

TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA I

OBSAH

ZOZNAM ZNAČIEK	I
Predslov	
1 TOPOLOGIA ELEKTRICKÝCH OBVODOV	1
1.1 Základné topologické pojmy	1
1.2 Incidenčné matice	4
1.2.1 Incidenčná matica uzlov	4
1.2.1 Incidenčná matica slučiek	5
1.2.3 Incidenčná matica rezov	5
1.3 Prvky elektrického obvodu	6
2 JEDNOSMERNÉ PRÚDY	10
2.1 Zdroj jednosmerného napätia	10
2.2 Ohmov zákon	10
2.3 Kirchhoffove zákony	13
2.4 Zapojovanie odporov	14
2.4.1 Sériové zapojenie odporov	14
2.4.2 Paralelné zapojenie odporov	16
2.5 Reálne zdroje napätia a prúdu	18
2.5.1 Reálny napáťový zdroj	18
2.5.2 Reálny prúdový zdroj	19
2.5.3 Náhrada napáťového a prúdového zdroja	20
2.6 Transfigurácia odporov zapojených do n-lúčovej hviezdy a do n-uholníka	21
2.6.1 Transfigurácia trojlúčová hviezda – trojuholník	22
2.6.2 Transfigurácia trojuholník – trojlúčová hviezda	23
2.7 Riešenie obvodov postupným zjednodušovaním schémy	24
2.8 Riešenie elektrických obvodov priamym použitím Kirchhoffových zákonov	26
2.8.1 Zápis rovníc podľa Kirchhoffových zákonov použitím incidenčných matic	28
2.9 Riešenie elektrických obvodov metódou slučkových prúdov	32
2.9.1 Zápis rovníc metódy slučkových prúdov použitím incidenčných matic	35
2.10 Riešenie obvodov metódou uzlových napätí	37
2.10.1 Zápis rovníc metódy uzlových napätí použitím incidenčných matic	42
2.10.2 Veta o paralelných napáťových zdrojoch	45

Recenzenti: Doc. Ing. I. Kováčová, CSc.
Ing. J. Klanica

Za odbornú náplň tohto vysokoškolského učebného textu zodpovedajú autori. Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

ISBN 80 - 88786 - 99 - 1

2.11 Riešenie elektrických obvodov metódou rezových napätí.....	45
2.12 Princíp superpozície.....	47
2.13 Vety o náhradnom zdroji.....	49
2.13.1 Théveninova veta.....	49
2.13.2 Nortonova veta.....	52
2.14 Princíp kompenzácie.....	53
2.15 Premiestnenie ideálnych zdrojov.....	54
2.15.1 Premiestnenie ideálneho napätového zdroja za uzel.....	54
2.15.2 Premiestnenie ideálnych prúdových zdrojov v slučke.....	55
2.16 Práca a výkon jednosmerného prúdu a napätia.....	56
2.16.1 Účinnosť.....	57
2.16.2 Prenos elektrickej energie jednosmerného prúdu.....	57
3 STRIEDAVÉ PRÚDY	61
3.1 Periodické funkcie.....	61
3.2 Stredná a efektívna hodnota harmonického prúdu.....	64
3.3 Komplexné časové vektory.....	66
3.4 Ideálne pasívne prvky v sieti striedavého prúdu.....	69
3.4.1 Ohmický odpor pripojený na harmonický sa meniace napätie.....	70
3.4.2 Induktivnosť pripojená na harmonický sa meniace napätie.....	71
3.4.3 Kapacita pripojená na harmonický sa meniace napätie.....	74
3.5 Sériové zapojenie pasívnych prvkov.....	76
3.6 Paralelné zapojenie pasívnych prvkov.....	81
3.7 Sérioparalelné zapojenie pasívnych prvkov.....	84
3.8 Riešenie zložitejších obvodov pripojených na harmonický sa meniace napätie.....	86
3.9 Obvody so vzájomnými indukčnosťami.....	86
3.9.1 Cievky zapojené do série.....	87
3.9.2 Paralelné zapojenie cievok.....	89
3.9.3 Všeobecný obvod so vzájomnými indukčnosťami.....	91
3.10 Výkon harmonického prúdu a napätia.....	92
3.10.1 Kompenzácia účinnika.....	95
3.11 Rezonancia.....	96
3.11.1 Sériová rezonancia.....	96
3.11.2 Rezonancia v paralelnom R, L, C obvode.....	99
3.11.3 Vzájomná rezonancia.....	102
3.12 Reálne pasívne prvky pripojené na harmonické napätie.....	102
3.12.1 Cievka.....	102
3.12.2 Kondenzátor.....	105
4 DIELEKTRICKÉ OBVODY	109
4.1 Kapacita doskového kondenzátora.....	109
4.2 Sériový dielektrický obvod.....	111
4.3 Paralelný dielektrický obvod.....	112
4.4 Zapojenie kondenzátorov.....	113
4.4.1 Sériové zapojenie kondenzátorov.....	113
4.4.2 Paralelné zapojenie kondenzátorov.....	114
4.4.3 Zmiešané zapojenie kondenzátorov.....	115
4.5 Riešenie zložitejších dielektrických obvodov.....	116
4.5.1 Riešenie dielektrických obvodov použitím Kirchhoffových zákonov.....	116
4.5.2 Riešenie dielektrických obvodov použitím metódy slučkových nábojov.....	119
4.5.3 Riešenie dielektrických obvodov metódou uzlových napätí.....	121
4.5.4 Transfigurácia kapacít Y, D.....	122
4.6 Energia elektrostatického poľa.....	123
5 MAGNETICKÉ OBVODY	125
5.1 Základné veličiny magnetického poľa.....	125
5.2 Zákon celkového prúdu.....	127
5.3 Hopkinsonov zákon.....	129
5.4 Rozdelenie magnetik.....	131
5.5 Hysteréza.....	132
5.6 Magnetické obvody.....	134
5.6.1 Sériový homogénny magnetický obvod.....	135
5.6.2 Sériový nehomogénny magnetický obvod.....	138
5.6.3 Rozvetvené magnetické obvody.....	139
5.7 Magnetický obvod s permanentným magnetom.....	142
5.8 Silové účinky magnetického poľa.....	145
5.9 Elektromagnetická indukcia.....	148
5.9.1 Transformačné indukované napätie.....	148
5.9.2 Polybové indukované napätie.....	149
5.10 Koeficient vlastnej indukčnosti.....	152

ZOZNAM ZNAČIEK

5.11 Koefficient vzájomnej indukčnosti.....	154
5.12 Koefficient vzájomnej väzby	158
5.13 Energia magnetického poľa.....	160
5.14 Príťažlivá sila elektromagnetu.....	161

Použitá literatúra	163
--------------------------	-----

Značka	Význam značky
A	Incidenčná matica uzlov, mechanická práca, označenie bodu
B	Indukcia magnetického poľa, incidenčná matica slučiek
C	Kapacita
E	Intenzita elektrického poľa
F	Sila
G	Vodivosť
H	Intenzita magnetického poľa
I	Prúd
J	Prúdová hustota
L	Koefficient vlastnej indukčnosti, indukčnosť
M	Koefficient vzájomnej indukčnosti, vzájomná indukčnosť
N	Počet závitov
P	Výkon
Q	Jalový výkon, elektrický náboj, kvalita rezonačného obvodu, incidenčná matica rezov, činiteľ akosti
R	Odpor
S	Zdanlivý výkon, plocha
T	Doba periódy
U	Napätie
V	Potenciál
W	Energia
X	Reaktancia
Y	Admitancia
Z	Impedancia
f	Frekvencia
i	Okamžitý prúd
j	Imaginárna jednotka (-1) ^{1/2}
k	Koefficient (napr. väzby), konštanta
l	Dĺžka
q	Okamžitý náboj
t	Čas
u	Okamžité napätie
α, β, γ	Teplotný súčiniteľ odporu, uhol
δ	Uhol, stratový uhol
Δ	Označenie prirastku
ε	Permitivita, stupeň uzla
ϑ	Teplota
φ	Fázový posun

Značka	Význam značky
Φ	Magnetický tok
γ	Merná (špecifická) vodivosť
η	Účinnosť
μ	Permeabilita
ρ	Memý (špecifický) odpor
σ	Koeficient rozptylu
ω	Kruhová frekvencia
τ	Koeficient rozptylu
ψ	Celkový magnetický tok

Indexy

Značka	Význam značky
c	Koercitívny, celkový
e	Elektromotorický
d	Diferenciálny
i	Indukovaný, vnútorný, i-tý, napr. riadok
j	j-tý, napr. stĺpec
k	Nakrátko, koniec, k-tý, napr. člen
l	l-tý
m	Maximálny, magnetický
n	n-tý, napr. člen
r	Rozptyľový, remanentný, reverzibilný
z	Začiatkový

Označenie veličín:

Značka	Význam značky
i	Okamžitý prúd, okamžité veličiny sú písané malými písmenami
I	Komplexný vektor prúdu (fázor)
$\dot{I}_m$	Komplexný časový vektor prúdu (rotujúci fázor)
$\vec{B}$	Vektor magnetickej indukcie

Podobne sú označované aj iné vektorové veličiny alebo veličiny, ktoré majú význam komplexného, alebo komplexného časového vektora.

PREDSLOV

Dočasná vysokoškolská učebnica „Teoretická elektrotechnika I“ je určená predovšetkým pre študentky a študentov prvého ročníka Fakulty elektrotechniky a informatiky TU v Košiciach.

Predmet Teoretická elektrotechnika I je prípravným predmetom pre ďalšie predmety teoretickej elektrotechniky a pre nadväzovacie predmety elektrotechnického zamerania. Preto sú v jednotlivých kapitolách týchto učebných textov popísané metódy a princípy pre riešenie elektrických, dielektrických a magnetických obvodov. Dobré osvojenie si tejto časti učebnej látky dáva študujúcim predpoklad, že ľahšie pochopia problematiku v nadväbových predmetoch.

Všetkým, ktorí sa rozhodnú študovať predložený učebný text želáme, aby sa im s ním dobre pracovalo.

Ďakujeme Doc. Ing. I. Kováčovej, CSc. a Ing. J. Klanicovi za dôsledné prečítanie rukopisu.

Košice január 1999

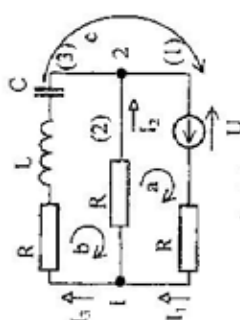
Autori

1 TOPOLOGIA ELEKTRICKÝCH OBVODOV

Elektrický obvod je charakterizovaný usporiadaním prvkov obvodu z ktorých pozostáva a spôsobom ich zapojenia – *topológiou zapojenia*. Topológia ako súčasť geometrie vyšetruje vlastnosti geometrických útvarov a vzťahy medzi nimi, ktoré sú invariantné, t. j. nemenia sa pri vzájomne jed- noznačných transformáciách.

1.1 ZÁKLADNÉ TOPOLOGICKÉ POJMY

⇒ Schéma zapojenia je jednoduché, prehľadné zakreslenie celkové- ho spojenia elektrického obvodu. Za- riadenia zapojené v elektrickom obvo- de sa nahradiť takými ideálnymi prv- kami elektrického obvodu (ideálnym odporom – odporom, ideálnou cievkou – indukčnosťou, ideálnym kondenzáto- rom – kapacitou), ktoré najlepšie vy- stihujú vlastnosti daného elektrického zariadenia. Spojovacie privody k jed- notlivým zariadeniam sa považujú za bezimpedančné a kreslia sa ako čiar, obr.1.1.



obr.1.1

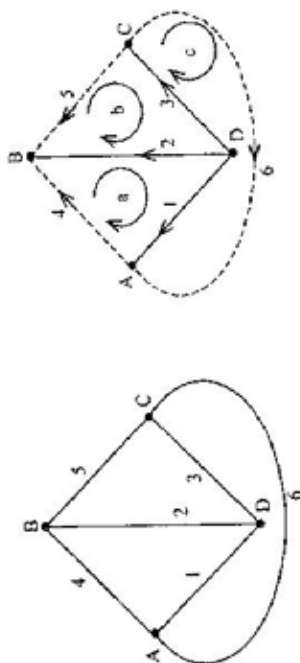
⇒ Uzol elektrického obvodu nazývame miesto vodivého spojenia dvoch alebo viac prvkov a tiež svorku elektrického obvodu, ktorá je nie vodivo spojená s iným prvkom. Na obr.1.1 sú uzly označené číslami 1 a 2. Uzol je charakterizovaný, podľa toho koľko prvkov sa v ňom spojuje, *stup- ňom* ϵ . Ak sú v uzle spojené napr. dva prvky, $\epsilon = 2$ a taký uzol sa nazýva *vnútorný (izolovaný) uzol*. Ak sú tri prvky, $\epsilon = 3$ a pod.

⇒ Vetva elektrického obvodu je vodivé spojenie uzlov, ktoré obsa- huje aspoň jeden prvok elektrického obvodu. Na obr.1.1 sú vetvy označené znakmi (1), (2), (3).

Ak sa vypustia zo schémy elektrického obvodu prvky, dostaneme *kostru (graf) elektrického obvodu*.

⇒ Kostra elektrického obvodu je geometrická štruktúra elektrického obvodu abstrahovaná od fyzikálnych vlastností vetiev obvodu, teda vetvy elektrického obvodu nahradíme priamym spojením uzlov (*vetvami grafu*). Kostra schémy z obr.1.1 je znázornená na obr.1.2a. Kostra, v ktorej sú za- kreslené orientácie jednotlivých vetiev, obr.1.2b, sa nazýva *orientovaná*

oblasti: na vnútornú – *interiér* a na vonkajšiu – *exteriér*, ktorým je spoľočnou hranicou. Rez nemôže prechádzať cez uzol grafu, musí rezať aspoň jednu vetvu, ale len raz. Ak v interiéri rezu je len jeden uzol, tento uzol sa nazýva *izolovaný uzol*. Na obr.1.5, takýmto uzlom je uzol A a C. Ak rezaná vetva je orientovaná z interiéra do exteriéra, hovoríme, že vzhľadom k rezu má kladnú orientáciu.

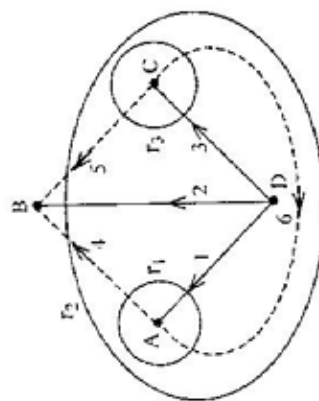


obr. 1.4

obr. 1.3

⇒ **Hlavný rez** je taký rez, ktorý spĺňa podmienky už skôr uvedené, ale môže rezať len **jednu** vetvu stromu. Ostatné

vetvy v reze sú nezávislé vetvy. Na obr.1.5 sú to rezy r_1, r_2, r_3 .

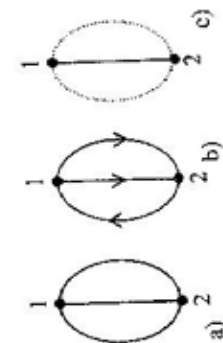


obr. 1.5

kostra, (*orientovaný graf*). Orientáciu vetiev v grafe volíme zhodne ako orientáciu prúdov vo vetvách schémy. Každý graf môžeme rozdeliť na dva podgrafy: na *strom* a na *nezávislý systém vetiev*. Graf, ktorý sa dá nakresliť tak, že jeho vetvy sa nekrižia, sa nazýva *planárny graf*.

⇒ **Strom** je vytvorený najmenším počtom vetiev grafu spájajúcich všetky uzly, ktorých $\varepsilon > 2$, v súvislý, ale neuzavretý celok. (Nemôže sa vytvoriť slučka). Výhodné je vybrať za strom také vetvy, aby mal strom vejárovitý tvar. Na obr.1.2c a na obr.1.4, sú to vetvy vyznačené plnou čiarou.

⇒ **Slučka** je uzavretá cesta pozostávajúca z vetiev grafu, v ktorej je-



obr. 1.2

den a ten istý uzol je počiatok a koniec, pričom po vetvách a uzloch grafu tvoriacich túto cestu sa môže prechádzať len raz. Ak sa v ploche vyznačenej slučky nenachádza žiadna vetva, je to slučka *jednoduchá*. Na obr.1.1 sú to slučky a, b, c. Ak v ploche slučky sa nachádza aspoň jedna vetva, je to slučka *zložená*. Na obr.1.1 je to slučka c. Ak príslušná vetva a príslušná slučka majú rovnakú orientáciu, hovoríme o kladnej orientácii vetvy vzhľadom ku slučke. Ak je orientácia opačná, vetva je orientovaná záporne.

⇒ **Uzol** v grafe má podobný význam ako v schéme elektrického obvodu. V topológii elektrických obvodov budeme považovať za uzol tú časť grafu, kde sa spájajú najmenej tri vetvy, teda hodnota uzla $\varepsilon \geq 3$.

⇒ **Nezávislý uzol** môže byť hociktorý uzol v grafe. Počet nezávislých uzlov grafu je k , ako je počet vetiev stromu. Ak počet všetkých uzlov v grafe je n , počet nezávislých uzlov $u = k - 1$.

⇒ **Nezávislé vetvy** sú všetky vetvy grafu, ktoré ostali v grafe po vybratí vetiev stromu. Na obr.1.2c a na obr.1.4, sú vyznačené čiarkovane. Ak počet všetkých vetiev v grafe je n , počet nezávislých vetiev $v = n - u = n - (k - 1) = n - k + 1$.

⇒ **Nezávislá, (hlavná) slučka** je taká, ktorú tvoria vetvy stromu a len jedna vetva nezávislá. V schéme na obr.1.1 v návaznosti na obr.1.2, (na výber vetvy stromu), nezávislé slučky sú označené písmenami a, b, Na obr.1.4 sú to slučky a, b, c.

⇒ **Rez, (topologická kružnica)** nazýva sa tiež *Jordanova krivka*, je uzavretá, nikde sa nepretínajúca krivka. Rozdeľuje rovinný graf na dve

1.2 INCIDENČNÉ MATICE

Vzájomné závislosti uzlov, slučiek, rezov a vetiev v grafe sa dajú popísať *incidenčnými maticami*.

1.2.1 Incidenčná matica uzlov

Incidenčná matica uzlov $[A]_a$ vyjadruje vzájomnú závislosť uzlov a vetiev grafu. Prvok matice a_{ij} , kde i je číslo riadku matice, j je číslo stĺpca matice, nadobúda hodnoty 0, 1, alebo -1, podľa nasledujúce vzťahy uzla a vetvy:

$a_{ij} = 1$, ak je j -tá vetva orientovaná kladne vzhľadom k i -tému uzlu, t.j. je orientovaná von z uzla



$a_{ij} = -1$, ak je j -tá vetva orientovaná záporne vzhľadom k i -tému uzlu, t.j. je orientovaná do uzla



$a_{ij} = 0$, ak i -tý uzol neobsahuje j -tú vetvu



Pre graf na obr.1.4 napíšeme maticu uzlov, kde riadky tvoria uzly A, B, C, D a stĺpce tvoria vetvy 1 až 6.

$$[A]_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

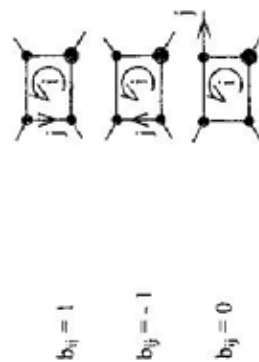
Súčet každého stĺpca takto zapísanej matice uzlov sa rovná nule. Ak vynecháme jeden riadok matice uzlov, dostaneme maticu $[A]$ *nezávislých uzlov*.

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

Uzol, ktorého riadok sme vynechali sa nazýva *vziátný uzol* a ostatné uzly sú *uzly nezávislé*.

1.2.2 Incidenčná matica slučiek

Matica slučiek $[B]_s$, alebo matica *hlavných (nezávislých) slučiek* $[B]$, je matica koeficientov, ktoré vyjadrujú závislosť slučiek a vetiev príslušného grafu. Prvky matice slučiek podobne ako v matici uzlov môžu nadobúdať hodnoty: 1, ak orientácia vetvy a slučky je kladná, (sú rovnako orientované), -1, ak orientácia vetvy a slučky je záporná, (sú orientované opačne), 0, ak príslušná slučka neobsahuje príslušnú vetvu. Riadky v matici odpovedajú slučkám grafu, a označíme ich písmenom i . Stĺpce v matici odpovedajú vetvám grafu, označíme ich písmenom j . Prvky matice sú teda dané nasledovne:



Pre graf na obr.1.4 napíšeme maticu hlavných slučiek

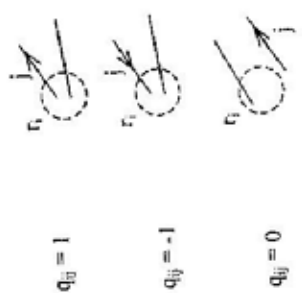
$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

kde prvý riadok odpovedá slučke a, druhý slučke b, tretí slučke c. Stĺpce odpovedajú vetvám 1 až 6.

1.2.3 Incidenčná matica rezov

Incidenčná matica rezov popisuje závislosť príslušného rezu a príslušných vetiev. Matica *hlavných rezov* vyjadruje závislosť príslušného hlavného rezu a vetiev ním rezaných. Ak rezaná vetva má kladnú orientáciu vzhľadom k príslušnému rezu, je orientovaná z interiéru do exteriéru, odpovedajúci prvok v matici bude mať hodnotu 1. Ak rezaná vetva je orientovaná z exteriéru do interiéru príslušného rezu, tento prvok v matici bude mať hodnotu -1. Ak príslušný rez danú vetvu nereže hodnota príslušného prvku

v matici je 0. Riadky v matici odpovedajú rezom, označujeme ich písmenom i , stĺpce odpovedajú vetvám a označujeme ich písmenom j . Teda prvky matice rezov sa zisťujú podľa nasledujúceho:



Matica hlavných rezov $[Q]$ pre graf na obr.1.5 je:

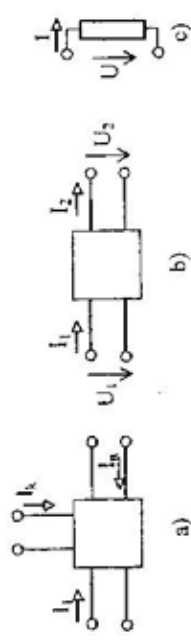
$$[Q] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

Rezu r_1 odpovedá prvý riadok matice, rezu r_2 druhý riadok, rezu r_3 tretí riadok a stĺpce odpovedajú vetvám 1 až 6.

1.3 PRVKY ELEKTRICKÉHO OBVODU

V elektrotechnickej praxi sa používa veľké množstvo prvkov (zariadení), ktoré sa dajú, ako sme to už uviedli, nahradiť ideálnymi prvkami tak, aby sa čo najlepšie charakterizovali vlastnosti skutočného zariadenia. Rozdeliť prvky môžeme z viacerých hľadísk.

- Podľa počtu svoriek, ktorými sa pripojuje do obvodu. Ak má prvok n svoriek, nazýva sa n pól, obr.1.6a. Zvláštny prípad n pólu je n bran, je to n pól, ktorého dve svorky sú vzájomne viazané, tvoria „jednu bránu“. Teda napr., ak je prvok so štyrmi pólmi, je to štvorpól, dnes často používaný názov je aj dvojbran, obr.1.6b. Najjednoduchším n pólom je dvoj pól, obr.1.6c



obr.1.6

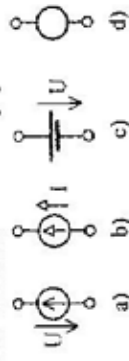
- Z hľadiska energetického rozdeľujeme prvky na aktívne (zdroje) a pasívne (spotrebiče).

Aktívne prvky premieňajú iný druh energie (mechanickú, svetelnú a pod.) na energiu elektrickú, z hľadiska teórie obvodov nebude ich veľkosť výkonu podstatná. Za zdroj budeme považovať napríklad generátor, ale tak isto budeme považovať za zdroj mikrofón. Budeme ich uvažovať ako ideálne a do schém ich budeme zakresľovať ako dvoj pól. Môžu byť napáťové alebo prúdové.

Pasívne prvky budeme považovať tiež za ideálne, teda skutočné zariadenie budeme nahradzovať takými prvkami, ktoré najlepšie vystihujú jeho vlastnosti (jeho parametre) z hľadiska elektrického obvodu. Do schém ich budeme tiež zakresľovať ako dvoj pól.

- Podľa typu charakteristik (z matematického hľadiska) môžeme prvky rozdeliť na lineárne a nelineárne.

Schématická značka ideálneho jednosmerného napáťového zdroja je na obr.1.7a, jednosmerného prúdového na obr.1.7b. Pokiaľ je napáťový elektrochemický zdroj, pre jeho označenie sa používa schématická značka uvedená na obr.1.7c. Všeobecná značka zdroja je na obr.1.7d.

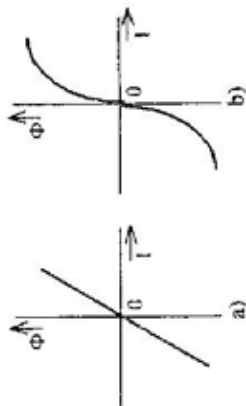


obr.1.7

Pre napáťové zdroje budeme označovať orientáciu svorkového napätia (vonkajšiu šípku) od svorky kladnej ku svorke zápornej. Šípka je otvorená. Šípku, ktorú kreslíme vo vnútri zdroja považujeme za orientáciu elektro-

stavy elektród a z hľadiska naakumulovanej energie elektrického poľa. Vzťah medzi napätím a elektrickým nábojom graficky znázorňuje *coulomb-voltová charakteristika*. Ak je coulomb-voltová charakteristika lineárna, obr.1.9a, je to *lineárna kapacita*. Pre *nelineárnu kapacitu* je coulomb-voltová charakteristika na obr.1.9b.

Ideálna cievka, je ďalším prvkom používaným pri riešení elektrických obvodov, ktorý vyjadruje energiu magnetického poľa v obvode. Jeho charakteristikou je vzťah medzi magnetickým tokom a prúdom, ktorý tento magnetický tok vytvoril. Takúto ideálnu cievku budeme pri riešení obvodov skrátené označovať *indukčnosť*, hoci indukčnosť je parameter, ktorý charakterizuje vlastnosti magnetického poľa vyvolaného prúdom vodiča z hľadiska vzťahu medzi pretekajúcim prúdom a ním vytvoreným magnetickým tokom. Grafické znázornenie závislosti magnetického toku a prúdu je dané *weber-ampérovou charakteristikou*. Ak *weber-ampérová charakteristika* daného prvku je lineárna, obr.1.10a, hovoríme o *lineárnej indukčnosti*, ak je nelineárna, obr.1.10b, je to *indukčnosť nelineárna*.



obr.1.10

motorického napätia, alebo za orientáciu prúdu v napáťovom zdroji pre *kladnú zdrojovú orientáciu*.

Pre označenie orientácie prúdového zdroja budeme používať uzavreté šípky a orientácia vonkajšej a vnútornej šípky je zhodná, udáva zmysel (orientáciu) prúdu prúdového zdroja.

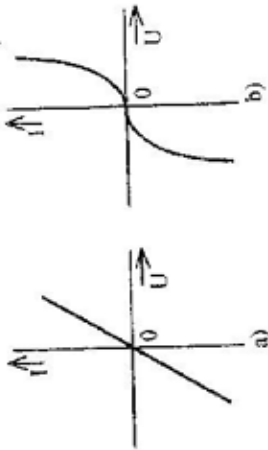
Okrem jednosmerných zdrojov, o ktorých už bola zmienka, sa používajú aj zdroje ktorých veľkosť (hodnota) napätia alebo prúdu sa v závislosti od času mení podľa niektorej funkcie napr. podľa sínusovej, kosínusovej alebo podľa inej funkcie. Touto problematikou sa budeme zaoberať neskôr.

Jedným z pasívnych prvkov elektrického obvodu je *ideálny odpor*.

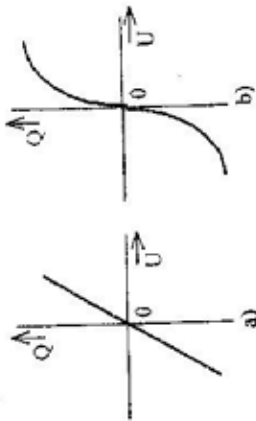
Premieňa elektrickú energiu na tepelnú energiu. Budeme ho skrátené nazývať *odpor*, hoci odpor je parameter, ktorý charakterizuje celkové vlastnosti elektrického poľa vo voľnom prostredí z hľadiska vzťahu medzi napätím a prúdom. Grafickým vyjadrením vzťahu medzi napätím a prúdom je *volt-ampérová charakteristika*. Ak je volt-ampérová charakteristika odporu lineárna, obr.1.8a, budeme ho nazývať *lineárny odpor*. Volt-ampérová charakteristika *nelineárneho odporu* je na obr.1.8b.

Ďalším ideálnym prvkom elektrického obvodu je *ideálny kondenzátor*.

Vyjadruje energiu elektrického poľa naakumulovanú v elektrickom obvode. Skrátené ho budeme nazývať *kapacita*, hoci kapacita je parameter, ktorý charakterizuje celkové vlastnosti elektrického poľa v nevodivom prostredí z hľadiska vzťahu medzi napätím a elektrickým nábojom sú-



obr.1.8



obr.1.9

$$U = RI \quad ; \quad [V; \Omega, A] \quad (2.2.2)$$

$$R = \frac{U}{I} \quad ; \quad [\Omega; V, A] \quad (2.2.3)$$

Konštantou úmernosti je *elektrický odpor* (krátko povedané - odpor). Ak do vzťahu (2.2.3) dosadíme napätie vo voltoch [V], prúd v ampéroch [A], potom dostaneme jednotku odporu, ktorá je 1 Ohm [Ω].

Odpor závisí od špecifických vlastností materiálu a od rozmerov. Pre vodič dĺžky l , kruhového prierezu S , ktorý má merný odpor ρ je odpor

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad ; \quad [\Omega; \Omega m, m, m^2] \quad (2.2.4)$$

V sústave jednotiek SI má merný (špecifický) odpor jednotku Ωm . Z praktického hľadiska sa prierez vodiča udáva v mm^2 , potom sa merný odpor udáva v $\Omega mm^2/m$. Merný odpor rôznych materiálov je udávaný v tabuľkách materiálov. Pre niektoré materiály uvedieme tabuľku:

Materiál	Merný odpor pri teplote 20° C ρ [Ωm]	Merná vodivosť pri teplote 20° C γ [S/m]	Teplotný súčiniteľ odporu α [$^{\circ}C^{-1}$]
Striebro	$0,0164 \cdot 10^{-6}$	$61 \cdot 10^6$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Meď	$0,0175 \cdot 10^{-6}$	$57 \cdot 10^6$	$3,8 \cdot 10^{-3}$
Hliník	$0,03 \cdot 10^{-6}$	$33 \cdot 10^6$	$3,7 \cdot 10^{-3}$
Železo	$0,086 \cdot 10^{-6}$	$11,6 \cdot 10^6$	$6,5 \cdot 10^{-3}$
Konštantán	$0,435 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^6$	$-5 \cdot 10^{-3}$
Uhlík	$59 \cdot 10^{-6}$	$0,017 \cdot 10^6$	$-1 \cdot 10^{-3}$
Zem	1	1	
Destil. voda	5	0,2	

Prevrátená hodnota odporu je *vodivosť* G

$$G = \frac{1}{R} \quad ; \quad [S; 1/\Omega] \quad (2.2.5)$$

Jednotkou vodivosti je 1 Siemens [S]. Prevrátená hodnota merného odporu je *merná (špecifická) vodivosť* γ . V SI sústave sa udáva [$S m^{-1}$].

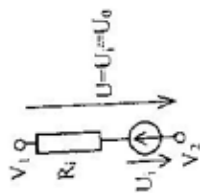
Závislosť $1 \approx f(U)$, nazývame voltampérovou (alebo ampérvoltovou) charakteristikou. Ak pre materiály platí Ohmov zákon v celom rozsahu

2 JEDNOSMERNÉ PRÚDY

Ak sú v elektrickom obvode použité ako zdroje, zdroj jednosmerného napätia a prúdu, z pasívnych prvkov sa budú uplatňovať len odpory, pretože napätie na indukčnostiach a prúdy cez vetvy v ktorých sú zapojené kapacity, sú nulové. Takým obvodom budeme hovoriť, že sú to *obvody jednoduchých prúdov*. V tejto kapitole v ďalších častiach vysvetlíme základné metódy pre riešenie elektrických obvodov, ktoré budeme môcť analogicky použiť aj pre riešenie obvodov s inými zdrojmi.

2.1 ZDROJ JEDNOSMERNÉHO NAPÄTIA

V predchádzajúcej časti sme sa už zoznámili s ideálnymi zdrojmi. *Reálny napájací zdroj* v elektrickom obvode môžeme nahradiť ideálnymi prvkami, ideálnym napájacím zdrojom s vnútorným napätím U_1 a vnútorným odporom R_i , obr.2.1. Predpokladáme, že vnútorné napätie a vnútorný odpor nezávisia od zaťaženia (od zaťažovacieho prúdu). Ak by tento predpoklad nebol splnený, jednalo by sa o nelineárny zdroj.



Obr.2.1

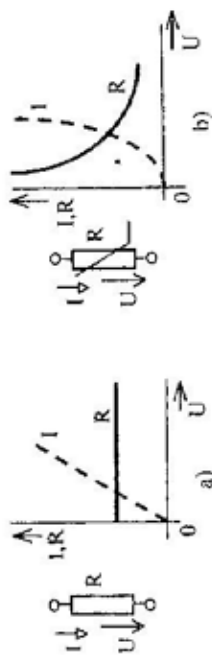
Na svorkách zdroja nameriame svorkové napätie U , ako rozdiel potenciálov $V_1 - V_2$, kde $V_1 > V_2$. Pri nezaťaženom zdroji sa svorkové napätie rovná vnútornému napätiu. Tomu hovoríme *napätie naprázdno*, $U = U_1 = U_0$.

2.2 OHMOV ZÁKON

Nemecký fyzik Ohm (1826) zistil, že pri konštantnej teplote pre kovové vodiče platí priama úmera medzi napätím na vyšetřovanom vodiči a prúdom, ktorý týmto vodičom preteka, je to *Ohmov zákon*.

$$I = \frac{U}{R} \quad ; \quad [A; V, \Omega] \quad (2.2.1)$$

meraných napätí a prúdov a je táto charakteristika lineárna, hovoríme, ako už bolo skôr uvedené, že ich odpor je lineárny. Odpor, v závislosti od napätia je konštantný, obr.2.2a. Pre nelineárny odpor je jeho závislosť od napätia a voltampérová charakteristika uvedená na obr.2.2b.



Obr.2.2

Vedľa charakteristík na obr.2.2 sú uvedené schématické značky lineárneho a nelineárneho odporu so zakreslenými kladnými orientáciami napätia a prúdu v *spotřebiteľské* sústavě. (Na pasívnom prvku napätie a prúd má zhodnú orientáciu, potom výkon vychádza kladný.)

