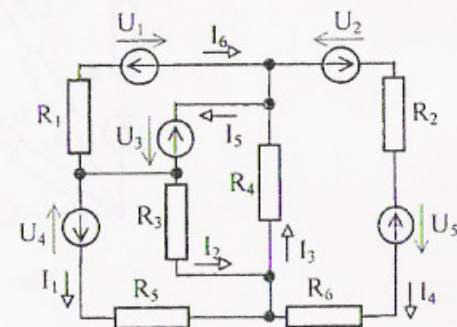
$$\begin{aligned} R_1 &= R_6 = 4 \Omega, \\ R_2 &= 12 \Omega, \\ R_3 &= 2 \Omega, R_4 = \\ &= 6 \Omega, R_5 = \\ &= 1 \Omega, U_1 = \\ &= 12 \text{ V}, U_2 = \\ &= 30 \text{ V}, \\ I &= 0 \text{ A}. \end{aligned}$$



$$[R = 2 \Omega]$$

Obr. 1.3-16

Príklad 1.3-19 V obvode zapojenom podľa obr.1.3-17 určte jednotlivé prúdy! Parametre obvodu sú: $U_1 = 6 \text{ V}$, $U_2 = U_3 = 6 \text{ V}$, $U_4 = 4 \text{ V}$, $U_5 = 2 \text{ V}$, $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = R_5 = R_6 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$.

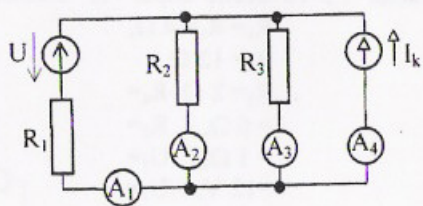


Obr. 1.3-17

$$[I_1 = I_4 = I_6 = 1 \text{ A}, I_2 = 2 \text{ A}, I_3 = I_5 = 4 \text{ A}]$$

Príklad 1.3-20 Určte hodnoty prúdov, ktoré ukazujú ampérmetre zapojené podľa schémy na obr.1.3-18, pričom $U = 32 \text{ V}$, $I_k = 18 \text{ A}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$!

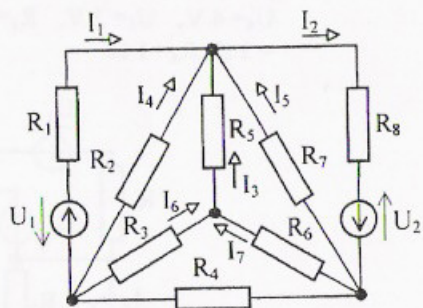
$$[I_{A1} = 2 \text{ A}, I_{A2} = 5 \text{ A}, I_{A3} = 15 \text{ A}, I_{A4} = 18 \text{ A}]$$



Obr. 1.3-18

Príklad 1.3-21 Vypočítajte jednotlivé prúdy v obvode na obr.1.3-19, ak parametre obvodu sú: $U_1 = 15 \text{ V}$, $U_2 = 105 \text{ V}$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 300 \Omega$, $R_3 = R_5 = R_6 = 20 \Omega$, $R_4 = 30 \Omega$, $R_7 = 60 \Omega$, $R_8 = 9 \Omega$!

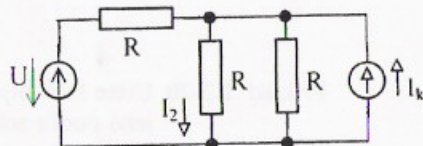
$[I_1 = 3 \text{ A}, I_2 = 5 \text{ A}, I_3 = I_5 = 1 \text{ A}, I_4 = 0 \text{ A}, I_6 = -1 \text{ A}, I_7 = 2 \text{ A}]$



Obr. 1.3-19

Príklad 1.3-22 V obvode na obr.1.3-20 je $R = 4 \Omega$, $I_k = 3 \text{ A}$, $U = 6 \text{ V}$. Určite veľkosť prúdu I_2 !

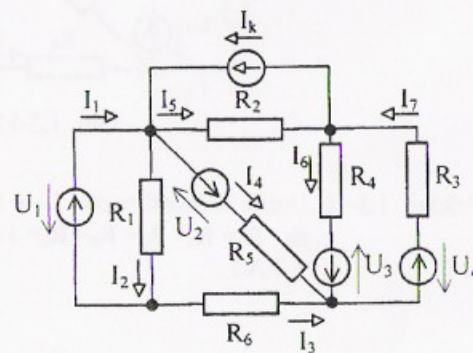
$[I_2 = 1,5 \text{ A}]$



Obr.1.3-20

Príklad 1.3-23 Vypočítajte stratový výkon na odpore R_5 v schéme na obr.1.3-21, keď $I_k = 3 \text{ A}$, $U_1 = 4 \text{ V}$, $U_2 = U_3 = 5 \text{ V}$, $U_4 = 1 \text{ V}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 1 \Omega$, $R_5 = 6 \Omega$, $R_6 = 3 \Omega$!

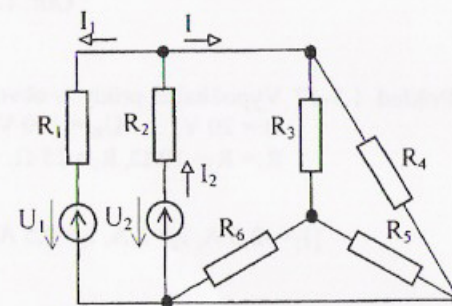
$[P_{R_5} = 9 \text{ W}]$



Obr.1.3-21

Príklad 1.3-24 Určite výkon napäťových zdrojov zapojených v obvode na obr.1.3-22, ak parametre obvodu sú: $U_1 = 1,859 \text{ V}$, $U_2 = 4 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 0,5 \Omega$, $R_3 = R_5 = R_6 = 1,2 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$!

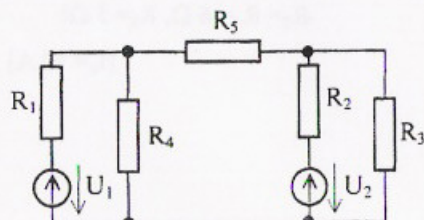
$[P_1 = 1 \text{ W}, P_2 = 14,2 \text{ W}]$



Obr.1.3-22

Príklad 1.3-31 Parametre obvodu zobrazeného na obr.1.3-28 sú: $U_1 = 2 \text{ V}$, $U_2 = 1 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $R_3 = R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 4/3 \Omega$. Určite napätie na odpore R_5 !

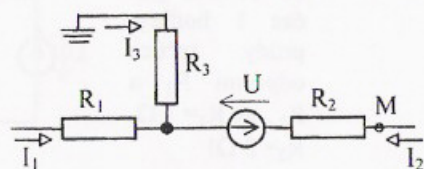
$$[U_5 = 1/3 \text{ V}]$$



Obr.1.3-28

Príklad 1.3-32 V schéme na obr.1.3-29 stanovte veľkosť prúdu I_2 a potenciál bodu M! Vieme, že $I_1 = 20 \text{ mA}$, $I_3 = -10 \text{ mA}$, $U = 15 \text{ V}$, $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$.

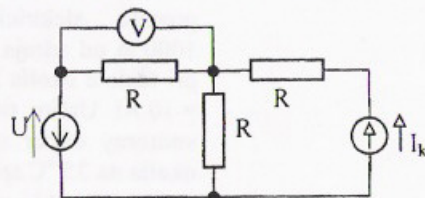
$$[I_2 = -10 \text{ mA}, V_M = 65 \text{ V}]$$



Obr.1.3-29

Príklad 1.3-33 V zapojení na obr.1.3-30 najdite veľkosť napätia U , ak zapojený voltmetr ukazuje nulu, prúd prúdového zdroja $I_k = 1 \text{ mA}$ a $R = 1 \text{ k}\Omega$!

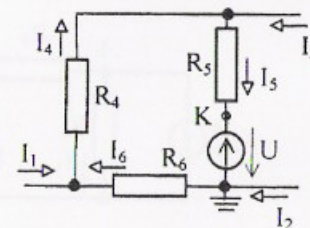
$$[U = -1 \text{ V}]$$



Obr.1.3-30

Príklad 1.3-34 Vypočítajte na základe obr.1.3-31 veľkosť jednotlivých prúdov a potenciálu v bode K, keď poznáte $I_1 = 5 \text{ mA}$, $I_3 = -20 \text{ mA}$, $R_4 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 2 \text{ k}\Omega$, $U = 20 \text{ V}$!

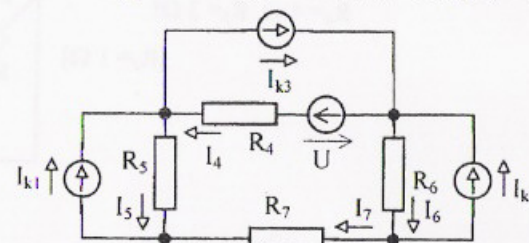
$$[I_2 = 15 \text{ mA}, I_4 = 5 \text{ mA}, I_5 = -15 \text{ mA}, I_6 = 0 \text{ mA}, V_K = 20 \text{ V}]$$



Obr.1.3-31

Príklad 1.3-35 Zistite veľkosť vetvových prúdov v obvode, ktorého schéma je na obr.1.3-32! Parametre obvodu sú: $I_{k1} = 1 \text{ mA}$, $I_{k2} = 2 \text{ mA}$, $I_{k3} = 3 \text{ mA}$, $R_4 = 4 \Omega$, $R_5 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 6 \text{ k}\Omega$, $R_7 = 7 \text{ k}\Omega$, $U = -79 \text{ V}$.

$$[I_4 = -1 \text{ mA}, I_5 = -3 \text{ mA}, I_6 = 6 \text{ mA}, I_7 = 4 \text{ mA}]$$



Obr.1.3-32

Poznámky

2 JEDNOFÁZOVÉ HARMONICKÉ OBVODY

2.1 ZÁKLADNÉ VZŤAHY

Okamžitý harmonický sa meniaci prúd môžeme vyjadriť vzťahmi

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi),$$

alebo

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi), \text{ kde}$$

I_m je maximálna hodnota prúdu ; [A]

ω je kruhová frekvencia, $\omega = 2\pi f$; [s^{-1}]

φ je fázový posun, (počiatočná fáza) ; [$^\circ$, rad]

f je frekvencia, $f = 1/T$; [Hz, s^{-1} , c/s]

T je doba periódy; [s]

Komplexný časový vektor prúdu (rotujúci fázor) zavedieme vzťahom

$$\dot{i}_m = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \sqrt{2} I e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

a komplexný vektor prúdu (fázor)

$$\dot{I} = I e^{j\varphi}, \text{ pričom } I \text{ je efektívna hodnota prúdu.}$$

Vzťah medzi okamžitým prúdom (priebehom okamžitých hodnôt prúdu) meniacim sa podľa sínusovej resp. podľa kosínusovej funkcie a komplexným časovým vektorom prúdu (rotujúcim fázorom) je

$$i = \operatorname{Im} [\dot{i}_m], \text{ resp. } i = \operatorname{Re} [\dot{i}_m]$$

Reaktancia induktívneho charakteru $X_L = 2\pi f L = \omega L$; [Ω],

Reaktancia kapacitného charakteru $X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{\omega C}$; [Ω]

Impedancia sériového R,L,C obvodu pre $X_L > X_C$

$$\dot{Z} = R + j(X_L - X_C) = Ze^{j\varphi}; [\Omega], \text{ kde}$$

R je ohmický odpor; $[\Omega]$

Z je veľkosť impedancie, $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$; $[\Omega]$

φ je fáza impedancie; $[\circ, \text{rad}]$ a môžeme ju určiť napríklad zo vŕahu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im}[\dot{Z}]}{\operatorname{Re}[\dot{Z}]} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$\text{Admitancia } \dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}; [S]$$

Okamžitý výkon

$$p = u i; [W]$$

Komplexný vektor zdanlivého výkonu

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^x; [VA], \text{ kde } \dot{I}^x = I e^{-j\varphi}$$

Činný (wattový) výkon je

$$P = \operatorname{Re}[\dot{S}] = UI \cos \varphi; [W]$$

Jalový výkon je

$$Q = \operatorname{Im}[\dot{S}] = UI \sin \varphi; [Var]$$

Zdanlivý výkon je

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI; [VA]$$

Pre súčet zdanlivých výkonov platí

$$\dot{S} = \dot{S}_1 + \dot{S}_2, \text{ ale všeobecne } S \neq S_1 + S_2$$

$$\text{Podmienka rezonancie: } \operatorname{Im}[\dot{Z}] = 0, \text{ resp. } \operatorname{Im}[\dot{Y}] = 0$$

Indukované napätie v druhej cievke, dvoch magneticky viazaných cievok, z ktorých v prvej preteká harmonicky sa meniaci prúd i_1 je

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt}, \text{ resp. } \dot{U}_{m2} = j\omega M \dot{I}_{m1}$$

$$\text{Koeficient vzájomnej väzby } k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \text{ kde}$$

M je koeficient vzájomnej indukčnosti; $[H]$

L_1 je koeficient vlastnej indukčnosti prvej cievky; $[H]$

L_2 je koeficient vlastnej indukčnosti druhej cievky; $[H]$

2.2 RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 2.2-1 Sériový obvod, kde $R = 10 \Omega$, $L = 31,83 \text{ mH}$, $C = 53 \mu\text{F}$ je pripojený na harmonicky sa meniace napätie $u = 14,1\sqrt{2} \cos(\omega t + 15^\circ) \text{ V}$, kde frekvencia $f = 150 \text{ Hz}$. Vypočítajte komplexnú impedanciu obvodu, určite komplexný vektor (fázor) napätia a prúdu, komplexný časový vektor (rotujúci fázor) napätia a prúdu, okamžitý prúd a okamžitú hodnotu prúdu v čase 2 ms !

Riešenie:

Komplexná impedancia sériového R,L,C obvodu je daná vzťahom:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = 10 + j\left(2\pi \cdot 150 \cdot 31,83 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{2\pi \cdot 150 \cdot 53 \cdot 10^{-6}}\right) = \\ &= 10 + j10 = 10\sqrt{2} e^{j45^\circ} \Omega \end{aligned}$$

Komplexný vektor (fázor) napätia je:

$$\dot{U} = 14,1 e^{j15^\circ} \text{ V}$$

Komplexný časový vektor (rotujúci fázor) napätia je:

$$\dot{U}_m = 14,1\sqrt{2} e^{j(\omega t + 15^\circ)} \text{ V}$$

Komplexný vektor (fázor) prúdu určíme z Ohmovho zákona

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{14,1 e^{j15^\circ}}{10\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 1 e^{-j30^\circ} \text{ A}$$

Podobne určíme komplexný časový vektor (rotujúci fázor) prúdu

$$\begin{aligned} \dot{I}_m &= \frac{\dot{U}_m}{\dot{Z}} = \frac{14,1\sqrt{2} e^{j(\omega t + 15^\circ)}}{10\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 1,41 e^{j(\omega t - 30^\circ)} = \\ &= 1,41 [\cos(\omega t - 30^\circ) + j \sin(\omega t - 30^\circ)] \text{ A} \end{aligned}$$

Okamžitý prúd sa rovná reálnej časti komplexného časového vektora prúdu, pretože vstupná veličina t.j. okamžité napätie, je reálna časť komplexného časového vektora napätia. Takže

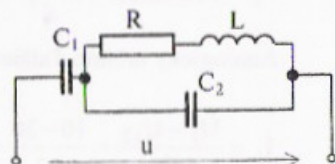
$$i = 1,41 \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ A}$$

Okamžitú hodnotu prúdu v čase 2 ms určíme z výrazu pre okamžitý prúd, keď dosadíme za čas 2 ms, ale počiatočnú fázu prúdu musíme vyjadriť v radiánoch, alebo ωt prepočítat na stupne.

$$i(2 \text{ ms}) = 1,41 \cos(2\pi \cdot 150 \cdot 2 \cdot 10^{-3} - \pi/6) = 0,293 \text{ A}$$

Príklad 2.2-2 Určite okamžité prúdy vo vetvách a okamžité napätie na indukčnosti v schéme na obr.2.2-1, keď $R =$

$= 100 \Omega$, $L = 0,318 \text{ H}$,
 $u = 100\sqrt{2} \sin 314t \text{ V}$,
 $C_1 = C_2 = 31,84 \mu\text{F}$!