Hodnota odporu závisí tiež od teploty podľa vzťahu:

$$R_{\vartheta} = R_0 [1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0)] \quad (2.2.6)$$

kde α je teplotný súčiniteľ odporu

ϑ je teplota pri ktorej sa počíta odpor R_{ϑ}

ϑ_0 je teplota vzťažná (uvažuje sa obyčajne 20 °C)

R_0 je hodnota odporu za studena, pri vzťažnej teplote

Pri teplote v okolí absolútnej nuly (0 až 3 °K) merný odpor je nulový, vodivosť materiálu je takmer nekonečne veľká. Zmena z konečnej hodnoty vodivosti na takmer nekonečnú nastáva skokom pri kritickej teplote. Týmuto javu sa hovorí *supravodivosť*.

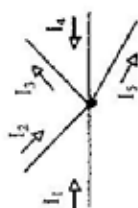
2.3 KIRCHHOFFOVE ZÁKONY

Prvý Kirchhoffov zákon (1. K.z.) je zákonom zachovania elektrického množstva. Platí pre uzol obvodu. Pre jednosmerné obvody ho môžeme formulovať:

Algebraický súčet prúdov v uzle sa rovná nule. Prúdy, ktorých orientácia je von z uzla, budeme zapisovať do rovnice (2.3.1) s kladným znamienkom, prúdy ktoré sú orientované do uzla, budú mať pri zápise do rovnice znamienko záporné, obr.2.3. Teda:

$$\sum_{k=1}^n (\pm I_k) = 0 \quad (2.3.1)$$

$$-I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0$$



obrázok 2.3

Zápis 1. K. z. pre všetky uzly schémy (grafu) ak $\varepsilon \geq 3$ pomocou incidenčných matic je:

$$[A]_h [I] = [0] \quad (2.3.2)$$

Ak píšeme 1. K. z. pre nezávislé uzly, potom

$$[A] [I] = [0] \quad (2.3.3)$$

kde matice $[A]_h$, $[A]$ sú incidenčné matice uzlov, resp. nezávislých uzlov a matrica $[I]$ je stĺpcová matrica prúdov jednotlivých vetiev schémy.

Druhý Kirchhoffov zákon platí pre slučku elektrického obvodu. Pre obvody jednosmerných prúdov ho budeme používať v nasledujúcom vyjadrení:

Algebraický súčet napätí v slučke sa rovná nule. Nezáleží či sa jedná o napätia zdrojov alebo o úbytky napätí na pasívnych prvkoch. Ak bude orientácia slučky rovnaká ako je orientácia napätia, budeme toto napätie zapisovať do rovnice (2.3.4) so znamienkom kladným. Znamienko záporné

bude mať to napätie, ktoré je opačne orientované ako je orientovaná slučka, obr.2.4.

$$\sum_{i=1}^n (\pm U) = 0 \quad (2.3.4)$$

$$U_1 - R_1 I_1 - U_2 + R_3 I_3 - U_3 + R_4 I_4 = 0$$

Iná formulácia 2. K. z. je :
Algebraická suma elektromotorických napätí sa rovná algebraickej sume úbytku napätí na odporoch. O tom, ktoré napätia sa uvažujú s kladným znamienkom a ktoré so záporným, platí ako už bolo uvedené.

Ak budeme vyjadrovať 2. K. z. pomocou incidenčnej matice hlavných (nezávislých) slučiek [B] potom

$$[B][U] = [0] \quad (2.3.5)$$

kde matica [U] je stĺpcová matica napätia na každej vetve schémy.

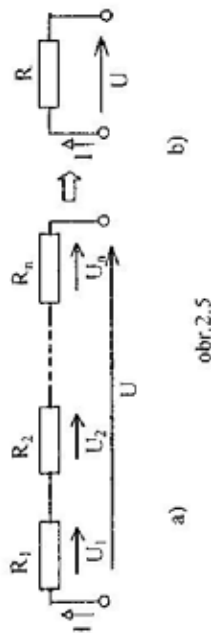
2.4 ZAPOJOVANIE ODPOROV

Pre označenie prvku, ktorý má ohmický charakter sa používa tiež názov *odporník*. Napriek tomu nebudeme sa v ďalšom tohoto výrazu pridŕžať. Ako už bolo uvedené budeme používať názov *odpor* - (*rezistencia*). Pre prevrátenú hodnotu odporu budeme používať názov *vodivosť* - (*konduktancia*).

2.4.1 Sériové zapojenie odporov

Majme medzi dve svorky (uzly) s napätím U , pripojené za sebou - *do série* n odporov R_1 až R_n , obr.2.5a. Obvodom prechádza prúd I , ktorý vytvorí úbytky napätí na jednotlivých odporoch. Tento obvod chceme nahradiť ekvivalentným obvodom s jedným výsledným odporom R , keď ho pripojíme na to isté napätie U , bude ním prechádzať ten istý prúd I ako v pôvodnom obvode, obr.2.5b.

Napíšeme východiskovú rovnicu pre obvod na obr.2.5a podľa 2. K. z.



obrázok 2.5

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$U = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I \quad (2.4.1)$$

Z Ohmovho zákona pre obvod na obr.2.5b môžeme napísať:

$$U = RI \quad (2.4.2)$$

Porovnaním rovníc (2.4.1) a (2.4.2) dostaneme:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (2.4.3)$$

Z toho vyplýva: *Hodnota výsledného odporu do série zapojených odporov, sa rovná súčtu hodnôt jednotlivých odporov.*
Všeobecne môžeme napísať:

$$R = \sum_{k=1}^n R_k \quad (2.4.4)$$

Ak $R_1 = R_2 = \dots = R_n$, potom výsledná hodnota odporu je:

$$R = nR_1 \quad (2.4.5)$$

Napätie na odporoch je v priamom pomere jednotlivých odporov

$$U_1 : U_2 : \dots : U_n = R_1 : R_2 : \dots : R_n \quad (2.4.6)$$

Zapojenie podľa obr.2.5a tvorí *napätový delič*.

$$U_m = U \frac{R_m}{\sum_{k=1}^n R_k} \quad (2.4.7)$$

Napätie na m -tom odpore sa má k celkovému napätiu, ako sa má m -ý odpor k celkovému odporu obvodu.

2.4.2 Paralelné zapojenie odporov

Pri zapojení odporov R_1 až R_n medzi dva uzly *paralelne* (vedľa seba), obr.2.6a, pripojených na napätie U , môžeme nájsť, ako v predchádzajúcom prípade, ekvivalentný odpor R , pripojený na napätie U , aby ním prechádzal výsledný prúd I ako v pôvodnom obvode. Náhradná schéma obvodu je na obr.2.6b.

Pre uzol obvodu na obr.2.6a napíšeme rovnicu podľa I. K. Z.

$$-I + I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0$$

Dosadením za prúdy z výrazov

obr.2.6

$$U = R_1 I_1, \quad U = R_2 I_2, \quad U = R_n I_n \quad \text{a úpravou dostaneme}$$

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} \quad (2.4.8)$$

Pre obvod na obr.2.6.b napíšeme z Ohmovho zákona

$$I = \frac{U}{R} \quad (2.4.9)$$

Porovnaním vzťahov (2.4.8) a (2.4.9) dostaneme

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (2.4.10)$$

Recipročná hodnota výsledného odporu rovná sa súčtu recipročných hodnôt jednotlivých odporov zapojených paralelne.

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (2.4.11)$$

Recipročná hodnota odporu je vodivosť,

$$G = \frac{1}{R}, \quad G_1 = \frac{1}{R_1}, \quad G_2 = \frac{1}{R_2}, \dots, G_n = \frac{1}{R_n}$$

dosadením do výrazov (2.4.10) a (2.4.11), môžeme napísať: *Výsledná vodivosť sa rovná súčtu jednotlivých vodivostí paralelného obvodu.*

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad (2.4.12)$$

$$G = \sum_{k=1}^n G_k \quad (2.4.13)$$

Ak je paralelne zapojených n rovnakých odporov, teda $R_1 = R_2 = \dots = R_n$, potom výsledný odpor je

$$R = \frac{R_1}{n} \quad (2.4.14)$$

a výsledná vodivosť

$$G = nG_1 \quad (2.4.15)$$

Prúdy vo vetvách paralelného obvodu sú v priamom pomere vodivosti.

$$I_1 : I_2 : \dots : I_n = G_1 : G_2 : \dots : G_n \quad (2.4.16)$$

Paralelný obvod podľa obr.2.6a predstavuje *prúdový delič*.

Dosť často pri riešení obvodov potrebujeme stanoviť hodnotu prúdu tečúceho vo vetve dvoch paralelne zapojených odporov, ak poznáme prúd vtekajúci do uzla, obr.2.7. Obvod nahradíme vý-
sledným odporom

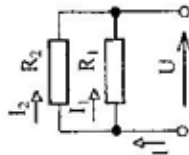
$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{a z Ohmovho zákona platí}$$

$$U = RI \quad \text{a tiež} \quad U = R_1 I_1, \text{ resp. } U = R_2 I_2, \text{ potom}$$

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.4.17)$$

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (2.4.18)$$

Prúd v *ľubovoľnej* paralelnej vetve dvoch paralelne zapojených odporov určíme tak, že prúd, ktorý do uzla vteká vynásobíme odporom cez ktorý prúd nepočítame a podelíme súčtom oboch odporov.

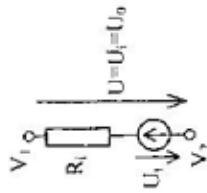


obr.2.7

2.5 REÁLNE ZDROJE NAPÄTIA A PRÚDU

2.5.1 Reálny napäťový zdroj

Reálny napäťový zdroj, ako prvok schémy elektrického obvodu, môžeme vytvoriť z ideálnych prvkov elektrického obvodu a to: z ideálneho napäťového zdroja a z ohmického odporu, zapojených do série, obr.2.8, kde R_i je vnútorný odpor zdroja, U_i je vnútorné (ideálne) napätie. Ak je zdroj v stave naprázdno, že na jeho svorky je nie pripojená záťaž, vnútorné napätie zdroja je *svorkovým napätím zdroja v stave naprázdno* U_0 . V_1 a V_2 je označenie potenciálov na svorkách zdroja a platí, že $V_1 > V_2$. Orientácia svorkového napätia U je od svorky vyššieho potenciálu ku svorke nižšieho potenciálu.



obr.2.8

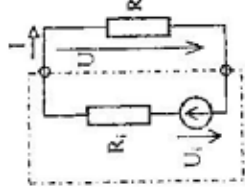
Ak k takémuto zdroju pripojíme záťaž (spotrebič) R , obr.2.9, potom môžeme pre obvod z 2. K. z. napísať

$$U - U_i + R_i I = U - U_i + \Delta U = 0, \quad (2.5.1)$$

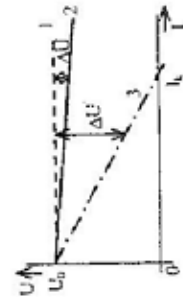
$$U = RI, \text{ dosadením do (2.5.1) a úpravou}$$

$$U = U_i - R_i I = U_0 - R_i I \quad (2.5.2)$$

Vzťah (2.5.2) vyjadruje *zaťažovaciu charakteristiku*. Jej grafické znázornenie je na obr.2.10. $\Delta U = R_i I$, je úbytok napätia na vnútornom odpore zdroja.



obr.2.9



obr.2.10

Čím je menší úbytok napätia ΔU , hovoríme, že zdroj má tvrdú charakteristiku – skrátka, že zdroj je tvrdší. Na obr.2.10 charakteristika 1 predstavuje ideálne tvrdý zdroj, charakteristika 2 predstavuje skutočný tvrdý zdroj a charakteristika 3 predstavuje mäkky zdroj.

Ak je zaťažovací odpor $R = \infty$, je to *stav naprázdno*, $I = 0$, $U = U_0 = U_i$. Druhý extrémny stav je *stav skrátko*, vtedy $R = 0$, $U = 0$ a prúd je obmedzený len vnútorným odporom zdroja, je to *prúd nakrátko* I_k .

$$I_k = \frac{U_i}{R_i} \quad (2.5.3)$$

2.5.2 Reálny prúdový zdroj

Reálny prúdový zdroj v schémach elektrických obvodov môžeme zostaviť, podobne ako napäťový zdroj, z ideálnych prvkov: z ideálneho prúdového zdroja a k nemu paralelne pripojeného vnútorného odporu R_i , resp. vnútornej vodivosti G_i , pričom platí, že

$$G_i = \frac{1}{R_i}$$

Schéma reálneho prúdového zdroja je na obr.2.11. Vodivosť G predstavuje záťaž (spotrebič), G je recipročná hodnota odporu záťaže. Pre uzol obvodu na obr.2.11 môžeme napísať rovnicu podľa 1. K. Z.

$$-I_k + I_i + I = 0 \quad \text{a potom}$$

$$I = I_k - I_i = I_k - G_i U \quad (2.5.4)$$

Ak vodivosť záťaže $G = 0$, $I = 0$, je to stav naprázdno

$$I_k = I_i = G_i U$$

Stav nakrátko realizujeme tak, že svorky prúdového zdroja (prúdový zdroj je na obr. vyznačený bodkočiarkovane) spojíme bezodporovou spojkou, teda $U = 0$, $G = \infty$ a celý prúd zdroja I_k tečie touto spojkou. Je to prúd nakrátko.

Prúd ideálneho prúdového zdroja sa so zaťažením nemení. Tvrdý prúdový zdroj musí mať malú vnútornú vodivosť.

2.5.3 Náhrada napäťového a prúdového zdroja

Pri riešení elektrických obvodov kvôli uľahčeniu a zjednodušeniu riešenia sa často robí náhrada reálneho napäťového zdroja reálnym prúdovým zdrojom a opačne. Táto náhrada sa robí z hľadiska vonkajších svoriek zdrojov, t.j., aby napätie na záťaži a prúd tečúci zaťažou bol v oboch prípadoch rovnaký (invariantný výkon).

Prúd cez záťaž z napäťového zdroja = prúdu cez záťaž z prúdového zdroja

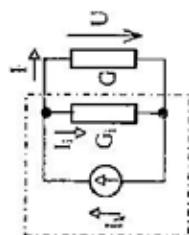
$$\frac{U_i}{R + R_i} = \frac{G I_k}{G + G_i} \quad (2.5.6)$$

$$U_i (G + G_i) = G R_i I_k + G R_i I_k$$

$$R_i I_{kN} (G + G_i) = I_{kP} (1 + G R_i)$$

I_{kN} je prúd nakrátko napäťového zdroja

I_{kP} je prúd nakrátko prúdového zdroja



obr.2.11

Ak prúd nakrátko napäťového zdroja sa rovná prúdu nakrátko prúdového zdroja

$$I_{kN} = I_{kP} = I_k \quad (2.5.7)$$

Potom

$$G R_{iN} + G_{iP} R_{iN} = 1 + G R_{iN}$$

kde R_{iN} sme označili vnútorný odpor napäťového zdroja a G_{iP} sme označili vnútornú vodivosť prúdového zdroja, takže môžeme napísať

$$G_{iP} R_{iN} = 1 \quad (2.5.8)$$

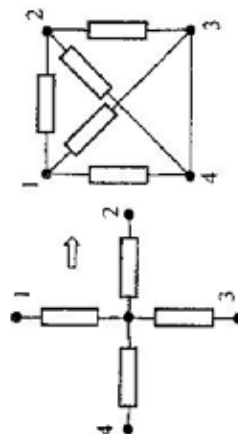
Zo vzťahu (2.5.8) vyplýva, že vnútorný odpor napäťového zdroja sa rovná vnútornému odporu prúdového zdroja.

Ak sú splnené podmienky (2.5.7) a (2.5.8) je možná vzájomná náhrada reálnych zdrojov.

2.6 TRANSFIGURÁCIA ODPOROV ZAPOJENÝCH DO n - LÚČO-VEJ HVIEZDY A DO n - UHOĽNÍKA

Vo všeobecnom prípade sa dá nahradiť n - lúčová odporová hviezda n - uhoľníkom, ak počet vetiev k vyhovuje vzťahu $k = \frac{n}{2}(n-1)$, kde n je počet vetiev n - lúčovej hviezdy, pričom každý uzoľ n - uhoľníka musí byť spojený s každým z $(n-1)$ uzlov jedným a len jedným odporom. Napr. 4 - lúčový hviezdu môžeme nahradiť 4 - uhoľníkom, obr.2.12, kde

$$k = \frac{4}{2}(4-1) = 6$$

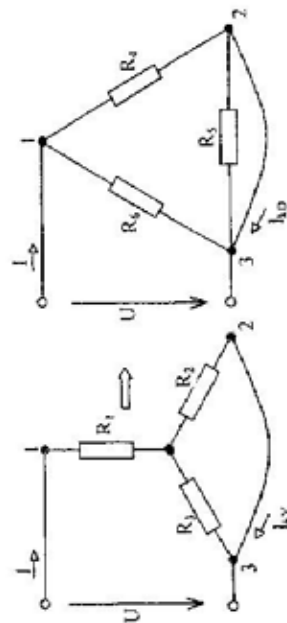


obr.2.12

Opačná náhrada $n - u$ holník s k ramenami nahradit' $n - lúčovou$ hviezdou je možná len vtedy, ak $k = \frac{n}{2}(n-1) = n$. Tento vzťah je splnený pre $n = 3$.

2.6.1 Transfigurácia trojlúčová hviezda – trojuholník

Pri transfigurácii vychádzame z podmienky, že napätia medzi uzlami a prúdy v uzloch hviezdy a trojuholníka musia byť rovnaké, obr.2.13



obr.2.13

Zapojenie do hviezdy sa označuje písmenom Y, zapojenie do trojuholníka sa označuje písmenom D.

Vychádzame z rovnosti prúdov nakrátko medzi uzlami 2 a 3 pri zapojení do hviezdy I_{KV} resp. do trojuholníka I_{KD} a pripojených napätí U .

Pre zapojenie vo hviezde platí

$$I_{KV} = I \frac{R_3}{R_2 + R_3} = U \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \quad (2.6.1)$$

a pre zapojenie v trojuholníku

$$I_{KD} = \frac{U}{R_4} \quad (2.6.2)$$

Za predpokladu, že napätia U sú rovnaké, porovnaním vzťahov (2.6.1) a (2.6.2) dostaneme

$$\frac{1}{R_4} = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \quad (2.6.3)$$

Po úprave vzťahu (2.6.3) dostaneme hodnotu odporu v trojuholníku medzi uzlami 1 a 2

$$R_4 = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \quad (2.6.4)$$

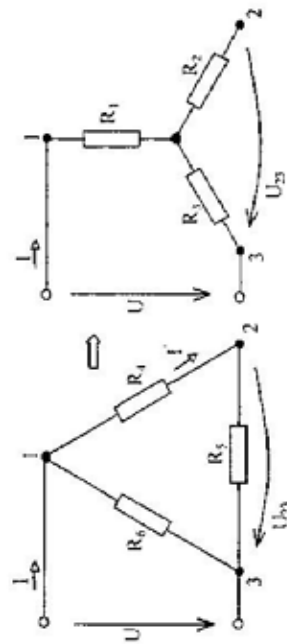
Podobným postupom, resp. cyklickou zámennou indexov vo výraze (2.6.4) môžeme napísať výrazy pre hodnoty ďalších odporov

$$R_5 = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (2.6.5)$$

$$R_6 = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \quad (2.6.6)$$

2.6.2 Transfigurácia trojuholník – trojlúčová hviezda

Pri náhrade trojuholníka trojlúčovou hviezdou (ďalej len hviezdou), vychádzame z podmienky zachovania napätí naprázdno medzi uzlami napr. 2 a 3 trojuholníka a hviezdy, obr.2.14.



obr.2.14

Pre napätie U_{23} v trojuholníku platí

$$U_{23} = R_5 I' = R_5 I \frac{R_6}{R_4 + R_5 + R_6} \quad (2.6.7)$$

Napätie U_{23} pri zapojení do hviezdzy je

$$U_{23} = R_3 I \quad (2.6.8)$$

Z porovnania vzťahov (2.6.7) a (2.6.8) vyplýva

$$R_3 = \frac{R_5 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} \quad (2.6.9)$$

Analogicky môžeme odvodiť výrazy pre hodnoty odporov R_1 a R_2

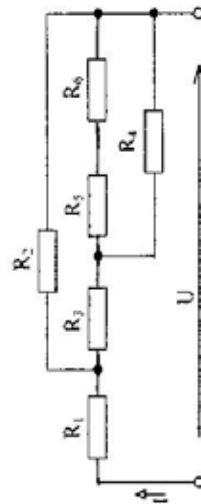
$$R_1 = \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} \quad (2.6.10)$$

$$R_2 = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5 + R_6} \quad (2.6.11)$$

2.7 RIEŠENIE OBVODOV POSTUPNÝM ZJEDNODUŠOVANÍM SCHÉMY

Riešenie obvodov zjednodušovaním schémy sa s výhodou používa

tam, kde je obvod zložený z viacerých pasívnych dvojpólov – odporov (impedancií) a celý obvod je napájaný z jedného zdroja, obr.2.15. Použitím transformácií, sériového a paralel-



obr.2.15

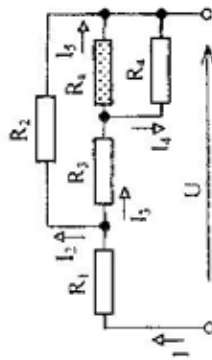
ného zapojovania prvkov nahradíme daný obvod jedným výsledným dvojpólom, odporom a potom z Ohmovho zákona vypočítame výsledný prúd v obvode. Prúdy v dielčích vetvách môžeme určiť použitím prúdového deliča, alebo iným vhodným spôsobom.

Metódu si vysvetlíme na obvode podľa obr.2.15. Odpor R_5 a R_6 sú zapojené do série, nahradíme ich odporom R_a , obr.2.16

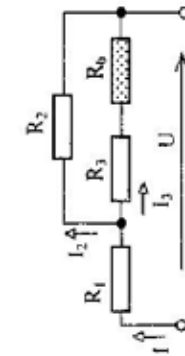
$$R_a = R_5 + R_6$$

Odpor R_4 a R_a sú zapojené paralelne, nahradíme ich odporom R_b , obr.2.17

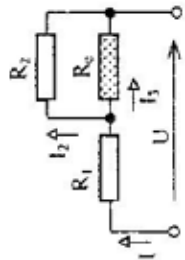
$$R_b = \frac{R_4 R_a}{R_4 + R_a}$$



obr.2.16

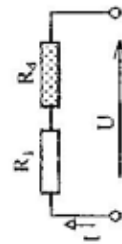


obr.2.17

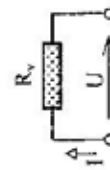


obr.2.18

Odpor R_3 a R_b sú zapojené do série a ich náhrada je na obr.2.18. Podobne nahradíme ďalšie zapojenia, obr.2.19, obr.2.20.



obr.2.19



obr.2.20

$$R_d = \frac{R_2 R_c}{R_2 + R_c} \quad \text{a výsledný odpor obvodu} \quad R_v = R_1 + R_d$$

Z Ohmovho zákona určíme výsledný prúd I

$$I = \frac{U}{R_v}$$

Pre určenie prúdu I_3 na obr.2.18, použijeme prúdový delič, podľa (2.4.16)

$$I_2 = I \frac{R_c}{R_2 + R_c}, \quad \text{podobne} \quad I_3 = I \frac{R_2}{R_2 + R_c}$$

alebo z 1. K.z. $I_3 = I - I_2$. Analogicky určíme ďalšie prúdy vo vetvách.

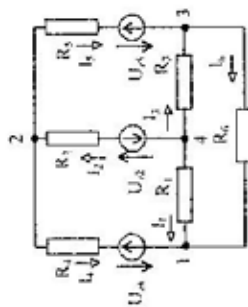
2.8 RIEŠENIE ELEKTRICKÝCH OBVODOV PRIAMYM POUŽITÍM KIRCHHOFFOVÝCH ZÁKONOV

Analýzovať elektrický obvod vedie spravidla na úlohu určiť neznáme prúdy vo vetvách obvodu pri známych zdrojoch a odporoch (impedanciách) vetiev, to znamená, vhodne napísať toľko východiskových (počiatočných) rovníc, koľko je neznámych, (prúdov, alebo napätí na pasívnych prvkoch), v elektrickom obvode.

Počet rovníc podľa 1.

Kirchhoffovho zákona odpor vedá počtu nezávislých uzlov a podľa 2. Kirchhoffovho zákona napíšeme toľko rovníc koľko je nezávislých vetiev (slučiek) v danom obvode.

Zásady riešenia si vysvetlíme na konkrétnom obvode, obr.2.21.



obr.2.21

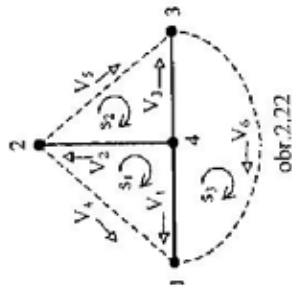
1. K danej schéme zapojenia si nakreslíme kostru grafu a určíme počet uzlov a vetiev, obr.2.22. Ak by sa v schéme vyskytovala taká vetva, ktorá spojuje dva uzly a neobsahuje žiadny prvok, považujeme to za jeden uzol. V našom prípade máme 4 uzly, (označené sú číslami 1 až 4) a 6 vetiev (v_1 až v_6).

2. Zvolíme jeden uzol za vzťažný - referenčný, (v našom prípade sme vybrali uzol 4), spravidla tak, aby sa vetvy stromu z neho vejárovite rozbíchali, (sú to vetvy v_1, v_2, v_3 , kreslené sú plnou hrubšou čiarou). Ostatné uzly, (1, 2, 3), sú nezávislé uzly a vetvy, ktoré zostali v grafe po vybratí vetiev stromu sú nezávislé vetvy, (na obr.2.22 sú to vetvy v_4, v_5, v_6 , kreslené sú čiarokovane).

3. Zvolíme orientáciu jednotlivých vetiev, (zhodne ako sme zvolili orientáciu prúdov v schéme, ktorá bola ľubovoľná), zvolíme orientáciu hlavných slučiek s_1, s_2, s_3 (je výhodné orientáciu slučiek voliť v tom istom smere). O počte hlavných slučiek a ich určovaní bolo napísané v časti, ktorá pojednávala o topológii obvodov a grafov. Hlavná slučka je taká, ktorá obsahuje len jednu nezávislú vetvu.

4. Pre nezávislé uzly napíšeme rovnice podľa 1. K. z., pre hlavné slučky napíšeme rovnice podľa 2. K. z. a riešime sústavu rovníc, (2.8.1), pre jednotlivé neznáme.

$$\begin{aligned} -I_1 - I_4 - I_6 &= 0 \\ -I_2 + I_4 + I_5 &= 0 \\ -I_3 - I_5 + I_6 &= 0 \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_4 I_4 - U_{22} - U_{24} &= 0 \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_5 I_5 + U_{22} + U_{25} &= 0 \\ -R_1 I_1 + R_3 I_3 + R_6 I_6 &= 0 \end{aligned} \quad (2.8.1)$$



obr.2.22

$$\begin{bmatrix} [A] \\ [B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_R] \\ [I_z] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [A] [I_z] \\ [B] [U_z] \end{bmatrix} \quad (2.8.10)$$

a odtiaľ

$$[I_R] = - \begin{bmatrix} [A] \\ [B] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [A] [I_z] \\ [B] [U_z] \end{bmatrix} \quad (2.8.11)$$

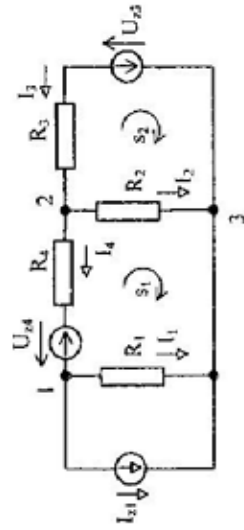
Pre obvod uvedený na obr.2.21 budú mať jednotlivé matice tvar

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix}, \quad [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}$$

$$[I_z] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [U_z] = \begin{bmatrix} 0 \\ U_{z2} \\ 0 \\ U_{z4} \\ U_{z5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pre názornosť uvedieme ešte zápis východiskových rovníc priamym použitím K. z. pomocou incidenčných rovníc pre obvod na obr.2.24



obr.2.24

Orientovaný graf pre obvod na obr.2.24 je na obr.2.25. Všimnime si, že reálny prúdový zdroj, (ideálny prúdový a k nemu paralelne pripojený odpor), považujeme za jednu vetvu. Za sťom sme vybrali v_1 a v_2 vetvu, vetva v_3 a v_4 sú nezávislé vetvy, uzol 1 a 2 sme vybrali za nezávislé uzly, uzol 3 je uzol vzťahný.

Matica nezávislých uzlov

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

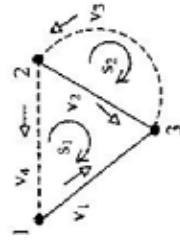
matica nezávislých slučiek

$$[B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

matica odporová, matica napäťových a prúdových zdrojov

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix}, \quad [U_z] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{z3} \\ U_{z4} \end{bmatrix}, \quad [I_z] = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obr.2.25



2.9 RIŠENIE ELEKTRICKÝCH OBVODOV METÓDOU SLUČKOVÝCH PRÚDOV

Metódu slučkových prúdov si vysvetlíme na konkrétnom príklade, obr.2.21. Priamym použitím K. z. sme napísali pre daný obvod rovnice (2.8.1). Hovorili sme, že ak je celkový počet vetiev n a počet nezávislých vetiev je v , tak pre riešenie obvodu podľa 2. K. z. píšeme len v rovníc pre nezávislé slučky. Z rovníc napísaných podľa 1. K. z. vypočítame prúdy

$$I_1 = -I_4 - I_6; \quad I_2 = I_4 + I_5; \quad I_3 = -I_5 + I_6 \quad (2.9.1)$$

a dosadíme do rovníc (2.8.1) napísaných podľa 2. K. z., dostaneme

$$\begin{aligned} -(R_1 + R_2 + R_4) I_4 - R_2 I_5 - R_1 I_6 &= U_{22} + U_{23} \\ R_2 I_4 + (R_2 + R_3 + R_5) I_5 - R_3 I_6 &= -U_{22} - U_{25} \\ R_1 I_4 - R_3 I_5 + (R_1 + R_3 + R_6) I_6 &= 0 \end{aligned} \quad (2.9.2)$$

Po vyčistení prúdov I_4, I_5, I_6 z rovníc (2.9.2) a dosadením do rovníc (2.9.1) obdržíme aj ďalšie prúdy daného obvodu.

Z rovníc (2.9.2) je zrejmé, že počet rovníc sa zredukoval oproti rovniciam (2.8.1), pretože sme písali rovnice len pre nezávislé slučky obvodu. Ak priradíme zvolenej nezávislej slučke pre napísanie rovníc podľa 2. K. z. význam *slučkového prúdu*

I_k , obr.2.26, dostali sme

metódou riešenia elektrických obvodov slučkovými prúdmi. Vo vetvách obvodu, ktoré prislúchajú len jednej slučke, hovoríme im

jednoduché vetvy, sa veľkosť prúdu rovná veľkosti

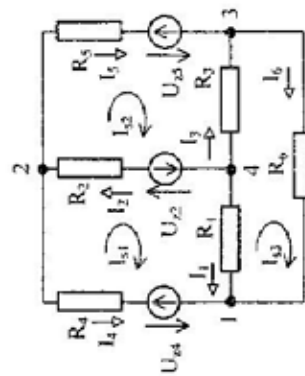
slučkového prúdu, vo vetvách, ktoré sú spoločné

dvom slučkovým prúdom je

veľkosť prúdu daná algebraickým súčtom príslušných slučkových prúdov. Orientácie prúdov

sa určujú podobne ako pri popisovaní slučky, keď je orientácia prúdu zhodná so slučkovým prúdom je

znamienko prúdu kladné, ak sú orientácie prúdu a slučkového prúdu opačné,



obr.2.26

né, znamienko prúdu je záporné.

Zmysel popisovania slučiek môže byť ľubovoľný, ale je účelné, aby zmysel popisovania všetkých nezávislých slučiek boli v *tom istom zmysle*. Potom úbytky napätí na prvkoch v príslušnej slučke môžeme písať s *kladným znamienkom*, úbytky napätí na prvkoch vo vetvách spoločných dvom slučkovým prúdom píšeme so *záporným znamienkom* a tento úbytok vytvára susedný slučkový prúd. V našom prípade, pretože sa v obvode vyskytujú ako pasívne prvky len odpory, budeme nazývať odpory v príslušnej slučke *odpory vlastné*, odpory zapojené v spoločnej vetve dvom slučkovým prúdom sú *odpory vzájomné*.

Teda za predpokladu rovnakej orientácie slučkových prúdov odpory vlastné majú v rovniciach znamienko *kladné*, odpory vzájomné majú znamienko *záporné*. O znamienkach pre zápis napätí zdrojov platí už skôr povedané. Rovnice pre obvod na obr.2.26 sú nasledovné

$$\begin{aligned} I_{41} &= -I_4; \quad I_{42} = I_5; \quad I_{43} = I_6; \quad I_1 = I_4 - I_5; \quad I_2 = I_4 - I_1 \\ I_3 &= I_5 - I_2 \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_4) I_4 - R_2 I_5 - R_1 I_6 &= U_{22} + U_{23} \\ -R_2 I_4 + (R_2 + R_3 + R_5) I_5 - R_3 I_6 &= -U_{22} - U_{25} \\ -R_1 I_4 - R_3 I_5 + (R_1 + R_3 + R_6) I_6 &= 0 \end{aligned} \quad (2.9.4)$$

Počet rovníc pre riešenie obvodu sa zredukoval oproti predchádzajúcemu prípadu, keď sme riešili obvod priamym použitím K. z. Metódu slučkových prúdov je vhodné použiť vtedy, keď počet nezávislých slučiek je menší, alebo rovný počtu nezávislých uzlov.

Zovšeobecnením sústavy rovníc (2.9.4) pre lineárny obvod pozostávajúci z k nezávislých slučiek, ktoré obsahujú odpory (impedancie) a zdroje napätia, môžeme napísať rovnice pre metódu slučkových prúdov (2.9.5)

$$\begin{aligned} R_{11} I_{41} + R_{12} I_{42} + \dots + R_{1k} I_{4k} + \dots + R_{1k} I_{4k} &= U_{j1} \\ R_{21} I_{41} + R_{22} I_{42} + \dots + R_{2k} I_{4k} + \dots + R_{2k} I_{4k} &= U_{j2} \\ R_{k1} I_{41} + R_{k2} I_{42} + \dots + R_{kk} I_{4k} + \dots + R_{kk} I_{4k} &= U_{jk} \end{aligned} \quad (2.9.5)$$

$$R_{k1} I_{41} + R_{k2} I_{42} + \dots + R_{kk} I_{4k} + \dots + R_{kk} I_{4k} = U_{jk}$$

V rovniciach (2.9.5) odpory (impedancie) s dvoma rovnakými indexami R_{kk} sú odpory *vlastné*, je to súčet odporov (impedancií) v k -tej slučke, ak

sme volili popisovanie všetkých nezávislých slučiek v tom istom smere ich znamienko je vždy kladné.

Odpory (impedancie) s rôznymi indexami $R_{kh} = R_{hk}$ sú odpory (impedancie) vzájomné vo vetve medzi h-tou a k-tou slučkou, ak je popisovanie slučiek ako v predchádzajúcom prípade, ich znamienko je vždy záporné. Ak v takejto spoločnej vetve nie je zapojený odpor (impedancia), $R_{kh} = R_{hk} = 0$.

Pravá strana rovníc (2.9.5) je tvorená *slučkovými napätiami*, ktoré sa rovnajú algebraickému (v prípade sriedavých prúdov, vektorovému) súčtu napätí napáťových zdrojov v príslušnej slučke. V prípade rovnakej orientácie slučkového prúdu a napätia napáťového zdroja, na pravej strane rovnice je znamienko napätia *záporné* a opačne.

Sústavu rovníc môžeme zapísať aj v maticovej forme (2.9.6)

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1h} & \dots & R_{1k} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2h} & \dots & R_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{h1} & R_{h2} & \dots & R_{hh} & \dots & R_{hk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kh} & \dots & R_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \\ \vdots \\ I_{Sh} \\ \vdots \\ I_{Sk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{S1} \\ U_{S2} \\ \vdots \\ U_{Sh} \\ \vdots \\ U_{Sk} \end{bmatrix} \quad (2.9.6)$$

Všeobecný zápis

$$[R_S][I_S] = [U_S] \quad (2.9.7)$$

kde $[R_S]$ je matica odporov v slučkách a v diagonále sú odpory vlastné (s kladnými znamienkami), ostatné prvky matice sú odpory vzájomné (so zápornými znamienkami), alebo nuly

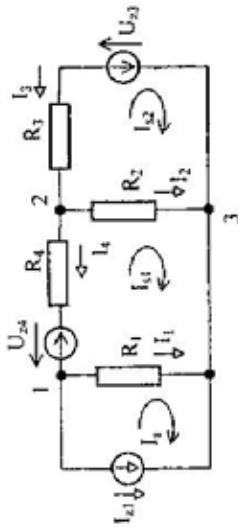
$[I_S]$ je matica slučkových prúdov

$[U_S]$ je slúpcová matica slučkových napätí

Potom pre slučkové prúdy platí

$$[I_S] = [R_S]^{-1}[U_S] \quad (2.9.8)$$

V prípade, že sa v obvode vyskytuje reálny prúdový zdroj, obr.2.27, pre slučku ktorá je vytvorená ideálnym prúdovým zdrojom a k nemu paralelne pripojeným jeho vnútorným odporom, sa nepíše rovnica. Vo vetve kde je zapojený ideálny prúdový zdroj je prúd známy, $I_k = -I_{s1}$ je



zadaný. Na odpore, ktorý je v spoločnej vetve slučky ideálneho prúdového zdroja a slučkového prúdu, sa

započítava úbytok napätia od prúdového zdroja (2.9.7).

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_4) - R_1 I_3 - R_2 I_2 &= U_{24} \\ -R_2 I_1 + (R_2 + R_3) I_2 &= U_{23} \end{aligned}$$

takže rovnice pre riešenie sú

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_4) - R_2 I_2 &= U_{24} - R_1 I_3 \\ -R_2 I_1 + (R_2 + R_3) I_2 &= U_{23} \end{aligned} \quad (2.9.7)$$

a pre prúdy vo vetvách platí

$$\begin{aligned} I_1 &= -I_3; \quad I_2 = I_3 - I_{s1} = -I_{s1} - I_{s1}; \quad I_2 = I_{s1} - I_{s2}; \\ I_3 &= -I_{s2}; \quad I_4 = -I_{s1}; \end{aligned} \quad (2.9.8)$$

2.9.1 Zápis rovníc metódy slučkových prúdov použitím incidenčných matic

Ak dodržíme orientáciu napätí a prúdov na vetve ako v predchádzajúcom prípade, obr.2.23, pre ktorý platí

$$-U + R I_k + U_z = 0 \quad (2.9.9)$$

$$-I + I_z + I_k = 0 \quad (2.9.10)$$

Po úprave rovnice (2.9.10) a dosadení do rovnice (2.9.9), môžeme napísať

$$-U + RI - RI_z + U_z = 0 \quad (2.9.11)$$

Rovnice pre všetky nezávislé vetvy v obvode dostaneme, ak vynásobíme z ľava rovnicu (2.9.11), incidenčnou maticou nezávislých slučiek.

$$-[B][U] + [B][R][I] - [B][R][I_z] + [B][U_z] = [0] \quad (2.9.12)$$

$$\text{Platí, že } [B][U] = [0] \quad (2.9.13) \\ [B]^T[I_z] = [I] \quad (2.9.14)$$

kde $[B]$ je incidenčná matica nezávislých slučiek, počet riadkov odpovedá počtu nezávislých slučiek a počet stĺpcov matice je daný počtom všetkých vetiev obvodu

$[B]^T$ je transponovaná matica incidenčnej matice nezávislých slučiek $[I]$ je stĺpcová matica matica vetvových prúdov $[I_z]$ je stĺpcová matica slučkových prúdov, počet riadkov odpovedá počtu nezávislých slučiek

$[I_z]$ je stĺpcová matica prúdových zdrojov vo vetvách, počet riadkov matice odpovedá počtu všetkých vetiev obvodu, znamienka jednotlivých prvkov matice sú kladné. Prvok matice, ktorý odpovedá vetve kde nie je prúdový zdroj, má nulovú hodnotu.

$[R]$ je diagonálna matica odporov vo vetvách, počet riadkov a stĺpcov odpovedá počtu všetkých vetiev v obvode a v diagonále matice sú odpory jednotlivých vetiev

$[U]$ je stĺpcová matica vetvových napätí

$[U_z]$ je stĺpcová matica napätí zdrojov vo vetvách, počet riadkov odpovedá počtu všetkých vetiev obvodu, znamienka jednotlivých prvkov sú kladné. Prvok matice, ktorý odpovedá vetve kde nie je napätíový zdroj, má nulovú hodnotu.

Dosadením vzťahov (2.9.13) a (2.9.14) do rovnice (2.9.12) a jej úpravou dostaneme

$$[B][R][B]^T[I_z] = -[B][U_z] + [B][R][I_z] \quad (2.9.15)$$

$$\text{zavedením } [B][R][B]^T = [R_s] \quad (2.9.16)$$

$[R_s]$ je matica odporov nezávislých slučiek ako v rovnici (2.9.7), potom

$$[R_s][I_z] = -[B][U_z] + [B][R][I_z] \quad (2.9.17)$$

Rovnica (2.9.17) vyjadruje všeobecný zápis rovníc metódou slučkových prúdov pri použití incidenčných matic.

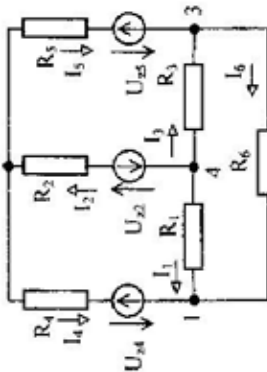
Pre schému obvodu na obr.2.27 zvolíme za vetvy prúdu vetvu s odporom R_1 a vetvu s odporom R_2 . Vetva s odporom R_3 a vetva s odporom R_4 sú nezávislé vetvy. Potom, podľa predchádzajúceho, môžeme napísať jednotlivé matice.

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix}; [U_z] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{z3} \\ U_{z4} \end{bmatrix}; [I_z] = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; [B]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; [I_s] = \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \end{bmatrix}$$

2.10 RIEŠENIE OBVODOV METÓDOU UZLOVÝCH NAPÄTÍ

Podstatou metódy je riešenie rovníc napísaných pre elektrický obvod podľa 1. Kirchhoffovho zákona. Počet rovníc sa bude rovnat počtu nezávislých uzlov $u = k - 1$, kde k je počet všetkých uzlov obvodu. Metódu riešenia vysvetlíme na konkrétnom príklade, obr.2.28.



obr.2.28

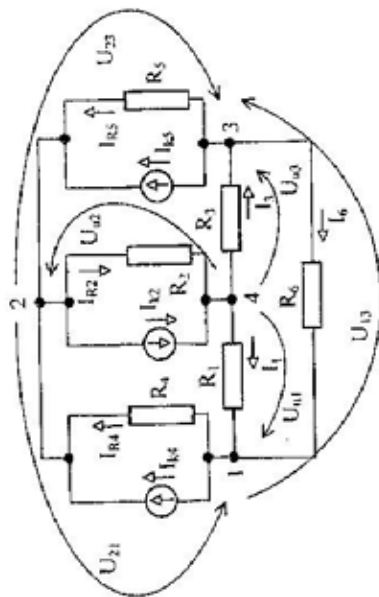
Princíp metódy je v tom, že ak dokážeme určiť napätia na vetvách prúdu, dokážeme určiť prúdy vo všetkých vetvách obvodu.

Napätíové zdroje nahradíme prúdovými zdrojmi, odpory vo vetve napätíového zdroja budeme pokladať za vnútorný odpor

tohoto zdroja, obr.2.29. Zo vzájomnej náhrady napáťových a prúdových zdrojov je známe, že sa dá nahradzovať len reálne zdroje. Teda táto metóda sa nedá priamo použiť na riešenie obvodu, ak sa v obvode vyskytuje ideálny napáťový zdroj. Aby sa dala táto metóda použiť, obvod sa musí vhodne transformovať, o tom pojednám neskôr. Odopory napáťových zdrojov môžeme pri zápise rovníc nahradit' vodivosťami pri prúdových zdrojoch.

Prúdy prúdových zdrojov sú vlastne prúdy nakrátko z náhrady napáťového, prúdovým zdrojom. V našom prípade

$$I_{k4} = G_4 U_{24} ; I_{k2} = G_2 U_{12} ; I_{k3} = G_3 U_{23} \quad (2.10.1)$$



obr.2.29

Za nezávislé uzly zvolíme uzly 1, 2, 3, uzol 4 budeme považovať za vzt'azný (referenčný) uzol. Predpokladáme, že jeho potenciál sa rovná nule. Medzi nezávislými uzlami a vzt'azným uzlom, resp. medzi vzt'azným a nezávislými uzlami zvolíme uzlové napätia. Je výhodné ich voliť v rovnakom zmysle, od nezávislých uzlov ku vzt'aznému uzlu, U_{e1} , U_{e2} , U_{e3} . Napätia medzi ďalšími uzlami vyjadríme pomocou uzlových napätí

$$U_{12} = U_{e1} - U_{e2} ; U_{23} = U_{e2} - U_{e3} ; U_{31} = U_{e3} - U_{e1} \quad (2.10.2)$$

Pre nezávislé uzly napíšeme rovnice podľa I. K. z.

$$\begin{aligned} I_1 + I_{k4} + I_{k3} - I_6 &= 0 \\ I_{k2} + I_{k3} - I_{k4} - I_{k5} - I_{k6} &= 0 \\ I_3 + I_{k3} + I_{k5} + I_6 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10.3)$$

Prúdy vyjadríme pomocou uzlových napätí a vodivosti, (2.10.4)

$$\begin{aligned} I_1 &= G_1 U_{e1} ; I_3 = G_3 U_{e3} ; I_{k2} = G_2 U_{e2} ; \\ I_{k4} &= G_4 U_{21} = G_4 U_{e1} - G_4 U_{e2} \\ I_{k5} &= G_5 U_{23} = G_5 U_{e2} - G_5 U_{e3} \\ I_6 &= -G_6 U_{13} = G_6 U_{e3} - G_6 U_{e1} \end{aligned} \quad (2.10.4)$$

po ich dosadení do rovníc (2.10.3) a úprave dostaneme

$$\begin{aligned} (G_1 + G_4 + G_6) U_{e1} - G_4 U_{e2} - G_6 U_{e3} &= -G_4 U_{24} \\ -G_4 U_{e1} + (G_2 + G_4 + G_5) U_{e2} - G_5 U_{e3} &= G_4 U_{24} - G_2 U_{23} + G_5 U_{25} \\ -G_5 U_{e1} - G_5 U_{e2} + (G_3 + G_5 + G_6) U_{e3} &= -G_5 U_{23} \end{aligned} \quad (2.10.5)$$

Rovnice (2.10.5) môžeme zovšeobecniť pre obvod s „n“ nezávislými uzlami

$$\begin{aligned} G_{11} U_{e1} + G_{12} U_{e2} + \dots + G_{1n} U_{en} &= I_{k01} \\ G_{21} U_{e1} + G_{22} U_{e2} + \dots + G_{2n} U_{en} &= I_{k02} \end{aligned}$$

$$G_{n1} U_{e1} + G_{n2} U_{e2} + \dots + G_{nn} U_{en} = I_{k0n} \quad (2.10.6)$$

$$G_{n1} U_{e1} + G_{n2} U_{e2} + \dots + G_{nn} U_{en} = I_{k0n}$$

V rovniciach (2.10.6) vodivosti s rovnakými indexami G_{ik} , menujeme uzlovými vodivosťami v_{ik} . Je to súčet vodivosti vetiev pripojených k i-tému uzlu. Ich znamienka sú kladné, keď budeme voliť všetky uzlové napätia v tom istom smere, ku vzt'aznému uzlu.

Vodivosti s rôznymi indexami $G_{ik} = G_{ki}$ sú vodivosti vzájomné. Sú to výsledné vodivosti vetiev medzi príslušným uzlom a inými uzlami spojennými bezprostredne vodivosťou. Ak uzol nie je bezprostredne spojený s iným uzlom, ich vzájomná vodivosť sa rovná nule. Ak dodržíme voľbu uzlových napätí podľa predchádzajúceho, znamienka vzájomných vodivosti sú vždy záporné.

Na pravú stranu rovnice napíšeme algebraický súčet prúdov prúdových zdrojov, (sú to prúdy nakrátko napáťových zdrojov). Na pravej strane rovnice tieto prúdy majú znamienko kladné, ak do príslušného uzla vtekajú,

znamienko prúdov je *záporné*, ak je prúd orientovaný von z príslušného uzla. Pokiaľ sme nenahradili napáťové zdroje prúdovými zdrojmi, znamienko tohoto prúdu nakrátko na pravej strane rovnice bude *kladné*, ak orientácia napáťového zdroja je *zhodná* s orientáciou zvoleného príslušného uzlového napätia. Ak orientácie napáťového zdroja a uzlového napätia *nie je zhodná*, znamienko prúdu nakrátko zapísaného na pravej strane rovnice je *záporné*.

Sústavu rovníc (2.10.6) môžeme zapísať aj v maticovom vyjadrení

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1h} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2h} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{h1} & G_{h2} & \dots & G_{hh} & \dots & G_{hn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nh} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{u1} \\ U_{u2} \\ \vdots \\ U_{uh} \\ \vdots \\ U_{un} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ku1} \\ I_{ku2} \\ \vdots \\ I_{kuh} \\ \vdots \\ I_{kun} \end{bmatrix} \quad (2.10.7)$$

Všeobecne zapísané

$$[G_u][U_u] = [I_u]$$

kde $[G_u]$ je *štvorcová matica uzlových vodivostí*. V diagonále sú zapísané vodivosti vlastné, ostatné prvky matice sú vodivosti vzájomné, alebo ak nie je bezprostredné spojenie príslušných uzlov, odpovedajúci prvok matice sa rovná nule. O voľbe znamienok jednotlivých prvkov bolo už skôr pojednané.

$[U_u]$ je *stĺpcová matica uzlových napätí*

$[I_u]$ je *stĺpcová matica prúdových zdrojov*, alebo prúdov nakrátko napáťových zdrojov. O voľbe ich znamienok bolo už skôr pojednané.

Obvod, ktorý chceme riešiť metódou uzlových napätí nie je potrebné prekresľovať a nahradzovať napáťové zdroje prúdovými zdrojmi, ako sme to vykonalí s obvodom na obr.2.28 a nahradili sme ho obvodom na obr.2.29. To bolo potrebné na vysvetlenie metodiky riešenia. Východiskové rovnice môžeme napísať priamo zo zadaného obvodu, ak dodržáme ten postup, ktorý sme robili pri vysvetľovaní metodiky riešenia. Ukážeme to na obvode znázornenom na obr.2.30.

1. Pre zadaný obvod určme nezávislé uzly a zakreslime uzlové napätia, ako sme uviedli, je výhodné zvoliť ich orientáciu v tom istom smere.

V našom prípade nezávislé

uzly sú uzly 1, 2, 3. Uzol 4

sme vybrali za uzol vzťažný.

Uzlové napätia sme oriento-

vali od nezávislých uzlov

k uzlu vzťažnému, obr.2.30.

2. Do diagonály uzlovej matice

zapíšeme vodivosti vlastné,

pri výhodnej voľbe uzlových

napätí majú vždy znamienko

kladné. Vzájomné vodivosti,

pri výhodnej orientácii uzlov-

ých napätí, majú znamienko

záporné a tvoria

ďalšie prvky uzlovej matice.

3. Matica uzlových napätí je

stĺpcová a počet

riadkov je daný počtom uzlových napätí.

4. Na druhej strane rovnice je

matica prúdov vodičov a napáťových

zdrojov vo vetvách zapojených k príslušnému uzlu. Ak je orientácia

napáťového zdroja zhodná s orientáciou uzlového napätia znamienko

tohoto člena je kladné. Ak orientácie napätí nie sú zhodné, znamienko

toho člena je záporné.

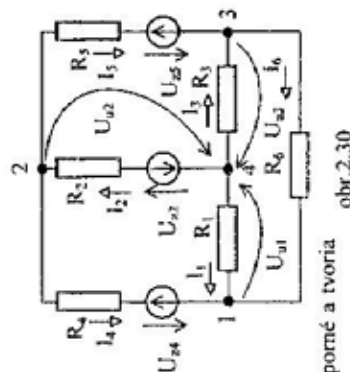
V zmysle uvedených zásad, rovnice majú nasledujúci tvar

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_4 + G_6) & -G_4 & -G_6 & 0 \\ -G_4 & (G_2 + G_4 + G_5) & -G_5 & 0 \\ -G_6 & -G_5 & (G_3 + G_5 + G_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{u1} \\ U_{u2} \\ U_{u3} \\ U_{u4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}$$

Potom prúdy v jednotlivých vetvách sú

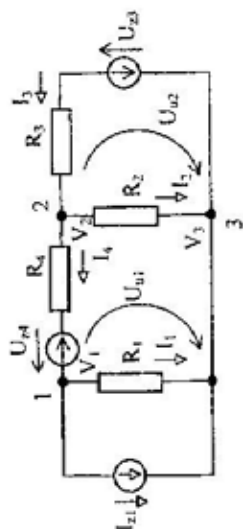
$$I_1 = G_1 U_{u1}; I_2 = -G_2 (U_{u2} + U_{u3}); I_3 = G_3 U_{u3}; I_4 = G_6 (U_{u3} - U_{u4});$$

$$I_5 = G_4 (U_{u3} - U_{u1} - U_{u4}); I_6 = G_5 (U_{u2} - U_{u3} - U_{u4})$$



2.10.1 Zápis rovníc uzlových napětí použitím incidenčních matic

Zápis rovnice pro metodu uzlových napětí pomocí incidenčních matic si vysvětlíme na konkrétním obvodu zobrazeném na obr.2.31.



Obr.2.31

Ak priadame jednotlivým uzlom schémy na obr.2.31 potenciály, v našom prípade ich označíme V_1, V_2, V_3 , napätia na príslušných vetvách dostaneme zo vzťahu

$$[A]^T [V] = [U] \quad (2.10.8)$$

kde $[A]^T$ je transponovaná incidenčná matica všetkých uzlov grafu

$[V]$ je stĺpcová matica potenciálov všetkých uzlov grafu

$[U]$ je stĺpcová matica napätí vetiev grafu. Ak orientáciu napätia na vetve volíme za zhodnú s orientáciou vetvy grafu (s orientáciou prúdu vo vetve schémy), je to kladná orientácia. Takáto voľba je výhodná.

Pre náš prípad na obr.2.31

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 - V_3 \\ V_2 - V_3 \\ V_3 - V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{13} \\ U_{23} \\ U_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (2.10.9)$$

Považujeme potenciál jedného uzla za nulový! V našom prípade $V_3 = 0$ a napätia vzťahnuté k tomuto uzlu považujeme, za *uzlové napätia*, rovnica (2.10.9) dostane tvar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{u1} \\ U_{u2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{u1} \\ U_{u2} \\ -U_{u2} \\ U_{u2} - U_{u1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (2.10.10)$$

Teda vzťah medzi uzlovými a vetvovými napätiami je

$$[A]^T [U_u] = [U] \quad (2.10.11)$$

Podobne ako sme upravovali rovnice (2.9.9) a (2.9.10) v kapitole Slučkových prúdov, ktoré platili pre vetvu obvodu na obr.2.23, ich vhodné upravíme. Z rovnice (2.9.10) vyjadríme prúd I_R a dosadíme do rovnice (2.9.9). Potom môžeme napísať rovnice pre príslušné vetvy obvodu v maticovom vyjadrení

$$-[U] + [R][I] - [R][I_z] + [U_z] = [0] \quad (2.10.12)$$

Vynásobením rovnice (2.10.12) zľava, maticou vodivosti všetkých vetiev obvodu $[G]$, dostaneme

$$-[G][U] + [G][R][I] - [G][R][I_z] + [G][U_z] = [0] \quad (2.10.13)$$

Preto, že $[G][R] = [I]$, rovnica (2.10.13) po vynásobení zľava incidenčnou maticou nezávislých uzlov a malej úprave dostane tvar

$$[A][G][U] = -[A][I_z] + [A][I] + [A][G][U_z] \quad (2.10.14)$$

Dosadením do rovnice (2.10.14) z rovnice (2.10.11) a $[A][I] = [0]$, bude

$$([A][G][A]^T)[U_u] = -[A][I_z] + [A][G][U_z] \quad (2.10.15)$$

$$\text{zavedením } ([A][G][A]^T) = [G_u] \quad (2.10.16)$$

dostaneme

$$[G_u][U_u] = -[A][I_z] + [A][G][U_z] \quad (2.10.17)$$

kde $[G_u]$ je štvorcová matica vodivosti nezávislých uzlov, ktorú dostaneme zo vzťahu (2.10.16), v diagonále matice sú vodivosti vlastné a

majú znamienko kladné, ak boli uzlové napätia zvolené od nezávislých uzlov ku vzájomnému uzlu. Ostatné prvky matice sú vzájomné vodivosti a za predpokladu skôr uvedenej orientácie uzlových napätí je ich znamienko záporné. Ak príslušný nezávislý uzol nemá s iným uzlom priame spojenie, príslušný prvok matice má nulovú hodnotu.

$[U_A]$ je stĺpcová matica uzlových napätí

$[A]$ je stĺpcová matica nezávislých uzlov schémy (grafu)

$[I_z]$ je stĺpcová matica prúdových zdrojov v obvode. Počet riadkov je daný počtom všetkých vetiev obvodu a znamienko prúdových zdrojov je kladné. Ak niektorá vetva neobsahuje prúdový zdroj, príslušný prvok matice sa rovná nule.

$[G]$ je diagonálna matica vodivostí vo všetkých vetvách obvodu, prvky majú kladné znamienko

$[U_z]$ je stĺpcová matica napäťových zdrojov vo všetkých vetvách obvodu. Ak niektorá vetva neobsahuje napäťový zdroj, hodnota príslušného prvku je rovná nule. Znamienko každého napäťového zdroja je kladné.

Rovnica (2.10.17) vyjadruje v maticovom zápise rovnice pre metódu uzlových napätí použitím incidenčných rovníc a z nej sa určia uzlové napätia.

Pre obvod na obr.2.31 rovnica (2.10.15) po dosadení nadobudne tvar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{z1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{z3} \\ U_{z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{z1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alebo po úprave

$$(G_1 + G_2) U_{u1} - G_4 U_{u2} = -G_4 U_{z4} - I_{z1}$$

$$-G_4 U_{u1} + (G_2 + G_3 + G_4) U_{u2} = G_4 U_{z4} - G_3 U_{z3}$$

$$I_1 = G_1 U_{u1}; I_2 = G_2 U_{u2}; I_3 = -G_3 (U_{u2} + U_{z3}); I_4 = -G_4 (U_{u2} + U_{z4} - U_{z1})$$

2.10.1 Veta o paralelných napäťových zdrojoch

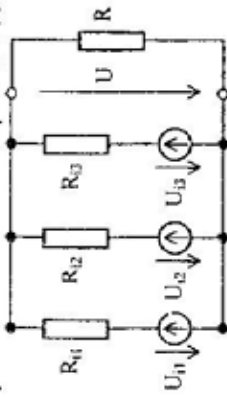
V praxi sa často stretáme so skupinou paralelne zapojených napäťových zdrojov podľa obr.2.32. Je potrebné určiť svorkové napätie U . Pomerné výhodne je určiť toto napätie metódou uzlových napätí. Z rovnice (2.10.7) pre obvod na obr.2.32 môžeme napísať

$$(G_{11} + G_{12} + G_{13} + G) U = G_{11} U_{11} + G_{12} U_{12} + G_{13} U_{13}$$

Potom svorkové napätie je

$$U = \frac{G_{11} U_{11} + G_{12} U_{12} + G_{13} U_{13}}{G_{11} + G_{12} + G_{13} + G} \quad (2.10.18)$$

Obr.2.32



Pre „n“ paralelne zapojených napäťových zdrojov môžeme výraz (2.10.18) zovšeobecniť

$$U = \frac{\sum_{k=1}^n G_{1k} U_{1k}}{G + \sum_{k=1}^n G_{1k}} \quad (2.10.19)$$

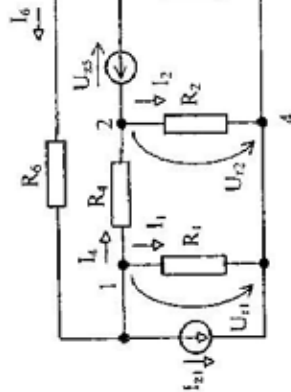
Vzťah (2.10.19) je matematickým zápisom vety o paralelných napäťových zdrojoch.

2.11 RIEŠENIE ELEKTRICKÝCH OBVODOV METÓDOU REZOVÝCH NAPÄTÍ

V kapitole riešenia elektrických obvodov metódou uzlových napätí sme poukázali na to, že táto metóda sa nedá použiť pre riešenie takých obvodov, kde sa vyskytujú ideálne napäťové zdroje. Metóda rezových napätí je určená práve pre takéto obvody. Východiskové rovnice pre riešenie ob-

vodu sa píše podľa 1. Kirchhoffovho zákona a prúdy, ktoré sú pre zápis potrebné, sa určia z rezových napätí, z napätí ideálnych napáťových zdrojov a z prúdov prúdových zdrojov.

Metodiku riešenia si vysvetlíme na konkrétnom obvode, obr.2.33.



obr.2.33

1. K zadanej schéme obvodu nakreslíme orientovaný graf, obr.2.34.
2. Za vetvy stromu vyberieme predovšetkým tie vetvy, v ktorých sú zapojené ideálne napáťové zdroje, potom príberieme vetvy s prúdovými zdrojmi, ak ich počet je stále menší ako potrebujeme k vytvoreniu stromu, doplníme ich ľubovoľnými vetvami. V našom prípade vetvy stromu sú vetvy v_5, v_6, v_1, v_4 . Vetvy v_3, v_2, v_3 sú vetvy nezávislé.
3. Urobíme hlavné rezy (hlavný rez je taký, že reže len jednu vetvu stromu), ale nesmie sa rezať vetva stromu, ktorá obsahuje ideálny napáťový zdroj, pretože napätie na tejto vetve je známe. V našom prípade hlavné rezy sú r_1, r_2 . Teda o toľko rovníc sa píše menej z 1. K. Z., keďže je vetiev stromu s ideálnym napáťovým zdrojom.
4. Napíšeme rovnice pre hlavné rezy, (2.1.1)

$$I_1 + I_4 - I_6 + I_{21} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$I_2 - I_3 - I_4 + I_6 = 0$$

Prúdy, ktoré sa majú dosadiť do rovníc (2.1.1), vyjadríme pomocou rezových napätí, (2.1.2)

$$I_1 = G_1 U_{r1}; I_2 = G_2 U_{r2}; I_3 = G_3 (U_{r3} - U_{r2}); \quad (2.1.2)$$

$$I_4 = G_4 (U_{r1} - U_{r2}); I_6 = G_6 (U_{r2} - U_{r1} - U_{r3})$$

Po dosadení rovníc (2.1.2) do rovníc (2.1.1) a po úprave dostaneme

$$(G_1 + G_4 + G_6)U_{r1} - (G_4 + G_6)U_{r2} = -G_6 U_{r3} \quad (2.1.3)$$

$$-(G_4 + G_6)U_{r1} + (G_1 + G_4 + G_6)U_{r2} = (G_3 + G_6)U_{r3}$$

Po vyriešení rovníc (2.1.3) dostaneme rezové napätia U_{r1}, U_{r2} a po ich dosadení do rovníc (2.1.2), určíme prúdy vo vetvách.

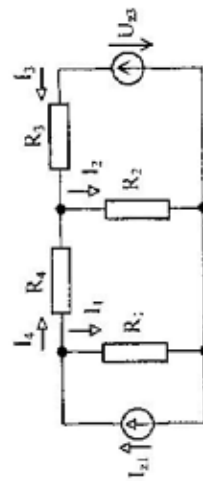
2.12 PRINCÍP SUPERPOZÍCIE

Princíp superpozície je všeobecne platný pre všetky lineárne systémy. V elektrických lineárnych sieťach sú prúdy tiež priamo úmerné napätiam, teda môžeme princíp superpozície použiť pre ich analýzu.

Metodika riešenia spočíva v poznatku, že výsledný účinok v lineárnom obvode sa rovná algebraickému súčtu od jednotlivých zdrojov.

Spôsob riešenia si ukážeme pri analýze obvodu na obr.2.35.

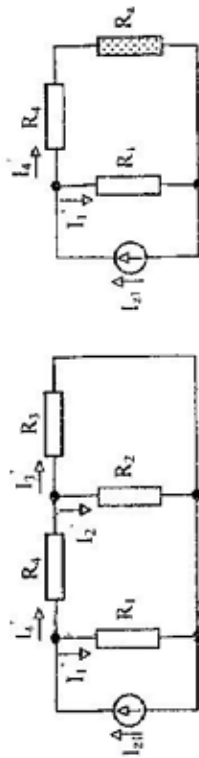
Najprv budeme riešiť obvod len s jedným a to s prúdovým zdrojom, ostatné napáťové zdroje sa v obvode skratujú, ak sú v obvode ďalšie prúdové zdroje ich svorky sa rozpoja, obr.2.36.



obr.2.35

K riešeniu ob-

vodu využijeme poznatky z predchádzajúcich kapitol. Paralelne zapojené odpory R_2 a R_3 nahradíme výsledným odporom R_6 , obr.2.37. Potom nahradíme sériovú kombináciu odporov, odporom R_5 , obr.2.38. Prúd prúdového zdroja a jeho orientácia je daná. Z prúdového deliča a z 1. K. z určíme fiktívne prúdy v jednotlivých vetvách.



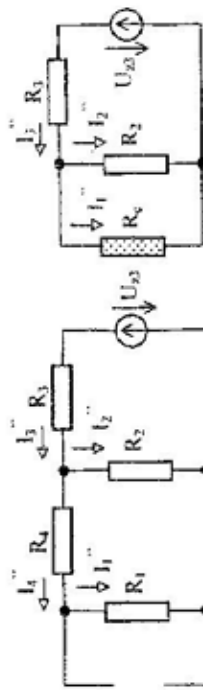
obr.2.36

$$R_a = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} ; R_b = R_4 + R_5 ;$$

$$I_1 = I_{zl} \frac{R_b}{R_1 + R_b} ; I_4 = I_{zl} - I_1 ;$$

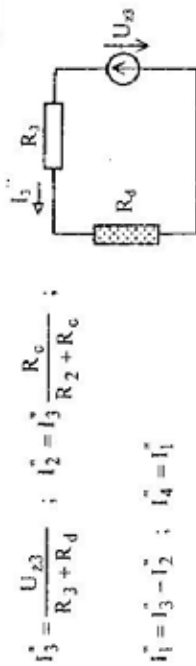
$$I_2 = I_4 \frac{R_3}{R_2 + R_3} ; I_3 = I_4 - I_2$$

Podobne ako v predchádzajúcom prípade, budeme postupovať pri riešení fiktívnych prúdov obvodu od ďalšieho zdroja, napätového. Pri riešení prúdov od napätových zdrojov, musíme dodržať kladnú orientáciu napätí a prúdov (spotrebitelský systém): na *pasívnom* prvku má *prúd a napätie rovnakú orientáciu*. Postup je jasný zo schém na obr.2.39 až obr.2.41.



obr.2.39

$$R_c = R_1 + R_4 ; R_d = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} ;$$



obr.2.41

Výsledné prúdy vo vetvách, obr.2.35, dostaneme ako algebraické súčty dielčích – fiktívnych prúdov v príslušných vetvách, obr.2.36 a obr.2.39.

$$I_1 = I_1' + I_1'' ; I_2 = I_2' + I_2'' ; I_3 = I_3' - I_3'' ; I_4 = I_4' - I_4''$$

Ako vidieť z predchádzajúceho, nemusí sa riešiť sústava rovníc ktoré popisujú obvod, spôsob riešenia obvodu nie je náročný, ale je pracný.

2.13 VETY O NÁHRADNOM ZDROJI

V zložitejších obvodoch potrebujeme často určiť prúd (alebo napätie) len v jednej vetve. V takom prípade môžeme použiť pre výpočet toho prúdu *vetvu o náhradnom zdroji*. Celý obvod usporiadame tak, že vetvu, v ktorej prúd potrebujeme vypočítať osamostatníme a zvyšok obvodu nahradíme aktívnym dvojpólom, buď reálnym napäťovým zdrojom, je to *Théveninova veta*, alebo reálnym prúdovým zdrojom je to *Nortonova veta*.

2.13.1 Théveninova veta

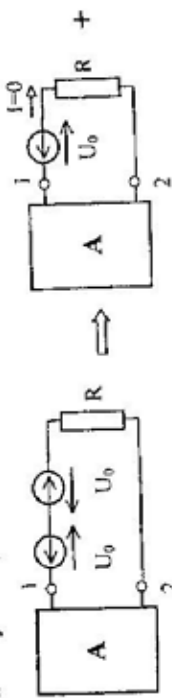
Ak potrebujeme určiť prúd len v jednej vetve v zložitom elektrickom obvode, túto vetvu osamostatníme a ostávajúcu časť obvodu nahradíme reálnym napäťovým zdrojom.

Ideálne napätie náhradného zdroja je vlastne napätie naprázdno zostatku obvodu, keď sme odstránili vetvu, cez ktorú počítame prúd. Určíme ho ľubovoľnou metódou.

Vnútny odpor reálneho náhradného zdroja určíme z hľadiska rozpojených svoriek, odkiaľ sme vybrali vetvu, cez ktorú potrebujeme určiť prúd. Ak sú v zostatku obvodu napäťové zdroje tie pri určovaní vnútorného odporu náhradného zdroja *skratujeme*, svorky prúdových zdrojov, ktoré sa nachádzajú v zostatku obvodu, *rozpojíme*.

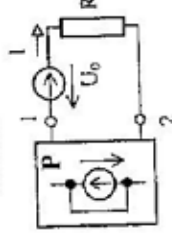
Potom požadovaný prúd vo vetve určíme tak, že na zostavený reálny napáťový zdroj pripojíme vetvu, ktorú sme z obvodu odstránili.