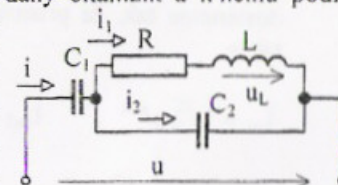


Obr.2.2-1

Riešenie:

Zvolíme kladný zmysel napätia pre daný okamžik a k nemu podľa spotrebiteľského systému zakreslíme do schémy počítacie šípky prúdov, obr.2.2-2.

Úlohu budeme riešiť pomocou komplexných vektorov. Okamžitému napätiu priradíme komplexný vektor napätia



Obr.2.2-2

$$\dot{U} = 100 \text{ V}$$

Impedancia obvodu je

$$\dot{Z} = -j \frac{1}{\omega C_1} + \frac{-j \frac{1}{\omega C_2} (R + j\omega L)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)} = 100 - j200 = 223,6 e^{-j63,43^\circ} \Omega$$

Celkový prúd vypočítame z Ohmovho zákona

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{100}{223,6 e^{-j63,43^\circ}} = 0,447 e^{j63,43^\circ} = 0,2 + j0,4 \text{ A}$$

Prúd v prvej vetve určíme z prúdového deliča

$$\dot{I}_1 = \dot{I} \frac{-jX_{C2}}{R + j(X_L - X_{C2})} = 0,447 e^{-j26,57^\circ} = 0,4 - j0,2 \text{ A}$$

Prúd v druhej vetve podľa 1. Kirchhoffovho zákona

$$\dot{I}_2 = \dot{I} - \dot{I}_1 = -0,2 + j0,6 = 0,632 e^{j108,43^\circ} \text{ A}$$

Napätie na indukčnosti

$$\dot{U}_L = jX_L \dot{I}_1 = j100 \cdot 0,447 e^{-j26,57^\circ} = 44,7 e^{j63,43^\circ} = 20 + j40 \text{ V}$$

časové vektory (rotujúce fázory) prúdov a napätia na indukčnosti dostaneme tak, že príslušné komplexné vektory vynásobíme $\sqrt{2} e^{j\omega t}$, takže

$$\dot{i}_m = \dot{i} \sqrt{2} e^{j\omega t}, \quad \dot{i}_{m1} = \dot{i}_1 \sqrt{2} e^{j\omega t}, \quad \dot{i}_{m2} = \dot{i}_2 \sqrt{2} e^{j\omega t},$$

$$\dot{U}_{mL} = \dot{U}_L \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

Okamžité prúdy a okamžité napätie na indukčnosti získame tým, že z komplexných časových vektorov príslušných veličín zoberieme imaginárne časti, pretože vstupné napätie je imaginárnou časťou komplexného časového vektora napätia. Potom

$$i = 0,447\sqrt{2} \sin(314t + 63,43^\circ) \text{ A},$$

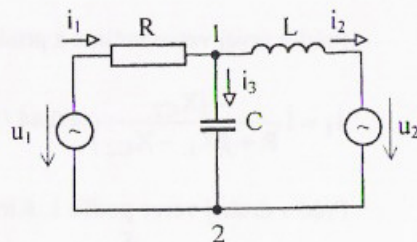
$$i_1 = 0,447\sqrt{2} \sin(314t - 26,57^\circ) \text{ A},$$

$$i_2 = 0,632\sqrt{2} \sin(314t + 108,43^\circ) \text{ A},$$

$$u_L = 44,7\sqrt{2} \sin(314t + 63,43^\circ) \text{ V}$$

Príklad 2.2-3 Vypočítajte prúdy v jednotlivých vetvách podľa schémy na obr.2.2-3, ak $u_1 = 10\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$, $u_2 = 10\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V}$, $f = 5 \text{ kHz}$, $R = 10 \Omega$, $L = 159 \mu\text{H}$, $C = 6,36 \mu\text{F}$!

Úlohu riešte komplexným počtom!



Obr.2.2-3

Riešenie:

Obvod budeme riešiť použitím komplexného počtu. Vstupným napätiam u_1 , u_2 , priradíme komplexné vektory a na riešenie obvodu môžeme použiť hociktorú metódu, ktoré sme už skôr používali.

a) Obvod budeme riešiť metódou uzlových napätí

Vypočítame veľkosti reaktancií

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 159 \cdot 10^{-6} = 5 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 6,36 \cdot 10^{-6}} = 5 \Omega$$

Komplexný vektor uzlového napätia medzi uzlami 1 a 2 je

$$\dot{U}_{12} = \frac{\frac{1}{R} \dot{U}_1 + \frac{1}{jX_L} \dot{U}_2}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{-jX_C}} = \frac{0,1 \cdot 10 - j0,2 \cdot 10 e^{j90^\circ}}{0,1 - j0,2 + j0,2} = 30 \text{ V}$$

Za východiskovú veličinu pre priradenie komplexného vektora sme vzali napätie u_1 , ktorému sme priradili komplexný vektor napätia s nulovou počiatočnou fázou. Napätie u_2 je zadané kosínusovou funkciou, teda jemu prislúchajúci komplexný vektor napätia má fázový posun 90° .

Komplexný vektor prúdu na kapacite je

$$\dot{i}_3 = \frac{\dot{U}_{12}}{-jX_C} = \frac{30}{-j5} = j6 = 6 e^{j90^\circ} \text{ A}$$

Komplexný časový vektor prúdu dostaneme tak, že komplexný vektor prúdu vynásobíme $\sqrt{2} e^{j\omega t}$. Imaginárna časť komplexného časového vektora prúdu je okamžitý prúd, pretože napätie, ktoré je ako vstupná veličina, je imaginárnou časťou komplexného vektora napätia. Potom

$$i_3 = 6\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) = 8,48 \cos \omega t \text{ A}$$

Analogicky určíme ďalšie prúdy

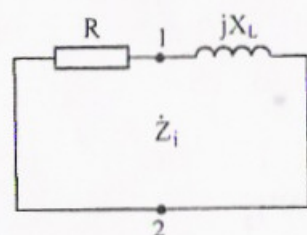
$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_{12}}{R} = \frac{10 - 30}{10} = -2 \text{ A}$$

$$i_1 = -2\sqrt{2} \sin \omega t = -2,82 \sin \omega t = 2,82 \sin(\omega t \pm 180^\circ) \text{ A}$$

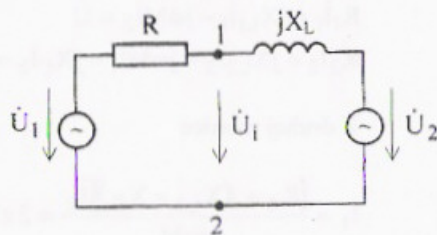
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{12} - \dot{U}_2}{jX_L} = \frac{30 - 10 e^{j90^\circ}}{j5} = 6,32 e^{-j108,43^\circ} \text{ A}$$

$$i_2 = 6,32\sqrt{2} \sin(\omega t - 108,43^\circ) = 8,93 \sin(\omega t - 108,43^\circ) \text{ A}$$

- b) Obvod na obr.2.2-3 pre i_3 budeme riešiť použitím Theveninovej vety.



Obr.2.2-4



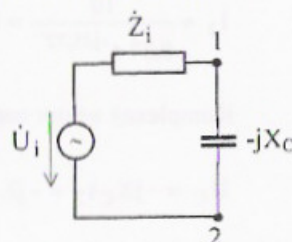
Obr.2.2-5

Vnútorná impedancia náhradného napätového zdroja z hľadiska svoriek 1 a 2 sa určí zo schémy na obr.2.2-4. K určeniu vnútorného napätia náhradného zdroja medzi svorkami 1 a 2 použijeme schému na obr.2.2-5 a určíme ho z napätového deliča.

$$\dot{Z}_i = \frac{jX_L R}{R + jX_L}$$

$$\dot{U}_R = \frac{R}{R + jX_L} (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)$$

$$\dot{U}_i = \dot{U}_1 - \dot{U}_R = \frac{R\dot{U}_2 + jX_L\dot{U}_1}{R + jX_L}$$



Obr.2.2-6

K náhradnému zdroju pripojíme vybratú vetvu z pôvodného obvodu, obr.2.2-6, potom

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_i}{\dot{Z}_i - jX_C} = \frac{R\dot{U}_2 + jX_L\dot{U}_1}{X_C X_L + jR(X_L - X_C)} = \frac{j150}{25} = j6 \text{ A}$$

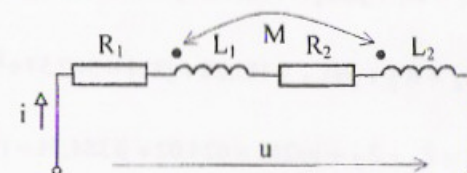
Komplexný časový vektor prúdu

$$\dot{I}_{m3} = j6\sqrt{2} e^{j\omega t} = 8,48(j \cos \omega t - \sin \omega t) \text{ A}$$

Okamžitý prúd je daný imaginárnou časťou komplexného časového vektora prúdu, teda

$$i_3 = 8,48 \cos \omega t \text{ A}$$

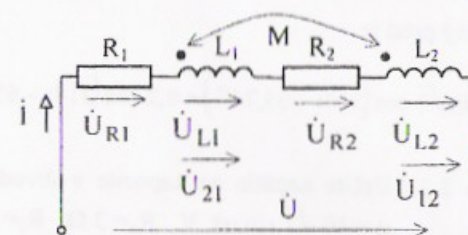
Príklad 2.2-4 Určite priebeh prúdu i v obvode na obr.2.2-7, ak $L_1 = 1,41 \text{ H}$, $L_2 = 1 \text{ H}$, $R_1 = 442,74 \Omega$, $R_2 = 181,28 \Omega$, $M = 1 \text{ H}$, $u = 220\sqrt{2} \cos 314t \text{ V}$!



Obr.2.2-7

Riešenie:

Obvod budeme riešiť komplexnými vektormi. V obvode je magne-



Obr.2.2-8

tická väzba charakterizovaná koeficientom vzájomnej indukčnosti a galvanická väzba. Na obr.2.2-8 je nakreslený obvod s vyznačenými napätiami na jednotlivých prvkoch.

Napätie na druhej indukčnosti L_2 , $\dot{U}_{12}$, od prvej indukčnosti L_1 je orientované od začiatku vinutia ku koncu vinutia, pretože indukčnosťou L_1 prúd tečie od začiatku ku koncu vinutia. Podobne určíme orientáciu napätia $\dot{U}_{21}$. Napíšeme podmiennečnú rovnicu pre obvod podľa 2. Kirchhoffovho zákona

$$\dot{U} = \dot{U}_{R1} + \dot{U}_{L1} + \dot{U}_{21} + \dot{U}_{R2} + \dot{U}_{L2} + \dot{U}_{12}$$

$$\dot{U} = [(R_1 + j\omega L_1) + (R_2 + j\omega L_2) + j\omega 2M] \dot{i} = (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + j\omega 2M) \dot{i}$$

$$\dot{U} = \dot{Z} \dot{i}$$

Po číselnom dosadení

$$\dot{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 442,74 + j442,74 = 442,74\sqrt{2} e^{j45^\circ} \Omega$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = 181,28 + j314 = 362,57 e^{j60^\circ} \Omega$$

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + j\omega 2M = 624,02 + j1384,74 = 1518,85 e^{j65,74^\circ} \Omega$$

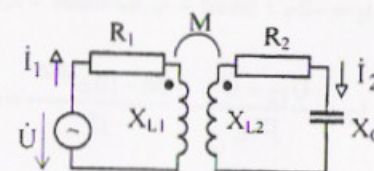
$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{220}{1518,85 e^{j65,74^\circ}} = 0,144 e^{-j65,74^\circ} \text{ A}$$

Okamžitý prúd je

$$i = 0,144\sqrt{2} \cos(314t - 65,74^\circ) = 0,2 \cos(314t - 65,74^\circ) \text{ A}$$

Príklad 2.2-5 Určite napätie na kapacite v obvode podľa obr.2.2-9, ak

$u = 10\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $X_{L1} = 2 \Omega$, $X_{L2} = 6 \Omega$, $\omega M = 2,5 \Omega$, $X_C = 3 \Omega$! Úlohu riešte komplexným počtom!



Obr.2.2-9

Riešenie:

Východiskové rovnice pre riešenie obvodu sú:

$$R_1 \dot{i}_1 + jX_{L1} \dot{i}_1 - j\omega M \dot{i}_2 = \dot{U}$$

$$R_2 \dot{i}_2 + jX_{L2} \dot{i}_2 - j\omega M \dot{i}_1 - jX_C \dot{i}_2 = 0$$

Z druhej rovnice

$$\dot{i}_1 = \frac{[R_2 + j(X_{L2} - X_C)] \dot{i}_2}{j\omega M} = 2 e^{-j53,13^\circ} \dot{i}_2$$

Po dosadení za prúd $\dot{i}_1$ do prvej rovnice a po úprave dostaneme

$$\dot{i}_2 = \frac{10}{8,37 e^{-j35,72^\circ}} = 1,19 e^{j35,72^\circ} \text{ A}$$

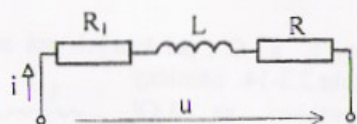
Komplexný vektor napätia na kapacite

$$\dot{U}_C = -jX_C \dot{i}_2 = -j3 \cdot 1,19 e^{j35,72^\circ} = 3,57 e^{-j54,28^\circ} \text{ V}$$

Okamžité napätie na kapacite je

$$u_C = 3,57\sqrt{2} \sin(\omega t - 54,28^\circ) \text{ V}$$

Príklad 2.2-6 Vypočítajte zdanlivý, činný a jalový príkon obvodu a činný príkon cievky, ktorá je nahradená prvkami $R = 4,96 \Omega$, $L = 35,1 \text{ mH}$, podľa obr.2.2-10, keď $R_1 = 5 \Omega$ a napätie na celom obvode je $u = 149\sqrt{2} \sin 314t \text{ V}$!