Dôkaz takejto náhrady nám vyplynie použitím princípu superpozície na daný obvod, obr.2.42, ktorý nahradíme obvodmi na obr.2.43 a obr.2.44



obr.2.42

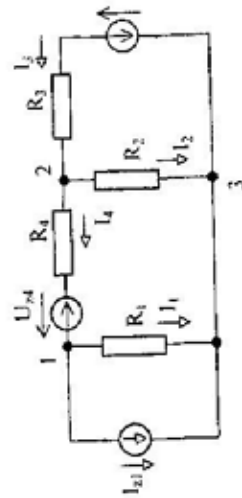
obr.2.43



obr.2.44

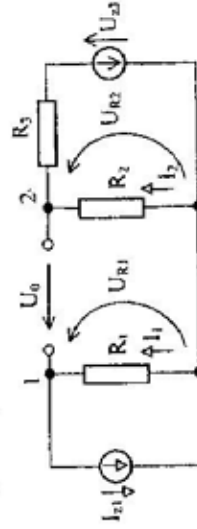
Na obr.2.42 je na svorky 1 a 2 zostavený reálny napáťový zdroj. Tým sa v obvodě nič neporušilo, pretože účinky napáťových zdrojov sa vypočítajú s odporom R cez ktorú máme počítať prúd. Do série s odporom sme pripojili dva napáťové zdroje orientované proti sebe o veľkosti napätia naprázdno U_0 a U_0 . V druhom prípade, obr.2.44, vnútorné zdroje nepôsobí, obvodom prechádza prúd I.

Metodiku si ukážeme na konkrétnom obvode, obr.2.45.



Obr.2.45

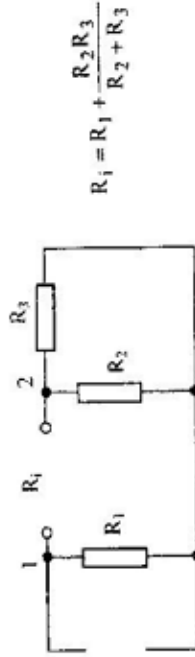
Potrebuje určiť prúd I_4 tečúci vetvou zapojenou medzi uzlami 2 a 1. Túto vetvu z obvodu odstránime a na rozpojených svorkách obvodu určíme napätie naprázdno, obr.2.46.



obr.2.46

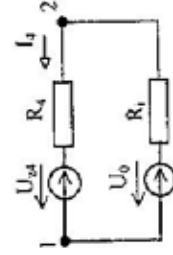
$$U_{R2} = U_{z3} \frac{R_2}{R_2 + R_3} ; U_{R1} = R_1 I_{z1} ; U_0 = U_{z1} - U_{R2}$$

Vnútorný odpor náhradného napáťového zdroja určíme podľa obr.2.47.



obr.2.47

$$R_i = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$



obr.2.48

Z vypočítaných hodnôt U_0 a R_i zostavíme reálny napáťový zdroj a pripojíme späť vetvu, ktorú sme z obvodu vybrali, obr.2.48. Potom určíme prúd

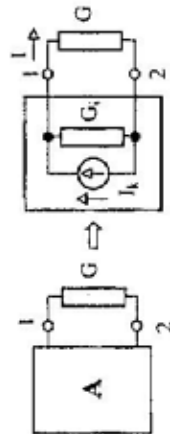
$$I_4 = \frac{U_0 - U_{z4}}{R_i + R_4}$$

2.13.2 Nortonova veta

Nortonova veta je duálnou vetou k vete Théveninovej. Ak potrebujeme určiť prúd v jednej vetve, túto vetvu z obvodu vyberieme, zostatok obvodu na svorkách vybratej vetvy skratujeme, určíme prúd nakrátko I_k .

Vnútorný odpor reálneho prúdového zdroja R_N určíme rovnako ako pri Théveninovej vete.

Z vypočítaných I_k a R_N zložený dvojvól naľadíme reálnym prúdovým zdrojom, pripojíme späť vetvu, ktorú sme z obvodu vybrali a vypočítame požadovaný prúd, obr.2.49.



obr.2.49

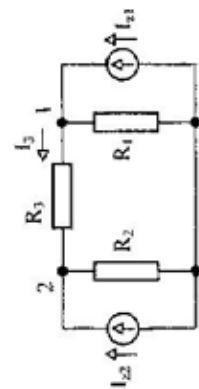
Metodiku riešenia si ukážeme na konkrétnom obvode, obr.2.50. Potrebujeme určiť prúd tečúci odporom R_3 .

Vetvu medzi uzlami 1 a 2 nahradíme bezodporovou spojkou a určíme prúd nakrátko I_k v tejto vetve, obr.2.51.

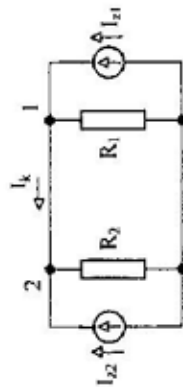
Z princípu superpozície môžeme pre I_k napísať

$$I_k = \frac{I_{z1} R_1}{R_1 + R_2} - \frac{I_{z2} R_2}{R_1 + R_2}$$

Pre určenie vnútorného odporu R_N reálneho náhradného prúdového zdroja platí schéma na

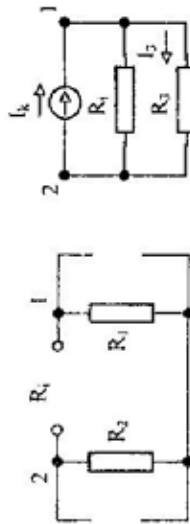


obr.2.50



obr.2.51

obr.2.52.



obr.2.52

$$R_N = R_1 + R_2 ;$$

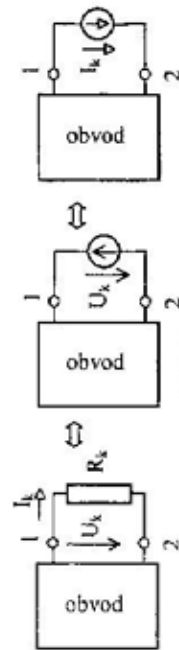
Končná schéma reálneho prúdového zdroja s pripojenou vetvou, cez ktorú sme určovali prúd I_3 je na obr.2.53.

$$I_3 = I_k \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

Všimnime si, že prúdový zdroj má opačnú orientáciu ako bola jeho orientácia naznačená na obr.2.51.

2.14 PRINCÍP KOMPENZÁCIE

Nech v elektrickom obvode k -tá vetva obsahuje pasívny prvok s napätím U_k a prúdom I_k .



obr.2.54

Napätia a prúdy na ostatných vetvách obvodu sa nezmenia ak pasívny prvok v k -tej vetve nahradíme napätovým, alebo prúdovým zdrojom, ktorých hodnota a orientácia je zhodná s napätím, alebo prúdom na pasívnom prvku v tejto vetve, obr.2.54.

2.15 PREMIESTNENIE IDEÁLNYCH ZDROJOV

Náhrada napätového zdroja prúdovým je možná len vtedy, keď je vo vetve s napätovým zdrojom do série zapojený pasívny dvojpól (v jednosmerných obvodoch odpor). Tento vonkajší odpor považujeme za vnútorný odpor napätového zdroja a potom, ako už bolo skôr uvedené je náhrada možná.

Podobne môžeme hovoriť o náhrade reálneho prúdového zdroja, reálnym napätovým zdrojom.

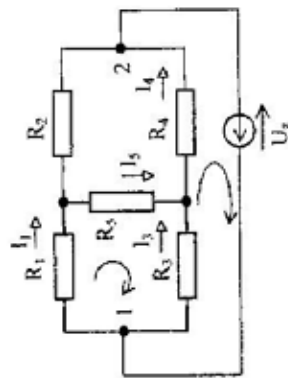
Ak obvod obsahuje ideálne zdroje, môžeme urobiť takú konfiguráciu obvodu, aby sme mohli vytvoriť reálne zdroje. Ide o *premiestnenie zdrojov*.

2.15.1 Premiestnenie ideálneho napätového zdroja za uzol

Ak obvod obsahuje ideálny napätový zdroj, nemôžeme pre analýzu takého obvodu priamo použiť metódu uzlových napätí, pretože nemôžeme určiť prúdy nakoľko napätového zdroja, obr.2.55.

Rovnice podľa 2. K.z. pre naznačené slučky sú

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_5 I_5 &= 0 \\ R_3 I_3 + R_4 I_4 - U_z &= 0 \end{aligned}$$



obr.2.55

Ideálny napätový zdroj premiestnime za uzol tak, aby príslušné rovnice pre konfigurovaný obvod boli nezmenené.

Do vetvy, ktorá obsahuje ideálny napätový zdroj umiestnime ideálny napätový zdroj rovnakej hodnoty ako pôvodný zdroj, ale opačne orientovaný. Zároveň do každej vetvy obvodu, ktoré sa spájajú v uzle, v ktorom je zapojená tá časť vetvy kde sme umiestnili nový zdroj, zapojíme

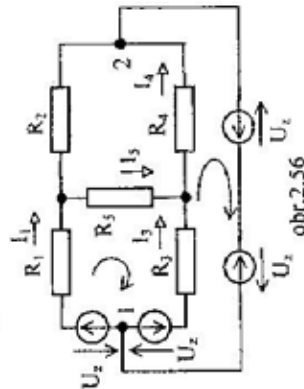
ideálne napätové zdroje rovnakej hodnoty, rovnako orientované vzhľadom k danému uzlu, ako novo pripojený napätový zdroj, obr. 2.56.

Rovnice popisujúce príslušné slučky nového obvodu na obr. 2.56 sú

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_5 I_5 &= 0 \\ R_3 I_3 + R_4 I_4 - U_z &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice sa nezmenili.

Vetva, ktorá teraz spojuje uzol 1 a 2 predstavuje spojku nakrátko, teda celkový počet uzlov v obvode sa zmenší, tým sa zmenší aj počet nezávislých uzlov a počet rovníc pre 1. K. z. sa tiež zmenší.

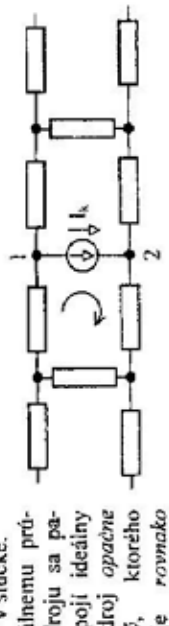


obr.2.56

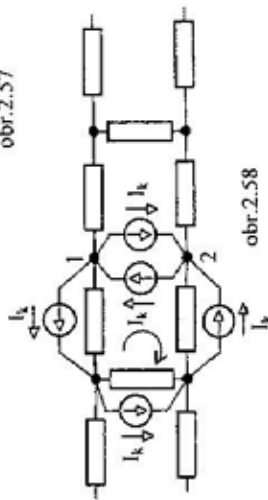
2.15.2 Premiestnenie ideálnych prúdových zdrojov v slučke

Ak sa vyskytuje v obvode ideálny prúdový zdroj, obr.2.57, môže sa premiestniť v slučke.

K ideálnemu prúdovému zdroju sa paralelne pripojí ideálny prúdový zdroj opačne orientovaný, ktorého hodnota je rovnako



obr.2.57



obr.2.58

veľká ako pôvodného zdroja, obr.2.58. Ku všetkým vetvám v príslušnej slučke sa paralelne pripoja rovnako veľké a rovnako orientované ideálne prúdové zdroje, ako prúdový zdroj, ktorý sme pripojili k pôvodnému zdroju.

Medzi uzlami 1 a 2 ostane rozpojená vetva. Rovnice pre 1. K. z., teda prúdy v uzle pred a po konfigurácii obvodu musia byť rovnaké.

2.16 PRÁCA A VÝKON JEDNOSMERNÉHO PRÚDU A NAPÄTIA

Práca jednosmerného prúdu a napätia je definovaná vzťahom

$$A = UI t = R I^2 t = \frac{U^2}{R} t, \quad [W s; V, A, s] \quad (2.16.1)$$

kde

A je práca

U je napätie

I je prúd

R je odpor

t je čas

Jednotkou práce je 1 Ws (wattsekunda) = 1 J (Joule)

Väčšou jednotkou je 1 Wh (watthodina), alebo 1 kWh (kilowatthodina).

$$1 \text{ Wh} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ Ws}; \quad 1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws}$$

Prechodom prúdu vodičom vzniká teplo, ktorého množstvo dostaneme z Lenc-Jouleho zákona:

Množstvo tepla vyvinuté vo vodiči sa rovná súčinu odporu vodiča R , druhej mocniny prúdu I a času, za ktorý prúd vodičom prechádza.

Pre ustálený stav

$$Q = R I^2 t; \quad [J; \Omega, A, s] \quad (2.16.2)$$

$$Q = \frac{U^2}{R} t; \quad [J; V, \Omega, s] \quad (2.16.3)$$

Toto množstvo tepla, podľa druhu zariadenia, môžeme považovať buď za užitočné teplo, (napr. ohrievacie telesá a pod.), alebo za stratové, ak teplo vzniká pri premene elektrickej energie na iný druh energie len ako fyzikálna nevyhnutnosť.

Výkon je práca za čas, pre jednosmerný prúd a jednosmerné napätie je

$$P = \frac{A}{t} = UI = R I^2 = \frac{U^2}{R}; \quad [W; V, A] \quad (2.16.4)$$

Jednotkou výkonu je 1 Watt (Watt)

Pri voľbe kreslenia šípok napätia a prúdu sme zaviedli, že na pasívnom prvku majú zhodný zmysel, hodnota výkonu je v tomto prípade kladná, výkon je zo zdroja odoberaný. Na zdroji je nie orientácia šípok v tom istom zmysle, výkon budeme považovať za záporný, je do siete dodávaný. Je to tzv. spotrebiteľský systém.

2.16.1 Účinnosť

Účinnosť je pomer výkonu zariadenia P_2 (napr. na hriadeľ motora), k príkonu zariadenia P_1 , (vstupný výkon, napr. na svorkách motora). Pri reálnych zariadeniach je účinnosť vždy menšia ako 1.

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \quad (2.16.5)$$

Ak vyjadríme účinnosť v percentách

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} 100\%$$

Výkon zariadenia je

$$P_2 = P_1 - \Delta P; \quad \text{kde } \Delta P \text{ sú straty. Potom } \eta = \frac{P_1 - \Delta P}{P_1}$$

2.16.2 Prenos elektrickej energie jednosmerného prúdu

V obvode na obr.2.59 odpor R predstavuje spotrebič. Zdroj predstavuje reálny napáťový zdroj s vnútorným napätím U_i a s vnútorným odporom R_i . Ak odpor privodov zanedbáme, potom svorkové napätie zdroja sa rovná svorkovému napätiu spotrebiča.

Výkon spotrebiča sa rovná jeho príkonu.

$$P_2 = UI = R I^2 \quad (2.16.6)$$

Vnitřný výkon zdroja

$$P_1 = U_1 I = (R + R_i) I^2 \quad (2.16.7)$$

Účinnost

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{R}{R + R_i} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R}} \quad (2.16.8)$$

Vedením chceme preniesť maximálny výkon. V tom prípade

$$\frac{dP_2}{dR} = 0 \quad (2.16.9)$$

Určením prúdu pre obvod na obr.2.59, dosadením do rovnice (2.16.6) a potom do rovnice (2.16.9) je

$$\frac{dP_2}{dR} = U_1^2 \frac{(R + R_i)^2 - 2R(R + R_i)}{(R + R_i)^4}$$

Vyjadrením podmienky pre extrém z (2.16.9) dostaneme

$$R = R_i \quad (2.16.10)$$

Zo vzťahu (2.16.10) vyplýva, ak chceme prenášať maximálny výkon, vnútorný odpor zdroja sa musí rovnať záťažnému odporu. Hovoríme o *výkonovej prispôbovosti*.

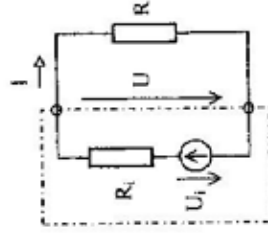
Prenášaný maximálny výkon je

$$P_{2\max} = \frac{U_1^2}{4R_i} \quad (2.16.11)$$

a prúd v obvode pri prenose maximálneho výkonu má hodnotu

$$I = \frac{U_1}{2R_i} \quad (2.16.12)$$

Zo vzťahu (2.16.8) je zřejmé, že účinnosť pri prenose maximálneho výkonu je 50 %. Aby účinnosť prenosu bola čo najvyššia, musí o vnútornom odpore napíťového zdroja a odpore záťaže platiť, že $R_i \ll R$.



obrázok 2.59

3 STRIEDAVÉ PRÚDY

V predchádzajúcej kapitole sme sa zaoberali riešením elektrických obvodov, v ktorých sa veličiny (prúd a napätie) v závislosti od času nemenili. V elektrotechnike majú dôležitú úlohu elektrické obvody, v ktorých sa veličiny v závislosti od času menia. Okrem veľkosti sa mení aj zmysel (orientácia). Hodnota takejto meniacej sa veličiny, napr. napätia, v určitom časovom okamžiku je *okamžitá hodnota* tejto veličiny. Pribeh okamžitých hodnôt napätia je *okamžité napätie*. Okamžité veličiny budeme označovať malými písmenami napr. okamžité napätie

$$u = \tilde{u}(t)$$

Metódy a princípy riešenia lineárnych obvodov napájaných napätím meniacim sa v závislosti od času, sú tie isté ako sme prebrali v kapitole jednosmerných prúdov, ale namiesto odporov budeme vo všeobecnosti uvažovať impedancie. Pri niektorých metódach, skôr popísaných, sme už na to poukazovali, hoci impedanciu zavedieme neskôr.

3.1 PERIODICKÉ FUNKCIE

Názvom *periodická funkcia* sa označuje taká funkcia, ktorá spĺňa podmienku

$$u = \tilde{u}(t) = \tilde{u}(t + kT) \quad (3.1.1)$$

kde k je ľubovoľné kladné celé číslo, T je doba, za ktorú veličina naobíha stále tú istú hodnotu a túto dobu nazývame *periódou*.

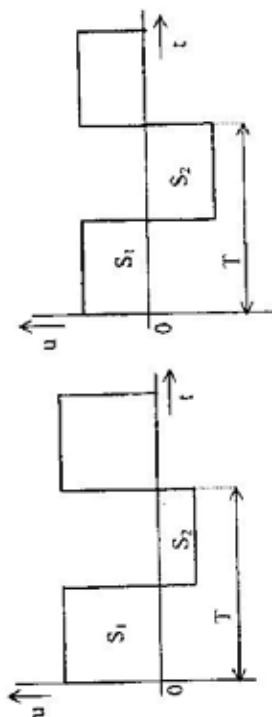
Reciproká hodnota periódy, periodickej funkcie je *frekvencia* f .

$$f = \frac{1}{T}, \quad [Hz = s^{-1}; s^{-1}] \quad (3.1.2)$$

Jednotkou frekvencie je 1 Hz (Hertz), alebo sa frekvencia udáva v cykloch za sekundu [c/s].

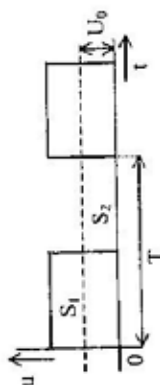
Periodické funkcie, meniace sa v závislosti od času, zvyčajne rozdeľujeme na:

1. *Kmitavé* sú tie, ktorých plocha ohraničená priebehom funkcie nad časovou osou sa nerovná ploche ohraničenej priebehom krivky pod časovou osou, $S_1 \neq S_2$, obr.3.1.



obr.3.1

2. *Striedavé*, plochy ohraničené priebehom funkcie nad a pod časovou osou sú rovnaké, $S_1 = S_2$, obr.3.2.
3. *Pulzujúce*, ich priebeh je len na jednej strane časovej osi, obr.3.3.



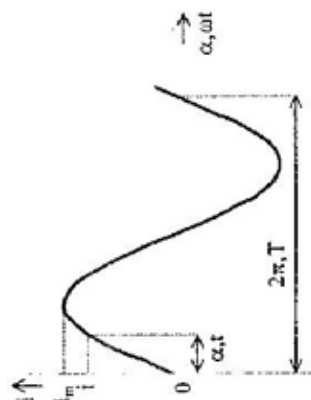
obr.3.3

Z priebehov kmitavých aj pulzujúcich môžeme posunúť časovej osi (vo vertikálnom smere) dosiahnuť voči novej časovej ose, *striedavý* priebeh. Hodnotu, o ktorú sme posunuli časovú os nazývame *jednosmerná zložka* U_0 .

Veľký význam v elektrotechnike majú veličiny, meniace sa harmonicky, t.j. že ich priebeh sa môžu vyjadriť pomocou goniometrických funkcií sinus a kosinus, obr.3.4. Pri analýze lineárnych elektrických obvodov napájaných takýmto napätiami, dostaneme znova harmonickú funkciu.

Priebeh prúdu znázornený na obr.3.4, môžeme zapísať

$$i = I_m \sin \alpha \quad (3.1.3)$$



obr.3.4

V obrázku I_m je maximálna hodnota prúdu, i je okamžitá hodnota prúdu pre uhol α , perióda priebehu je 2π . Tejto perióde zodpovedá doba T a uhlu α zodpovedá čas t . Z pomeru

$$\frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T}, \quad \alpha = 2\pi f t$$

Ak označíme, že

$$\omega = 2\pi f \quad (3.1.4)$$

je *krhová frekvencia*, potom výraz (3.1.3) pre okamžitý prúd dostane tvar

$$i(t) = I_m \sin \omega t \quad (3.1.5)$$

Kvôli zjednodušeniu zápisu, veličiny závislé od času budeme označovať malými písmenami a vynecháme označenie funkčnej závislosti, takže okamžitý prúd budeme zapisovať podľa (3.1.6)

$$i = I_m \sin \omega t \quad (3.1.6)$$

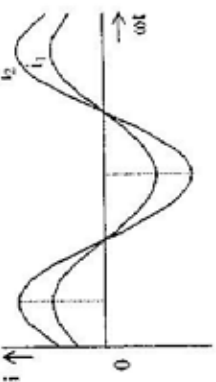
V čase $t = 0$, je hodnota prúdu nulová. Vo všeobecnosti to však nemusí byť, obr.3.5. Prúdy vyjadrieme vzťahmi

$$i_1 = I_m \sin (\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = I_{m2} \sin(\omega t - \varphi_2)$$

Posunutie φ_1, φ_2 nazývame *počiatočná fáza* (skrátene *fáza*). Prípíšueme jej orientáciu. Šípka začína tam, kde má hodnota veličiny nulovú hodnotu a smerom kladným hodnotám, na časovej ose (doprava), má fázu kladné znamienko, v opačnom smere záporné. Pribeh určitej veličiny je teda určený *maximálnou hodnotou* (amplitudou), *frekvenciou* a *fázou*.

Medzi dvoma striedavými veličinami tej istej frekvencie, ktoré majú rôznu počiatočnú fázu φ_1 a φ_2 je *fázový posun* φ , obr.3.5.



obr.3.6

Periodicky premenlivé veličiny, ktoré majú v určitom okamžiku nulovú hodnotu a v inom okamžiku nabývajú súčasne svoju maximálnu hodnotu, aj čo do znamienka, sú vo fáze, obr.3.6.

3.2 STREDNÁ A EFEKTÍVNA HODNOTA HARMONICKÉHO PRÚDU

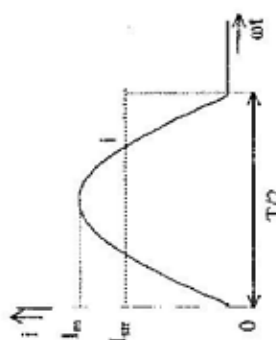
Stredná hodnota striedavého prúdu je určená ako matematická stredná hodnota striedavej funkcie za pol periódy.

$$I_{sr} = \frac{2}{T} \int_0^T i dt \quad (3.2.1)$$

Doba pol periódy bola zvolená preto, lebo za celú periódu je stredná hodnota striedavého priebehu rovná nule. (Plochy nad a pod osou času sú rovnako veľké.)

Pre harmonický priebeh prúdu

$$I_{sr} = \frac{2}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m \quad (3.2.2)$$



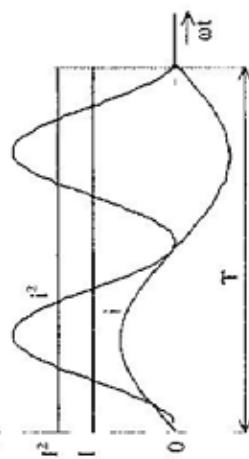
obr.3.7

Grafické znázornenie strednej hodnoty je na obr.3.7. Podobne platí vzťah pre strednú hodnotu napätia

$$U_{sr} = \frac{2}{T} \int_0^T U_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} U_m \quad (3.2.3)$$

Mnoho ukazov, ako napr. elektrodynamické sily vodičov, ktorými preteká striedavý prúd, alebo teplo vyvinuté vo vodiči pri prechode striedavého prúdu, sú úmerné druhej mocnine okamžitého prúdu. K posúdeniu účinkov striedavého prúdu sa zaviedla stredná kvadratická hodnota prúdu za jednu periódu, nazývame ju *efektívna hodnota striedavého prúdu*.

Efektívna hodnota striedavého prúdu sa rovná takému jednosmernému prúdu, ktorý za tú istú dobu vyvinul rovnaké množstvo tepla ako striedavý prúd, pri prechode rovnakým odporom. K takémuto slovnému vyjadreniu efektívnej hodnoty napíšeme matematické vyjadrenie dané vzťahom (3.2.4).



obr.3.8

$$R I^2 T = \int_0^T R i^2 dt \quad (3.2.4)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (3.2.5)$$

Dosadením do výrazu (3.2.4) za okamžitý prúd z (3.1.6) a vyriešením integrálu dostaneme

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{i_m^2}{2} \quad \text{a potom}$$

$$I = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \quad (3.2.6)$$

Podobne pre efektívnu hodnotu harmonicky sa meniaceho napätia platí

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (3.2.7)$$

Grafické znázornenie efektívnej hodnoty prúdu je na obr.3.8. Efektívne hodnoty budeme písať veľkými tlačenými písmenami.

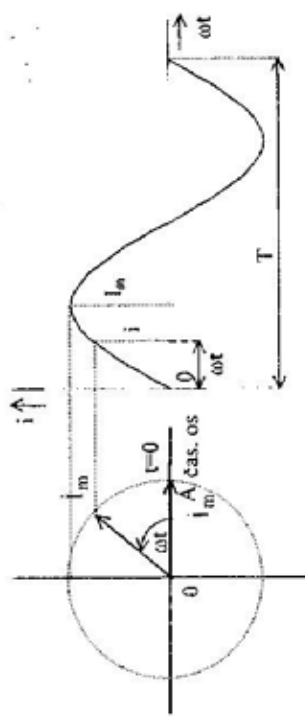
3.3 KOMPLEXNÉ ČASOVÉ VEKTORY

Matematické operácie s harmonickými priebehmi sú pomerne pracné. Ak majú harmonické priebehy rovnakú frekvenciu, zavedním tzv. *komplexných časových vektorov (rotujúcich fázorov)* riešenie obvodov je jednoduchšie a prehládnejšie.

Zvoľme časovú os pre čas $t = 0$, ako horizontálnu polpriamku s počiatkom v 0, obr.3.10. Zvoľme na časovej osi bod A . Vzdialenosť OA , sprievodič, odpovedá amplitude veličiny harmonického priebehu, napr. prúdu a je orientovaný od počiatku 0 k A . Ak sa bude sprievodič otáčať v kladnom zmysle (proti smeru hodinových ručičiek) uhlovou rýchlosťou ωt , bod A sa bude pohybovať po kružnici. Priemet sprievodiča OA do osi

kolmej na časovú os, v každom okamžiku dáva okamžitú hodnotu veličiny, obr.3.10.

$$i = i_m \sin \omega t$$



obr.3.10

Takto zavedené časové vektory nie sú vektory pre fyzikálne veličiny, ako napr. sila. Nemôžeme teda s nimi robiť všetky matematické úkony ako s fyzikálnymi vektormi. Tieto časové vektory zakreslíme do komplexnej roviny, obr.3.11.

Kružnicu v stredovom tvare, ktorú vytvárajú koncové body komplexného časového vektora, môžeme vyjadriť v komplexnej rovine rovnicou

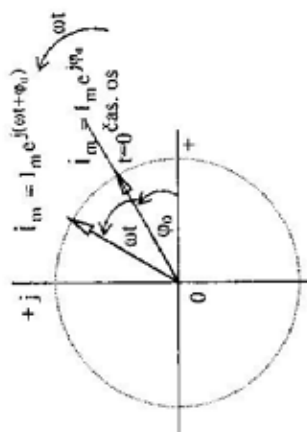
$$i_m = i_m e^{j\phi} \quad (3.3.1)$$

kde

i_m je polomer kružnice
a $s = \phi_0 + \omega t$

pričom

ϕ_0 a ω sú reálne čísla, t je parameter, v našom prípade – čas. Polom môžeme napísať



obr.3.11

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega t} = \dot{I} \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad (3.3.2)$$

Komplexné veličiny budeme označovať bodkou nad písmenom, napr. $\dot{I}$, komplexne združené veličiny (konjugované hodnoty) križikom nad písmenom, $\dot{I}^*$. Poznamenávame, že sú aj iné označenia.

Veličinu $\dot{I}$ nazývame **komplexný vektor (fázor)** prúdu, veličinu $\dot{I}_m$ menujeme **komplexný časový vektor (rotujúci fázor)** prúdu.

Komplexný časový vektor vyjadruje časove sa meniacu harmonickú veličinu

$$\dot{I}_m = I_m [\cos(\omega t + \varphi_0) + j \sin(\omega t + \varphi_0)] \quad (3.3.3)$$

Keď napíšeme, že okamžitý prúd sa rovná

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3.3.4)$$

je to imaginárna časť komplexného časového vektora vyjadrená vzťahom (3.3.3).

Pri riešení elektrických obvodov môžeme namiesto okamžitých veličín používať časové vektory týchto veličín. Ak priradíme vstupnej harmonicky sa meniacej veličine komplexný časový vektor a okamžitá veličina bola imaginárnou časťou komplexného časového vektora, po vyriešení obvodu zoberieme, ako výsledok, imaginárnu časť z komplexného časového vektora hľadanej veličiny. Ak vstupná veličina bola reálnou časťou komplexného časového vektora vstupnej veličiny, z výsledku riešenia zoberieme reálnu časť hľadanej časového vektora.

Pretože v ďalšom budeme pre riešenie elektrických obvodov napájaných harmonicky sa meniacimi veličinami používať komplexné časové vektory (rotujúce fázory), nebudú to fyzikálne vektory, kvôli stručnosti pod názvom časový vektor budeme mať na mysli komplexný časový vektor (rotujúci fázor), resp. pod názvom vektor (fázor) budeme mať na mysli komplexný vektor.

Komplexné vektory sa pri výpočte často používajú, pretože zápis je pomocou nich jednoduchší. Komplexný vektor je zvyčajne vyjadrený efektívnou hodnotou veličiny a jej fázovým posunom, komplexný časový vektor je vyjadrený maximálnou hodnotou veličiny, jej fázovým posunom a časovou závislosťou.

Komplexný časový vektor prúdu, napísaný v goniometrickom vyjadrení, vzťah (3.3.3), môžeme vyjadriť v exponenciálnom tvare, vzťah (3.3.5)

$$\dot{I}_m = I_m e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \dot{I} \sqrt{2} e^{j\varphi_0} e^{j\omega t} \quad (3.3.5)$$

Komplexný vektor tohoto prúdu odhrdíme, keď výraz (3.3.5) vydáme $\sqrt{2} e^{j\omega t}$, potom

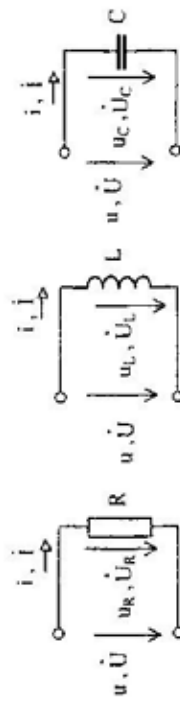
$$\dot{I} = \dot{I} e^{j\varphi_0} \quad (3.3.6)$$

Verzorový tvar komplexného vektora prúdu sa zapisuje nasledovne

$\dot{I} = I \angle \varphi_0$ (3.3.7)
Matematické operácie s časovými vektormi, resp. vektormi robíme podľa pravidiel pre komplexný počet. Základné zákony pre riešenie obvodov, (Ohmov zákon, Kirchhoffove zákony), môžeme zapísať aj pomocou komplexných časových vektorov, resp. pomocou komplexných vektorov.

3.4 IDEÁLNE PASÍVNE PRVKY V SIETI STRIEDAVÉHO PRÚDU

S popisom ideálnych prvkov vyskytujúcich sa v elektrických obvodoch sme sa stretli v predchádzajúcej časti. Boli to *odpor*, *induktivnosť*, *kapacita*. Schématické značky a voľba kladných zmyslov napätí a prúdov, z hľadiska spotrebiteľskej sústavy, sú znázornené na obr.3.12.



obr.3.12

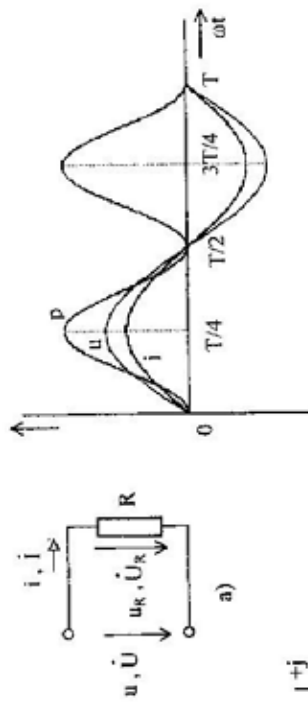
Rovnakú orientáciu, ako je orientácia komplexných vektorov, by sme mohli zakresliť pre komplexné časové vektory. Skutočná sieť (obvod) sa

vytvorí kombináciou uvedených ideálnych prvkov, ako sústreďených parametrov obvodu.

3.4.1 Ohmický odpor pripojený na harmonický sa meniace napätie

Ohmický odpor je pripojený na zdroj harmonického napätia, obr.3.13a. Nech v obvode tečie okamžitý prúd

$$i = I_m \sin \omega t \quad (3.4.1)$$



b)

obr.3.13

Pre úbytok napätia na odpore z Ohmovho zákona môžeme napísať

$$u_R = u = R I_m \sin \omega t \quad (3.4.2)$$

Zo vzťahu (3.4.2) vidieť, že prúd a napätie na odpore sú vo fáze, obr.3.13b.