Obr.2.2-10

Riešenie:

Úlohu budeme riešiť komplexným počtom. Impedancia celého obvodu je:

$$\dot{Z} = (R_1 + R) + jX_L = 9,96 + j11,02 = 14,86 e^{j47,87^\circ} \Omega$$

Komplexný vektor prúdu

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{149}{14,86 e^{j47,87^\circ}} = 10,02 e^{-j47,87^\circ} \text{ A}$$

Komplexný vektor zdalivého výkonu

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^* = 149 \cdot 10,02 e^{j47,87^\circ} = 1001,34 + j1107,38 \text{ VA}$$

$$\text{Činný výkon } P = \operatorname{Re}[\dot{S}] = 1001,34 \text{ W}$$

$$\text{Jalový výkon } Q = \operatorname{Im}[\dot{S}] = 1107,38 \text{ VAR}$$

$$\text{Zdanlivý výkon } S = |\dot{S}| = 1492,98 \text{ VA}$$

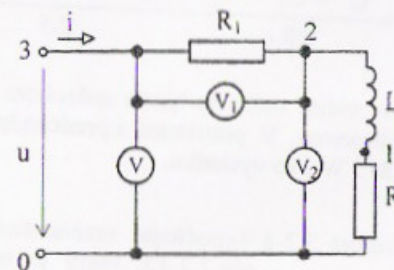
Príkon na odpore R_1

$$P_1 = R_1 I^2 = 5 \cdot 10,02^2 = 502 \text{ W}$$

Príkon cievky

$$P_c = P - P_1 = 1001,34 - 502 = 499,34 \text{ W}$$

Príklad 2.2-7 Voltmetrami zapojenými podľa obr.2.2-11 sa zistili napätia $U = 149 \text{ V}$, $U_1 = 50,1 \text{ V}$, $U_2 = 121,2 \text{ V}$, (vnútorné odpory voltmetrov sú veľmi veľké v porovnaní s inými prvkami obvodu). Obvod je napájaný harmonicky sa meniacim napätím, ktorého frekvencia $f = 50 \text{ Hz}$. Určite príkon cievky, v schéme je nahradená prvkami R, L , keď $R_1 = 5 \Omega$!



Obr.2.2-11

Riešenie:

Kvôli ľahšiemu pochopeniu úlohy, nakreslíme topografický vektorový diagram prvého druhu, obr.2.2-12.

Efektívna hodnota prúdu v obvode je

$$I = \frac{U_1}{R_1}$$

Činný príkon cievky určíme zo vzťahu

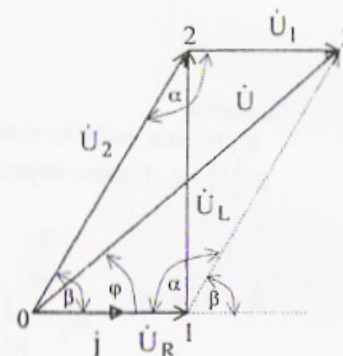
$$P = U_2 I \cos \beta$$

Z vektorového diagramu platí

$$\beta = 180^\circ - \alpha, \text{ potom}$$

$$\cos \beta = \cos 180^\circ \cos \alpha + \sin 180^\circ \sin \alpha = -\cos \alpha$$

Z kosínusovej vety môžeme pre napätia z diagramu napísať



Obr.2.2-12

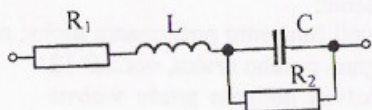
$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2 \cos \alpha, \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2}$$

Po dosadení do vzťahu pre príkon cievky je

$$P = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R_1} = \frac{149^2 - 50,1^2 - 121,2^2}{2,5} = 500,1 \text{ W}$$

Ako vidieť môže sa týmto spôsobom merať výkon. Je to metóda troch voltmetrov. V porovnaní s predchádzajúcim riešením je malý rozdiel, 0,815 W, vo výsledku.

Príklad 2.2-8 Vypočítajte rezonančnú kruhovú frekvenciu obvodu na obr.2.2-13, ktorý je napájaný harmonickým napätím a parametre obvodu sú: $L = 0,2 \text{ H}$, $C = 4 \mu\text{F}$, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 500 \Omega$!



Obr.2.2-13

Riešenie:

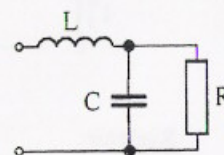
K riešeniu zadania využijeme poznatku, že rezonancia nastáva, keď $\text{Im}[\dot{Z}] = 0$. Určíme impedanciu obvodu

$$\dot{Z} = R_1 + j\omega L - \frac{j\frac{R_2}{\omega C}}{R_2 - \frac{j}{\omega C}} = \frac{R_1 + R_2 + R_1(R_2\omega C)^2}{(R_2\omega C)^2 + 1} + j\frac{\omega[(R_2\omega C)^2 L - R_2^2 C + L]}{(R_2\omega C)^2 + 1}$$

$$\text{Takže } \omega = \pm \sqrt{\frac{R_2^2 C - L}{(R_2 C)^2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(R_2 C)^2}} = \pm 1000 \text{ s}^{-1}$$

Význam má samozrejme len výsledok s kladným znamienkom.

Príklad 2.2-9 Určite hodnoty L a C , pri ktorých má obvod podľa schémy na obr.2.2-14 ohmický charakter rovnajúci sa 1Ω ! $R = 10 \Omega$, $\omega = 10^6 \text{ s}^{-1}$.



Obr.2.2-14

Riešenie:

Aby mal R, L, C obvod ohmický charakter, musí byť v rezonancii. Impedancia obvodu je

$$\dot{Z} = j\omega L - \frac{jR(\omega C)^{-1}}{R - \frac{j}{\omega C}} = \frac{R}{(\omega RC)^2 + 1} + j\frac{\omega[(\omega RC)^2 L + L - R^2 C]}{(\omega RC)^2 + 1}$$

Zo zadania vyplýva, že $\text{Re}[\dot{Z}] = 1 \Omega$ teda

$$\frac{R}{(\omega RC)^2 + 1} = 1$$

Z podmienky rezonancie platí, že $\text{Im}[\dot{Z}] = 0$ potom

$$(\omega RC)^2 L + L - R^2 C = 0$$

Z týchto podmienok určíme hľadané prvky

$$C = \sqrt{\frac{R-1}{(\omega R)^2}} = \sqrt{\frac{9}{10^{12} \cdot 10^2}} = 0,3 \mu\text{F}$$

$$L = \frac{R^2 C}{(\omega RC)^2 + 1} = \frac{10^2 \cdot 3 \cdot 10^{-7}}{10^{12} \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 10^{-14} + 1} = 3 \mu\text{H}$$

2.3 ÚLOHY NA RIEŠENIE

Príklad 2.3-1 Na zdroj harmonického napätia $u = 100\sqrt{2} \sin 314t$ V, je pripojený odpor $R = 50 \Omega$. Napíšte výraz pre prúd!

$$[i = 2\sqrt{2} \sin 314t \text{ A}]$$

Príklad 2.3-2 Na indukčnosť s koeficientom vlastnej indukčnosti $L = 22 \text{ mH}$ je pripojené napätie $u = 220\sqrt{2} \cos 1000t$ V. Určite okamžitú hodnotu prúdu v čase 4 ms!

$$[i = -10,7 \text{ A}]$$

Príklad 2.3-3 Určite okamžitý prúd, ktorý tečie kapacitou $C = 5 \mu\text{F}$, ak je pripojená na sínusovo sa meniace napätie $u = 100 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$!

$$[i = 0,157\sqrt{2} \sin(314t + 90^\circ) \text{ A}]$$

Príklad 2.3-4 Určite indukčnosť ideálnej cievky, pripojenej na harmonické napätie, keď $U = 20 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, ak ňou tečie prúd $I = 2 \text{ A}$!

$$[L = 31,8 \text{ mH}]$$

Príklad 2.3-5 Cievka bola pripojená k zdroju jednosmerného napätia $U = 100 \text{ V}$, potom k zdroju harmonického napätia $U = 100 \text{ V}$, s frekvenciou $f = 50 \text{ Hz}$. V prvom prípade ňou tiekol prúd 5 A, v druhom prípade 4 A. Určite indukčnosť cievky, keď predpokladáme, že jej odpor je rovný odporu pri jednosmernom napájaní! (Uvažujte sériovú náhradu.)

$$[L = 47,7 \text{ mH}]$$

Príklad 2.3-6 Aká je komplexná impedancia cievky so vzduchovým jadrom pri frekvencii 100 Hz, ktorej ohmický odpor je 400Ω a indukčnosť sa rovná 5 H? (Uvažujte sériovú náhradu.)

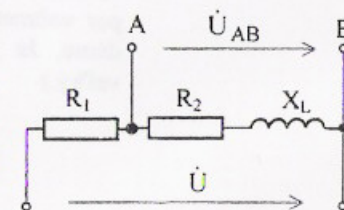
$$[\dot{Z} = 3166,9 e^{j82,74^\circ} \Omega]$$

Príklad 2.3-7 Ohmický odpor $R = 31,83 \Omega$ je pripojený v sérii s kapacitou $C = 5 \mu\text{F}$. Určite komplexnú impedanciu obvodu pre frekvenciu $f = 1 \text{ kHz}$!

$$[\dot{Z} = 45,01 e^{-j45^\circ} \Omega]$$

Príklad 2.3-8 Určite veľkosť odporu R_1 v schéme na obr.2.3-1 tak, aby napätie $\dot{U}_{AB}$ predbiehalo vstupné napätie $\dot{U}$ o 30° , keď $R_2 = 5 \Omega$, $X_L = 15 \Omega$!

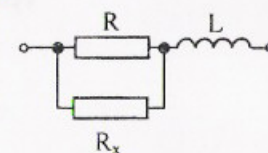
$$[R_1 = 11,91 \Omega]$$



Obr.2.3-1

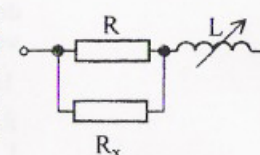
Príklad 2.3-9 Pripojením odporu R_x k odporu $R = 18 \Omega$, podľa schémy na obr.2.3-2, sa zmení fázový posun z 30° na 80° . Určite hodnotu odporu R_x !

$$[R_x = 2,04 \Omega]$$



Obr.2.3-2

Príklad 2.3-10 Pripojením odporu R_x podľa obr.2.3-3, sa zvýši fázový posun na 85° . Určite hodnotu odporu R_x , hodnotu indukčnosti po pripojení tohoto odporu, aby sa hodnota

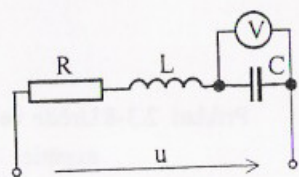


Obr.2.3-3

prúdu v obvode nezmenila, keď $f = 50 \text{ Hz}$, $R = 12 \Omega$ a indukčnosť pred pripojením odporu mala hodnotu $0,05 \text{ H}$!

$$[L' = 0,062 \text{ H}, R_x = 2,01 \Omega]$$

Príklad 2.3-11 V sieti podľa obr.2.3-4 je $u = U_m \sin \omega t$, $U = 175 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $R = 17,5 \Omega$, $L = 0,255 \text{ H}$, $C = 40 \mu\text{F}$. Určite efektívnu hodnotu napätia, ktorú meria voltmeter! (Vnútny odpor voltmetra predpokladáme, že je nekonečne veľký.)

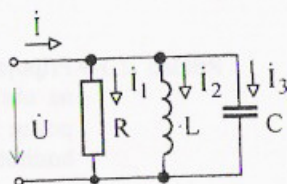


Obr.2.3-4

$$[U_v = 796 \text{ V}]$$

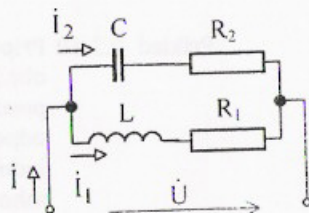
Príklad 2.3-12 V obvode podľa schémy na obr.2.3-5 sú známe efektívne hodnoty prúdov: $I_1 = 3 \text{ A}$, $I_2 = 5 \text{ A}$, $I_3 = 1 \text{ A}$. Určite komplexný vektor výsledného prúdu!

$$[\dot{I} = 5 e^{-j53,13^\circ} \text{ A}]$$



Obr.2.3-5

Príklad 2.3-13 Určite komplexné časové vektory prúdov v jednotlivých vetvách obvodu na obr.2.3-6, keď $\dot{U}_m = 220 e^{j314t} \text{ V}$, $R_1 = 350 \Omega$, $R_2 = 600 \Omega$, $L = 1,3 \text{ H}$, $C = 4 \mu\text{F}$!



Obr.2.3-6

$$\begin{cases} \dot{I}_{m1} = 0,412 e^{j(314t - 49,30^\circ)} \text{ A} \\ \dot{I}_{m2} = 0,22 e^{j(314t + 53,13^\circ)} \text{ A} \\ \dot{I}_m = 0,422 e^{j(314t - 18,91^\circ)} \text{ A} \end{cases}$$

Príklad 2.3-14 V obvode na obr.2.3-6 je dané: $R_1 = 30 \Omega$, $L = 0,15 \text{ H}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $I_2 = 1 \text{ A}$, $I = 2,5 \text{ A}$. Prúd i_2 predbieha prúd i o 90° . Vypočítajte U , R_2 , C !

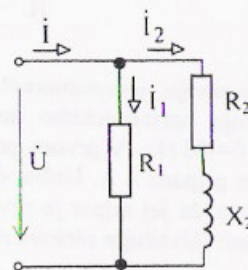
$$[U = 150,4 \text{ V}, R_2 = 87,81 \Omega, C = 26 \mu\text{F}]$$

Príklad 2.3-15 V obvode na obr.2.3-6 je dané: $R_1 = 40 \Omega$, $L = 0,2 \text{ H}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $I_1 = I_2$, ale sú voči sebe posunuté o 90° . Vypočítajte R_2 , C !

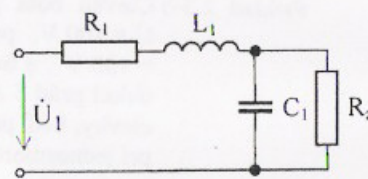
$$[R_2 = 62,8 \Omega, C = 79,6 \mu\text{F}]$$

Príklad 2.3-16 Akú hodnotu má mať odpor R_1 v schéme na obr.2.3-7, aby prúdy vo vetvách boli rovnaké? Aký bude fázový posun medzi výsledným prúdom a napätím? $R_2 = 12 \Omega$, $L_2 = 0,03 \text{ H}$, $f = 50 \text{ Hz}$.

$$[R_1 = 15,25 \Omega, \varphi = 19,1^\circ]$$



Obr.2.3-7



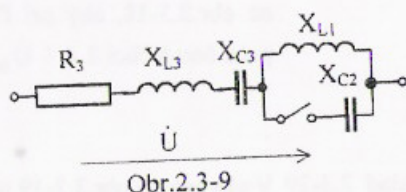
Obr.2.3-8

Príklad 2.3-17 Určite napätie na zaťažovacom odpore R_z , obr.2.3-8, keď $U_1 = 10 \text{ V}$, $f = 100 \text{ Hz}$, $R_1 = 100 \Omega$, $L_1 = 4 \Omega$, $C_1 = 16 \mu\text{F}$, $R_z = 1000 \Omega$!

$$[U_{Rz} = 0,41 \text{ V}]$$

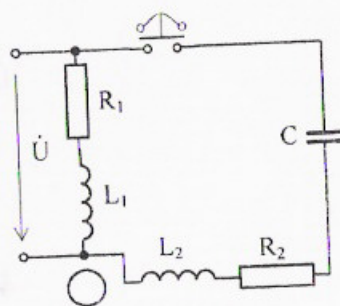
Príklad 2.3-18 V obvode podľa obr.2.3-9 sú: $\dot{U} = 120 \text{ V}$, $X_{L1} = 20 \Omega$, $X_{C2} = 20 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $X_{L3} = 10 \Omega$, $X_{C3} = 30 \Omega$. Vypočítajte prúdy v obvode a napätia na jednotlivých prvkoch obvodu!

- pri rozopnutom vypínači
- pri zapnutom vypínači



$$\begin{aligned} \text{[a]} \quad & I_1 = I_3 = 6 \text{ A}, I_2 = 0, U_1 = 120 \text{ V}, U_2 = 0 \text{ V}, U_3 = 169,7 \text{ V} \\ \text{[b]} \quad & I_1 = I_2 = 6 \text{ A}, I_3 = 0, U_1 = U_2 = 120 \text{ V}, U_3 = 0 \text{ V} \end{aligned}$$

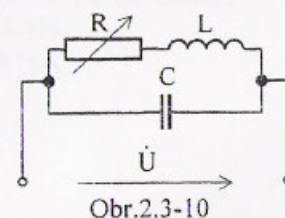
Príklad 2.3-19 Náhradná schéma jednofázového indukčného motora je na obr.2.3-11. Hlavné vinutie má parametre: $R_1 = 50 \Omega$, $L_1 = 0,1 \text{ H}$. Určite kapacitu kondenzátora C , zapojeného v obvode rozbehového vinutia s parametrami: $R_2 = 100 \Omega$, $L_2 = 0,15 \text{ H}$, aby prúdy v hlavnom a v rozbehovom vinutí boli voči sebe posunuté o 90° ! Frekvencia napájacieho napätia je 50 Hz .



$$[C = 15,4 \mu\text{F}]$$

Príklad 2.3-20 V akom rozsahu sa musí meniť odpor, obr.2.3-10, aby sa fázový posun menil od $+80^\circ$ do -80° , keď $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 10 \mu\text{F}$, $f = 100 \text{ Hz}$?

$$[R' = 6,65 \Omega, R'' = 909,25 \Omega]$$

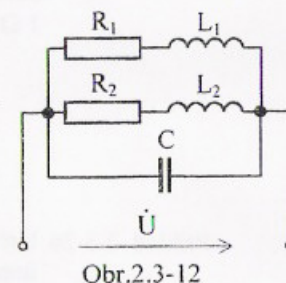


Príklad 2.3-21 V akom rozsahu sa môže regulovať fázový posun medzi prúdom a napätím v obvode na obr.2.3-10, keď $10 \Omega < R < 100 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \mu\text{F}$ pri frekvencii 50 Hz ?

$$[\varphi' = 88^\circ, \varphi'' = 70^\circ 24']$$

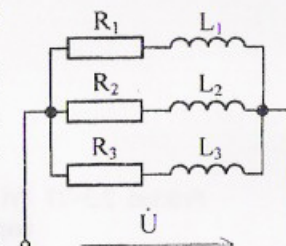
Príklad 2.3-22 Aká musí byť kapacita v obvode na obr.2.3-12, aby bol fázový posun medzi celkovým prúdom a celkovým napätím nulový? $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 7 \Omega$, $L_1 = 0,1 \text{ H}$, $L_2 = 0,15 \text{ H}$, $f = 50 \text{ Hz}$.

$$[C = 167,15 \mu\text{F}]$$



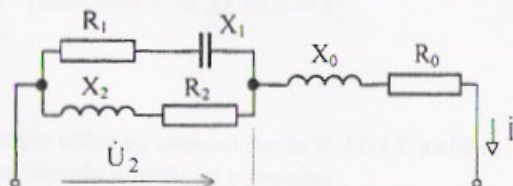
Príklad 2.3-23 Akú hodnotu musí mať odpor R_3 a indukčnosť L_3 v obvode podľa obr.2.3-13, aby v sieti pretekal celkový prúd $I = 3 \text{ A}$ a fázový posun v tretej vetve $\varphi_3 = 45^\circ$? $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 70 \Omega$, $L_1 = 0,2 \text{ H}$, $L_2 = 0,3 \text{ H}$, $U = 80 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$.

$$[R_3 = 51,52 \Omega, L_3 = 0,164 \text{ H}]$$



Príklad 2.3-24 Určite celkový prúd a prúdy vo vetvách obvodu podľa obr.2.3-14, keď: $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 8 \Omega$, $R_0 = 0,5 \Omega$, $X_1 = 8 \Omega$, $X_2 = 6 \Omega$, $X_0 = 1,5 \Omega$, $U_2 = 120 \text{ V}$!

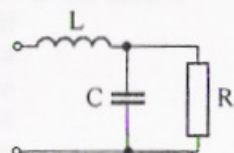
$$[I = 16,9 \text{ A}, I_1 = I_2 = 12 \text{ A}]$$



Obr.2.3-14

Príklad 2.3-25 Pri akých hodnotách L a C má impedancia obvodu na obr.2.3-15 ohmický charakter 1Ω ? $R = 10 \Omega$, $\omega = 10^5 \text{ s}^{-1}$.

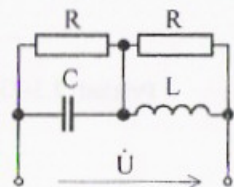
$$[C = 0,3 \mu\text{F}, L = 3 \mu\text{H}]$$



Obr.2.3-15

Príklad 2.3-26 Určite hodnotu odporu R v obvode na obr.2.3-16, aby impedancia obvodu mala iba ohmický charakter pre ľubovoľnú frekvenciu! $L = 10 \text{ mH}$, $C = 1 \mu\text{F}$!

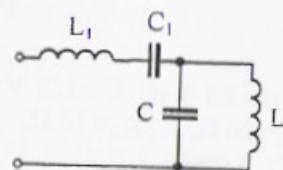
$$[R = 100 \Omega]$$



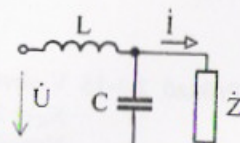
Obr.2.3-16

Príklad 2.3-27 Pri známych hodnotách L_1 , C , ω a nezmenenom napätí na vstupe v zapojení podľa obr.2.3-17, má hodnota prúdu tečúceho indukčnosťou L pri jej zmene, zostať konštantná. Určite kapacitu C_1 !

$$[C_1 = C(\omega^2 L_1 C - 1)^{-1}]$$



Obr.2.3-17



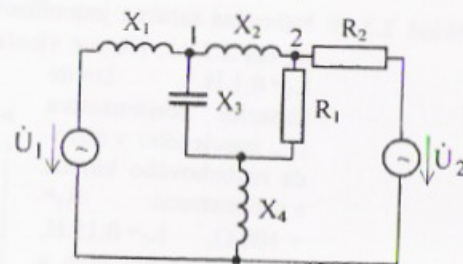
Obr.2.3-18

Príklad 2.3-28 Určite hodnoty indukčnosti L a kapacity C v obvode na obr.2.3-18, aby pri ľubovoľnej impedancii Z bol prúd ňou tečúci 2 A ! $\dot{U}_m = 100 e^{j1000t} \text{ V}$

$$[L = 0,05 \text{ H}, C = 20 \mu\text{F}]$$

Príklad 2.3-29 V obvode na obr.2.3-19 určite komplexný vektor napätia medzi uzlami 1 a 2! $\dot{U}_1 = 6 \text{ V}$, $\dot{U}_2 = 6 e^{j90^\circ} \text{ V}$, $X_1 = X_2 = X_3 = 3 \Omega$, $X_4 = 1,5 \Omega$, $R_1 = R_2 = 3 \Omega$.

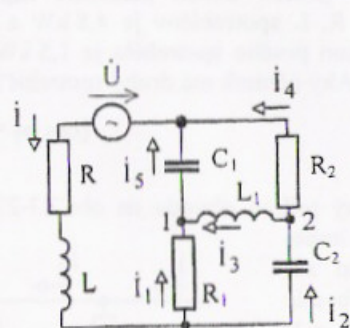
$$[\dot{U}_{12} = 9,48 e^{-j18,43^\circ} \text{ V}]$$



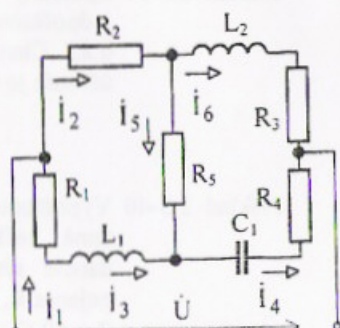
Obr.2.3-19

Príklad 2.3-30 Určite napätie na indukčnosti L_1 , obr.2.3-20! $R = R_1 = R_2 = X_L = X_{L1} = X_{C1} = X_{C2} = 3 \Omega$, $\dot{U} = 24 \text{ V}$

$$[U_{L1} = 24 \text{ V}]$$



Obr.2.3-20

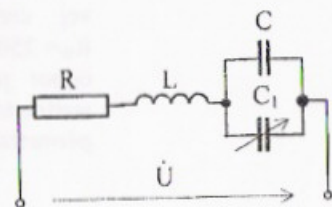


Obr.2.3-21

Príklad 2.3-31 V schéme na obr.2.3-21 určite prúdy v jednotlivých vetvách keď: $\dot{U} = 220 \text{ V}$, $R_1 = R_5 = 20 \Omega$, $R_2 = R_4 = 10 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $L_1 = 50 \text{ mH}$, $C_1 = 100 \mu\text{F}$, $L_2 = 20 \text{ mH}$, $f = 50 \text{ Hz}$!

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 = 15,3 e^{-j16,69^\circ} \text{ A}, & \dot{I}_2 = 11,6 e^{-j16^\circ} \text{ A}, \\ \dot{I}_3 = 3,8 e^{-j10,22^\circ} \text{ A}, & \dot{I}_4 = 4,3 e^{j54,6^\circ} \text{ A}, \\ \dot{I}_5 = 4,3 e^{-j73,43^\circ} \text{ A}, & \dot{I}_6 = 14,5 e^{-j32,79^\circ} \text{ A} \end{bmatrix}$$

Príklad 2.3-32 Zapojením obvodu podľa obr.2.3-22 sa môže regulovať fázový posun medzi prúdom a napätím od $+45^\circ$ do -45° . Určite medzné hodnoty kapacity C_1 ! $R = 10 \Omega$, $L = 40 \text{ mH}$, $f = 800 \text{ Hz}$, $C = 0,8 \mu\text{F}$.

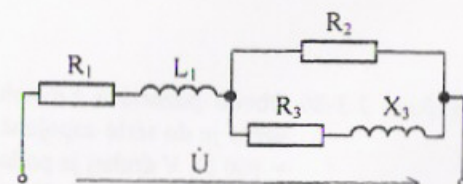


Obr.2.3-22

$$[C' = 0,2412 \mu\text{F}, C'' = 0,1425 \mu\text{F}]$$

Príklad 2.3-33 Určite hodnotu odporu R_2 , obr.2.3-23, aby prúd cez odpor R_3 a výsledné napätie na obvode boli voči sebe

posunuté o 90° ! $X_1 = 22 \Omega$, $X_3 = 50 \Omega$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$.

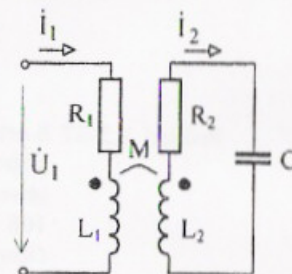


Obr.2.3-23

$$[R_2 = 30 \Omega]$$

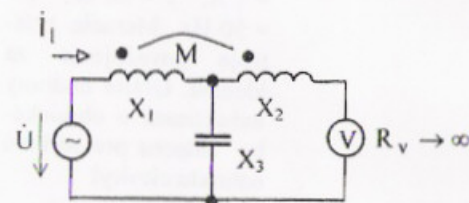
Príklad 2.3-34 Určite komplexný vektor napätia $\dot{U}_1$ a prúdu $\dot{I}_1$ v obvode na obr.2.3-24, keď $\dot{I}_2 = 0,5 \text{ A}$, $R_1 = 60 \Omega$, $R_2 = 90 \Omega$, $X_{L1} = 80 \Omega$, $X_{L2} = 45 \Omega$, $X_C = 210 \Omega$, a koeficient väzby $k = 0,5$!

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 = 328 e^{-j97,87^\circ} \text{ V}, \\ \dot{I}_1 = 3,13 e^{-j151,38^\circ} \text{ A} \end{bmatrix}$$



Obr.2.3-24

Príklad 2.3-35 Vypočítajte efektívnu hodnotu napätia, ktoré ukazuje ideálny voltmeter, obr.2.3-25, keď $X_1 = 20 \Omega$, $X_3 = 10 \Omega$,



Obr.2.3-25

$X_3 = 10 \Omega$, koeficient väzby $k = 0,5$ a napätie zdroja je $u = 100\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$!

$$[U_v = 170,7 \text{ V}]$$

Príklad 2.3-36 Obvod pozostáva z dvoch paralelných vetiev. V jednej vetve je do série zapojená reaktancia $X_{L1} = 30 \Omega$ a $X_{C1} = 100 \Omega$. V druhej je podobne ako v prvej vetve do série zapojená reaktancia $X_{C2} = 255 \Omega$ a $X_{L2} = 180 \Omega$. Prúdy vo vetvách pretekajú od začiatku vinutí ku koncu, koeficient väzby je 0,5. Určite impedanciu obvodu, keď je pripojený na napätie dané komplexným vektorom $\dot{U} = 100 e^{j45^\circ} \text{ V}$!