Ak priradíme okamžitému prúdu, vzťah (3.4.1), komplexný časový vektor

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\omega t} = I_m (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (3.4.3)$$

jeho imaginárna časť je okamžitý prúd. Komplexný vektor prúdu je

$$\dot{I} = I$$

$$(3.4.4)$$

Napišme Ohmov zákon pre daný obvod pomocou komplexných vektorov

$$\dot{U}_R = \dot{U} = RI = RI \quad (3.4.5)$$

Komplexný časový vektor dostaneme, keď výraz (3.4.5) vynásobíme $\sqrt{2}e^{j\omega t}$, potom

$$\dot{U}_{mR} = \dot{U}_m = RI\sqrt{2}e^{j\omega t} = RI_m (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (3.4.6)$$

Okamžité napätie na odpore, čo je vlastne okamžité napájacie napätie, je imaginárna časť výrazu (3.4.6), pretože vstupná veličina, v našom prípade okamžitý prúd, je imaginárnou časťou komplexného časového vektora vstupnej veličiny, v našom prípade komplexného časového vektora prúdu. Teda

$$u_R = u = \text{Im}(\dot{U}_{mR}) = RI_m \sin \omega t \quad (3.4.7)$$

Výrazy (3.4.2) a (3.4.7) sú zhodné. Vektorový (fázorový) diagram vektorov napätia a prúdu je na obr.3.13c.

Na obr.3.13b je zakreslený aj priebeh okamžitého výkonu v závislosti od času $p = u \cdot i$. Hoci s výkonom sa budeme zaoberať neskôr, uviedli sme jeho priebeh, aby sme si všimli, že kmitá dvojnásobnou frekvenciou, nemôžeme ho zakresľovať do vektorového diagramu napätia a prúdu a v oboch polperiódach má kladnú hodnotu, teda z hľadiska spotrebitel'skej sústavy, je výkon zo siete odoberaný.

3.4.2 Indukčnosť pripojená na harmonický sa meniace napätie

Schéma zapojenia obvodu je na obr.3.14a. Predpokladáme, že indukčnosťou tečie okamžitý prúd

$$i = I_m \sin \omega t, \text{ a vytvorí napätie}$$

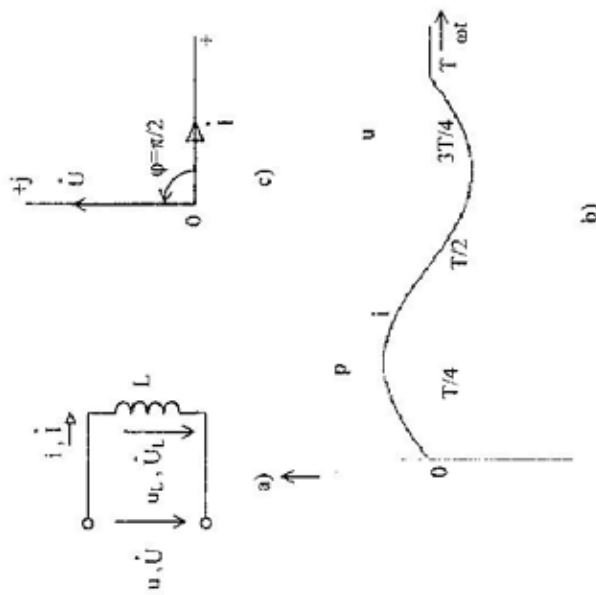
$$u_L = u = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = X_L I_m \cos \omega t \quad (3.4.8)$$

kde

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad (3.4.9)$$

je *reaktancia indukčného charakteru (induktívna reaktancia, indukancia)*. Jednotkou reaktancie je 1 Ohm [Ω]

$$[X_L] = [\omega L] = s^{-1} Vs A^{-1} = \Omega$$



obr.3.14

Zo vzťahu (3.4.8) vidieť, že časový posun napätia na indukčnosti je + 90 ° voči prúdu. Časový priebeh prúdu a napätia je na obr.3.14b.

Ak priradíme okamžitý prúdu, ktorý tečie indukčnosťou komplexný časový vektor

$\dot{I}_m = I_m e^{j\omega t}$, časový vektor napätia na indukčnosti je

$$\begin{aligned} \dot{U}_L &= \dot{U} = L \frac{d}{dt} (I_m e^{j\omega t}) = j\omega L I_m e^{j\omega t} = \\ &= \omega L I_m (j \cos \omega t - \sin \omega t) \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Okamžité napätie na indukčnosti je imaginárna časť komplexného časového vektora

$$u_L = u = \omega L I_m \cos \omega t \quad (3.4.11)$$

Výrazy (3.4.8) a (3.4.11) sú zhodné.

Komplexný vektor napätia na indukčnosti dostaneme, keď výraz (3.4.10) po delíme $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ potom

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I} = j\omega L I = \omega L I e^{j90^\circ} \quad (3.4.11)$$

$$j\omega L = jX_L \quad (3.4.12)$$

je *komplexná reaktancia indukčného charakteru*

Z výrazu (3.4.1) vidieť, že vektor napätia na indukčnosti je voči vektoru prúdu pootočený v kladnom zmysle o 90 °. Vektorový diagram prúdu a napätia na indukčnosti je na obr.3.14c.

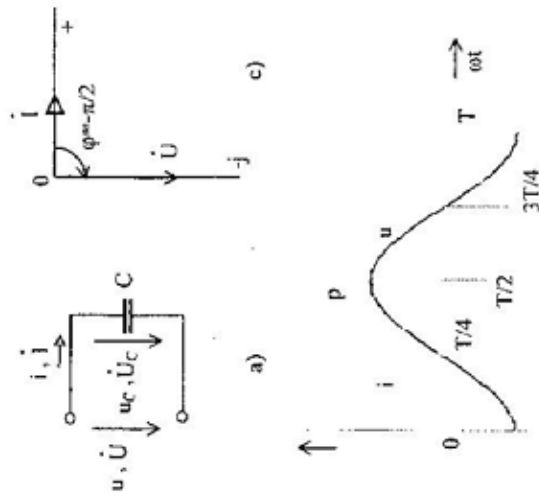
Na obr.3.14b je zakreslený aj časový priebeh okamžitého výkonu

$$\begin{aligned} p &= u i = U_m \cos \omega t I_m \sin \omega t = U_m I_m \frac{1}{2} \sin 2\omega t = \\ &= U I \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Zo vzťahu (3.4.13) a z časovej závislosti výkonu vidieť, že okamžitý výkon kmitá dvojnásobnou frekvenciou. V intervaloch $<0^\circ, 90^\circ>$, $<180^\circ, 270^\circ>$ je hodnota výkonu kladná, prvok zo siete odberá výkon. V týchto intervaloch sa vytvára magnetické pole. V intervaloch $<90^\circ, 180^\circ>$, $<270^\circ, 360^\circ>$ je výkon záporný, do siete je dodávaný z energie magnetického poľa indukčnosti. Keďže plocha nad a pod časovou osou sú v ideálnom prípade rovnaké, výsledný výkon za dobu periódy je nulový. Stredná hodnota výrazu (3.4.13) je nulová.

3.4.3 Kapacita pripojená na harmonický sa meniace napätie

Podobne, ako v predchádzajúcich prípadoch, uvažujeme na sieť s harmonickým napätím pripojený ideálny kondenzátor – kapacitu, obr.3.15a.



b)

obr.3.15

Okamžitý prúd v obvode nech je

$$i = I_m \sin \omega t$$

potom napätie na kapacite je

$$u_C = u = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = -X_C I_m \cos \omega t \quad (3.4.14)$$

kde

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (3.4.15)$$

je *reaktancia kapacitného charakteru (kapacitná reaktancia, kapacitancia)*. Jej jednotkou je 1 Ohm [Ω].

Zo vzťahu (3.4.14) a časového priebehu na obr.3.15b vidieť, že napätie na kapacite je posunuté voči prúdu o -90° .

Zobrazenie vektorov prúdu a napätia na kapacite je na obr.3.15c. Ak je komplexný časový vektor prúdu

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\omega t}, \text{ potom časový komplexný vektor napätia na kapacite je}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{mC} = \dot{U}_m &= \frac{1}{C} \int I_m e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega C} I_m e^{j\omega t} = \\ &= -jX_C \dot{I}_m = X_C I_m (-j \cos \omega t + \sin \omega t) \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

$$-jX_C = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} \quad (3.4.17)$$

je *komplexná reaktancia kapacitného charakteru*

Okamžité napätie na kapacite

$$u_C = u = \operatorname{Im}(\dot{U}_{mC}) = -X_C I_m \cos \omega t \quad (3.4.18)$$

Výrazy (3.4.14) a (3.4.18) sú zhodné.

Komplexný vektor napätia na kapacite dostaneme z výrazu (3.4.16) tým, že ho poodelíme $\sqrt{2}e^{j\omega t}$, potom

$$\dot{U}_C = -jX_C \dot{I} = -jX_C I = X_C I e^{-j90^\circ} \quad (3.4.19)$$

Z výrazu vidieť, že komplexný vektor napätia na kapacite je o -90° posunutý voči vektoru prúdu, obr.3.15c.

Na obr.3.15b je tiež znázornená časová závislosť okamžitého výkonu

$$p = ui = -U_m I_m \cos \omega t \sin \omega t = -U I \sin 2\omega t$$

Okamžitý výkon kmitá dvojnásobnou frekvenciou. Výsledný (stredný) výkon za dobu jednej periódy je nulový. Odoberanie energie zo siete v intervaloch $\langle 90^\circ, 180^\circ \rangle$, $\langle 270^\circ, 360^\circ \rangle$ a dodávanie energie do siete v intervaloch $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$, $\langle 180^\circ, 270^\circ \rangle$ je dané tvorbou elektrického poľa v kapacite a odovzdávaním energie elektrického poľa z kapacity do siete.

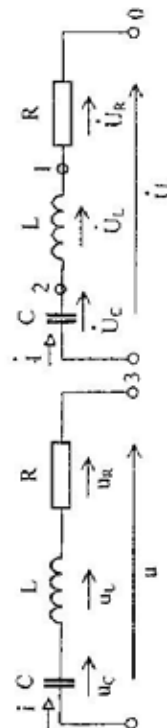
3.5 SÉRIOVÉ ZAPOJENIE PASÍVNYCH PRVKOV

Pri sériovom zapojení pasívnych prvkov, budeme mať na mysli ideálne prvky R , L , C . Napätie, na ktoré pripojíme prvky, je harmonické so známou maximálnou hodnotou, počiatočnou fázou a frekvenciou.

O priebehoch okamžitého prúdu, napätia a výkonu na jednotlivých prvkoch sme hovorili v predchádzajúcej stati. Pri zapojení viacerých prvkov v sérii sa napätia na jednotlivých prvkoch vektorovo spočítajú. Kreslenie harmonických priebehov je nepohodlné, preto sme zaviedli komplexné časové vektory, takže v nasledujúcich častiach budeme veličiny zobrazovať a počítať v komplexnom vyjadrení. Po získaní výsledku sa vrátíme k vyjadreniu veličín okamžitými priebehmi.

Sériový R , L , C , obvod, obr.3.16, je pripojený na zdroj harmonického meniaceho napätia

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$



obr.3.16

obr.3.17

Pri známych prvkoch obvodu potrebujeme určiť okamžitý prúd i tečúci v obvode.

Zo známeho chovania sa jednotlivých prvkov v sériovom obvode, môžeme pre zapojenie na obr.3.17 z 2. K. z. v komplexnom vyjadrení napísať

$$\sum \dot{U} = 0 \quad (3.5.1)$$

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = (R + jX_L - jX_C)\dot{I} = \dot{Z}\dot{I} \quad (3.5.2)$$

Výraz

$$\dot{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX = Ze^{j\varphi} \quad (3.5.3)$$

nazývame *impedancia (zdánlivý odpor)*. Jednotkou impedance je 1Ω .

Modul impedance je

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (3.5.4)$$

Fázový posun impedance môžeme určiť napríklad z tangensu uhla φ , obr.3.18b, čo je pomer imaginárnej zložky impedance k reálnej zložke.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im}(\dot{Z})}{\operatorname{Re}(\dot{Z})} = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (3.5.5)$$

Vektor prúdu určíme z Ohmovho zákona v komplexnom vyjadrení z rovnice (3.5.2)

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} \quad (3.5.6)$$

Pre prúd môžeme tiež napísať

$$\dot{I} = \dot{Y}\dot{U} \quad (3.5.7)$$

kde $\dot{Y}$ sa nazýva *admitancia*. Ak predpokladáme, tak ako vo vzťahu (3.5.3), že $X_L > X_C$, môžeme napísať

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} \quad (3.5.8)$$

Jednotkou admitancie je 1 Siemens [S].

Komplexný časový vektor prúdu je

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U} \sqrt{2} e^{j\omega t}}{Z} = \frac{U e^{j\omega t} \sqrt{2} e^{j\omega t}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{U_m e^{j(\omega t + \varphi_u - \varphi)}}{Z} \quad (3.5.9)$$

$$= \frac{U_m}{Z} [\cos(\omega t + \varphi_u - \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi)]$$

Okamžitý prúd bude reálnou časťou komplexného časového vektora prúdu, pretože vstupná veličina, v našom prípade okamžité napätie, je reálnou časťou komplexného časového vektora napätia. Teda

$$i = \operatorname{Re}(\dot{I}_m) = \frac{U_m}{Z} \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi) = I_m \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi) \quad (3.5.10)$$

Pri kreslení vektorového diagramu napätí a prúdu môžeme postupovať dvoma spôsobmi.

Označme v schéme na obr.3.17 body spojenia jednotlivých prvkov (vnútorné uzly) 0, 1, 2, 3. Komplexné vektory prúdu a napätia z hľadiska spotrebiteľského systému, na pasívnych prvkoch majú rovnakú orientáciu. Zvoľme prúd v schéme od uzla 3 k uzlu 0. Na pasívnych prvkoch sa vytvoria úbytky napätia

$$\dot{U}_C = \dot{U}_{32} = -jX_C \dot{I} \quad (3.5.10)$$

$$\dot{U}_L = \dot{U}_{21} = jX_L \dot{I} \quad (3.5.11)$$

$$\dot{U}_R = \dot{U}_{10} = R \dot{I} \quad (3.5.12)$$

Priradíme uzlom 0 až 3 v schéme potenciály $\dot{V}_0, \dot{V}_1, \dot{V}_2, \dot{V}_3$. Zvoľme nech $\dot{V}_0 = 0$. Napätie $\dot{U}_{10}$ je rozdiel potenciálov $\dot{V}_1 - \dot{V}_0$, takže môžeme napísať

$$\dot{U}_{10} = \dot{V}_1 - \dot{V}_0 = \dot{V}_1 = R \dot{I} \quad (3.5.13)$$

čo je potenciál uzla 1. Pre potenciály ďalších uzlov platí obdobne

$$\dot{U}_{21} = \dot{V}_2 - \dot{V}_1 \text{ a odtiaľ}$$

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \dot{U}_{21} = R \dot{I} + jX_L \dot{I} \quad (3.5.14)$$

teda potenciál uzla 2 dostaneme, keď k potenciálu uzla 1 pripočítame napätie $jX_L \dot{I}$.

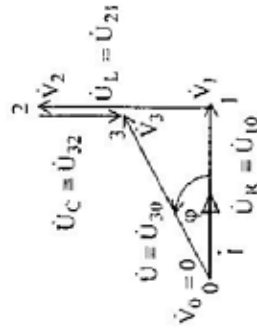
$$\dot{U}_{32} = \dot{V}_3 - \dot{V}_2$$

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_2 + \dot{U}_{32} = R \dot{I} + jX_L \dot{I} - jX_C \dot{I} \quad (3.5.15)$$

Celkové napätie je

$$\dot{U}_{30} = \dot{V}_3 - \dot{V}_0 = R \dot{I} + jX_L \dot{I} - jX_C \dot{I} \quad (3.5.16)$$

Z rovníc (3.5.13) až (3.5.16) nakreslíme vektorový diagram, obr.3.18a.



obr.3.18a

diagrame od bodu 0 k bodu 1, udáva napätie medzi uzlom 1 a 0 v schéme. Môžeme preto tejto orientovanej úsečke (komplexnému vektoru napätia) pripísať, že vyjadruje napätie $\dot{U}_{10}$. Potenciál bodu 2 nakreslíme tak, že k potenciálu bodu 1 pripočítame napätie $jX_L \dot{I}$ a bude voči prúdu pootočený o $0 + 90^\circ$. Orientovaná úsečka vo vektorovom diagrame od bodu 1 k bodu 2, vyjadruje napätie $\dot{U}_{21}$ v schéme. Obdobne určíme potenciál bodu 3 a napätie $\dot{U}_{32}$.

Rovnica (3.5.16) udáva celkové napätie a podľa predchádzajúceho, orientovaná úsečka vo vektorovom diagrame od bodu 0 k bodu 3 pred-

stavuje napätie $\dot{U}_{30}$ v schéme. Fázový posun je daný od vektora prúdu k vektoru napätia.

Prírodné, ak bol vektorový diagram konštruovaný v určitej zvolenej mierke, môžeme z neho odčítať aj veľkosti napätí medzi ľubovoľnými uzlami v schéme, prípadne zistiť fázové pomery jednotlivých napätí a prúdov.

Takto konštruovanému diagramu komplexných vektorov budeme hovoriť *diagram prvého druhu*, hovorí sa mu tiež *topografický vektorový diagram prvého druhu*. Tento spôsob kreslenia diagramu budeme v ďalšom používať častejšie. S výhodou ho použijeme pri kapitolách o trojfázových prúdoch.

Na obr.3.18b je znázornený impedančný trojuholník. Ten zostrojíme z vektorového diagramu, keď úsečky odpovedajúce jednotlivým napätiam, vydáme prúdom. Fázové pomery sa tým nezmenia.

Druhý spôsob kreslenia diagramu komplexných vektorov je ten, že za nulový potenciál volíme bod 3. Z úvah pre určenie potenciálov ďalších bodov, dospejeme k tomu, že ďalšie body majú záporný potenciál, čo je nie bežné, pracovať so zápornými potenciálmi. Pravda, komplexné vektory napätí v schéme a v diagrame majú zhodnú orientáciu. Diagram kreslený týmto spôsobom je na obr.3.18c.

$$\dot{V}_3 - \dot{V}_2 = \dot{U}_C = jX_C \dot{I}$$

keďže $\dot{V}_3 = 0$, potom

$$-\dot{V}_2 = \dot{U}_{32} = -jX_C \dot{I} \quad (3.5.17)$$

Potenciály v ďalších bodoch určíme

$$\dot{V}_2 - \dot{V}_1 = \dot{U}_{21} = jX_L \dot{I}$$

$$-\dot{V}_1 = -\dot{V}_2 + jX_L \dot{I} = -jX_C \dot{I} + jX_L \dot{I} \quad (3.5.18)$$

$$\dot{V}_1 - \dot{V}_0 = \dot{U}_{10} = R \dot{I}$$

$$-\dot{V}_0 = -\dot{V}_1 + \dot{U}_{10} = -jX_C \dot{I} + jX_L \dot{I} + R \dot{I} \quad (3.5.19)$$

Výsledné napätie medzi bodmi 3 a 0 je

$$\dot{U}_{30} = \dot{V}_3 - \dot{V}_0 = -jX_C \dot{I} + jX_L \dot{I} + R \dot{I} \quad (3.5.20)$$

Kresliť diagram začneme z bodu 3 a zvolíme zmysel (orientáciu) prúdu (komplexného vektora prúdu). Diagram kreslíme v zmysle zvoleného vektora prúdu v schéme. Potenciál bodu 2, zakreslíme podľa

(3.5.17), pootočený o -90° voči prúdu. Orientovaná úsečka v diagrame od bodu 3 k bodu 2, odpovedá komplexnému vektoru napätia $\dot{U}_{32}$ zakreslenému v schéme na obr.3.17. Podobne nakreslíme ďalšie napätia. Tomuto diagramu budeme hovoriť *vektorový diagram druhého druhu*.

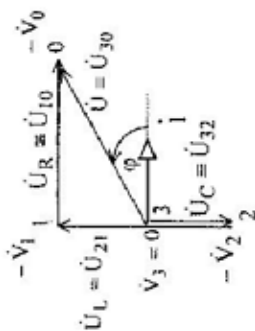
Je samozrejmé, že veľkosti

napätí a výsledný fázový posun napätia voči prúdu sú rovnaké či kreslíme vektorový (fázový) diagram prvým, alebo druhým spôsobom. Rozdiel je len v tom, že vo vektorovom diagrame prvého druhu orientovaná úsečka napr. od bodu 0 k bodu 1, odpovedá vektoru napätia v schéme zakreslenému od bodu 1 k bodu 0; $\dot{U}_{10}$. Vo vektorovom diagrame druhého druhu, orientovaná úsečka napr. od bodu 1 k bodu 0, odpovedá vektoru napätia v schéme od bodu 1 k bodu 0; $\dot{U}_{10}$.

Hoci sa zdá, na prvý pohľad kreslenie vektorového diagramu prvého druhu komplikovanejšie, budeme ho používať, jeho výhody sme už uviedli. Prírodné, že nebudeme odvodzovať potenciály jednotlivých bodov. Teraz sme to urobili len pre názornosť kreslenia.

3.6 PARALELNÉ ZAPOJENIE PASÍVNYCH PRVKOV

Pre odvodenie pomerov paralelne zapojených prvkov R, L, C a pripojených na harmonické napätie, budeme vychádzať zo schémy na obr.3.19.



obr.3.18c

Z I. K. z. napíšeme v komplexnej forme pre vektor prúdu

$$\sum i = 0 \quad (3.6.1)$$

$$-i + i_R + i_L + i_C = 0$$

$$i = i_R + i_L + i_C \quad (3.6.2)$$

Z Ohmovho zákona vektory prúdov, pre jednotlivé vetvy sú

$$i_R = \frac{\dot{U}}{R} \quad (3.6.3)$$

$$i_L = \frac{\dot{U}}{jX_L} = -j \frac{\dot{U}}{\omega L} \quad (3.6.4)$$

$$i_C = \frac{\dot{U}}{-jX_C} = j\omega C \dot{U} \quad (3.6.5)$$

Dosadením za prúdy do výrazu (3.6.2) dostaneme

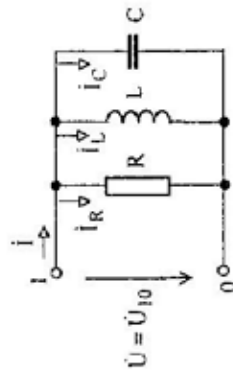
$$i = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) \dot{U} = \dot{Y} \dot{U} \quad (3.6.6)$$

Výraz

$$\dot{Y} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) \approx G - jB_L + jB_C \quad (3.6.7)$$

sa nazýva, ako sme už uviedli v predchádzajúcom, *admittancia*.

$$G = \frac{1}{R}, \text{ nazývame vodivosť (konduktancia)}$$



obr.3.19

$$B_L = \frac{1}{\omega L}, \text{ je induktívna vodivosť (susceptancia)}$$

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C, \text{ je kapacitná vodivosť (susceptancia)}$$

Potom pre vektor prúdu môžeme napísať

$$i = (G - jB_L + jB_C) \dot{U} = (G - jB) \dot{U} = \dot{Y} \dot{U} \quad (3.6.8)$$

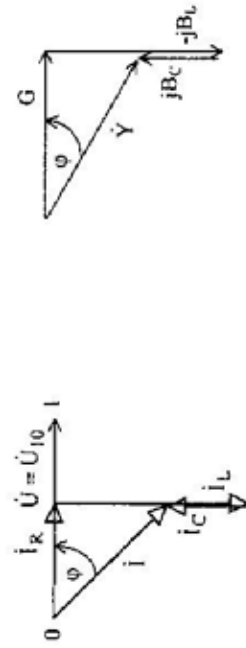
kde predpokladáme, že $B_L > B_C$

Modul admittance je

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} \quad (3.6.8)$$

a fázový posun môžeme určiť z tangensu

$$\tan \varphi = \frac{B_L - B_C}{G} \quad (3.6.9)$$



obr.3.20

obr.3.21

Pri kreslení vektorového diagramu prvého druhu pre paralelné zapojenie, obr.3.20, postupujeme nasledovne.

Zvolíme uhol s nulovým potenciálom v schéme zapojenia a priradíme mu bod vo vektorovom diagrame, v našom prípade je bod 0, $V_0 = 0$.

Zvolíme vektor prúdu v fúbovofnej vetve, napr. $\vec{i}_g$. Tomuto vektoru prúdu priradíme vektor vo vektorovom diagrame. Potenciál bodu 1 je nie pootočený voči prúdu $\vec{i}_R$.

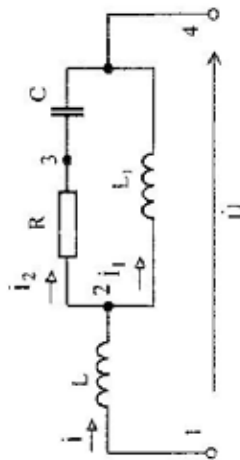
$$\vec{V}_1 - \vec{V}_0 = \vec{U}_{10} = R\vec{i} = \vec{V}_1$$

Rozdiel potenciálov je napätie na paralelne zapojených prvkoch. Takto získaný vektor napätia je voči vektoru prúdu v ďalšej vetve, napr. vo vetve s indukčnosťou voči prúdu $\vec{i}_L$ pootočený o $+90^\circ$. Opačne bude orientovaný vektor prúdu $\vec{i}_C$ na kapacitnej záťaži. Vektorovým súčtom jednotlivých vektorov prúdov dostane vektor výsledného prúdu $\vec{i}$.

3.7 SÉRIOPARALELNÉ ZAPOJENIE PASÍVNYCH PRVKOV

Pri sérioparalelnom zapojení pasívnych prvkov pripojených na zdroj harmonický sa meniaceho napätia, tak ako v predchádzajúcich častiach, napíšeme základné rovnice z 1. a 2. K. z. v komplexnom vyjadrení a pri známych parametroch obvodu a napájacieho napätia určíme prúd tečúci obvodom, alebo napätia na jednotlivých prvkoch obvodu, resp. fázové posuny medzi jednotlivými veličinami.

V tejto časti chceme poukázať na kreslenie topologického vektorového diagramu 1. druhu pre zložitejší elektrický obvod, obr.3.22.



obr.3.22

Diagram budeme kresliť podľa už skor prebraných zásad. V schéme za uzel s nulovým potenciálom je výhodné zvoliť uzel paralelných vetiev, uzel 4. Od neho proti zvolenému zmyslu vektora prúdu budeme určovať potenciály ďalších uzlov. Vo vektorovom diagrame, obr.3.23, tomuto uzlu priradíme bod 4.

Zvoľme ľubovoľný smer vektora prúdu v niektorej paralelnej vetve, napr. $\vec{i}_2$. Napätie na kapacite voči nemu je pootočené o -90° , čo zodpovedá bodu 3 v diagrame a potenciál uzla 3 v schéme je

$$\vec{V}_3 - \vec{V}_4 = \vec{U}_{34} = -jX_C \vec{i}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}_3 = -jX_C \vec{i}_2 \quad (3.7.1)$$

K potenciálu uzla 3 pripočítame vektor napätia na odpore R, ktorý je vo fáze s vektorom prúdu $\vec{i}_2$ a dostaneme potenciál uzla 2.

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_3 + \vec{U}_{23} = \vec{V}_3 + R\vec{i}_2 \quad (3.7.2)$$

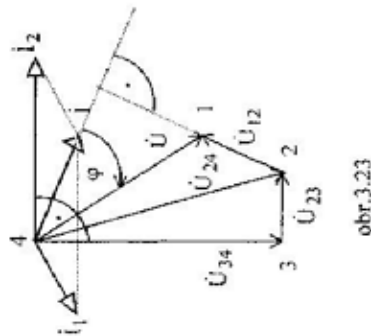
Rozdiel potenciálov

$$\vec{V}_2 - \vec{V}_4 = \vec{U}_{24} = (R - jX_C)\vec{i}_2 \quad (3.7.3)$$

je vektor napätia na paralelnej časti obvodu. Vektor tohoto napätia je voči vektoru prúdu $\vec{i}_1$ v druhej vetve paralelnej kombinácie obvodu, pootočený o $+90^\circ$. Takže vektor prúdu $\vec{i}_1$ môžeme do vektorového diagramu zakresliť.

Súčet vektorov prúdov dáva vektor celkového prúdu

$$\vec{i} = \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \quad (3.7.4)$$



obr.3.23

Celkový prúd vytvorí napätie na indukčnosti L_1 , čo je napätie medzi uzlom 1 a uzlom 2 v schéme. Potom môžeme zistiť pozíciu bodu 1 vo vektorovom diagrame, že k potenciálu bodu 2 pripočítame vektor napätia na indukčnosti L_1 , ktorý vytvorí vektor celkového prúdu.

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{U}_{L2} = jX_{L2} \vec{I} \quad (3.7.5)$$

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 + jX_{L2} \vec{I} \quad (3.7.6)$$

Vektor výsledného napätia $\vec{U} = \vec{U}_{14}$ je v schéme medzi uzlom 1 a 4, vo vektorovom diagrame je orientovaný od bodu 4 k bodu 1. Výsledný fázový posun φ je orientovaný od vektora výsledného prúdu k vektoru výsledného napätia.

3.8 RIEŠENIE ZLOŽITEJŠÍCH OBVODOV PRIPOJENÝCH NA HARMONICKÝ SA MENIACE NAPÄTIE

Pre riešenie elektrických obvodov so zdrojmi harmonického sa meniaceho napätia a prúdu platia všetky metódy a princípy, ktoré sme prebrali v kapitole 2. Jednosmerné prúdy, len namiesto odporu uvažujeme komplexnú impedanciu, namiesto vodivosti uvažujeme komplexnú admitanciu, namiesto jednosmerného napäťového alebo prúdového zdroja budeme počítať s komplexným časovým vektorom napätia a prúdu. Tak isto platí náhrada $Y = D + jB$, ale s komplexnými impedanciami.

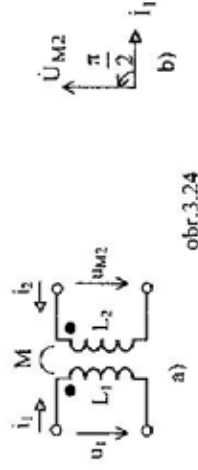
Pretože jednotlivé metódy a princípy riešenia obvodov už boli popísané, nebudeme sa s nimi na tomto mieste už zaoberať.

3.9 OBVODY SO VZÁJOMNÝMI INDUKČNOSŤAMI

Majme magneticky viazané dve ideálne cievky, obr.3.24a, ktorých koeficienty vlastných indukčností (ďalej vlastná indukčnosť) sú L_1 a L_2 , koeficient vzájomnej indukčnosti (ďalej vzájomná indukčnosť) je M .

Cievka s indukčnosťou L_1 je pripojená na harmonické napätie, prechádza ňou prúd $i_1 = I_{m1} \sin \omega t$, ktorý vytvorí v druhej cievke indukované napätie

$$u_{M2} = M \frac{di_1}{dt} = \omega M I_{m1} \cos \omega t = U_{M2m} \cos \omega t \quad (3.9.1)$$



obr.3.24

Indukované napätie v druhej cievke vyjadrené komplexnými časovými vektormi je

$$\begin{aligned} \vec{U}_{mM2} &= M \frac{d}{dt} (\vec{I}_{m1} e^{j\omega t}) = j\omega M \vec{I}_{m1} e^{j\omega t} = j\omega M \vec{I}_{m1} = \\ &= j\omega M I_{m1} \cos \omega t = \omega M I_{m1} \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

Vektor tohoto napätia je pootočený voči prúdu, ktorý ho vyvolal o 90° . Jeho grafické znázornenie komplexnými vektormi je na obr.3.24b. Okamžitý prúd – vstupná veličina, je imaginárna časť komplexného časového vektora, teda za okamžité napätie v druhej cievke zoberieme imaginárnu časť výrazu (3.9.2)

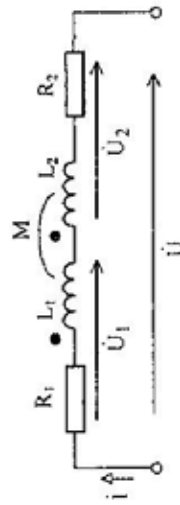
$$u_{M2} = \text{Im}(\vec{U}_{mM2}) = \omega M I_{m1} \cos \omega t \quad (3.9.3)$$

Výraz ωM je *vzájomná reaktancia*. Jednotka vzájomnej reaktancie je 1 Ohm [Ω].

3.9.1 Cievky zapojené do série

Cievku, ako bude uvedené v ďalšej časti, môžeme nahradiť odporom a indukčnosťou zapojenou do série. Takéto dve cievky sú zapojené do série tak, že začiatok vinutia druhej cievky je pripojený na koniec vinutia prvej cievky. Magnetické toky jednotlivých cievok sa spočítajú. Začiatky vinutí sú označené bodkou, obr.3.25. Ich vlastné indukčnosti sú L_1 a L_2 , odpory sú R_1 , R_2 . Okrem galvanickej väzby je medzi cievkami aj magnetická

vázba, je charakterizovaná koeficientom vzájomnej indukčnosti (vzájomná indukčnosť). Cievky sú pripojené na zdroj harmonického napätia.



obr.3.25

Kladné zmysly indukovaných napätí budeme predpokladať nasledovne. Ak preteká prúd v jednej cievke od začiatku vinutia ku koncu vinutia, v druhej cievke sa indukuje napätie orientované od začiatku vinutia ku koncu vinutia tejto cievky.

Obvod budeme riešiť pomocou komplexných vektorov. Napätie na prvej cievke je

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I} = R_1 \dot{I} + j\omega(L_1 + M) \dot{I} \quad (3.9.4)$$

Podobne napätie na druhej cievke je

$$\dot{U}_2 = R_2 \dot{I} + j\omega(L_2 + M) \dot{I} \quad (3.9.5)$$

Výsledná impedancia obvodu

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2}{\dot{I}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) \quad (3.9.6)$$

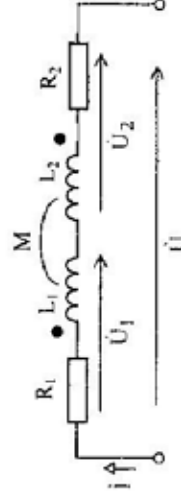
V prípade, že sú cievky sice zapojené do série, ale koniec vinutia prvej cievky je zapojený na koniec vinutia druhej cievky, teda sú zapojené proti sebe, obr.3.26, znamienko pri vzájomnej reaktancii je záporné. Potom napätie na prvej a druhej cievke je

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I} + j\omega(L_1 - M) \dot{I} \quad (3.9.7)$$

$$\dot{U}_2 = R_2 \dot{I} + j\omega(L_2 - M) \dot{I} \quad (3.9.8)$$

a impedancia obvodu je

$$\dot{Z} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) \quad (3.9.9)$$



obr.3.26

Predpokladali sme v oboch prípadoch, že cievky boli navinuté rovnakou orientáciou, napr. pravotočivo.