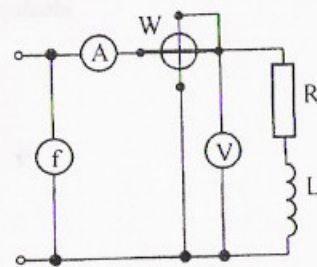
$$[\dot{Z} = 17,85 e^{j270^\circ} \Omega]$$

Príklad 2.3-37 S ortuťovou výbojkou je do série zapojená tlmivka. Po pripojení obvodu na napätie 220 V, 50 Hz preteká obvodom prúd 1,1 A. Na výbojke bolo namerané napätie 108 V, na tlmivke 187 V. Aký je odoberaný celkový činný výkon?

$$[P_{\text{celk.}} = 127,8 \text{ W}]$$

Príklad 2.3-38 Pri meraní technickej cievky bez feromagnetického jadra, schéma zapojenia je na obr.2.3-26, sa namerali hodnoty: $U = 100 \text{ V}$, $I = 1 \text{ A}$, $P = 50 \text{ W}$, $f = 50 \text{ Hz}$. Meracie prístroje považujeme za ideálne. Určite hodnoty indukčnosti a ohmického odporu pre sériovú náhradu cievky!

$$[R = 50 \Omega, L = 0,276 \text{ H}]$$



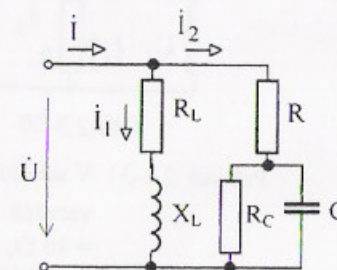
Obr.2.3-26

Príklad 2.3-39 Spoločný činný príkon dvoch paralelne zapojených jednofázových R, L spotrebičov je 4,8 kW a účinník 0,82. Činný príkon prvého spotrebiča je 1,5 kW a jeho účinník je 0,75. Aký účinník má druhý spotrebič?

$$[\cos \varphi_2 = 0,852]$$

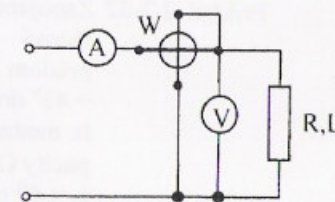
Príklad 2.3-40 Vypočítajte činný príkon obvodu na obr.2.3-27, ak je daná veľkosť impedancie sériového zapojenia R, L v obvode $Z = 60 \Omega$, $X_L/R_L = 3$, $C = 10 \mu\text{F}$, $R_C = 1 \text{ M}\Omega$, $R = 100 \Omega$, $U = 200 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$!

$$[P = 211 \text{ W}]$$



Obr.2.3-27

Príklad 2.3-41 Určite účinník spotrebiča ohmicko-induktívneho charakteru, schéma zapojenia je na obr.2.3-28, keď namerané hodnoty jednotlivých veličín sú: $U = 40 \text{ V}$, $I = 1,9 \text{ A}$, $P = 50 \text{ W}$! Vnútny odpor voltmetra $R_v = 200 \Omega$, odpor napäťovej cievky wattmetra $R_w = 2500 \Omega$. (Vnútny odpor prúdovej cievky wattmetra a odpor ampermetra sú nulové.)

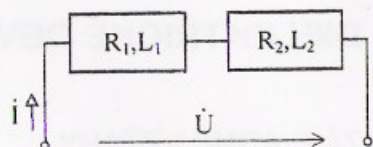


Obr.2.3-28

$$[\cos \varphi = 0,585]$$

Príklad 2.3-42 Aké sú napätia na jednofázových spotrebičoch zapojených podľa obr.2.3-29, keď spoločný príkon je 8 kW, prúd 30 A a celkové napätie je 380 V, $\cos \varphi_1 = 0,8$, $\cos \varphi_2 = 0,6$?

$$[U_1 = 182 \text{ V}, U_2 = 202 \text{ V}]$$



Obr.2.3-29

Príklad 2.3-43 Spotrebič ohmicko-induktívneho charakteru je pripojený na napätie 220 V, $f = 50$ Hz, odoberá prúd 4,54 A. Jeho účinník je 0,8. Ako sa zmení účinník, ak sa k spotrebiču paralelne pripojí odpor, ktorým preteká prúd 6 A ?

$$[\cos \varphi = 0,96]$$

Príklad 2.3-44 Dva paralelne zapojené R, L spotrebiče majú spoločný príkon 2,5 kW a celkový účinník je 0,78. Účinník prvého spotrebiča je 0,75 a druhého 0,84. Aké sú príkony jednotlivých spotrebičov ?

$$[P_1 = 1,66 \text{ kW}, P_2 = 0,84 \text{ kW}]$$

Príklad 2.3-45 Aká má byť kapacita kondenzátora, ktorý sa pripojí paralelne k zariadeniu ohmicko-induktívneho charakteru o výkone 1,5 kW pri napätí 220 V, 50 Hz, ktoré pri účinníku 0,7 pracuje s účinnosťou 0,82, aby bol účinník úplne vykompenzovaný ?

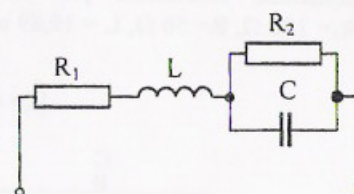
$$[C = 122,7 \mu\text{F}]$$

Príklad 2.3-46 Aký musí byť jalový príkon, ktorým sa má vykompenzovať účinník 0,75 pri zaťažení 80 kW na účinník 1 ?

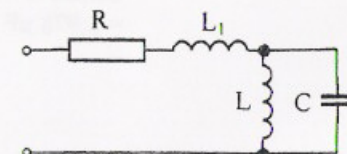
$$[Q_2 = 70,5 \text{ kVar}]$$

Príklad 2.3-47 Vypočítajte rezonančnú kruhovú frekvenciu pre obvod na obr.2.3-30, keď $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 500 \Omega$, $L = 0,2 \text{ H}$, $C = 4 \mu\text{F}$!

$$[\omega_r = 1000 \text{ s}^{-1}]$$



Obr.2.3-30



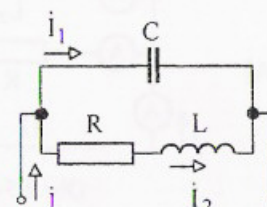
Obr.2.3-31

Príklad 2.3-48 Vypočítajte hodnotu indukčnosti L_1 v rezonančnom obvode na obr.2.3-31 ! $R = 10 \Omega$, $L = 2 \text{ mH}$, $C = 5 \mu\text{F}$, $f_r = 2 \text{ kHz}$.

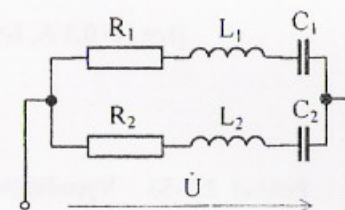
$$[L_1 = 3,45 \text{ mH}]$$

Príklad 2.3-49 V obvode podľa obr.2.3-32 nastala rezonancia. Efektívna hodnota prúdu $I_1 = 1 \text{ A}$, efektívna hodnota výsledného prúdu $I = 1 \text{ A}$. Aká je efektívna hodnota prúdu I_2 ?

$$[I_2 = 1,41 \text{ A}]$$



Obr.2.3-32



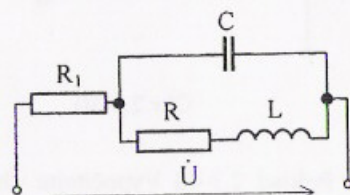
Obr.2.3-33

Príklad 2.3-50 V obvode na obr.2.3-33 je prúdová rezonancia. Určite rezonančnú frekvenciu a celkový prúd obvodu, keď $R_1 = R_2 = 2 \Omega$, $L_2 = 2L_1 = 40 \text{ mH}$, $C_1 = C_2 = 220 \text{ nF}$, $U = 100 \text{ V}$!

$$[f_r = 1,95 \text{ MHz}, I = 26,7 \text{ mA}]$$

Príklad 2.3-51 Vypočítajte rezonančnú frekvenciu pre obvod na obr.2.3-34 keď $R_1 = 100 \Omega$, $R = 50 \Omega$, $L = 19,89 \text{ mH}$, $C = 3,978 \mu\text{F}$!

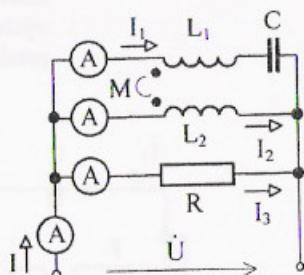
$$[f_r = 400 \text{ Hz}]$$



Obr.2.3-34

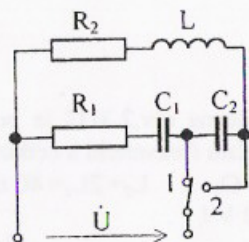
Príklad 2.3-52 Určite efektívne hodnoty prúdov v obvode podľa schémy na obr.2.3-35, keď $L_1 = 20 \text{ mH}$, $L_2 = 40 \text{ mH}$, $M = 20 \text{ mH}$, $R = 100 \Omega$, $U = 60 \text{ V}$, $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$ a kapacita je takej veľkosti, že v obvode nastane rezonancia !

$$[I_1 = I_2 = 0,3 \text{ A}, I_3 = I_4 = 0,6 \text{ A}]$$



Obr.2.3-35

Príklad 2.3-53 Vypočítajte kruhovú frekvenciu pri rezonančnom stave v obvode na obr.2.3-36 pri polohe prepínača 1 a 2, keď $R_1 = R_2 = 20 \Omega$, $C_1 = C_2 = 0,2 \mu\text{F}$, $L = 1 \text{ mH}$, $U = 4 \text{ kV}$!



Obr.2.3-36

$$[\text{Položa 1: } \omega_{r1} = 10^5 \text{ s}^{-1}, \\ \omega_{r2} = 10^5 \text{ s}^{-1}, \text{ Položa 2: } \\ \omega_{r2} = 73,7 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}]$$

3 DIELEKTRICKÉ OBVODY

3.1 ZÁKLADNÉ VZŤAHY

Celkový náboj (dielektrický tok) prechádzajúci cez ohraničenú plochu je

$$Q = \Psi_E = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S}, \text{ kde}$$

Q je elektrický náboj, [As]

Ψ_E je dielektrický tok, [As]

$\vec{D}$ je vektor elektrickej indukcie, [C/m²]

$d\vec{S}$ je vektor elementárnej plochy, [m²]

Vzťah medzi vektormi veličín, ktoré popisujú homogénne izotropné elektrické pole je ~

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$\vec{E}$ je vektor elektrickej intenzity, [V/m]

ϵ_0 je permitivita vákua, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

ϵ_r je permitivita prostredia

Elektrická intenzita (elektrické namáhanie) pre homogénne pole je

$$E = \frac{U}{l}$$

U je elektrické napätie, [V]

l je hrúbka dielektrika (vzdialenosť dosák, medzi ktorými je umiestnené dielektrikum), [m]

Závislosť medzi elektrickým nábojom a elektrickým napätím je

$$Q = C U, \text{ kde}$$

C je kapacita, [F]

Pre doskový kondenzátor sa kapacita určí zo vzťahu

$$C = \varepsilon \frac{S}{l}$$

Pre paralelné zapojenie kapacít platí:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Výsledná kapacita sériovo zapojených kapacít sa určí zo vzťahu

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}, \text{ kde}$$

C_1 až C_n sú dieľčie kapacity v obvode. Elektrická energia je

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \text{ [J, Ws]}$$

V dielektrických obvodoch môžeme použiť analógiu Ohmovho zákona a Kirchhoffových zákonov

$$C = \frac{Q}{U},$$

$$\sum_{i=1}^n \pm Q_i = 0, \text{ ak kapacity v obvode nemali počiatočný náboj.}$$

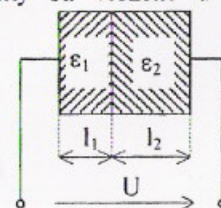
Ak niektoré z kapacít už mali počiatočný náboj Q' , potom

$$\sum_{k=1}^m \pm Q_k = \sum_{k=1}^m \pm Q'_k$$

$$\sum_{l=1}^m \pm U_l = 0$$

3.2 RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 3.2-1 Medzi dve rovinné kovové dosky sú vložené dva izolanty s hrúbkami $l_1 = 4 \text{ mm}$, $l_2 = 2 \text{ mm}$ a s permitivitami $\varepsilon_{r1} = 2$, $\varepsilon_{r2} = 8$. Aké je elektrické namáhanie izolantov, ak sú dosky pripojené na napätie 35 kV? Pozri obr.3.2-1!



Obr.3.2-1

Riešenie:

Pri sériovom usporiadaní dielektrík elektrická indukcia $D = \text{konšt.}$ v každom dielektriku, takže

$$D_1 = D_2, \text{ potom } \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$$

Z 2. Kirchhoffovho zákona pre uvedený obvod platí

$$U = U_1 + U_2 = E_1 l_1 + E_2 l_2, \text{ potom}$$

$$U = \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} l_1 + l_2 \right) E_2$$

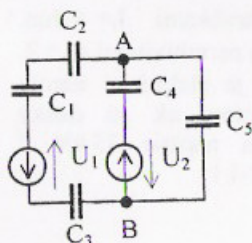
Elektrické intenzity v jednotlivých dielektrikách sú

$$E_2 = \frac{U}{\frac{\varepsilon_{r2} \varepsilon_0}{\varepsilon_{r1} \varepsilon_0} l_1 + l_2} = \frac{35 \cdot 10^3}{\frac{8}{2} 4 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-3}} = 1,25 \cdot 10^6 \text{ Vm}^{-1}$$

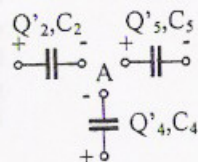
$$E_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_2 = \frac{8}{2} 1,25 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^6 \text{ Vm}^{-1}$$

Príklad 3.2-2 Určite náboj Q_5 na kapacite C_5 v schéme na obr.3.2-2, keď $U_1 = 24 \text{ V}$, $U_2 = 12 \text{ V}$, $C_1 = C_4 = 0,5 \mu\text{F}$, $C_2 = C_3 = 1 \mu\text{F}$, $C_5 = 0,2 \mu\text{F}$! Náboje na kapacitách C_2 , C_4 , C_5

boli už pred pripojením do obvodu $Q'_2 = 4 \mu\text{C}$,
 $Q'_4 = 6 \mu\text{C}$, $Q'_5 = 10 \mu\text{C}$, na obr.3.2-3 je ich orientácia.



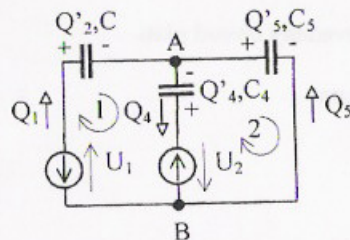
Obr.3.2-2



Obr.3.2-3

Riešenie:

Obvod sa rozhodneme riešiť použitím Kirchhoffových zákonov. V obvode sú dve nezávislé slučky a jeden nezávislý uzel, napr. A. Zvolíme zmysel popisovania jednotlivých slučiek a orientáciu nábojov v jednotlivých vetvách (ľubovoľne). Ak je vo vetve zapojených v sérii viac kapacít nahradíme ich výslednou kapacitou. Východiskové rovnice napíšeme pre takto upravenú schému, obr.3.2-4.



Obr.3.2-4

$$\frac{Q_1}{C} + \frac{Q_4}{C_4} = -U_1 - U_2$$

$$-\frac{Q_4}{C_4} + \frac{Q_5}{C_5} = U_2$$

$$-Q_1 + Q_4 - Q_5 = -Q'_2 - Q'_4 + Q'_5$$

$$\text{kde } \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

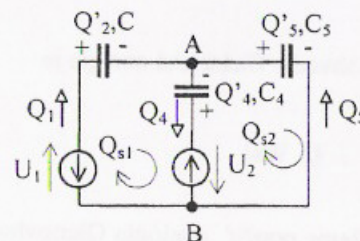
Dosadením číselných hodnôt dostaneme sústavu rovníc pre náboje

$$\begin{aligned} 4 \cdot 10^6 Q_1 + 2 \cdot 10^6 Q_4 &= -36 \\ -2 \cdot 10^6 Q_4 - 5 \cdot 10^6 Q_5 &= 12 \\ -Q_1 + Q_4 - Q_5 &= 0 \end{aligned}$$

Riešením uvedených rovníc dostaneme

$$Q_1 = -6 \mu\text{C}, \quad Q_4 = -6 \mu\text{C}, \quad Q_5 = 0$$

Obvod uvedený na obr.3.2-2 a obr.3.2-3 môžeme riešiť tiež metódou slučkových nábojov. Schému upravíme podobne ako pri riešení priamym použitím Kirchhoffových zákonov. Vo vetve, kde je zapojených viac kapacít do série, tieto nahradíme výslednou kapacitou. V prípade, že niektorá z kapacít už mala počiatočný náboj pred pripojením do obvodu, tento náboj s výslednou kapacitou určí napätie na výslednej kapacite. Zahmieme ho do východiskových rovníc pre druhý Kirchhoffov zákon, pretože len podľa tohoto zákona píšeme rovnice pri metóde slučkových nábojov. Zmyslu popisovania slučky priradíme význam slučkového náboja a napíšeme východiskové rovnice pre riešenie obvodu podľa obr.3.2-5.



Obr.3.2-5

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right) Q_{s1} - \frac{1}{C_4} Q_{s2} &= -U_1 - U_2 - \frac{Q'_2}{C} + \frac{Q'_4}{C_4} \\ -\frac{1}{C_4} Q_{s1} + \left(\frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} \right) Q_{s2} &= U_2 - \frac{Q'_4}{C_4} - \frac{Q'_5}{C_5} \end{aligned}$$

kde $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$. Po dosadení číselných hodnôt rovnice sú

$$\begin{aligned} 6 \cdot 10^6 Q_{s1} - 2 \cdot 10^6 Q_{s2} &= -40 \\ -2 \cdot 10^6 Q_{s1} + 7 \cdot 10^6 Q_{s2} &= -50 \end{aligned}$$

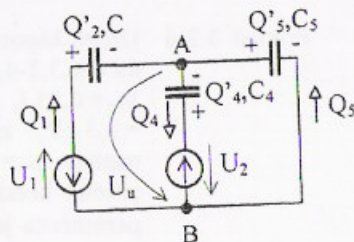
Z vypočítaných slučkových nábojov určíme náboje vo vetvách

$$Q_5 = -Q_{s2} - Q'_5 = -(-10 \cdot 10^{-6}) - 10 \cdot 10^{-6} = 0$$

$$Q_4 = Q_{s1} - Q_{s2} - Q'_4 = -10 \cdot 10^{-6} - (-10 \cdot 10^{-6}) - 6 \cdot 10^{-6} = -6 \cdot 10^{-6} \text{ As},$$

$$Q_1 = Q_{s1} + Q'_2 = -10 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-6} = -6 \cdot 10^{-6} \text{ As}$$

Dalšiu metódu, ktorú môžeme použiť na riešenie obvodu uvedeného na obr.3.2-2 a obr.3.2-3 vyberieme metódu uzlových napätí. Zvolíme uzlové napätie medzi uzlami A a B, vo vetve, kde sú v sérii zapojené viaceré kapacity, nahradíme ich výslednou kapacitou, obr.3.2-6, a napíšeme východiskovú rovnicu.



Obr.3.2-6

$$(C + C_4 + C_5)U_u = -CU_1 + C_4U_2 - Q'_2 - Q'_4 + Q'_5$$

Po dosadení hodnôt rovnica má tvar

$$(0,25 + 0,5 + 0,2) \cdot 10^{-6} U_u = (-0,25 \cdot 24 + 0,5 \cdot 12 - 4 - 6 + 10) \cdot 10^{-6}$$

$$0,95 U_u = 0$$

Náboje v jednotlivých vetvách sú

$$Q_5 = -C_5 U_u = 0, \quad Q_1 = -C(U_u + U_1) = -0,25 \cdot 10^{-6} \cdot 24 = -6 \mu\text{C},$$

$$Q_4 = C_4(U_u - U_2) = -0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = -6 \mu\text{C}$$

Z jednotlivých spôsobov riešenia vidieť, že pre daný obvod bolo najvhodnejšie použiť metódu uzlových napätí. Bolo potrebné riešiť len jednu rovnicu.

Príklad 3.2-3 V obvode podľa obr.3.2-7 ampérmetr ukazuje 3,5 A,

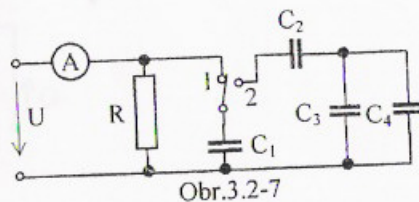
odpor $R = 20 \Omega$.

Kapacity majú hodnoty:

$$C_1 = 1 \mu\text{F}, \quad C_2 = 5 \mu\text{F},$$

$$C_3 = 3 \mu\text{F}, \quad C_4 = 2 \mu\text{F}.$$

Určite napätia na jed-



Obr.3.2-7

notlivých kapacitách po prepnutí prepínača z polohy 1 do polohy 2!

Riešenie:

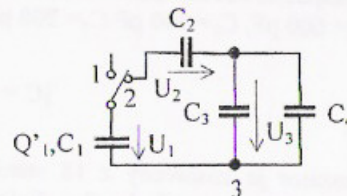
Napätie na odpore R je totožné s napätím na kapacite C_1

$$U = RI = 20 \cdot 3,5 = 70 \text{ V}$$

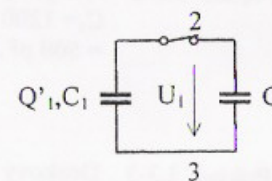
Ideálny kondenzátor o kapacite C_1 má tým počiatočný náboj

$$Q'_1 = C_1 U = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 70 = 70 \mu\text{C}$$

Po prepnutí prepínača do polohy 2, bude schéma uvedeného obvodu podľa obr.3.2-8, je to obvod pozostávajúci z *pasívnych prvkov*, z ktorých má prvok C_1 počiatočný náboj Q'_1 . Obvod môžeme nahradiť podľa obr.3.2-9. Z hľadiska uzlov 2 a 3, sa jedná o paralelné zapojenie kapacit C_1 a C . Výsledná kapacita obvodu je



Obr.3.2-8



Obr.3.2-9

$$C_v = C_1 + C = (1 + 2,5) \cdot 10^{-6} = 3,5 \mu\text{F}$$

a má náboj Q'_1 . Teda napätie na tejto paralelnej kombinácii je

$$U_1 = \frac{Q'_1}{C_v} = \frac{70 \cdot 10^{-6}}{3,5 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ V}$$

Pretože kapacita C_2 je pripojená do série s paralelne zapojenými kapacitami C_3 a C_4 a platí, že

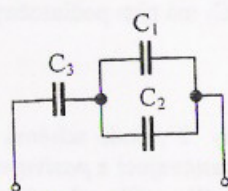
$$C_2 = C_{34} = 5 \mu\text{F}, \quad \text{napätie } U_1 \text{ sa rozdelí na kapacity } C_2 \text{ a } C_{34}$$

$$U_2 = U_3 = 10 \text{ V}$$

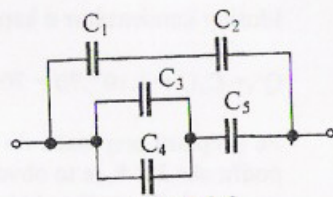
3.3 ÚLOHY NA RIEŠENIE

Príklad 3.3-1 Určite výslednú kapacitu obvodu podľa obr.3.3-1, keď $C_1 = 200 \text{ pF}$, $C_2 = 1000 \text{ pF}$, $C_3 = 600 \text{ pF}$!

$$[C = 400 \text{ pF}]$$



Obr.3.3-1



Obr.3.3-2

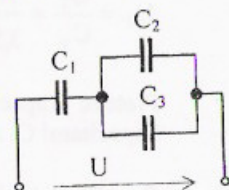
Príklad 3.3-2 Aká je výsledná kapacita obvodu podľa obr.3.3-2, keď $C_1 = 1200 \text{ pF}$, $C_2 = 600 \text{ pF}$, $C_3 = 300 \text{ pF}$, $C_4 = 200 \text{ pF}$, $C_5 = 500 \text{ pF}$!

$$[C = 650 \text{ pF}]$$

Príklad 3.3-3 Dostkový kondenzátor je zostavený z 18 staniolových fólií rozmerov $14 \times 28 \text{ mm}$ a sľudového dielektrika o hrúbke $0,06 \text{ mm}$ ($\epsilon_r = 7$). Aká je jeho kapacita? Koľko fólií sa musí odobrať, aby kapacita kondenzátora bola 4890 pF ?

$$[C = 6890 \text{ pF}, 5 \text{ fólií}]$$

Príklad 3.3-4 Pri napätí 200 V je celkový náboj, podľa zapojenia na obr.3.3-3, $Q = 6 \cdot 10^{-4} \text{ C}$. Kapacita $C_1 = 4 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 8 \text{ }\mu\text{F}$. Určite tretiu kapacitu a energiu elektrického poľa na každej kapacite!



Obr.3.3-3

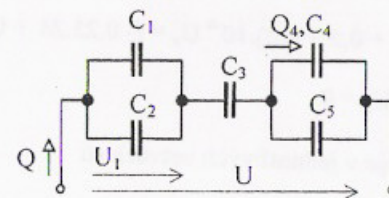
$$[C_3 = 4 \text{ }\mu\text{F}, W_1 = 45 \text{ mJ}, W_2 = 10 \text{ mJ}, W_3 = 5 \text{ mJ}]$$

Príklad 3.3-5 Zvitkový kondenzátor je zložený z dvoch vrstiev parafrínového papiera. Hrúbka jednej vrstvy je $0,0025 \text{ mm}$ ($\epsilon_r = 2,16$) a dvoch staniolových polepov dĺžky 12 m a šírky 5 cm . Aká je kapacita kondenzátora?

$$[C = 0,919 \text{ }\mu\text{F}]$$

Príklad 3.3-6 Určite kapacitu každého kondenzátora podľa zapojenia na obr.3.3-4, ak viete, že energia piateho kondenzátora $W_5 = 0,25 \text{ J}$, celkový náboj $Q = 4 \text{ mC}$ pri napätí $U = 3,5 \text{ kV}$, náboj štvrtého kondenzátora $Q_4 = 3 \text{ mC}$, napätie $U_1 = 2 \text{ kV}$, objem dielektrika medzi doskami prvého kondenzátora je $O_1 = 700 \text{ cm}^3$, jeho relatívna permitivita je $\epsilon_r = 2$ a medzera medzi doskami $l_1 = 0,02 \text{ cm}$!

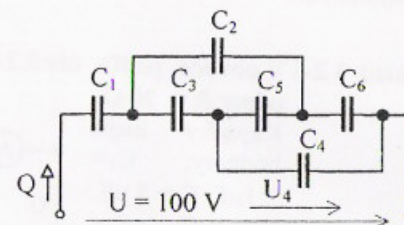
$$[C_1 = 0,31 \text{ }\mu\text{F}, C_2 = 1,69 \text{ }\mu\text{F}, C_3 = 4 \text{ }\mu\text{F}, C_4 = 6 \text{ }\mu\text{F}, C_5 = 2 \text{ }\mu\text{F}]$$



Obr.3.3-4

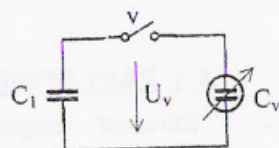
Príklad 3.3-7 Hodnota každého kondenzátora v schéme na obr.3.3-5 je $0,2 \text{ }\mu\text{F}$. Vypočítajte celkový náboj Q a napätie na C_4 !

$$[Q = 10 \text{ }\mu\text{C}, U_4 = 25 \text{ V}]$$



Obr.3.3-5

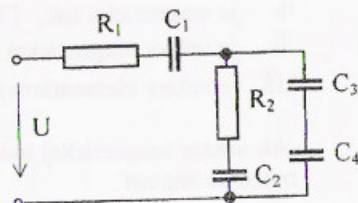
Príklad 3.3-8 Kondenzátor s kapacitou $C_1 = 1000 \text{ pF}$, obr.3.3-6 má napätie $U = 2000 \text{ V}$. Napätie sa meria elektrostatickým voltmetrom, ktorého kapacita je $C_v = 100 \text{ pF}$. Aké napätie nameria tento voltmeter, keď sa jeho kapacita výchyľkou nezmení?



Obr.3.3-6

$[U_v = 1818,2 \text{ V}]$

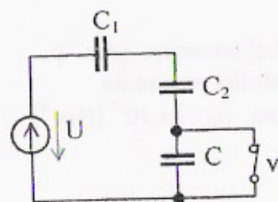
Príklad 3.3-9 Kondenzátory sú zapojené podľa schémy na obr.3.3-7. Kapacity kondenzátorov sú: $C_1 = 1 \text{ } \mu\text{F}$, $C_2 = 4 \text{ } \mu\text{F}$, $C_3 = 6 \text{ } \mu\text{F}$, $C_4 = 2 \text{ } \mu\text{F}$. $U = 100 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 100 \text{ } \Omega$. Vypočítajte náboj na každom kondenzátore!



Obr.3.3-7

$[Q_1 = 84,6 \text{ } \mu\text{C}, Q_2 = 61,5 \text{ } \mu\text{C}, Q_3 = Q_4 = 23,1 \text{ } \mu\text{C}]$

Príklad 3.3-10 Kondenzátory zapojené podľa schémy na obr.3.3-10 majú hodnoty: $C_1 = 2 \text{ } \mu\text{F}$, $C_2 = 4 \text{ } \mu\text{F}$, $C = 6 \text{ } \mu\text{F}$ a napätie $U = 20 \text{ V}$. Aký bude náboj na kondenzátore o kapacite C po rozopnutí vypínača v ?



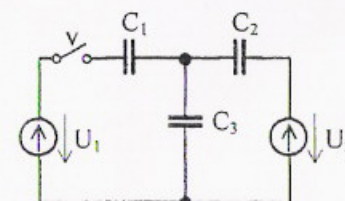
Obr.3.3-10

[Nulový]

Príklad 3.3-11 Kondenzátor s kapacitou $2 \text{ } \mu\text{F}$ bol pripojený na napätie 110 V . Po odpojení od siete sa pripojí k nenabitému kondenzátoru. Aká bude jeho kapacita, keď napätie klesne na 44 V ?

$[C = 3 \text{ } \mu\text{F}]$

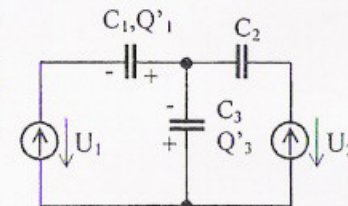
Príklad 3.3-12 Aké budú náboje na kondenzátoroch v schéme na obr.3.3-9 po zapnutí vypínača v , keď $U_1 = U_2 = 100 \text{ V}$, $C_1 = C_2 = 10 \text{ } \mu\text{F}$, $C_3 = 40 \text{ } \mu\text{F}$?