3.9.2 Paralelné zapojenie cievok

Cievky s impedanciami

$$\dot{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$$

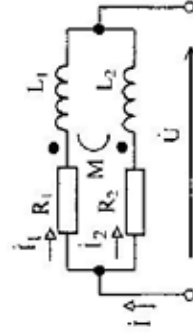
$$\dot{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$$

sú zapojené paralelne a sú pripojené na zdroj harmonického napätia, ktoré nahradíme komplexným vektorom napätia, obr.3.27. Okrem galvanickej väzby sú viazané aj magneticky a koeficient vzájomnej indukčnosti je M . Začiatky oboch cievok sú zapojené do jedného uzla. Vektor celkového prúdu v obvode je

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \quad (3.9.10)$$

Vektor napätia na prvej cievke

$$\dot{U} = (R_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{Z}_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \quad (3.9.11)$$



obr.3.27

Pre vektor napätia na druhej cievke môžeme napísať

$$\vec{U} = (R_2 + j\omega L_2)\vec{I}_2 + j\omega M\vec{I}_1 = \vec{Z}_2\vec{I}_2 + j\omega M\vec{I}_1 \quad (3.9.12)$$

Z rovnice (3.9.11) vypočítame prúd

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{U} - \vec{Z}_1\vec{I}_1}{j\omega M} \quad (3.9.13)$$

a dosadíme do rovnice (3.9.12), potom

$$\vec{U} = \frac{\vec{Z}_2\vec{U} - \vec{Z}_1\vec{Z}_2\vec{I}_1 - (\omega M)^2\vec{I}_1}{j\omega M} \quad \text{a odiaľ} \quad (3.9.14)$$

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{Z}_2 - j\omega M}{\vec{Z}_1\vec{Z}_2 + (\omega M)^2} \vec{U} \quad (3.9.15)$$

Podobne odvodíme vzťah pre vektor prúdu v druhej cievke

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{Z}_1 - j\omega M}{\vec{Z}_1\vec{Z}_2 + (\omega M)^2} \vec{U} \quad (3.9.16)$$

Dosadením (3.9.14) a (3.9.15) do (3.9.10) a po úprave, dostaneme výraz pre vektor celkového prúdu

$$\vec{I} = \frac{\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 - j2\omega M}{\vec{Z}_1\vec{Z}_2 + (\omega M)^2} \vec{U} \quad (3.9.17)$$

Výsledná impedancia obvodu je

$$\vec{Z} = \frac{\vec{U}}{\vec{I}} = \frac{\vec{Z}_1\vec{Z}_2 + (\omega M)^2}{\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 - j2\omega M}$$

Ak magnetická väzba nie je, $M = 0$, potom výsledná impedancia je

$$\vec{Z} = \frac{\vec{Z}_1\vec{Z}_2}{\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2}$$

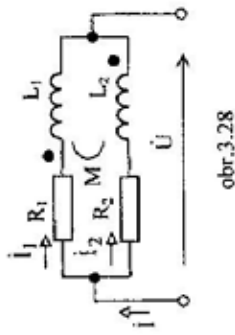
Výraz je zhodný pre paralelné zapojenie dvoch impedancií.

V prípade, že cievky budú zapojené tak, že začiatok vinutia jednej cievky je spojený do uzla s koncom vinutia druhej cievky, podľa schémy na obr.3.28, rovnice pre vektory napätia na cievkách sú

$$\vec{U} = \vec{Z}_1\vec{I}_1 - j\omega M\vec{I}_2$$

$$\vec{U} = \vec{Z}_2\vec{I}_2 - j\omega M\vec{I}_1$$

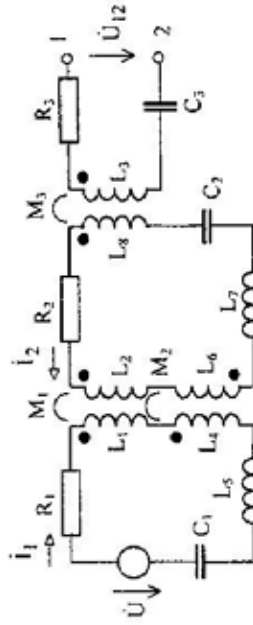
Výslednú impedanciu obvodu určíme podobne ako v predchádzajúcom prípade.



obr.3.28

3.9.3 Všeobecný obvod so vzájomnými indukčnosťami

V skôr uvedených príkladoch riešenia obvodov so vzájomnými indukčnosťami sme mali medzi indukčnosťami aj galvanickú aj magnetickú



obr.3.29

väzbu. Často sa stretávame s obvodmi, kde galvanická väzba medzi indukčnosťami nie je. Na konkrétnom príklade, obr.3.29 si ukážeme spôsob zápisu východiskových rovníc. Potrebujeme stanoviť prúdy v jednotlivých sekcách obvodu a napätie medzi svorkami 1 a 2.

Indukčnosti, ktoré majú vzájomnú väzbu, musia mať vyznačené začiatky vinutí, prípadne aj zmysel vinutia cievok, ak je predpoklad, že nie sú vinuté v tom istom zmysle. Obvod budeme riešiť pomocou komplexných vektorov. Východiskové rovnice pre obvod na obr.3.29 sú

$$[R_1 + j(X_{L1} + X_{L4} + X_{L5} - X_{C1})] \dot{I}_1 + j\omega(M_1 - M_2) \dot{I}_2 - \dot{U} = 0$$

$$j\omega(M_1 - M_2) \dot{I}_1 + [R_2 + j(X_{L2} + X_{L6} + X_{L7} + X_{L8} - X_{C2})] \dot{I}_2 = 0$$

$$j\omega M_3 \dot{I}_2 + \dot{U}_{12} = 0$$

Z prvých dvoch rovníc určíme požadované prúdy a z tretej rovnice určíme požadované napätie. Samozrejme, že v tretej sekcii je nulový prúd, pretože obvod nie je uzavretý.

3.10 VÝKON HARMONICKEHO PRÚDU A NAPÄTIA

O okamžitom výkone harmonického prúdu a napätia pri ich fázovom posune nulovým, alebo rovnajúcim sa $\pm 90^\circ$ sme už pojednávali pri jednotlivých ideálnych prvkoch.

Uvažujme, že okamžité napätie je voči okamžitému prúdu posunuté o uhol φ . Okamžité napätie je dané vzťahom

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{a prúd} \quad i = I_m \sin \omega t$$

Okamžitý výkon je

$$p = u i = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] \quad (3.10.1)$$

Časový priebeh okamžitého napätia, okamžitého prúdu a okamžitého výkonu je na obr.3.30. Strednú hodnotu výkonu za dobu jednej periódy dostaneme

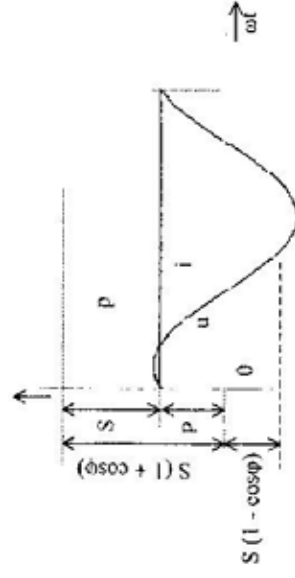
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi \quad [W; V \cdot A] \quad (3.10.2)$$

Tento výkon nazývame *činný (wattový)* a nie je závislý od času.

Súčinnu efektívnej hodnoty prúdu a efektívnej hodnoty napätia hovoríme *sdieľaný výkon*

$$S = UI \quad [VA; V \cdot A] \quad (3.10.3)$$

Tento výkon je dôležitý pri návrhu elektrických strojov (transformátorov, alternátorov).



obr.3.30

Dosadením vzťahu (3.10.3) do výrazu (3.10.2) pre činný výkon môžeme napísať

$$P = S \cos \varphi \quad \text{a z toho}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (3.10.4)$$

$\cos \varphi$ sa nazýva *účinník*.

Okrem už menovaných výkonov sa používa v striedavých prúdoch *jalový výkon*

$$Q = UI \sin \varphi \quad [Var; V \cdot A] \quad (3.10.5)$$

Ak je fázový posun $0 < \varphi < +90^\circ$, jalový výkon má znamienko kladné, výkon je zo siete odoberaný. Ak $0 > \varphi > -90^\circ$, jalový výkon je do siete dodávaný a znamienko má záporné.

Zo vzťahov (3.10.2), (3.10.3), (3.10.5) môžeme nakresliť *výkonový trojuholník*, obr.3.31.

Z výkonového trojuholníka platí

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (3.10.6)$$

Vo vzťahu (3.10.2) čast'



$$I \cos \varphi = I_w \quad (3.10.7)$$

sa menuje *činná (wattová) zložka prúdu*.

Podobne vo výraze (3.10.5)

$$I \sin \varphi = I_j \quad (3.10.8)$$

je *jalová zložka prúdu*.

Výkony môžeme vyjadriť aj pomocou komplexných vektorov napätia a prúdu. Nech komplexný vektor napätia je daný vzťahom

$$\dot{U} = U e^{j\varphi_u}, \quad \text{kde } \varphi_u \text{ je počiatková fáza napätia. Komplexný vektor prúdu}$$

$$\dot{I} = I e^{j\varphi_i}, \quad \text{kde } \varphi_i \text{ je počiatková fáza prúdu. Konjugovaná hodnota vektora prúdu je}$$

$$\dot{I}^* = I e^{-j\varphi_i}$$

Súčin komplexného vektora napätia a konjugovaného komplexného vektora prúdu je *komplexný vektor zdánlivého výkonu*.

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^* = U I e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = U I e^{j\varphi} = U I \cos \varphi + j U I \sin \varphi = P + jQ \quad (3.10.9)$$

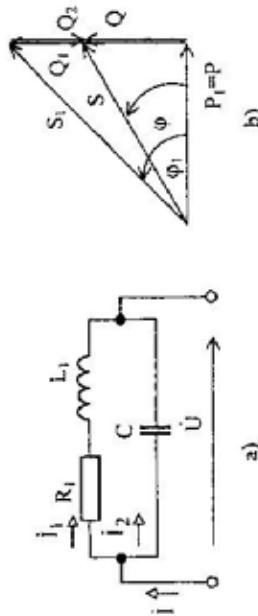
Zo vzťahu (3.10.9) vidieť, že reálna časť komplexného vektora zdánlivého výkonu je činný (wattový) výkon a imaginárna časť je jalový výkon.

$$P = \operatorname{Re}(\dot{S}) = U I \cos \varphi \quad (3.10.10)$$

$$Q = \operatorname{Im}(\dot{S}) = U I \sin \varphi \quad (3.10.11)$$

3.10.1 Kompenzácia účinníka

Vzťahom (3.10.4) je zavedený účinník, jeho hodnota sa pohybuje v rozmedzí $<0, 1>$. Zo vzťahu (3.10.2) je zrejmé, že od účinníka závisí činný výkon. Pri ohmicko-induktívnom zaťažení môže účinník nadobúdať malé hodnoty (napr. nezaťažené indukčné motory) a je potrebné vykompenzovať účinník. Najčastejší prípad kompenzácie je, že sa paralelne k ohmicko-induktívnej záťaži pripojí kapacita, obr.3.32a.



obr.3.32

V schéme na obr.3.32a, predstavuje vetva s odporom R_1 a indukčnosťou L_1 záťaž s výkonom $P_1 = P$. Na obr.3.32b je nakreslený výkonový trojuholník pre záťaž s hodnotami P_1 , Q_1 , S_1 a fázovým posunom φ_1 . Potrebuje vykompenzovať účinník na hodnotu $\cos \varphi$. Z výkonového trojuholníka vyplýva

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{Q_1}{P} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} \quad \text{odčítaním týchto vzťahov dostaneme}$$

$$\frac{Q_1 - Q}{P} = \frac{Q_2}{P} = \operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{kde } Q_2 \text{ je jalový výkon kapacity } C. \text{ Potom}$$

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{X_C} &= \omega C U^2 = P(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi), \quad \text{odtiaľ} \\ C &= \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi) \end{aligned} \quad (3.10.12)$$

Z výrazu (3.10.12) môžeme určiť veľkosť kapacity potrebnej na zničenie fázového posunu z hodnoty φ_1 na hodnotu φ spotrebiča, ktorého

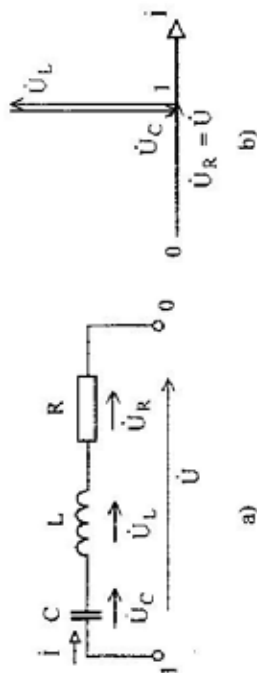
činný príkon je P , je pripojený na napätie o veľkosti U a kruhová frekvencia napätia je ω .

3.11 REZONANCIA

Stavu, keď celkové napätie a celkový prúd striedavého R , L , C obvodu sú vo fáze hovoríme *rezonancia*.

3.11.1 Sériová rezonancia

Prvky R , L , C sú zapojené do série a sú pripojené na harmonické napätie. Harmonicky sa meniace veličiny sme nahradili komplexnými vektormi, obr.3.33a.



obr.3.33

Impedancia a fázový posun sériového obvodu je

$$\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$$

Rezonancia sa dosiahne, keď $\varphi = 0$, t.j. *imaginárna časť impedancie* = 0.

$$\operatorname{Im}(\dot{Z}) = 0 \quad (3.11.1)$$

$$\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0 \quad (3.11.2)$$

Potom

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.11.3)$$

alebo

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3.11.4)$$

kde ω_r je *rezonančná kruhová frekvencia*, a f_r je *rezonančná frekvencia*. Výrazy (3.11.3) a (3.11.4) sa udávajú ako *Thomsonov vzorec*. Ako vidieť z uvedených vzťahov, rezonančný stav sa môže dosiahnuť vhodnou voľbou indukčnosti L , kapacity C , alebo frekvencie napájacieho napätia.

Vektorový diagram prúdu a napätí je na obr.3.33b. V rezonančnom obvode platí

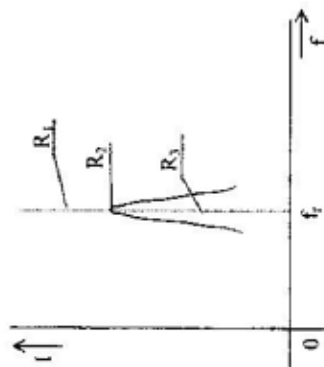
$$\dot{U}_L + \dot{U}_C = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\dot{i} = 0 \quad (3.11.5)$$

Takže celkové napätie obvodu sa rovná napätiu na odpore

$$\dot{U} = \dot{U}_R = R\dot{i} \quad (3.11.6)$$

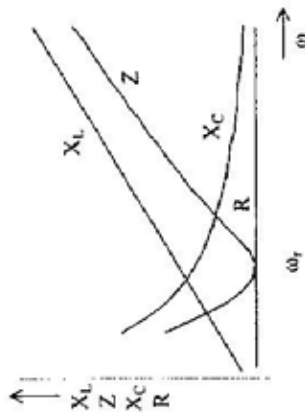
Potom prúd je obmedzený len hodnotou odporu pokiaľ je napájacie napätie konštantné, obr.3.34, kde $R_1 < R_2 < R_3$.

Napätie na reaktanciách môže dosiahnuť aj niekoľkonásobnú hodnotu celkového napätia. Sériovej rezonancii sa hovorí, že je to *rezonancia napájacia*. Teda z indukčnosti, alebo z kapacity by sa mohlo odoberať vyššie napätie ako je napájacie napätie.



obr.3.34

Charakter priebehov reaktancií, impedancie a odporu sériového obvodu v závislosti od kruhovej frekvencie je na obr.3.35



obr.3.35

Pri nižších frekvenciách ako je rezonančná frekvencia je charakter impedancie kapacitný, $X_C > X_L$, fázový posun je záporný. V rezonancii sa uplatňuje len odpor R , fázový posun je nulový. Nad rezonančnou frekvenciou má impedancia induktívny charakter $X_C < X_L$, fázový posun má hodnotu kladnú.

Pomer napätia na reaktančnom prvku k celkovému napätiu sa nazýva *činiteľ akosti rezonančného obvodu*

$$Q_0 = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R} \quad (3.11.7)$$

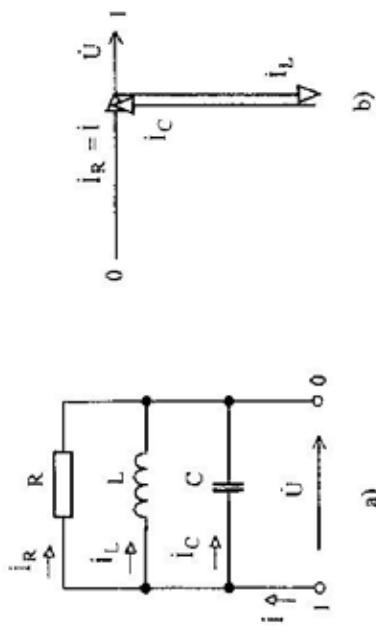
Ak dosadíme do výrazu pre rezonančnú reaktanciu za kruhovú frekvenciu, kruhovú frekvenciu z Thomsonovho vzorca, potom

$$\frac{1}{\omega_r C} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \quad (3.11.8)$$

Výraz (3.11.8) udáva tzv. *charakteristický odpor rezonančného obvodu*.

3.11.2 Rezonancia v paralelnom R, L, C obvode

Schéma zapojenia je na obr.3.36a



obr.3.36

Vodivosti paralelne zapojených ideálnych prvkov R , L , C podľa obr.3.36a sú

$$G = \frac{1}{R}, \quad B_L = -j \frac{1}{\omega L}, \quad B_C = j\omega C$$

Admittancia obvodu a fázový posun je

$$\dot{Y} = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B_C - B_L}{G} = \frac{\operatorname{Im}(\dot{Y})}{\operatorname{Re}(\dot{Y})}$$

Rezonancia sa dosiahne vtedy, keď imaginárna časť admittancie sa rovná nule, teda $\varphi = 0$.

$$\operatorname{Im}(\dot{Y}) = 0 \quad (3.11.9)$$

$$\text{Teda } \omega_r C = \frac{1}{\omega_r L}$$

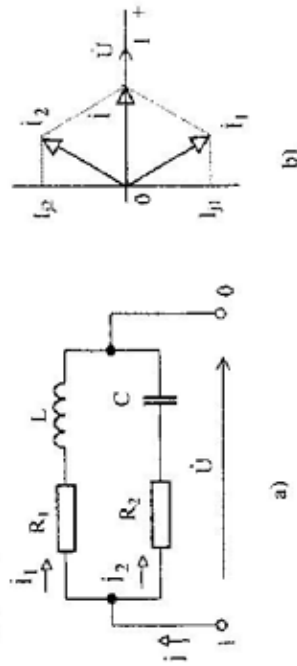
Z toho dostaneme Thomsonov vzorec, podobne ako pri sériovej rezonancii

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.11.10)$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3.11.11)$$

Charakter závislosti admitancie a vodivosti jednotlivých prvkov od frekvencie je podobný ako je na obr.3.35 pre sériový obvod, ale priebeh impedancie odpovedá priebehu admitancie, priebeh reaktancie iдукtívneho charakteru odpovedá priebehu vodivosti kapacitného charakteru, priebeh reaktancie kapacitného charakteru odpovedá priebehu vodivosti iдукtívneho charakteru a priebeh odporu odpovedá priebehu vodivosti.

Podmienku pre vznik rezonancie vyšetříme pre všeobecnejšie paralelné zapojenie prvkov, obr.3.37a.



obr.3.37

Rezonancia vznikne, keď výsledný prúd a výsledné napätie obvodu budú vo fáze, obr.3.37b, t. j. keď sa imaginárna zložka prúdu bude rovnáť nule, čo len potvrdzuje predchádzajúce tvrdenia, že $\text{Im}(\dot{Z}) = 0$, vtedy ide o sériovú rezonanciu, alebo $\text{Im}(\dot{Y}) = 0$, vtedy hovoríme, že je paralelná rezonancia. Teda

$$\text{Im}(\dot{I}) = 0 \quad (3.11.12)$$

Prúd v prvej vetve

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \left(\frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} \right) \dot{U}$$

Prúd v druhej vetve

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \left(\frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} + j \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \right) \dot{U}$$

Potom pre rezonanciu platí

$$\frac{\omega_r L}{R_1^2 + (\omega_r L)^2} = \frac{\frac{1}{\omega_r C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_r C}\right)^2} \quad (3.11.13)$$

Riešením rovnice (3.11.13) dostaneme rezonančnú frekvenciu

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{R_2^2 - \frac{L}{C}}} \quad (3.11.14)$$

V prípade, $R_1 \neq R_2$ je rezonancia možná len vtedy, keď obidva odpory R_1^2 , R_2^2 sú väčšie, alebo menšie ako L/C .

Ak $R_1 = R_2 \neq \sqrt{\frac{L}{C}}$, obvod je v rezonancii a rezonančná frekvencia je daná Thomsonovým vzorcom.

Zvláštny prípad dostaneme, keď $R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Rezonančná frekvencia je neurčitý výraz. Podmienka rezonancie je splnená v tomto prípade pre všetky frekvencie. Obvod sa chová ako ohmický odpor.

Ak nebude v druhej vetve odpor R_2 , môžeme z rovnice (3.11.14) napísať, že rezonančná frekvencia je

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{L}\right)^2} \quad (3.11.15)$$

3.11.3 Viacsobná rezonancia

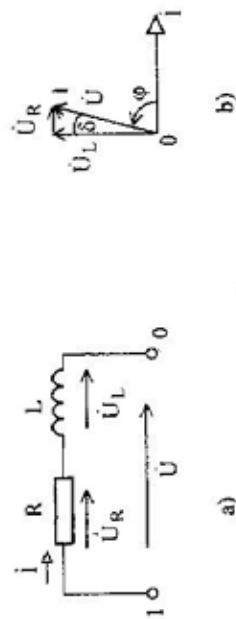
V zložitejších obvodoch napájaných neharmonickým periodickým napätím (v tejto časti sa tým nebudeme zaoberať), môže nastať rezonancia pri viacerých frekvenciách. Všetky rezonančné frekvencie môžeme určiť z podmienok pre sériové, alebo paralelné obvody.

3.12 REÁLNE PASÍVNE PRVKY PRIPOJENÉ NA HARMONICKÉ NAPÄTIE

Tak ako sme v predchádzajúcich kapitolách hovorili, skutočné, reálne prvky: kondenzátor a cievku, nahradzujeme ideálnymi prvkami, ohmickým odporom, indukčnosťou a kapacitou.

3.12.1 Cievka

V obvodoch, kde napájacie napätie má nižšiu frekvenciu, napr. 50 Hz,



obr.3.38

môžeme cievku nahradiť sériovým obvodom, ktorý sa skladá z ohmického odporu a indukčnosti, obr.3.38a. Medzivávitová kapacita sa neuplatňuje. Podstatným parametrom je indukčnosť.

Fázový posun medzi prúdom a napätím je nie 90° ako pri indukčnosti, ale je zmenšený o *stratový uhol* δ , obr.3.38b.

$$\varphi = 90^\circ - \delta$$

Stratový uhol je malý, potom môžeme napísať

$$\delta \approx \operatorname{tg} \delta = \frac{\dot{U}_R}{\dot{U}_L} = \frac{R}{\omega L} \quad (3.12.1)$$

Činiteľ akostí je zavedený ako

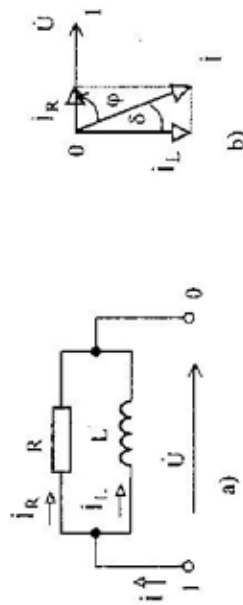
$$Q = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{\omega L}{R} \quad (3.12.2)$$

Z vektorového diagramu, obr.3.38b, môžeme napísať vzťahy

$$\sin \delta = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{Z} \Rightarrow Z = \frac{R}{\sin \delta}$$

$$\cos \delta = \frac{U_L}{U} = \frac{X_L}{Z} \Rightarrow Z = \frac{X_L}{\cos \delta}$$

Niekedy sa robí paralelná náhrada cievky, obr.3.39a



obr.3.39

Z vektorového diagramu na obr.3.39b môžeme napísať

$$\sin \delta = \frac{I_R}{I} = \frac{G'}{Y'} \Rightarrow Y' = \frac{G'}{\sin \delta}$$

$$\cos \delta = \frac{I_L}{I} = \frac{B'_L}{Y'} \Rightarrow Y' = \frac{B'_L}{\cos \delta}$$

Ak chceme porovnať prvky sériovej a paralelnej náhrady, vychádzame z podmienky, že

$$\dot{Z}Y' = 1 \quad (3.12.3)$$

Dosadením do podmienky (3.12.3) z predchádzajúcich vzťahov dostaneme

$$\frac{R}{\sin \delta} \frac{G'}{\sin \delta} = 1 \Rightarrow R = R' \sin^2 \delta \quad (3.12.4)$$

Pretože stratový uhol δ je malý, zo vzťahu (3.12.4) vyplýva, že pri sériovej náhrade je odpor oveľa menší ako odpor pri paralelnej náhrade.

$$R \ll R' \quad (3.12.5)$$

Podobne

$$\frac{\omega L}{\cos \delta} \frac{B'_L}{\cos \delta} = 1 \Rightarrow L = L' \cos^2 \delta \quad (3.12.6)$$

Zo vzťahu (3.12.6) vyplýva, že indukčnosť pri sériovej náhrade a paralelnej náhrade sú približne rovnaké.

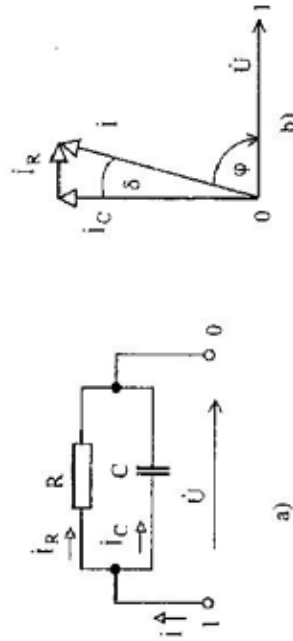
$$L \approx L' \quad (3.12.7)$$

Činiteľ akosti pri paralelnej náhrade je

$$Q = \frac{R'}{\omega L'} \quad (3.12.8)$$

3.12.2 Kondenzátor

V dielektriku kondenzátora, ktorý je pripojený na harmonické napätie vznikajú straty. Sú spôsobené jednak nedokonalosťou dielektrika, jednak



obr.3.40

polarizáciou. Kondenzátor môžeme nahradiť ideálnymi prvkami: kapacitou a ohmickým odporom, obr.3.40a. Podstatným parametrom je kapacita. Indukčnosť môžeme pri frekvencii 50 Hz napájacieho napätia zanedbať.

Fázový posun medzi prúdom a napätím je nie 90° ako pri ideálnom kondenzátore (kapacite), ale je zmenšený o stratový uhol δ , obr.3.40b.

$$\varphi = 90^\circ - \delta$$

Stratový uhol je malý, preto môžeme písať, že

$$\delta \approx \operatorname{tg} \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{1}{\omega RC} \quad (3.12.9)$$

Recipročná hodnota $\operatorname{tg} \delta$ je činiteľ akosti

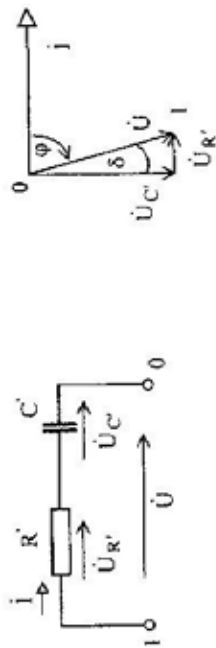
$$Q = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} = \omega RC \quad (3.12.10)$$

Z vektorového diagramu platí

$$\sin \delta = \frac{I_R}{I} = \frac{Z}{R} \Rightarrow Y = \frac{1}{R \sin \delta}$$

$$\cos \delta = \frac{I_C}{I} = \omega C Z \Rightarrow Y = \frac{\omega C}{\cos \delta}$$

Môže byť náhrada kondenzátora aj sériovým zapojením R , C prv-
kov, obr.3.41a.



a)

b)

obr.3.41

Z vektorového diagramu pre sériovú náhradu, obr.3.41b, môžeme napísať

$$\sin \delta = \frac{U_{C'}}{U} = \frac{R'}{Z'} \Rightarrow Z' = \frac{R'}{\sin \delta}$$

$$\cos \delta = \frac{U_{R'}}{U} = \frac{1}{\omega C' Z'} \Rightarrow Z' = \frac{1}{\omega C' \cos \delta}$$

Ak má byť náhrada rovnocenná musí platiť

$$Z' Y = 1 \quad (3.12.11)$$

Dosadením do výrazu (3.12.11) z predchádzajúcich vzťahov dostaneme

$$\frac{R'}{\sin \delta} \frac{1}{R \sin \delta} = 1 \Rightarrow R' = R \sin^2 \delta \quad (3.12.12)$$

Pretože stratový uhol je malý, z výrazu (3.12.12) vyplýva, že

$$R' \ll R \quad (3.12.13)$$

Podobne môžeme zo vzťahov získaných z vektorového diagramu a dosadením do vzťahu (3.12.11) napísať

$$\frac{1}{\omega C' \cos \delta} \cos \delta = 1 \Rightarrow C' = \frac{C}{\cos^2 \delta} \quad (3.12.14)$$

Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch keď sme robili náhrady, môžeme analyzovať vzťah (3.12.14) a vysloviť uzáver, že pri oboch náhradách sú kapacity približne rovnaké.

$$C' \approx C \quad (3.12.15)$$

Stratový uhol a činiteľ akosti pri sériovej náhrade sú

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{U_{R'}}{U_{C'}} = \omega R' C' \quad (3.12.16)$$

$$Q = \frac{1}{\omega R' C'} \quad (3.12.17)$$

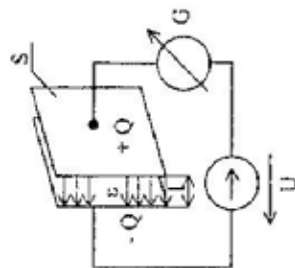
4 DIELEKTRICKÉ OBVODY

Zakladným prvkom reálnych dielektrických obvodov je kondenzátor. Už v predchádzajúcich častiach sme sa zoznámili s tým, že kondenzátor môžeme nahradiť ideálnymi prvkami – kapacitou a odporom. V tejto časti sa budeme zaoberať s dielektrickými obvodmi, ktoré pozostávajú z ideálnych kondenzátorov, z kapacít a napájané sú z jednosmerných zdrojov.

4.1 KAPACITA DOSKOVÉHO KONDENZÁTORA

Doskový kondenzátor je tvorený dvoma rovnobežnými doskami, medzi ktorými je izolant – dielektrikum, obr.4.1.

Pripojením jednosmerného napätia na elektródy kondenzátora, v obvode zapojeným galvanomerom, zistíme, že za určitú dobu, počas trvania prechodného deja, preteká prúd. Po skončení prechodného deja obvodom prúd neprechádza. (Výšetovným prechodných dejov sa budeme zaoberať v inej časti 'Teoretickej elektrotechniky'.) Kondenzátor sa nabil nábojom Q naznačenej polaritou. Veľkosť náboja závisí od veľkosti pripojeného napätia, od veľkosti plochy dosák, od vzájomnej vzdialenosti dosák a od dielektrika,



obr.4.1

ktoré je vložené medzi dosky a je charakterizované permitivitou ϵ .

$$Q = CU$$

$$(4.1.1)$$

Konštantu úmernosti medzi veľkosťou náboja a veľkosťou napätia menujeme kapacita. Zo vzťahu (4.1.1) kapacita je

$$C = \frac{Q}{U} ; [F; As, V]$$

$$(4.1.2)$$

Jednotkou kapacity je 1 F (Farad). Pre technickú prax je to jednotka veľká, preto sa používajú menšie násobky základnej jednotky.

$$10^{-6} \text{ F} = 1 \mu\text{F} \quad (\text{mikro Farad})$$

$$10^{-9} \text{ F} = 1 \text{ nF} \quad (\text{nano Farad})$$

$$10^{-12} \text{ F} = 1 \text{ pF} \quad (\text{piko Farad})$$

Kapacita kondenzátora závisí od jeho geometrických rozmerov a kvality dielektrika. Kapacitu doskového kondenzátora určíme zo vzťahu

$$C = \varepsilon \frac{S}{l} ; \quad [\text{F}; \text{Fm}^{-1}, \text{m}^2, \text{m}] \quad (4.1.3)$$

kde S je vnútorná plocha dosák
 l je vzdialenosť dosák od seba
 ε je permitivita dielektrika

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (4.1.4)$$

$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$, je *permitivita vákua*, ε_r je *permitivita prostredia*, udáva koľkokrát je väčšia permitivita dielektrika ako permitivita vákua. Hodnoty ε_r sú pre rôzne materiály udávané v tabuľkách, pre niektoré materiály uvádzame ich informatívne hodnoty.

Materiál	ε_r	Materiál	ε_r
Vzduch	1,0006	Mikazit	4,5 - 6
Papier	1,6 - 2	Parafin	2 - 2,3
Lepenka	5 - 8	Polystyrol	2,3
Sklo	5 - 16,5	Slieďa	3,2 - 6
Porcelán	5 - 6,5	Transf. olej	2,2 - 2,5
Guma	2,5 - 2,8	Dest. voda	80

Po pripojení jednosmerného napätia na elektródy kondenzátora vznikne elektrostatické pole. Ak zanedbáme okrajové efekty a plocha dosák, vzhľadom na ich vzdialenosť od seba je veľká, môžeme pole považovať za homogénne. Potom veľkosť intenzity elektrostatického poľa je

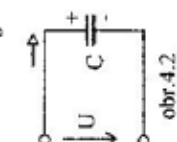
$$E = \frac{U}{l} ; \quad [\text{Vm}^{-1}, \text{V}, \text{m}] \quad (4.1.5)$$

Tak isto je definovaná elektrická pevnosť dielektrika.
 Indukcia elektrostatického poľa je

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} ; \quad [\text{Asm}^{-2}; \text{Fm}^{-1}, \text{Vm}^{-1}] \quad (4.1.6)$$

Z Gausovej vety platí, že tok vektora indukcie uzavretou plochou sa rovná veľkosti náboja vo vnútri plochy. Jednotkou náboja je 1 C [Coulomb].

$$Q = \psi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} ; \quad [As = C; \text{Asm}^{-2}, \text{m}^2] \quad (4.1.7)$$



Za predpokladu, že intenzita elektrického poľa je konštantná, permitivita sa nemení, vektor intenzity poľa je kolmý na plochu a zanedbáme okrajové efekty, môžeme použiť v ďalšom pre homogénne pole, skalárne vyjadrenie rovníc (4.1.6) a (4.1.7). Ako vyplýva zo vzťahov (4.1.3) až (4.1.5) na vyhotovenie kondenzátora s veľkou kapacitou je potrebná veľká plocha elektród, malá vzdialenosť elektród od seba, s ohľadom na elektrickú pevnosť dielektrika, a používať dielektriká s veľkou relatívnou permitivitou.

V elektrických schémach, tak ako sme to už uvádzali, budeme ideálny kondenzátor, napätie na ňom a jeho náboj označovať podľa obr. 4.2. Podrobnejšie o výpočte kapacit a riešení elektrostatických polí sa budeme zaoberať v inej časti predmetu Teoretická elektrotechnika.