Obr.3.3-9

$[Q_1 = Q_2 = 0,666 \text{ mC}, Q_3 = 1,332 \text{ mC}]$

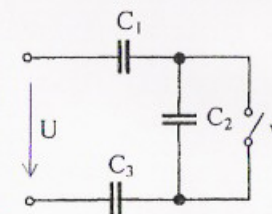
Príklad 3.3-13 Určite náboje na jednotlivých kapacitách v obvode podľa obr.3.3-10! $U_1 = 4 \text{ V}$, $U_2 = 2 \text{ V}$, $C_1 = 1 \text{ } \mu\text{F}$, $C_2 = 4 \text{ } \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \text{ } \mu\text{F}$ a počiatočné náboje $Q'_1 = 2 \text{ } \mu\text{C}$, $Q'_3 = 4 \text{ } \mu\text{C}$!



Obr.3.3-10

$[Q_1 = 2,75 \text{ } \mu\text{C}, Q_2 = 3 \text{ } \mu\text{C}, Q_3 = 3,75 \text{ } \mu\text{C}]$

Príklad 3.3-14 V schéme na obr.3.3-11 sú veľkosti kapacit $C_1 = 2 \text{ } \mu\text{F}$, $C_2 = 3 \text{ } \mu\text{F}$, $C_3 = 4 \text{ } \mu\text{F}$. Celkové napätie $U = 100 \text{ V}$. Ako sa zmení celková elektrická energia obvodu po zapnutí vypínača v , oproti pôvodnému stavu?



Obr.3.3-11

$[W'_e = 1,4 W_e]$

Poznámky**4 MAGNETICKÉ OBVODY****4.1 ZÁKLADNÉ VZŤAHY**

Závislosť magnetického toku a magnetickej indukcie udáva nasledovný vzťah

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi, \text{ kde}$$

Φ je magnetický tok, [Wb, Vs]

$\vec{B}$ je vektor magnetickej indukcie, [T]

$d\vec{S}$ je vektor elementárnej plochy, [m²]

Ak vektor magnetickej indukcie a vektor plochy sú kolineárne vektory, môžeme napísať

$$\Phi = BS$$

Vektor magnetickej intenzity je

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\vec{B}}{\mu}, \text{ kde}$$

$\vec{H}$ je vektor magnetickej intenzity, [Am⁻¹]

μ_r je relatívna permeabilita prostredia

μ_0 je permeabilita vákua, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [Hm⁻¹]

Zákon celkového prúdu

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum (\pm I) = NI = U_m$$

$d\vec{l}$ je vektor elementu integračnej čiary, s výhodou volíme túto čiaru zhodnú so siločiarou magnetického poľa, [m]

I je prúd, ktorý vytvára magnetické pole, [A]

N je počet závitov cievky, ktorou prechádza prúd I
 U_m je magnetické napätie, [A]

Zákon celkového prúdu pre magnetické obvody po častiach homogénnych

$$\sum Hl = NI$$

Intenzita magnetického poľa v okolí priameho dlhého vodiča, ktorým preteká prúd I sa určí zo vzťahu

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \text{ kde } r \text{ je polomer magnetickej siločiar (kružnice po ktorej sa robí integrácia vo výraze celkového prúdu), [m]}$$

Vektor sily pôsobiacej na prúdovodič uložený v magnetickom poli sa určí zo vzťahu

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}), \text{ [N; A, m, T]}$$

Indukované napätie (pohybové)

$$u_i = \int_0^l (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}, \text{ [V; ms}^{-1}, \text{T, m]}$$

Indukované napätie (transformačné)

$$u_i = \frac{d\Psi}{dt} = N \frac{d\Phi}{dt}, \text{ [V; Wb, s]}$$

$\vec{v}$ je vektor rýchlosti pohybujúceho sa vodiča, [ms^{-1}]
 Ψ je celkový magnetický tok, $\Psi = N\Phi$

Koeficient vlastnej indukčnosti

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\Psi}{I}, \text{ [H; Wb, A]}$$

Koeficient vlastnej indukčnosti cievky s počtom závitov N , kruhového prierezu S , ktorej polomer je ďaleko menší ako je jej dĺžka l , sa môže približne určiť zo vzťahu

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{S}{l} N^2, \text{ [H; Hm}^{-1}, \text{m}^2, \text{m]}$$

Koeficient vzájomnej indukčnosti je

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\Psi_{21}}{I_2}, \text{ [H; Wb, A]}$$

M je koeficient vzájomnej indukčnosti

I_1 je prúd prvej cievky

I_2 je prúd druhej cievky

Ψ_{12} je časť celkového magnetického toku prvej cievky, ktorú viaže druhá cievka

Ψ_{21} je časť celkového magnetického toku druhej cievky, ktorú viaže prvá cievka

Koeficient vzájomnej väzby

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \text{ kde } L_1, L_2 \text{ sú koeficienty vlastnej indukčnosti cievok}$$

Energia magnetického poľa

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Psi I, \text{ [J; Wb, A]}$$

Príťažlivá sila elektromagnetu

$$F = \frac{B^2 S}{2.4\pi \cdot 10^{-7}} \doteq 4.10^5 B^2 S, \text{ [N; T, m}^2\text{]}$$

4.2 RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad 4.2-1 Určite prúd, ktorý tečie vodičom kruhového prierezu a vo vzdialenosti $d = 20$ cm od jeho osi je magnetická indukcia $B = 1,5$ mT!

Riešenie:

Zo zákona celkového prúdu

$$H = \frac{I}{2\pi d} \quad \text{a z výrazu pre magnetickú indukciu, } B = \mu_0 H, \text{ určíme prúd}$$

$$I = \frac{Bd}{2 \cdot 10^{-7}} = \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2}{2 \cdot 10^{-7}} = 1500 \text{ A}$$

Príklad 4.2-2 Aké je pohybové indukované napätie, ak indukčné čiary homogénneho magnetického poľa zvierajú s rovinou po ktorej sa pohybuje vodič dĺžky 30 cm, uhol 30° a smer rýchlosti so smerom vodiča zvierá uhol 15° ? Magnetická indukcia je 1,2 T a rýchlosť pohybu vodiča je 6 m/s.

Riešenie:

$$u_i = \int_0^l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (vB \sin \alpha) l \cos \beta = (6 \cdot 1,2 \cdot \sin 15^\circ) \cdot 0,3 \cdot \cos 30^\circ = 0,484 \text{ V}$$

Príklad 4.2-3 Cievkou bez feromagnetického jadra, ktorej koeficient vlastnej indukčnosti je $L = 1,5$ H, tečie harmonicky sa meniaci prúd $i = 0,5\sqrt{2} \sin 314t$ A. Aké je transformačné napätie v čase $t = 2$ ms?

Riešenie:

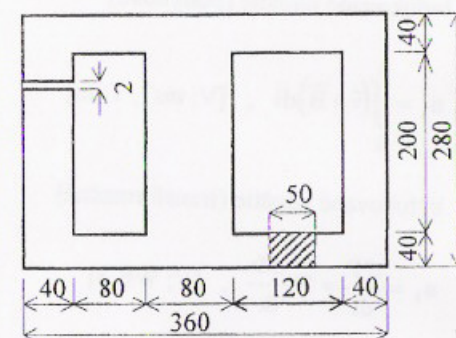
$$u_i(2\text{ms}) = L \frac{di}{dt} = 1,5 \cdot 0,5\sqrt{2} \cdot 314 \cdot \cos 314 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 269,5 \text{ V}$$

Príklad 4.2-4 Určite koeficient vlastnej indukčnosti cievky kruhového prierezu s 500 závitmi, ak pri magnetickom napätí 6000 A je v cievke magnetický tok 4,5 mWb!

Riešenie:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N^2\Phi}{U_m} = 187,5 \text{ mH}$$

Príklad 4.2-5 Vo feromagnetickom jadre podľa obr.4.2-1, ktoré má vinutia na krajných slúpkoch, treba vytvoriť v strednom slúpiku magnetický tok 4,8 mWb. Príspevok magnetického toku každej cievky má byť rovnaký. Určite magnetické napätie každej cievky a celkové magnetické napätie! (Krivka prvotnej magnetizácie je na obr.4.2-2, rozmery sú v mm.)



Obr.4.2.1

Riešenie:

Na riešenie obvodu použijeme vzťah zákona celkového prúdu pre magnetické obvody, ktoré sú po častiach homogénne. Z rozmerov magnetického obvodu určíme prierezy jednotlivých častí magnetického obvodu.

Prierezy krajných stĺpikov

$$S_1 = S_2 = 40 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Prierez stredného stĺpika je

$$S_3 = 80 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Magnetickú indukciu v jednotlivých stĺpikoch obvodu vypočítame zo zadaného magnetického toku a prierezu obvodu.

Magnetická indukcia v strednom stĺpiku je

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{4,8 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} = 1,2 \text{ T}$$

Magnetická indukcia v krajných stĺpikoch sa rovná magnetickej indukcii vo vzduchovej medzere, za predpokladu, že zanedbávame rozptyl. Pretože magnetické toky v krajných stĺpikoch prispievajú rovnakým dielom na tok v strednom stĺpiku, môžeme napísať

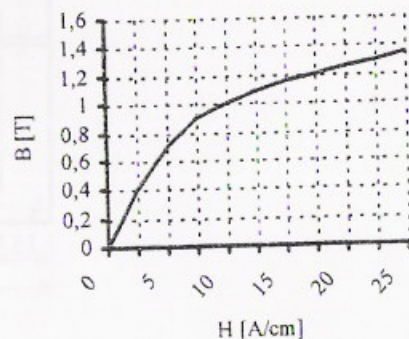
$$B_1 = B_2 = B_v = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 1,2 \text{ T} = B_3 = B$$

Z magnetizačnej charakteristiky, obr.4.2-2, určíme pre vypočítanú magnetickú indukciu vo feromagnetiku, magnetickú intenzitu. V našom prípade je v celom feromagnetiku rovnaká

$$H = 17,5 \text{ A/cm} = 1750 \text{ A/m}$$

Magnetickú intenzitu vo vzduchovej medzere určíme zo vzťahu

$$H_v = \frac{B_v}{\mu_0} = \frac{1,2}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 9,54 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$



Obr.4.2-2

Z rozmerov magnetického obvodu určíme dĺžky jednotlivých častí obvodu. Stredná dĺžka siločiar vo feromagnetiku ľavej časti paralelného magnetického obvodu je

$$l_{21} = 2 \cdot (40 + 80 + 20 + 20) + 200 - 2 = 518 \text{ mm} = 0,518 \text{ m}$$

Analogicky určíme dĺžky ďalších častí

$$l_2 = 2(40 + 120 + 20 + 20) + 200 = 600 \text{ mm} = 0,6 \text{ m}$$

$$l_3 = 2 \cdot 20 + 200 = 240 \text{ mm} = 0,24 \text{ m}$$

Dosadením vypočítaných hodnôt do vzťahu celkového prúdu pre magnetický obvod po častiach homogénny, dostaneme pre ľavú časť

$$H_3 l_3 + H_1 l_{21} + H_v l_v = U_{m1}$$

$$U_{m1} = 3234,5 \text{ A}$$

Pre pravú časť obvodu

$$H_3 l_3 + H_2 l_2 = U_{m2}$$

$$U_{m2} = 1470 \text{ A}$$

Celkové magnetické napätie je

$$U_m = U_{m1} + U_{m2} = 4704,5 \text{ A}$$

Úlohu môžeme riešiť z analógie s elektrickými obvodmi. Z magnetickej indukcie a intenzity pre feromagnetikum, vypočítame permeabilitu a zo zadaných rozmerov magnetického obvodu vypočítame magnetický odpor príslušných častí obvodu. Nakreslíme analogickú schému s elektrickými obvodmi, obr.4.2-3 a z analógie Kirchhoffových zákonov napíšeme rovnice, z ktorých vypočítame požadované veličiny.

Permeabilita feromagnetika

$$\mu = \frac{B}{H} = 6,857 \cdot 10^{-4} \text{ Hm}^{-1}$$

Magnetický odpor vzduchovej medzery

$$R_{mv} = \frac{l_v}{\mu_0 S_1} = 7,957 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1},$$

Pre slučku „a“ a „b“ napíšeme obdobu 2. Kirchhoffovho zákona

$$(R_{m1} + R_{mv})\Phi_1 + R_{m3}\Phi_3 = U_{m1}$$

$$R_{m3}\Phi_3 + R_{m2}\Phi_2 = U_{m2}$$

Napr. pre uzol A obvodu v schéme na obr.4.2-3 sa môže napísať obdoba 1. Kirchhoffovho zákona.

$$-\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0$$

Vypočítame magnetické odpory feromagnetických častí

$$R_{m1} = \frac{l_{z1}}{\mu S_1} = 3,777 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}, \quad R_{m2} = \frac{l_2}{\mu S_2} = 4,375 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1},$$

$$R_{m3} = \frac{l_3}{\mu S_3} = 8,75 \cdot 10^4 \text{ H}^{-1}$$

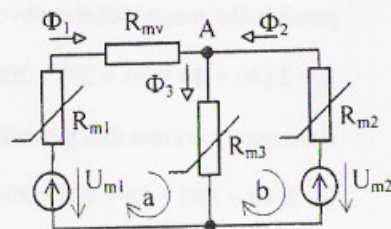
Dosadením hodnôt magnetických odporov a magnetických tokov do skôr uvedených rovníc sa vypočítajú magnetické napätia

$$U_{m1} = 3236,3 \text{ A}, \quad U_{m2} = 1470,0 \text{ A},$$

$$U_m = U_{m1} + U_{m2} = 4706,3 \text{ A}$$

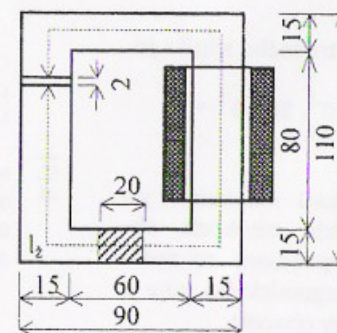
Z porovnania výsledkov oboch riešení môžeme konštatovať dobrú zhodu.

Příklad 4.2-6 Magnetický obvod z feromagnetického materiálu podľa obr.4.2-4, má cievku so 480 závitmi, ktorými preteká prúd 4 A. Určite magnetický tok vo vzduchovej



Obr.4.2-3

medzere! Rozšírenie magnetického toku vo vzduchovej medzere a rozptyl zanedbáme. Krivka prvotnej magnetizácie je na obr.4.2-2.



Obr.4.2-4

Riešenie:

Dĺžka strednej siločiaru vo feromagnetiku je

$$l_z = 2(80 + 15 + 60 + 15) - 2 = 338 \text{ mm} = 0,338 \text{ m}$$

Prierez feromagnetického jadra a prierez vzduchovej medzery sú rovnaké

$$S_z = S_v = 15 \cdot 20 = 300 \text{ mm}^2 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Odhadneme magnetický tok v obvode a vypočítame magnetické napätie pre sériový nehomogénny magnetický obvod. Z niekoľkých výpočtov zostrojíme weberampérovú charakteristiku, t.j. funkčnú závislosť magnetického toku od magnetického napätia a z takto získaného grafu pre zadané magnetické napätie $U_m = NI = 480 \cdot 4 = 1920 \text{ A}$, odčítame z grafu hľadaný magnetický tok.