4.2 SÉRIOVÝ DIELEKTRICKÝ OBVOD

Medzi elektródy doskového kondenzátora sú vložené dielektriká s rôznou permitivitou, obr. 4.3. Obvod je pripojený na jednosmerné napätie. Náboj prechádzajúci dielektrikami je rovnaký, plocha dielektrik je rovnaká, potom aj indukcia elektrického poľa v oboch dielektrikách je rovnaká

$$D_1 = D_2 \quad (4.2.1)$$

Dosadením (4.1.6) do rovnice (4.2.1) dostaneme

$$\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 \quad (4.2.2)$$

Napätie sa podľa 2. K. z. rozdelí na jednotlivé dielektriká

$$U = U_1 + U_2 \quad (4.2.3)$$

Zo vzťahu (4.1.5) dosadíme do (4.2.3) a môžeme napísať

$$U = E_1 l_1 + E_2 l_2 \quad (4.2.4)$$

Riešnim rovnice (4.2.2) a (4.2.4) môžeme určiť intenzitu elektrického poľa v jednotlivých dielektrikách pri známom celkovom napätí U

$$E_1 l_1 + E_1 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} l_2 = U$$

$$E_1 = U \frac{\epsilon_2}{l_1 \epsilon_2 + l_2 \epsilon_1} \quad (4.2.5)$$

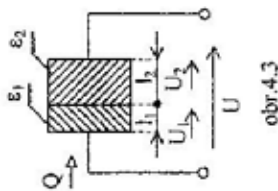
Podobne

$$E_2 = U \frac{\epsilon_1}{l_1 \epsilon_2 + l_2 \epsilon_1} \quad (4.2.6)$$

So zapojením dielektrik do série sa stretávame použitím dvojitej izolácie. Z rovníc (4.2.5) a (4.2.6) môžeme posúdiť, či predpísaná elektrická pevnosť dielektrika vyhovuje elektrickému namáhaniu izolácie.

4.3 PARALELNÝ DIELEKTRICKÝ OBVOD

O paralelnom dielektrickom obvode môžeme hovoriť, keď sú dielektriká s rôznymi permitivitami usporiadané podľa obr.4.4.



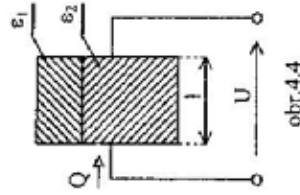
obr.4.3

Pretože hrúbka dielektrik je rovnaká, napätie na nich je tiež zhodné, budú rovnaké aj intenzity elektrického poľa.

$$E_1 = E_2 \quad (4.3.1)$$

Permitivita $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$, indukcie elektrického poľa budú v priamom pomere permitivit

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (4.3.2)$$



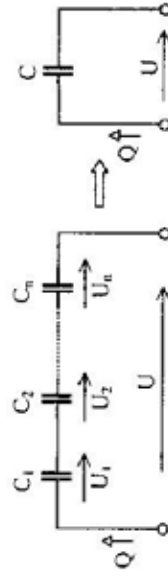
obr.4.4

4.4 ZAPOJENIE KONDENZÁTOROV

Keď hovoríme o zapojení kondenzátorov, jedná sa vlastne o riešenie dielektrických obvodov z predchádzajúcich strán. Napriek tomu ukážeme konkrétne jednotlivé zapojenia.

4.4.1 Sériové zapojenie kondenzátorov

Viac kondenzátorov zapojených do série a pripojených na jednosmerné napätie chceme nahradiť jedným kondenzátorom, ktorý bude pripojený na to isté napätie a bude mať ten istý náboj ako pôvodná konfigurácia. Schema zapojenia je na obr.4.5.



obr.4.5

Pre obvod na obr.4.5 napíšeme rovnice podľa 2. K. z.

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

Dosadením do tejto rovnice zo vzťahu (4.1.1) dostaneme

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

a po úprave

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (4.4.1)$$

Pri sériovom zapojení kondenzátorov, prevrátená hodnota výslednej kapacity sa rovná súčtu prevrátených hodnôt jednotlivých kapacít.

Výsledná kapacita dvoch do série zapojených kondenzátorov je

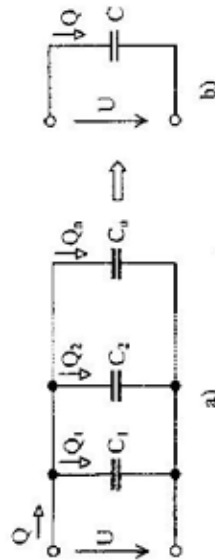
$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (4.4.2)$$

Ak je zapojených v sérii n rovnakých kondenzátorov, potom hodnota výslednej kapacity je

$$C = \frac{C_1}{n} \quad (4.4.3)$$

4.4.2 Paralelné zapojenie kondenzátorov

Podľa zapojenia kondenzátorov na obr.4.6a, urobíme náhradu paralelnej konfigurácie jedným kondenzátorom, obr.4.6b.



obr.4.6

Urobíme analógiu s obvodymi jednosmerných prúdov tak, že prúdu odpovedá náboj, vodivosti – kapacita, napätie – napätie. Potom môžeme pre obvod na obr.4.6a napísať obdobu I. K. Z.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

Dosadením za náboje z výrazu (4.1.1) dostaneme

$$CU = C_1 U + C_2 U + \dots + C_n U$$

a po úprave

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (4.4.4)$$

Výsledná kapacita paralelne zapojených kondenzátorov sa rovná súčtu jednotlivých kapacít.

Pre hodnotu výslednej kapacity n rovnakých kondenzátorov zapojených paralelne platí

$$C = n C_1 \quad (4.4.5)$$

4.4.3 Zmiešané zapojenie kondenzátorov

Pre výslednú kapacitu obvodu na obr.4.7 môžeme napísať

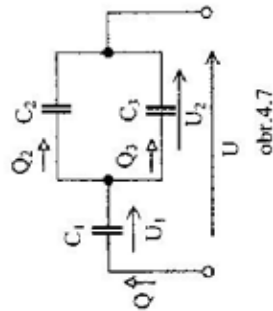
$$C = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Celkový náboj určíme zo vzťahu

$$Q = CU$$

Potom

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} ; \quad U_2 = U - U_1 ; \quad Q_2 = C_2 U_2 ; \quad Q_3 = C_3 U_2$$



obr.4.7

4.5 RIEŠENIE ZLOŽITEJŠÍCH DIELEKTRICKÝCH OBVODOV

Urobíme, tak ako to už bolo uvedené, analógiu medzi jednosmernými a dielektrickými obvodmi tak, že prúdu odpovedá náboj, napätiu – napätie, vodivosti – kapacita, resp. odporu – prevrátená hodnota kapacity. Potom môžeme použiť na riešenie dielektrických obvodov metódy riešenia jednosmerných obvodov, ktoré sme v predchádzajúcich častiach popísali.

4.5.1 Riešenie dielektrických obvodov priamym použitím

Kirchoffových zákonov

Ak kondenzátory neboli pred pripojením na sieť nabité, platí podľa analógie s i. K. z.

$$\sum_{i=1}^n (\pm Q_i) = 0 \quad (4.5.1)$$

Algebraický súčet nábojov kondenzátorov pripojených do uzla sa rovná nule.

O voľbe znamienka náboja platí obr. 4.8.

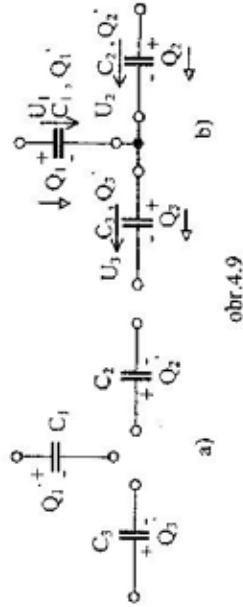
Pre vysvetlenie vzhľadu (4.5.1) uvedieme príklad podľa obr. 4.8. Zvolíme (ľubovoľne) napätia na kondenzátoroch a podľa obr. 4.2 zakreslíme polaritu nábojov. Potom podľa vzťahu (4.5.1) môžeme pre uzel napísať

$$-Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 = 0 \quad (4.5.2)$$

V prípade, že kondenzátory boli pred pripojením nabité určitým nábojom, potom: algebraický súčet nábojov na elektródach kondenzátorov pripojených do uzla sa musí rovnat algebraickému súčtu nábojov na elektródach kondenzátorov pred ich pripojením do uzla; čo je vlastne zákon zachovania náboja.

$$\sum_{i=1}^n (\pm Q_i) = \sum_{k=1}^m (\pm Q_k) \quad (4.5.3)$$

Použitie vzťahu (4.5.3) si vysvetlíme pre zapojenie na obr. 4.9



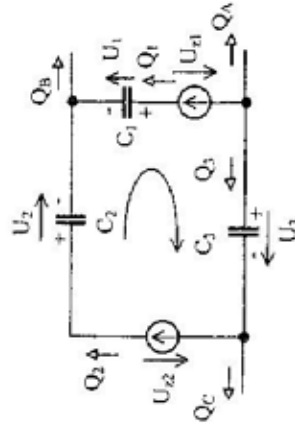
obr. 4.9

Obr. 4.9a znázorňuje kondenzátory nabité pred pripojením do uzla. Po pripojení kondenzátorov do uzla, obr. 4.9b, zvolíme napätia na kondenzátoroch (ľubovoľne) a podľa orientácie tohoto napätia priradíme náboje na jednotlivých kapacitách podľa voľby na obr. 4.2. Potom napíšeme rovnicu podľa (4.5.3).

$$-Q_1 - Q_2 + Q_3 = -Q_1' + Q_2' - Q_3' \quad (4.5.4)$$

Pre slučku obvodu, kde pasívnym prvkom je kondenzátor napíšeme rovnicu podľa 2. K. z. Algebraický súčet napätí v uzavretej slučke sa rovná nule.

$$\sum_{i=1}^n (\pm U_i) = 0 \quad (4.5.5)$$



obr. 4.10

Kladné zmysly napätí zdrojov volíme od svorky kladnej ku svorky zápornej, napätia na kondenzátoroch zvolíme ľubovoľne. Zmysel popisovania slučky zvolíme tiež ľubovoľne. Napätia, ktorých zmysly sa zhodujú so zmyslom popisovania, píšeme do rovnice so znamienkom kladným, tie napätia, ktorých zmysel nie je zhodný so zmyslom popisovania slučky, píšeme do rovnice so znamienkom záporným. Bližšie vysvetlenie nám dá obr. 4.10 a rovnica (4.5.6).

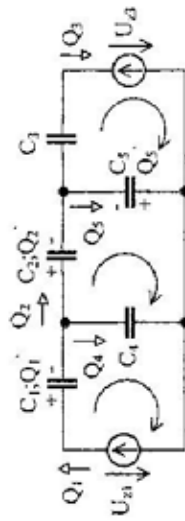
$$-U_1 + U_2 + U_3 + U_4 - U_{z1} - U_{z2} = 0 \quad (4.5.6)$$

Dosadením do rovnice za napätia na kondenzátoroch dostaneme

$$-\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = -U_{z1} + U_{z2} \quad (4.5.7)$$

O počte nezávislých slučiek a uzlov v obvode, platí to isté ako pri riešení jednosmerných obvodov.

Na lepšie vysvetlenie zápisu východiskových rovníc uvedieme príklad, obr. 4.11



obr. 4.11

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & \frac{1}{C_4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{C_4} & \frac{1}{C_5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_3} & 0 & -\frac{1}{C_5} \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{z1} \\ 0 \\ -U_{z2} \\ -Q'_1 + Q'_2 \\ -Q'_2 - Q'_5 \end{bmatrix} \quad (4.5.8)$$

Podľa zapojenia na obr. 4.11 napíšeme východiskové rovnice pre riešenie nábojov Q_1 až Q_5 , pričom kondenzátory C_1, C_3, C_5 mali počítačový náboj Q_1, Q_2, Q_3 , vyznačenej polaritou. Východiskové rovnice sú zapísané v maticovom vyjadrení (4.5.8).

4.5.2 Riešenie dielektrických obvodov použitím metódy slučkových nábojov

Metodika riešenia dielektrických obvodov metódou slučkových nábojov je podobná metóde slučkových prúdov. Zvoľme zmysel slučkových nábojov vo všetkých slučkách obvodu zhodne. Potom do diagonály matice konštant obvodu zapíšeme s kladným znamienkom vlastné konštanty príslušného slučkového náboja, t.j. súčet prevrátených hodnôt kapacít kondenzátorov v slučke tohto-ktorého slučkového náboja. Ostatné prvky matice konštant sú vzájomné konštanty, majú záporné znamienko, t.j. súčet prevrátených hodnôt kapacít kondenzátorov zapojených v spoločnej vetve dvom príslušným slučkovým nábojom. Ak niektoré slučkové náboje nemajú spoločnú vetvu, potom hodnota vzájomnej konštanty sa rovná nule.

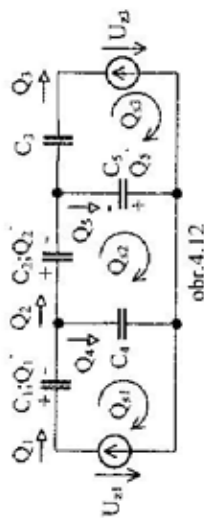
Maticu konštant vynásobíme sprava stĺpcovou maticou slučkových nábojov. Počet riadkov matice je daný počtom slučkových nábojov. Znamienka slučkových nábojov sú kladné.

Na pravú stranu rovnice napíšeme stĺpcovú maticu napätí, ktorá obsahuje napätia napáťových zdrojov a napätia od nabitých kondenzátorov nábojom Q . Znamienka napätí sú s ohľadom na popisovanie slučky podľa 2. K. z., t.j. ak orientácia príslušného napätia je zhodná so zmyslom slučkového náboja, na druhej strane má toto napätie záporné znamienko. Ak je zmysel slučkového náboja a zmysel napätia orientovaný proti sebe, na druhej strane rovnice napätia majú kladné znamienko.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C_{11}} & \frac{1}{C_{12}} & \dots & \frac{1}{C_{1n}} \\ \frac{1}{C_{21}} & \frac{1}{C_{22}} & \dots & \frac{1}{C_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{C_{n1}} & \frac{1}{C_{n2}} & \dots & \frac{1}{C_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{s1} \\ Q_{s2} \\ \vdots \\ Q_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 + U'_1 \\ U_2 + U'_2 \\ \vdots \\ U_n + U'_n \end{bmatrix} \quad (4.5.9)$$

Skutočný náboj na kondenzátore sa rovná algebraickému súčtu skutkových nábojov a počiatkových nábojov.

Obvod zobrazený na obr.4.11, budeme riešiť stučkovými nábojmi. Schému prekeslime podľa obr.4.12.



Podľa (4.5.9) napíšeme v maticovom vyjadrení rovnice pre obvod na obr.4.12

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_4} \right) & -\frac{1}{C_4} & 0 \\ -\frac{1}{C_4} & \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} \right) & -\frac{1}{C_5} \\ \frac{1}{C_5} & -\frac{1}{C_5} & \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_5} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{s1} \\ Q_{s2} \\ Q_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{z1} - \frac{Q'_1}{C_1} \\ -\frac{Q'_2}{C_2} + \frac{Q'_5}{C_5} \\ -U_{z3} - \frac{Q'_5}{C_5} \end{bmatrix}$$

Skutočné náboje na kondenzátoroch sú

$$Q_1 = Q_{s1} + Q'_1 ; \quad Q_2 = Q_{s2} + Q'_2 ; \quad Q_3 = Q_{s3}$$

$$Q_4 = Q_{s1} - Q_{s2} ; \quad Q_5 = Q_{s2} - Q_{s3} - Q'_5$$

Všimnime si, že hoci neplatí zákon zachovania napätia, pri tejto metóde sme pisali do východiskových napäťových rovníc aj napätie od počiatkových nábojov. Pri zisťovaní skutkových nábojov sme toto zohľadnili tým, že sme uvažovali aj vplyv počiatkových nábojov.

V prípade, že vo vetve je zapojených viac kondenzátorov a len jeden z nich má počiatkový náboj, najprv sa určí celková kapacita do série zapojených kondenzátorov v danej vetve a takto získanou kapacitou sa vydeli počiatkový náboj v danej vetve a tým sa získa napätie do rovnice na pravej strane od počiatového náboja.

4.5.3 Riešenie dielektrických obvodov metódou uzlových napätí

Riešenie dielektrických obvodov touto metódou je analogické s riešením obvodov jednosmerných prúdov. Orientáciu napätí medzi uzlami (uzlové napätia) zvolíme od jednotlivých uzlov ku vzťažnému uzlu. Pri jednotnej voľbe uzlových napätí môžeme napísať do diagonály kapacitnej matice kapacity vlastné, to sú tie, ktoré sa spájajú v uvažovanom uzle. Ostatné členy kapacitnej matice tvoria kapacity vzájomné, to sú tie ktoré priamo spájajú príslušný uzol s iným uzlom. Znamienko vzájomných kapacít je pri nami predpokladanej voľbe uzlových napätí vždy záporné. V prípade, že vyšetřovaný uzol nie je priamo spojený s iným uzlom, príslušný člen v kapacitnej matici je nulový.

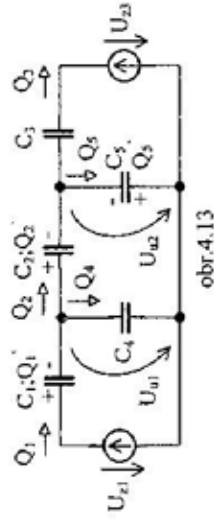
Kapacitnú maticu vynásobíme sprava stĺpcovou maticou uzlových napätí, ktoré majú znamienko kladné a počet riadkov matice je daný počtom uzlových napätí.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{u1} \\ U_{u2} \\ \vdots \\ U_{un} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}U_{z1} + Q'_1 \\ C_{21}U_{z2} + Q'_2 \\ \vdots \\ C_{n1}U_{zn} + Q'_n \end{bmatrix} \quad (4.5.10)$$

Na pravú stranu maticovej rovnice napíšeme stĺpcovú maticu nábojov. Jej členy sú vytvorené algebraickým súčtom počiatového náboja kondenzátora v príslušnej vetve a náboja vyjadreného násobkom napätia zdroja a kapacity zapojenej v príslušnej vetve. Znamienko náboja vytvoreného zdrojom je kladné, ak príslušný zdroj v danej vetve a príslušné uzlové napätie majú rovnakú orientáciu. Keď je ich orientácia nie zhodná, znamienko náboja je záporné. Znamienko počiatového náboja je kladné, ak je kladný náboj na doske kondenzátora pripojenej do vyšetřovaného uzla. Ak je do uzla pripojená elektróda so záporným nábojom, znamienko je záporné.

Všeobecná maticová rovnica je daná výrazom (4.5.10)

Tak ako v predchádzajúcich prípadoch, tak aj tu si ukážeme na konkrétnom obvode, obr.4.13, zápis východiskových rovníc podľa (4.5.10).



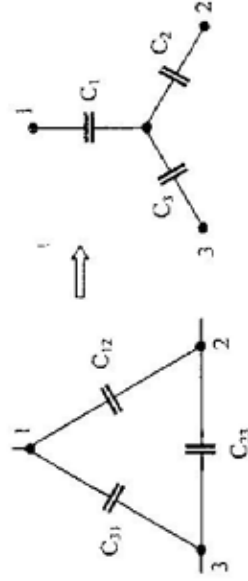
$$\begin{bmatrix} (C_1 + C_2 + C_4) & -C_2 \\ -C_2 & (C_2 + C_3 + C_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_1 U_{a1} - Q_1' + Q_2') \\ (C_3 U_{a2} - Q_2' - Q_3') \end{bmatrix}$$

Skutočné náboje na kapacitách sú

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 (U_{a1} - U_{a2}) ; & Q_2 &= C_2 (U_{a1} - U_{a2}) ; & Q_3 &= C_3 (U_{a2} - U_{a3}) ; \\ Q_4 &= C_4 U_{a1} ; & Q_5 &= C_5 U_{a2} \end{aligned}$$

4.5.4 Transfigurácia kapacít V, D

Z analógie z jednosmerných obvodov môžeme priamo písať pre zapojenie kondenzátorov v trojuholníku a v trojuhlovej hviezde, obr.4.14.



obr.4.14

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_{12} + C_{31}} + \frac{1}{C_{23} + C_{31} + C_{12} C_{23}}$$

Z toho určíme C_1 a podobne ďalšie náhradné kapacity C_2, C_3

$$C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12} C_{31}}{C_{23}}$$

$$C_2 = C_{12} + C_{23} + \frac{C_{12} C_{23}}{C_{31}} \quad (4.5.11)$$

$$C_3 = C_{31} + C_{23} + \frac{C_{31} C_{23}}{C_{12}}$$

Obdobne napíšeme vzťahy pre náhradné kapacity pri transformácii trojuhlovej kapacitnej hviezdy na trojuholník s kapacitami

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

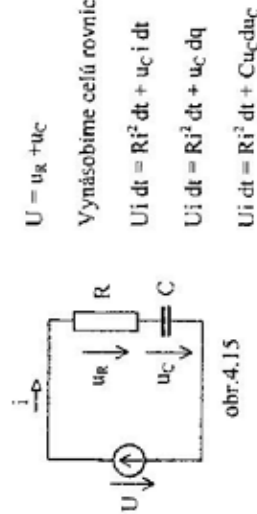
$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \quad (4.5.12)$$

$$C_{31} = \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}$$

4.6 ENERGIA ELEKTROSTATICKÉHO POĽA

Pripojme na zdroj jednosmerného napätia kapacitu zapojenú s odporom do série, obr.4.15. Jedná sa o technický kondenzátor. Pokiaľ sa kon-

denzátor nabije prechádza obvodom prúd, nastal prechodný dej. Napíšme pre tento obvod rovnicu podľa 2. K. Z.



Integrovaním poslednej rovnice môžeme napísať

$$\int_0^t U i dt = \int_0^t R i^2 dt + \int_0^t C u_C du_C$$

Ľavá strana tejto rovnice vyjadruje celkovú energiu dodanú zdrojom do obvodu. Prvý člen rovnice na pravej strane je energia premenená na teplo v odpore pri prechodnom deji, druhý člen rovnice na pravej strane predstavuje energiu elektrostatického poľa.

Po vyriešení integrálu druhého člena rovnice na pravej strane a úpravou výsledku dostaneme výrazy pre výpočet energie elektrostatického poľa

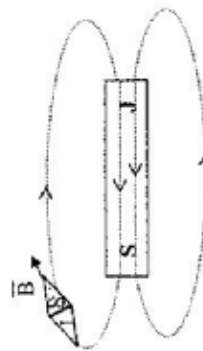
$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U = \frac{Q^2}{2C} \quad (4.6.1)$$

5 MAGNETICKÉ OVBODY

Magnetické pole je sprievodným znakom pohybujúcich sa elektrických nábojov, t.j. elektrického prúdu. Pravda, prvé javy magnetizmu boli pozorované od prírodných magnetických látok. Elektronová teória ich vysvetľuje, že sú vyvolané molekulárnymi elektrickými prúdmi

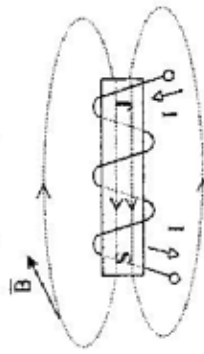
5.1 ZÁKLADNÉ VELIČINY MAGNETICKÉHO POĽA

Orientácia magnetického poľa v každom bode je daná tým, ako sa natočí voľne uložená magnetka. Svojím severným pólom ukazuje orientáciu magnetického poľa, obr.5.1a



obr.5.1a

Základnou charakteristickou veličinou, ktorá kvantitatívne vyjadruje veľkosť magnetického poľa, je *vektor magnetickej indukcie* $\vec{B}$. Jeho orientácia je totožná s orientáciou magnetického poľa.



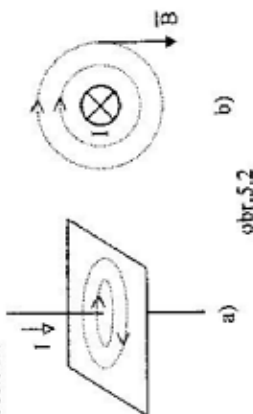
obr.5.1b

Čiary, ktoré svojou dotyčnicou udávajú v každom bode magnetického

poľa smer a zmysel indukcie, sa nazývajú *indukčné čiary*. Indukčné čiary sú uzavreté krivky. Pomocou nich graficky znázorňujeme magnetické pole, obr.5.1. Indukčné čiary vystupujú zo severného pólu pod pravým uhlom, vracajú sa prostredím k južnému pólu, kolmo do južného pólu vstupujú a uzatvárajú sa permanentným magnetom, alebo cievkou. Orientácia magnetického poľa je viazaná prúdom, ktorý pole vyvolal.

Orientáciu magnetického poľa cievky, ktorou prechádza elektrický prúd, obr.5.1b, určíme pomocou pravidla pravej ruky. *Pravú ruku položíme na cievku tak, aby prsty ukazovali zmysel postupu prúdu v cievke, vystrepený palec určuje severný pól.*

Okolo priameho prúdovodiča sa vytvárajú indukčné čiary, ako sú stredné kružnice, obr.5.2.



Smer vektora magnetickej indukcie je daný dotyčnicou k indukčným čiaram a zmysel určíme podľa pravotočivej skrutky. *Ak skrutkujeme pravotočivú skrutku tak, aby sa pohybovala vo smere prúdu vo vodiči, otáčanie hlavy skrutky udáva zmysel indukčných čiar, teda aj zmysel vektora magnetickej indukcie.*

Jednotkou magnetickej indukcie v SI systave je 1 Tesla (T).

Veľčina súvisiaca s magnetickou indukciou je *magnetický tok* Φ . Je definovaný vzťahom

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi \quad (5.1.1)$$

kde $d\vec{S}$ je vektor elementárnej plôšky, ktorou prechádza magnetický tok. V prípade, že je magnetické pole homogénne a plocha je rovinná, kolmá na indukčné čiary, výraz (5.1.1) môžeme písať v skalárnom tvare

$$\Phi = BS \quad (5.1.2)$$

Jednotkou magnetického toku je 1 Voltsekunda (Vs), táto jednotku nazývame tiež 1 Weber (Wb).

Z rovnice (5.1.2) môžeme napísať výraz pre magneticú indukciu

$$B = \frac{\Phi}{S} ; [T; Vs, m^2] \quad (5.1.3)$$

Ďalšou veličinou súvisiacou s magnetickou indukciou, ktorá charakterizuje magnetické pole je *vektor intenzity magnetického poľa*

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}, \text{ kde } \mu \text{ je permeabilita} \quad (5.1.4)$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (5.1.5)$$

pričom $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [Hm^{-1}]$ je *permeabilita vákua*, μ_r je *permeabilita prostredia*. Permeabilita je vo všeobecnosti nie konštantna, je to nelineárna funkcia.

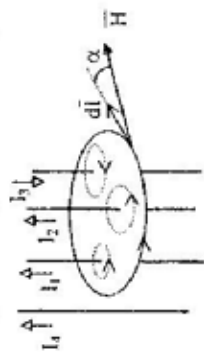
Intenzita a indukcia magnetického poľa sú veličiny vektorové. Ich smer a zmysel sú zhodné. Magnetické pole môžeme zobrazit tiež siločiarami, ktorých dotyčnice v každom bode udávajú smer a zmysel intenzity magnetického poľa.

5.2 ZÁKON CELKOVÉHO PRÚDU

Veľkosť magnetického poľa vznikajúceho od elektrického prúdu môžeme v niektorých prípadoch pomerne jednoducho určiť zo *zákona celkového prúdu*. (Podrobnejším riešením magnetického poľa sa budeme zaoberať v inej časti predmetu Teoretická elektrotechnika.) Matematicky ho môžeme napísať

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n I_i \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^n (\pm I_i) \quad (5.2.1)$$

Integrál intenzity magnetického poľa po uzavretej dráhe, ktorá obopína prúdovodiče, ktoré pole vyvolávajú, sa rovná algebrickému súčtu prúdov týchto prúdovodíčov.



obr.5.3

Vďaka kladným zmyslov prúdov je viazaná na pravidlo pravotočivej skrutky. Ak pri otáčaní pravotočivej skrutky vo zmysle postupu prúdu v prúdovodiči sa pohyb hlavy skrutky zhoduje so smerom dráhy po ktorej vykonávame integráciu, prúdy majú kladné znamienko. V opačnom prípade, znamienko prúdu je záporné. Teda, ak zmysel intenzity od príslušného prúdovodiča sa zhoduje so zmyslom integračnej dráhy, znamienko príslušného prúdu je kladné. To vyplýva zo vzťahu (5.2.1).

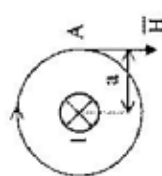
Pre magnetické pole vytvorené prúdovodičmi podľa obr.5.3, budeme aplikovať vzťah (5.2.1)

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I_1 + I_2 - I_3$$

V praxi použijeme zákon celkového prúdu na riešenie magnetických polí tam, kde poznáme priebeh indukčných čiar, resp. siločiar. Potom volíme integračnú dráhu tak, aby spĺňala so siločiarou, potom $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$ a výraz (5.2.1) bude mať tvar

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl = \sum_{i=1}^n (\pm I_i) \quad (5.2.2)$$

Za dĺžku l budeme uvažovať dĺžku strednej siločiar.



obr.5.4

Z predchádzajúceho poznáme, že indukčné čiary (siločiar), dlhého priameho prúdovodiča s kruhovým prierezom sú sústredné kružnice. Intenzitu magnetického poľa v mieste A od stredu vodiča, obr.5.4, určíme podľa (5.2.2)

$$H 2\pi a = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi a} \quad (5.2.3)$$

Zo vzťahu (5.2.3) dostaneme jednotku intenzity magnetického poľa, je ňou 1 Ampér na meter (Am^{-1}).

V prípade, že namiesto jedného prúdovodiča budeme uvažovať cievku s počtom závitov N , a integračná dráha bude závitov obopínať, platí

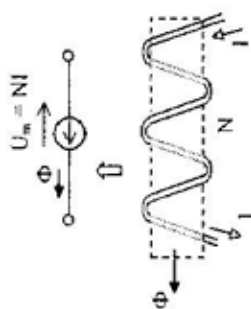
$$\oint \vec{H} d\vec{l} = NI \quad (5.2.4)$$

Výrazu $\oint \vec{H} d\vec{l}$ hovoríme *magnetické napätie*, výrazu NI *magnetické vnútorné napätie*, alebo *magnetomotorické napätie*. Tieto dva pojmy sa často stotožňujú. Potom

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = NI = U_m \quad (5.2.5)$$

Jednotkou magnetického napätia je 1 Ampér (A). Často sa používa pre magnetické napätie výraz *Ampérzávit* (Az).

Keď urobíme analógiu s jednosmernými prúdmi, môžeme zakresliť zdroj magnetického napätia, obr.5.5. Zmysel magnetického toku je daný pravidlom pravej ruky.



obr.5.5

5.3 HOPKINSONOV ZÁKON

Toroid z ľubovoľného materiálu je rovnomerne ovinutý s N závitmi, ktorými preteká prúd I . Siločiarajú majú tvar kružníc, každá z nich nech obopína všetkých N závitov. Dĺžka strednej siločiar je $l = \pi D_s$. Podľa (5.2.4)

$$H = \frac{NI}{l} \quad (5.3.1)$$

Magnetická indukcia v priereze je podľa (5.1.4) a (5.1.5)

$$B = \mu_0 \mu_r H \quad (5.3.2)$$

Dosadením (5.3.1) a (5.3.2) do (5.1.3) dostaneme výraz pre magnetický tok

$$\Phi = \mu_0 \mu_r \frac{S}{l} NI = \frac{NI}{\frac{l}{\mu_0 \mu_r S}}$$

kde výraz

$$\frac{l}{\mu_0 \mu_r S} = R_m \quad (5.3.3)$$

nazývame *magnetický odpor*. Prevrátená hodnota magnetického odporu je *magnetická vodivosť*

$$G_m = \frac{1}{R_m} \quad (5.3.4)$$

Potom môžeme napísať výraz pre magnetický tok

$$\Phi = \frac{U_m}{R_m} = G_m U_m \quad (5.3.5)$$

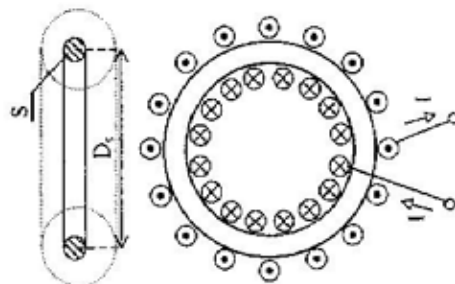
Výraz (5.3.5) sa nazýva *Hopkinsonov zákon*; pre magnetické obvody je obdobou Ohmovho zákona. Zo vzťahu (5.3.5) dostaneme jednotku pre magnetickú vodivosť

$$[G_m] = \frac{[\Phi]}{[U_m]} = \frac{Vs}{A} = H$$

Jednotkou magnetickej vodivosti je 1 Henry (H).

5.4 ROZDELENIE MAGNETIK

Látky môžeme podľa magnetických vlastností, pokiaľ neskúame ich vnútornú štruktúru, rozdeliť do troch skupín. *Diamagnetické* látkami sa nazývajú tie, ktorých relatívna permeabilita je menšia ako 1. Druhú skupinu látok tvoria *paramagnetické*. Pomerná (relatívna) permeabilita týchto látok je len málo väčšia ako 1. Zvláštnu skupinu látok tvoria látky *feromagnetické*. Patria k nim najmä železo, kobalt, nikel a ich zliatiny. Relatívna permeabilita týchto látok je podstatne väčšia ako 1. Z hľadiska využitia v elektrotechnike majú podstatný význam. Charakteristikou vlastností feromagnetických látok je závislosť ich magnetickej permeability, od intenzity magnetického poľa a od ich predchádzajúcich magnetických stavov.

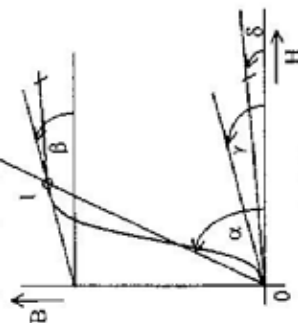


obr.5.6

Uvažujeme úplne odmagnetovaný prstenec z feromagnetického látky, rovnomerne ovínutý závitmi, obr.5.6. Pripojíme na cievku zdroj jednosmerného napätia a postupne plynule zvyšujeme prúd prechádzajúci cievkou. Z merania magnetickej indukcie v závislosti od intenzity magnetického poľa dostaneme krivku, obr.5.7. Analyticky sa dá zložiť popísať. Túto krivku nazývame *krivka prvotnej magnetizácie* (*magnetizačná charakteristika*).

Všimnime si na nej určité oblasti. Od počiatku cez dolnú nelineárnu časť prejde do takmer lineárnej prudko stúpajúcej časti a znova sa dostane do nelineárnej hornej oblasti po bod 1. Za bodom 1 je oblasť lineárna a s podstatne menším sklonom ako v prvej lineárnej oblasti. Krivka v časti 01 predstavuje *nenасыtění oblasť*, za bodom 1 je *oblasť насытění*.