Prvý odhad urobíme pre magnetickú indukciu (sýtenie)

$$B = 0,8 \text{ T}, \text{ potom magnetický tok je}$$

$$\Phi = BS_z = 0,8 \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Pre odhadnutú magnetickú indukciu určíme z magnetizačnej charakteristiky uvedenej na obr.4.2-2 magnetickú intenzitu pre feromagnetikum

$$H_z = 7,5 \text{ A/cm} = 750 \text{ A/m}$$

a vypočítame magnetickú intenzitu vo vzduchovej medzere

$$H_v = \frac{B_v}{\mu_0} = 6,366 \cdot 10^5 \text{ Am}^{-1}$$

Zo získaných hodnôt určíme magnetické napätie

$$U_m = H_z l_z + H_v l_v = 750 \cdot 0,338 + 6,366 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1526,5 \text{ A}$$

Vypočítané magnetické napätie z odhadnutého magnetického toku je menšie ako magnetické napätie zo zadanej úlohy. Zvolíme preto vyššiu hodnotu magnetickej indukcie

$$B = 1,1 \text{ T}$$

a výpočet urobíme znova. Výsledky zapíšeme do tabuľky, tab.4.2-1.

$B_z = B_v$ [T]	Φ 10^{-4} [Wb]	H_z [A/m]	H_v 10^5 [A/m]	$H_z l_z$ [A]	$H_v l_v$ [A]	U_m [A]
0,8	2,4	700	6,366	236,6	1237,0	1526,5
1,2	3,6	1750	9,549	591,5	1909,8	2501,3
0,9	2,7	800	7,162	270,4	1432,3	1702,8
1,1	3,3	1250	8,753	422,5	1750,6	2173,2

Tab.4.2-1

Druhá vypočítaná hodnota magnetického napätia je vyššia ako zadaná. Zvolíme magnetickú indukciu pre ďalší výpočet

$$B = 0,9 \text{ T}, \text{ ďalší } B = 1,1 \text{ T}$$

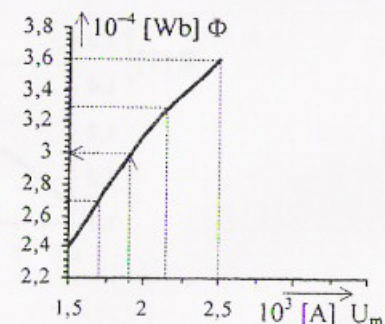
Z vypočítaných hodnôt zostrojíme graf $\Phi = f(U_m)$, obr.4.2-5.

Z tohoto grafu odčítame pre zadané magnetické napätie

$$U_m = 1920 \text{ A},$$

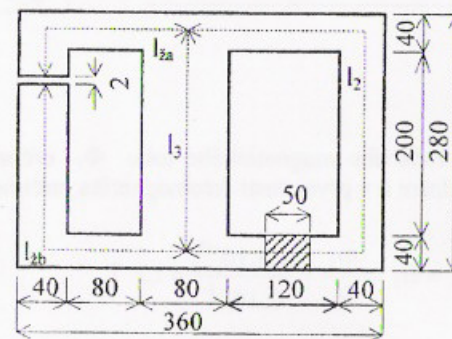
magnetický tok

$$\Phi = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$



Obr.4.2-5

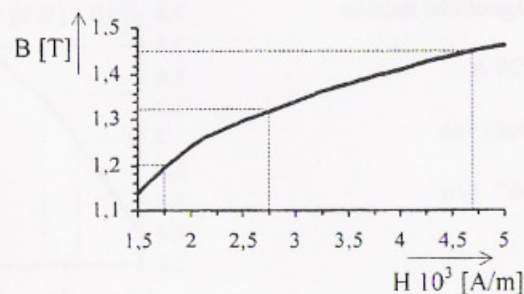
Príklad 4.2-7 Magnetický obvod podľa obr.4.2-6 má navinutú cievku na strednom stĺpiku s 2000 závitmi. Určite indukčnosť cievky, aby v stĺpiku so vzduchovou medzerou bol magnetický tok $2,4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$! Magnetizačná charakteristika je na obr.4.2-7.



Obr.4.2-6

Riešenie:

Magnetický obvod na obr.4.2-6 nahradíme analogickou schémou z elektrických obvodov a napíšeme obdobné rovnice pre Kirchhoffove zákony. Náhradná schéma je na obr.4.2-8, sú tu dve nezávislé slučky a jeden nezávislý uzol.

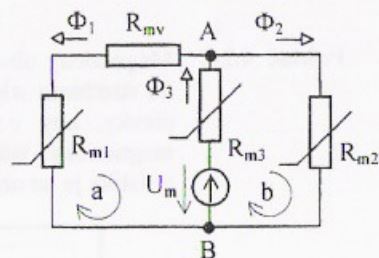


Obr.4.2-7

$$H_v l_v + H_1(l_{2a} + l_{2b}) + H_3 l_3 = NI$$

$$H_2 l_2 + H_3 l_3 = NI$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_3$$



Obr.4.2-8

Zo zadaného magnetického toku Φ_1 určíme indukciu vo vzduchovej medzere a v prvej časti feromagnetika, určíme magnetické intenzity

$$B_v = B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 1,2 \text{ T}$$

$$H_v = \frac{B_v}{\mu_0} = 9,549 \cdot 10^5 \text{ Am}^{-1}$$

Z magnetizačnej charakteristiky uvedenej na obr.4.2-7, odčítame magnetickú intenzitu feromagnetika prvého stĺpca

$$H_1 = 1750 \text{ Am}^{-1}$$

Z prvých dvoch rovníc pre magnetický obvod určíme magnetickú intenzitu druhej paralelnej vetvy

$$H_2 = \frac{H_v l_v + H_1(l_{2a} + l_{2b})}{l_2} = 4,694 \cdot 10^3 \text{ Am}^{-1}$$

a z magnetizačnej charakteristiky odčítame magnetickú indukciu

$$B_2 = 1,45 \text{ T}$$

Magnetický tok v tejto vetve potom je

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Magnetický tok v strednom stĺpiku je

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2 = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Magnetickú indukciu v strednom stĺpiku vypočítame z určeného magnetického toku a prierezu stĺpika

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = 1,325 \text{ T}$$

Z magnetizačnej charakteristiky odčítame magnetickú intenzitu

$$H_3 = 2,75 \cdot 10^3 \text{ Am}^{-1}$$

Dĺžky feromagnetických častí obvodu určíme z obr.4.2-6

$$l_{21} = l_{2a} + l_{2b} = 2(20 + 80 + 40 + 20) + 200 - 2 = 518 \text{ mm} = 0,518 \text{ m}$$

$$l_2 = 2(20 + 80 + 40 + 20) + 200 = 600 \text{ mm} = 0,6 \text{ m}$$

$$l_3 = 200 + 2 \cdot 20 = 240 \text{ mm} = 0,24 \text{ m}$$

$$\text{Magnetické napätie, } U_m = NI = H_3 l_3 + H_2 l_2 = 3,476 \cdot 10^3 \text{ A}$$

sme vypočítali po dosadení hodnôt do rovnice pre slučku magnetického obvodu.

Prúd tečúci cievkou s 2000 závitmi je $I = 1,738 \text{ A}$.

Zo známych hodnôt indukcií a intenzít magnetického poľa môžeme vypočítať permitivity a určiť magnetické odpory jednotlivých častí magnetického obvodu

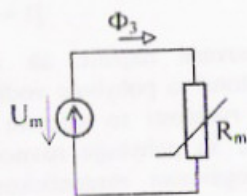
$$\mu_1 = \frac{B_1}{H_1} = 6,857 \cdot 10^{-4} \text{ Hm}^{-1}, \quad \mu_2 = \frac{B_2}{H_2} = 3,089 \cdot 10^{-4} \text{ Hm}^{-1},$$

$$\mu_3 = \frac{B_3}{H_3} = 4,818 \cdot 10^{-4} \text{ Hm}^{-1}$$

$$R_{mv} = \frac{l_v}{\mu_0 S_v} = 7,957 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}, \quad R_{m1} = \frac{l_{z1}}{\mu_1 S_1} = 3,777 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1},$$

$$R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_2 S_2} = 9,712 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}, \quad R_{m3} = \frac{l_3}{\mu_3 S_3} = 1,245 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1},$$

Z náhradnej schémy magnetického obvodu na obr.4.2-8 vidieť, že sa jedná o sérioparalelný obvod a môžeme určiť výsledný magnetický odpor a schému, obr.4.2-9.



Obr.4.2-9

$$R'_m = R_{m1} + R_{mv} = 1,1734 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{mp} = \frac{R'_m R_{m2}}{R'_m + R_{m2}} = 5,3138 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$R_m = R_{m3} + R_{mp} = 6,5588 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$ Zo schémy na obr.4.2-9 môžeme

napísať $U_m = NI = R_m \Phi_3 = 3,476 \cdot 10^3 \text{ A}$

Koeficient vlastnej indukčnosti cievky potom je

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{4 \cdot 10^6}{6,5588 \cdot 10^5} = 6,09 \text{ H}, \quad \text{alebo} \quad L = \frac{N \Phi_3}{I} = 6,09 \text{ H}$$

Príklad 4.2-8 Vypočítajte energiu magnetického poľa cievky bez feromagnetického jadra s 2500 závitmi, kruhového prierezu s priemerom 5 cm a dĺžkou 20 cm, ak závitmi cievky preteká prúd $I = 5 \text{ A}$!

Riešenie:

Určíme koeficient vlastnej indukčnosti cievky pre kruhový prierez a bez feromagnetického jadra. Platí vzťah

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{S}{l} N^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\pi d^2}{4l} N^2 = \frac{(\pi d N)^2}{4l} 10^{-7} = 0,0771 \text{ H},$$

Potom energia magnetického poľa je

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{0,0771 \cdot 15^2}{2} = 8,67 \text{ Ws}$$

4.3 ÚLOHY NA RIEŠENIE

Príklad 4.3-1 Aký prúd preteká cievkou so 700 závitmi, ktorá je navinutá na feromagnetickom krúžku, stredného priemeru $d = 30 \text{ cm}$ a prierezu $S = 11,1 \text{ cm}^2$, aby v krúžku bol magnetický tok $\Phi = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$? Magnetizačná krivka je na obr.4.2-2.

$$[I = 1,346 \text{ A}]$$

Príklad 4.3-2 Vypočítajte absolútnu hodnotu indukovaného napätia v čase $t = 2,4 \text{ ms}$ v rotujúcom závite odľžnikového tvaru v homogénnom magnetickom poli o indukcií $B = 0,01 \text{ T}$, ak aktívne hrany závitu majú dĺžku $l = 10 \text{ cm}$, čelo závitu $a = 20 \text{ cm}$ a frekvencia rotácie je $f = 500 \text{ s}^{-1}$. V čase $t = 0$ síľočiary magnetického poľa sú kolmé na plochu závitu.

$$[u_i = 0,5975 \text{ V}]$$

Príklad 4.3-3 Vypočítajte silu pôsobiacu na jednotku dĺžky medzi dvoma rovnobežnými hranami obdĺžnikového vodivého rámu „nekonečnej“ dĺžky, pretekaného prúdom $I = 50$ A, ak vzdialenosť medzi dlhšími hranami rámu je $a = 5$ cm, rám leží v rovine x-y pravotočivého súradnicového systému a je pretekaný prúdom v smere kladne orientovanej slučky. Plocha rámu je pretínaná indukčnými čiarami magnetického poľa, rovnobežnými a súhlasne orientovanými so osou z o magnetickej indukcií $B = 1$ mT!

$$[F = 0,06 \text{ N}]$$

Príklad 4.3-4 Pri zachovaní podmienok, kladených na parametre vodivého rámu a magnetického poľa z príkladu 4.3-3, vypočítajte prúd, pri ktorom sily pôsobiace na rovnobežné vodiče budú nulové!

$$[I_1 = 0 \text{ A}, I_2 = -250 \text{ A}]$$

Príklad 4.3-5 Určite koeficient vlastnej indukčnosti toroidálnej cievky so vzduchovou medzerou na feromagnetickom jadre! Rozdiel medzi vnútorným a vonkajším priemerom toroidu je zanedbateľný a priemer strednej siločiar je $d = 3$ cm. Vzduchová medzera má šírku $l_v = 0,5$ mm a prierez jadra $S = 4 \text{ mm}^2$. Relatívna permeabilita jadra je $\mu_r = 500$ a počet závitov $N = 200$.

$$[L = 292 \text{ } \mu\text{H}]$$

Príklad 4.3-6 Aký prúd musí pretekať cievkou s 250 závitmi navinutými na feromagnetickom krúžku stredného priemeru $d = 30$ cm a prierezu $S = 11,1 \text{ cm}^2$, aby v krúžku vznikol magnetický tok $\Phi = 10^{-3} \text{ Wb}$? Krivka prvotnej magnetizácie materiálu je na obr.4.2-2.

$$[I = 3,77 \text{ A}]$$

Príklad 4.3-7 Ako sa zmení prúd v cievke z Príkladu 4.3-6, ak krúžok z feromagnetika rozrežeme a roztiahneme tak, aby v magnetickom obvode vznikla 2 mm vduchová medzera?

$$[I = 9,5 \text{ A, prúd sa zväčší o 2,5 krát}]$$

Príklad 4.3-8 Aký veľký prúd prechádza toroidálnou cievkou bez feromagnetického jadra s 1500 závitmi a so stredným priemerom $d = 0,2$ m, keď je v cievke magnetická indukcia $B = 0,03 \text{ T}$?

$$[I = 10 \text{ A}]$$

Príklad 4.3-9 Akým momentom pôsobí na závit obdĺžnikového tvaru s rozmermi 25×30 cm homogénne magnetické pole s magnetickou indukciou 1 T , keď závitom preteká prúd 150 A ? Rovina závitov je odklonená od smeru siločiar o 45° .

$$[M = 7,96 \text{ Nm}]$$

Príklad 4.3-10 Jednosmerný elektromotor má výkon 20 kW . Počet činných cievkových strán rotora, ktoré majú dĺžku 30 cm je 180 . Cievkové strany sú v magnetickom poli s indukciou $0,65 \text{ T}$. Priemer rotora je 35 cm a rotor má 1450 obr./min. Aký veľký prúd musí pretekať vodičmi?

$$[I = 21,4 \text{ A}]$$

Príklad 4.3-11 Aké veľké bude indukované napätie, ak zvierajú siločiar s rovinou, po ktorej sa pohybuje vodič dĺžky 30 cm uhol 30° a smer rýchlosti so smerom vodiča zvierá uhol 15° ? Vodič sa pohybuje rovnomernou rýchlosťou 6 m/s v homogénnom magnetickom poli s indukciou $1,2 \text{ T}$.

$$[u_i = 0,27 \text{ V}]$$

Príklad 4.3-12 Aká je energia magnetického poľa cievky s 2500 závitmi a s priemerom 5 cm, dĺžkou 20 cm, ak preteká cievkou jednosmerný prúd 15 A ?

$$[W_m = 8,7 \text{ J}]$$