V každom bode krivky môže-



obr.5.7

me určiť statickú permeabilitu

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{m_B}{m_H} \operatorname{tg} \alpha \quad (5.4.1)$$

a dynamickú permeabilitu

$$\mu_d = \frac{dB}{dH} = \frac{m_B}{m_H} \operatorname{tg} \beta \quad (5.4.2)$$

Početová permeabilita udáva sľnosť magnetizačnej charakteristiky v počiatku. Tu je statická a dynamická permeabilita rovnaká.

$$\mu_{\text{poč}} = \frac{m_B}{m_H} \operatorname{tg} \gamma \quad (5.4.3)$$

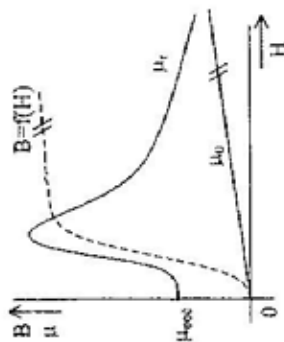
Oblasť magnetizačnej charakteristiky za bodom nasýtenia má ten istý sklon ako permeabilita vákua

$$\mu_0 = \frac{m_B}{m_H} \operatorname{tg} \delta \quad (5.4.4)$$

Na obr.5.8 je znázornený priebeh relatívnej permeability. Vidieť, že relatívna permeabilita má nelineárny priebeh. Konštantou je len pre určitú intenzitu magnetického poľa a k nej odpovedajúcej indukcii magnetického poľa. Vo výrazoch μ_0 a μ_H sú mierky B a H .

5.5 HYSTERÉZA

Po pripojení cievky na napätie a zvyšovaní prúdu v obvode na obr.5.6 sme dostali závislosť $B = f(H)$ - magnetizačnú charakteristiku. Znižovaním prúdu cez nulovú hodnotu do záporných hodnôt prúdu a znova narastaním prúdu do kladných hodnôt, dostaneme závislosť magnetizácie indukcie od intenzity magnetického poľa ako slučku, ktorú nazývame *hysteréza*



obr.5.8

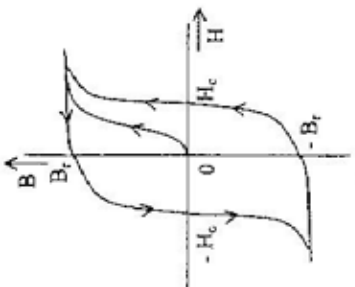
slučka, obr.5.9.

V prvom cykle magnetovania a od-magnetovania slučka nenadobudne taký tvar, ale pri opakovaní niekoľkých cyklov v tých istých medziach prúdu dostaneme uvádzaný tvar. Tvar hysteréznej slučky závisí aj od frekvencie zmeny prúdu.

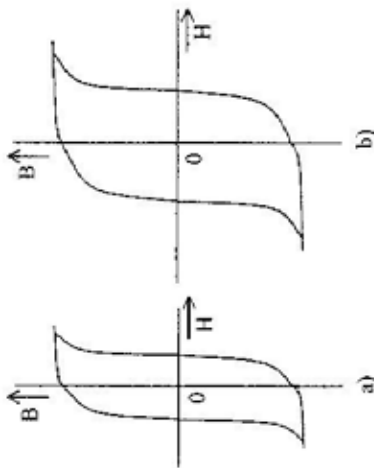
Úsek na vertikálnej osi, pri $H = 0$ sa menuje *zbytkový (remanentný) magnetizmus* B_r . Úsek na horizontálnej osi H_c , pri $B = 0$ sa nazýva *koerzitívna sila*.

Plochy hysteréznej slučky sú úmerné jednej zo strát vo feromagnetiku (v železe). Preto je potrebné podľa spôsobu prevádzky magnetického obvodu vybrať vhodný materiál.

Podľa plochy hysteréznej slučky rozoznávame materiály *magneticky mäkké*, obr.5.10a, používame ich tam, kde je časté premagnetovanie ob-



obr.5.9



obr.5.10

vodu. Hysteréza slučka *magneticky tvrdého materiálu* je na obr.5.10b. Takéto materiály sa používajú na stále (permanентné) magnety.

Pri malých zmenách intenzity magnetického poľa dochádza aj k malým zmenám indukcie magnetického poľa a vytvoria sa malé elementárne hysterézne slučky. Z prírastkov týchto veličín je definovaná takzvaná *prírastková (inkrementálna) permeabilita*, výraz (5.5.1) a obr.5.11.

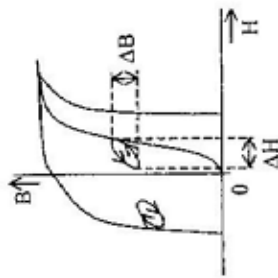
$$\mu_1 = \frac{\Delta B}{\Delta H}$$

(5.5.1)

a z nej v limite dostaneme vratnú (reverzibilnú) permeabilitu

$$\mu_v = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H}$$

(5.5.2)



obr.5.11

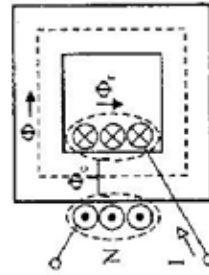
5.6 MAGNETICKÉ OBVODY

Medzi veličinami charakterizujúcimi magnetické a elektrické obvody existuje určitá analógia, ktorá nám umožňuje riešiť magnetické obvody s poznatkami získanými pri riešení obvodov jednosmerných prúdov. Túto analógiu nám vyjadruje nasledujúca tabuľka

Veličiny jednosmerných obvodov	U	I	R	G
Veličiny magnetických obvodov	$\mathcal{U}_m$	Φ	R_m	G_m

Ohmovmu zákonu je analogický Hopkinsonov zákon. Pri riešení magnetických obvodov s uvedenými analógiami budeme používať Kirchhoffove zákony.

Sú pravda určité odlišnosti. V jednosmerných obvodoch sme neuvažovali prúdy tečúce v izolácii, pretože vodivosť vodiča je oveľa väčšia ako vodivosť izolácie a celý prúd sme počítali, že prechádza vodičom. Magnetická vodivosť prostredia sa nikičedy málo odlišuje od magnetickej vodivosti telesa, ktoré vytvára magnetický obvod. Zdroj magnetomotorického napätia, cievka ktorou prechádza prúd, je len na časti tohoto obvodu. Preto musíme počítať, že nie celý magnetický tok Φ_0 bude prechádzať magnetickým obvodom, obr.5.12.



obr.5.12

Magnetický tok, ktorý sa uzatvára celým magnetickým obvodom nazývame *tok hlavný* $\Phi = \Phi_h$. Tok, ktorý čiastočne prechádza obvodom a čiastočne sa uzatvára prostredím sa volá *rozptyľový tok* $\Phi_r = \Phi_g$.

Matematicky vyjadríme celkový tok

$$\Phi_c = \Phi + \Phi_r \quad (5.6.1)$$

Koeficient rozptyľu sa udáva v literatúre dvojakým vyjadrením. Buď ako pomer hlavného toku k celkovému toku,

$$\tau = \frac{\Phi}{\Phi_c} \quad (5.6.2)$$

alebo pomer rozptyľového toku k celkovému toku

$$\sigma = \frac{\Phi_r}{\Phi_c} \quad (5.6.3)$$

potom platí pre hlavný tok

$$\Phi = \Phi_c - \Phi_r = \Phi_c (1 - \sigma) = \tau \Phi_c \quad (5.6.4)$$

V našich ďalších úvahách sa budeme zaoberať väčšinou obvodmi vyhotovenými z feromagnetických látok, magneticky dobre vodivými a rozptyľové toky budeme zanedbávať $\Phi_r = 0$. Cievkou s N závitmi, ktorou prechádza prúd I sa viaže s celým magnetickým tokom $\Phi = \Phi_c$, $\tau = 1$, $\sigma = 0$.

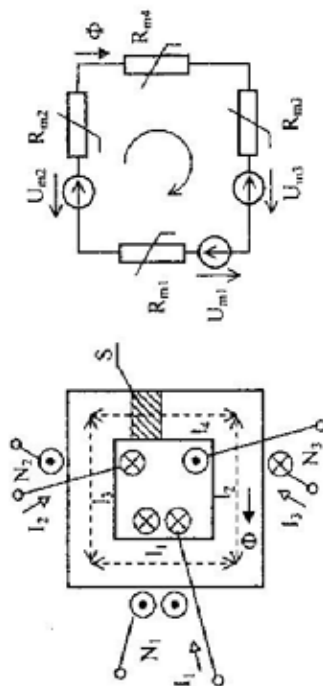
5.6.1 Sériový homogénny magnetický obvod

Použitím zákona celkového prúdu môžeme napísať rovnicu magnetických napätí pre magnetický obvod znázornený na obr.5.13.

Obvod je vyhotovený z rovnakého materiálu, prierezy jednotlivých častí obvodu sú rovnaké, rozptyľový tok zanedbáme, potom magnetický tok v celom magnetickom obvode je rovnaký. Takému magnetickému obvodu hovoríme, že je to *homogénny magnetický obvod*. Náhradná schéma tohto magnetického obvodu je na obr.5.14.

Kladné zmysly zdrojov magnetického napätia sú zvolené podľa voľby popísanej na obr.5.5. Odpory v náhradnej schéme sú znázornené ako neúmerne, pretože magnetický odpor závisí od permeability a zoznámi sa

s tým, že permeabilita je nelineárnou funkciou. Zvolíme znýslen popisovania a napíšeme rovnicu pre magnetické napätia podľa 2. K. z. ako analógiu pre napätia v jednosmerných obvodoch.



obr.5.13

$$R_{m1} \Phi + R_{m2} \Phi + R_{m3} \Phi + R_{m4} \Phi - U_{m1} - U_{m2} + U_{m3} = 0$$

$$\Phi (R_{m1} + R_{m2} + R_{m3} + R_{m4}) = N_1 I_1 + N_2 I_2 - N_3 I_3$$

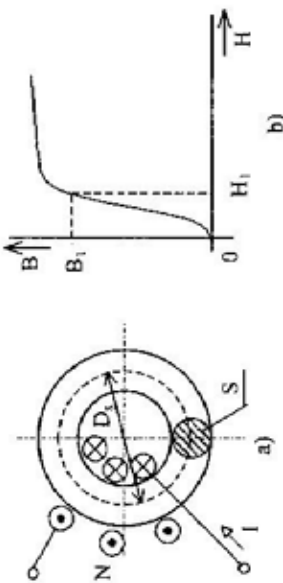
$$\Phi = \frac{\sum_{i=1}^n U_{mi}}{\sum_{i=1}^n R_{mi}}$$

Pravda, k určeniu magnetického odporu musíme poznať okrem geometrických rozmerov tej-ktorej časti magnetického obvodu aj permeabilitu materiálu tej časti. Už sme uvádzali, že permeabilita je nelineárna funkcia, teda jedna sa o riešenie nelineárnych rovníc.

Často sa robí riešenie magnetického obvodu graficko-počítácky. Uvedieme konkrétny príklad. Vpôdstate sú dva prípady:

- Pre daný magnetický tok v magnetickom obvode sa má určiť veľkosť magnetomotorického napätia a z neho určiť veľkosť napájacieho prúdu pri známom počte závitov cievky, alebo pri známom prúde určiť počet závitov cievky.

- Pre dané magnetomotorické napätie, určiť magnetický tok. Ukážeme riešenie prípadu a). Pre magnetický obvod je potrebné určiť



obr.5.15

prúd pretekajúci cievkou s počtom závitov N , aby bol v obvode magnetický tok Φ . Rozmery magnetického obvodu a magnetizačná charakteristika materiálu, z ktorého je vyhotovený magnetický obvod sú známe, obr.5.15.

Z magnetického toku a prierezu magnetického obvodu určíme magnetickú indukciu

$$B_1 = \frac{\Phi}{S}$$

Pre vypočítanú indukciu odčítame z magnetizačnej charakteristiky intenzitu magnetického poľa, obr.5.15b, potom zo zákona celkového prúdu určíme prúd

$$I = \frac{H_1 l}{N}$$

kde $l = \pi D$, je dĺžka strednej siločiarly magnetického obvodu.

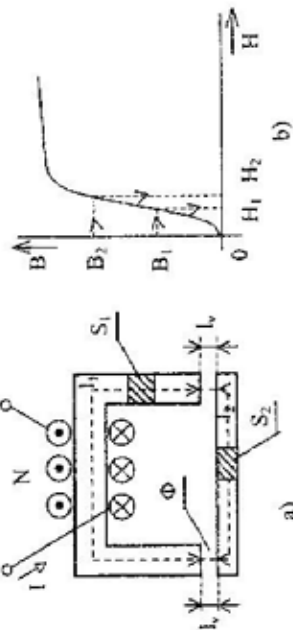
Prípad b) riešime metódou iterácie. Pre dané magnetomotorické napätie (ampérzávity), známe geometrické rozmery magnetického obvodu a danú magnetizačnú charakteristiku je potrebné určiť magnetický tok.

Odhadom určíme magnetický tok v magnetickom obvode. K nemu vypočítame magnetomotorické napätie, ako v predchádzajúcom prípade. Ak

sa vypočítané magnetomotorické napätie nezhoduje so zadaným, urobíme výpočet znova pre iný zvolený magnetický tok. Výpočet sa opakuje viac ráz, aby zhoda vypočítaného a zadaného magnetomotorického napätia bola čo najlepšia. Prípadne z niekoľkých vypočítaných hodnôt magnetomotorického napätia urobíme graf $\Phi = f(N)$ a pre zadané magnetomotorické napätie odčítame z toho grafu magnetický tok v obvode.

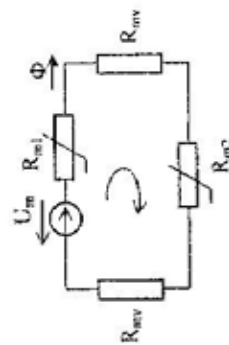
5.6.2 Sériový nehomogénny magnetický obvod

Nehomogénny magnetický obvodom budeme rozumieť taký obvod, v ktorom sa bude meniť prierez, alebo časti obvodu budú z rôznych materiálov, teda nemajú rovnaké magnetické vlastnosti. Riešenie obvodu bude obdobné ako obvodu homogénneho. Ukážeme si praktické riešenie.



Je potrebné určiť magnetizačný prúd elektromagnetu. Jeho magnetický obvod je na obr.5.16a. Rozmery, magnetizačná charakteristika obvodu a požadovaný magnetický tok vo vzduchovej medzere sú zadané. Rozpýtl zanedbáme.

Jeden spôsob riešenia je, že z požadovaného magnetického toku vo vzduchovej medzere a z prierezu vzduchovej medzery, ktorú pokrýva dané za rovnajúcu sa prierezu prvej časti obvodu, vypočítame magnetickú indukciu vo vzduchovej medzere (sýtenie) a v druhej časti obvodu



obr. 5.16

$$B_v = \frac{\Phi}{S_v} = B_1 ; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}$$

K vypočítaným magnetickým indukciám odčítame z magnetizačnej charakteristiky, obr.5.16b, intenzity magnetického poľa H_1 a H_2 . Intenzitu magnetického poľa vo vzduchovej medzere určíme zo vzťahu

$$H_v = \frac{B_v}{\mu_0}$$

Zo zákona celkového prúdu určíme prúd vo vinutí

$$I = \frac{H_1 l_1 + 2 H_v l_v + H_2 l_2}{N}$$

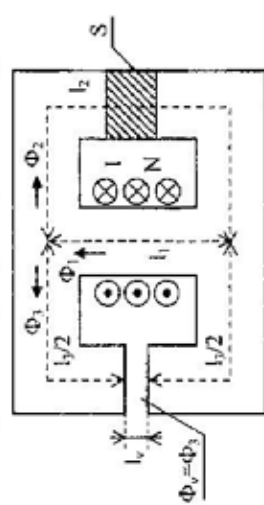
Pre druhý prípad riešenia, ak poznáme magnetické odpory obvodu, z náhradnej schémy, obr.5.16c, môžeme tiež napísať pre prúd

$$I = \frac{\Phi(R_{m1} + 2R_{mv} + R_{m2})}{N}$$

Magnetický odpor vzduchovej medzery v náhradnej schéme je lineárny.

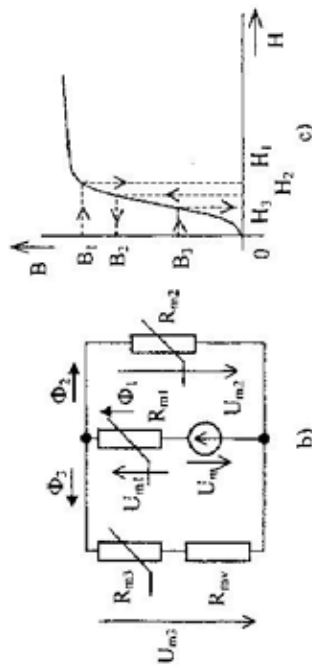
5.6.3 Rozvetvené magnetické obvody

Na obr.5.17a je znázornený rozvetvený magnetický obvod. Magnetický tok vytvorený magnetickým napätím (navinutou cievkou, ktorou preteká prúd) sa rozdelí do dvoch paralelných vetiev. Budeme aplikovať I. K. Z. ako analógiu z riešenia jednosmerných obvodov.



obr. 5.17a

Náhradná schéma magnetického obvodu je na obr.5.17b. Napíšeme pre ňu východiskové rovnice pre slučky a pre uzol. Vzduchová medzera je vzhľadom k iným dĺžkam daného magnetického obvodu malá, rozptýli za-



obr.5.17

nedbáme. Prietoky jednotlivých slúpcov sú rovnaké. Magnetizačná charakteristika je daná, obr.5.17c. Je potrebné určiť prúd prechádzajúci cievkou, keď požadujeme vo vzduchovej medzere magnetický tok Φ_3 .

Rovnice pre náhradnú schému sú

$$-U_{m1} - U_{m3} + U_m = 0$$

$$U_{m1} + U_{m2} - U_m = 0$$

$$-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$$

alebo

$$-H_1 l_1 - H_2 l_2 - H_3 l_3 = -NI$$

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI$$

$$\Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_1$$

$$(5.6.5)$$

Z podmienky požadovaného magnetického toku Φ_3 a prierezu S , bude vo vzduchovej medzere indukcia

$$B_v = \frac{\Phi_3}{S} = B_3$$

Intenzita magnetického poľa vo vzduchovej medzere

$$H_v = \frac{B_v}{\mu_0}$$

Intenzitu H_3 určíme pre B_3 z magnetizačnej charakteristiky. Dĺžky stredných slúpcov sú známe zo zadaného magnetického obvodu, takže U_{m3} môžeme vyčíslieť.

Druhá a tretia vetva sú paralelné, potom magnetické napätie na nich je rovnaké

$$U_{m3} = U_{m2} = H_2 l_2$$

z toho

$$H_2 = \frac{U_{m3}}{l_2}$$

Pre intenzitu H_1 odčítame z magnetizačnej charakteristiky indukciu B_2 . Tok v druhej vetve

$$\Phi_2 = B_2 S$$

Z tretej rovnice (5.6.5) určíme tok Φ_1

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

a magnetická indukcia v prvej časti obvodu je

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S}$$

Pre túto indukciu odčítame z magnetizačnej charakteristiky intenzitu H_1 . Potom buď z prvej, alebo z druhej rovnice (5.6.5) vyčíslime potrebný prúd pretekajúci cievkou

$$I = \frac{U_{mf} + U_{m2}}{N} = \frac{H_1 l_1 + H_2 l_2}{N}$$

V prípade, že v tretej vetve nie je vzduchová medzera, riešenie sa zjednoduší. Magnetický obvod bude pozostávať z dvoch rovnakých paralelných vetiev

$$\Phi_2 = \Phi_3 = \frac{\Phi_1}{2}$$

5.7 MAGNETICKÝ OBVOD S PERMANENTNÝM MAGNETOM

Magnetický obvod je vyhotovený z feromagnetického krúžku, so vzduchovou medzerou podľa obr.5.18, na ktorom sú po celom obvode prúdky navinuté závit. Krúžok bol namagnetovaný až do oblasti nasýtenia. Zo zákona celkového prúdu platí

$$H_v l_v + H_z l_z = NI$$

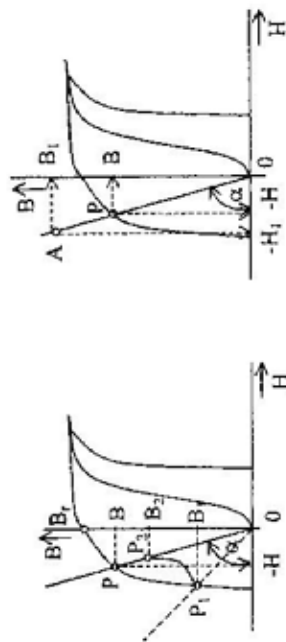
Ak prúd, ktorý prechádza cievkou vypneme, $I = 0$

$$H_v l_v + H_z l_z = 0 \quad (5.7.1)$$

Ak by nebola vzduchová medzera, indukcia magnetického poľa by sa rovnala remanentnému magnetizmu B_r , a intenzita magnetického poľa by sa rovnala nule, obr.5.19. Prítomnosť vzduchovej medzery spôsobí, že sa objaví určité magnetické napätie.

Z rovnice (5.7.1) intenzita magnetického poľa v železe je

$$H = -H_v \frac{l_v}{l_z} ; \quad H_v = -H \frac{l_z}{l_v} \quad (5.7.2)$$



obr.5.19

obr.5.20

V dôsledku rozptylu, tok cez vzduchovú medzeru bude menší ako tok v jadre. Použijeme koeficient rozptylu

$$\tau = \frac{\Phi_v}{\Phi}$$

Potom platí

$$B_v S_v = \tau B S_z$$

$$B_v = \frac{\tau S_z B}{S_v} \quad (5.7.3)$$

$$H_v = \frac{\tau S_z B}{\mu_0 S_v}$$

Dosadením z výrazu (5.7.2) a úpravou dostaneme

$$B = -\mu_0 \frac{1}{\tau} \frac{S_v l_z}{S_z l_v} H = -\frac{\mu_0}{k_d} H \quad (5.7.4)$$

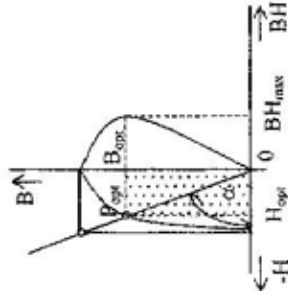
kde, $k_d = \tau \frac{S_z l_v}{S_v l_z}$ sa nazýva koeficient demagnetizácie.

Ak zväčšime vzduchovú medzeru obvodu, zväčší sa koeficient demagnetizácie a magnetická indukcia poklesne. Pracovný bod P sa presunie po demagnetizačnej charakteristike do nového pracovného bodu P_1 . Po nastavení pôvodnej vzduchovej medzery, sa nedostaneme na charakteristiku do pôvodného pracovného bodu, ale do bodu P_2 . Z toho vidieť, že rozobraním a znova skladaním magnetického obvodu s permanentným magnetom, sa jeho vlastnosti znehodnocujú. Zo vzťahu (5.7.4) a obr.5.19 vidieť, že

$$\operatorname{tg} \alpha \approx -\frac{B_0}{H} = \frac{\mu_0}{k_d} \quad (5.7.5)$$

Ak budeme vzduchovú medzeru zväčšovať, smernica priamky určujúca pracovný bod v obvode permanentného magnetu bude klesať.

Pri určovaní magnetickej indukcie vo vzduchovej medzere obvodu s permanentným magnetom vychádzame z určitej intenzity magnetického poľa H_1 , z rozmerov obvodu, koeficientu rozptylu a z demagnetizačnej charakteristiky materiálu, obr.5.20.



obr.5.21

Zo vzťahu (5.7.4) vypočítame odpovedajúcu indukciu B_1 . Bodom A so súradnicami $(-H_1; B_1)$ a počiatkom preložíme priamku. Kde sa pretne priamka s demagnetizačnou charakteristikou dostaneme pracovný bod P, k nemu určíme príslušnú indukciu a intenzitu magnetického poľa B a H.

Pracovný bod môžeme určiť aj tak, že zo vzťahu (5.7.5) určíme $\operatorname{tg} \alpha$ a priesečníkom priamky idúcej z počiatku pod uhlom α , s demagnetizačnou charakteristikou dostaneme pracovný bod P.

Po určení B zo vzťahu (5.7.3) vypočítame indukciu vo vzduchovej medzere.

V praxi je požiadavka, aby účinky permanentného magnetu boli maximálne pri minimálnych rozmeroch, jedná sa o optimálny návrh magnetu. V tom prípade je požiadavka, aby mal magnet maximálnu *energetickú účinnosť* BH.

Vynásobením vzťahov (5.7.2) a (5.7.3) bez uváženia znatienka, obdržime

$$B_v H_v = \frac{\tau l_2 S_2}{l_v S_v} BH \quad \text{a z toho objem magnetu je}$$

$$l_2 S_2 = \frac{l_v S_v B_v H_v}{\tau BH} \quad (5.7.6)$$

Ak súčin BH v menovateli vzťahu (5.7.6) bude maximálny, objem magnetu je minimálny, potom hodnoty B a H sú optimálne, obr.5.21.

Pri známych rozmeroch vzduchovej medzery, požadovanej indukcie magnetického poľa vo vzduchovej medzere a demagnetizačnej charakteristike materiálu, zo vzťahov (5.7.2) a (5.7.3) môžeme určiť minimálne rozmery magnetu.

$$l_2 = \frac{H_v}{H_{opt}} l_v \quad ; \quad S_2 = \frac{S_v B_v}{\tau B_{opt}}$$

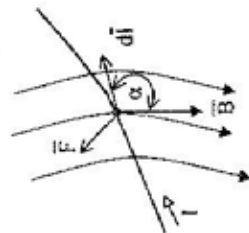
Podobne pre známe rozmery magnetu, požadovanú hodnotu indukcie magnetického poľa vo vzduchovej medzere a zo známeho tvaru jeho demagnetizačnej charakteristiky, môžeme navrhnúť rozmery vzduchovej medzery pri optimálnom využití magnetu.

5.8 SILOVÉ ÚČINKY MAGNETICKÉHO POĽA

Na vodiči elementárnej dĺžky $d\vec{l}$, ktorým preteká ustálený jednosmerný prúd I a nachádza sa v magnetickom poli s indukciou $\vec{B}$, pôsobí sila

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (5.8.1)$$

Vektor $d\vec{l}$ má zmysel prúdu v uvažovanom vodiči. Smerník je kolmý na rovinu vytvorenú vektorom elementárnej dĺžky $d\vec{l}$ a vektorom magnetickej indukcie $\vec{B}$, zmysel sily vyplýva z vektorového súčinu. Medzi vektormi $d\vec{l}$ a $\vec{B}$ je uhol α , obr.5.22.



obr.5.22

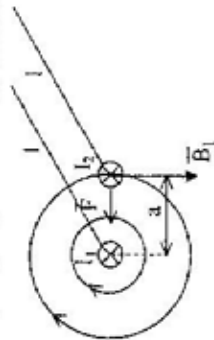
$$\vec{F} = I \int (\vec{dl} \times \vec{B})$$

$$F = I \int B \sin \alpha dl = IB \sin \alpha \quad (5.8.2)$$

V praxi sa volí uhol $\alpha = 90^\circ$, vodič je na magnetické pole umiestnený kolmo. Ak predpokladáme, že magnetické pole je homogénne, potom

$$F = I B l; \quad [N; A, T, m] \quad (5.8.3)$$

Zmysel pôsobenia síly môžeme tiež určiť mnemotechnickým pravidlom ľavej ruky. *Ľavú ruku dáme do magnetického poľa tak, aby siločiarly do dlane vstupovali, vystreté prsty ukazovali zmysel prúdu a vystretý palec ukazuje zmysel pôsobenia síly*, obr. 5.23.

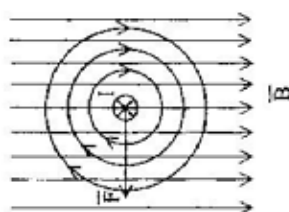


obr. 5.24

Prúdovodič umiestnený vedľa seba pôsobí na seba silou. Každý prúdovodič vytvára svoje vlastné magnetické pole a pôsobí na iné prúdovodiče, ktoré sa v jeho poli nachádzajú silou. (Ukázali sme to v predchádzajúcom prípade.)

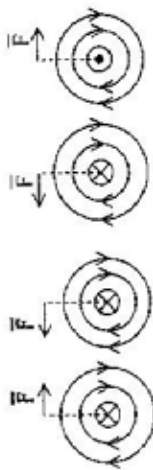
Podľa obr. 5.24 prvým vodičom preteká prúd I_1 , druhým I_2 , ich dĺžka je l , sú od seba vzdialené o vzdialenosť a , umiestnené sú vo vzduchu (vo vákuu). Prvý prúdovodič vytvorí magnetické pole s magnetickou indukciou B_1 v mieste druhého vodiča. Druhý prúdovodič je v magnetickom poli a pôsobí naň sila podľa (5.8.3)

$$F = I_2 B_1 l$$



obr. 5.23

Tým, že vodičom preteká prúd, podľa predchádzajúceho vieme, že sa v okolí prúdovodiča vytvorí magnetické pole, ktorého siločiarly majú tvar sústredných kružníc. V ľavej časti sa účinky magnetického poľa odčítajú, v pravej časti sa účinky spočítajú a prúdovodič bude vytláčaný zo silnejšieho do slabšieho magnetického poľa, obr. 5.25.



obr. 5.25

sa bude nachádzať v magnetickom poli druhého vodiča. Oba vodiče budú na seba pôsobiť silou, buď sa budú priťahovať, ak zmysly prúdov vo vodičoch sú zhodné, alebo sa budú odpudzovať, ak zmysly prúdov vo vodičoch sú orientované proti sebe, obr. 5.25.

Z elektrodynamických síl je definovaná jednotka prúdu 1 Amper.

Ak dva „nekonečne“ dlhé rovnobežné vodiče zanedbateľného prierezu uložené vo vákuu (vo vzduchu), vzdialené od seba 1 m, pôsobia na seba silou $2 \cdot 10^{-7}$ N na dĺžke 1 m, pretekajú nimi prúd 1 A.

Poznatok o elektrodynamických silách je základom pre konštrukciu rôznych zariadení v elektrotechnike (meracie systémy, elektrické motory a pod.).

Zo vzťahu, ktorý udáva závislosť magnetickej indukcie od intenzity magnetického poľa vo vzduchu, určíme

$$B_1 = \mu_0 H_1$$

a zo zákona celkového prúdu určíme intenzitu magnetického poľa od prvého vodiča v tomto mieste

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi a}; \quad \text{kde } 2\pi a \text{ je dĺžka siločiar. Po dosadení a úprave do}$$

výrazu pre silu dostaneme

$$F = 2 \cdot 10^{-7} I_1 I_2 \frac{l}{a}; \quad [N; A, m] \quad (5.8.4)$$

je to tzv. *elektrodynamická sila*.

Druhý vodič tak isto vytvorí svoje magnetické pole a prvý prúdovodič

5.9 ELEKTROMAGNETICKÁ INDUKCIA

Zmenou magnetického poľa vzniká pole elektrické. V elektrotechnickej praxi sa využíva tento poznatok na získanie indukovaného napätia, najčastejšie v uzavretých slučkách tvorených vodičom.

5.9.1 Transformačné indukované napätie

Predpokladáme, že je v magnetickom poli umiestnená slučka tvorená vláknovým vodičom (vodič zanedbateľného prierezu) a odporom R , ktorý reprezentuje aj odpor slučky vláknového vodiča, obr.5.26.

Ak sa zmení magnetický tok Φ v závislosti od času, vyvolá táto zmena magnetického toku v obvode slučky okamžitý prúd a platí

$$Ri = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.9.1)$$

Jav elektromagnetickej indukcie objavil Faraday. Výraz na pravej strane rovnice (5.9.1)

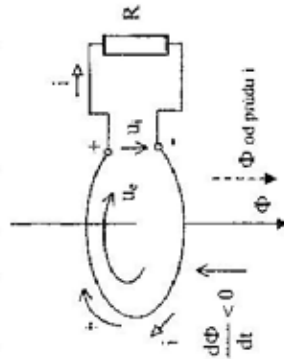
$$-\frac{d\Phi}{dt} = u_e$$

sa nazýva *elektromotorickým indukovaným napätím*. Čo do veľkosti, absolútnej hodnoty, je rovnako veľké ako napätie na svorkách slučky, ktorému hovoríme *svorkové indukované napätie*, ale je opačného zmyslu, teda

$$u_i = \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.9.3)$$

Môžeme vysloviť indukčný zákon. Zmenou magnetického toku idúceho plochou, ktorú slučka ohraničuje sa indukuje v slučke napätie úmerné rýchlosti zmeny magnetického toku.

O zmysle, o orientácii tohoto napätia hovorí Lencov zákon. Zmysel indukovaného napätia a od neho pretekaného prúdu obvodom je vždy taký, že pôsobí proti zmene, ktorou bol vyvolaný, obr.5.26 a obr.5.27.



obrázok 5.27

cievkou s N závitmi, indukované napätie je

$$u_i = N \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} \quad (5.9.4)$$

kde $N\Phi = \Psi$ je celkový magnetický tok.

V doteraz popisovaných javoch o indukovanom napätí sa magnetický tok mení v závislosti od času a poloha závitov sa vzhľadom k magnetickému poľu nemenila, preto takejto forme indukovaného napätia hovoríme *transformačné indukované napätie*.

5.9.2 Pohybové indukované napätie

Za predpokladu, že sa magnetické pole, v ktorom sa nachádza slučka nebude meniť v závislosti od času, ale sa bude meniť tým, že budeme slučkou pohybovať, bude sa indukovať napätie, ktorému hovoríme *pohybové indukované napätie*.

Majme slučku vytvorenú priamym vodičom dĺžky l , zbernicami 1, 2, s ktorými má vodič dokonalé spojenie a môže sa po nich pohybovať a voltmetrom, ktorého vnútorná spotreba je zanedbateľná. Plocha takto vytvorenej slučky je kolmá na magnetické pole, obr.5.28. Pohybujme vodičom po zbernicách rýchlosťou v kolmo na magnetické pole. Za čas dt vodič

vykoná dráhu dx . Veľkosť magnetického toku cez plochu, ktorá vznikla posunutím vodiča je

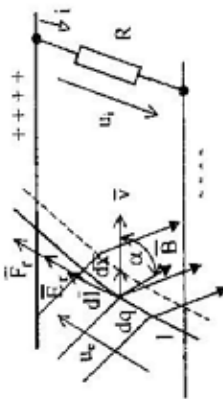
$$d\Phi = B \, dS = B l \, dx$$

S uvažovaním vzťahu (5.9.4)

$$u_l = B l v \quad (5.9.5)$$

Zmysel indukovaného napätia je daný Lencovým zákonom. Prúd, ktorý bude pretekať v obvode od indukovaného napätia, musí s magnetickým poľom vyvolať silu proti zmyslu pohybu vodiča.

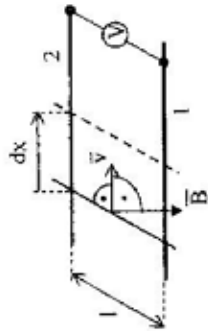
Zmysel indukovaného napätia určíme aj mnemotechnickým pravidlom pravej ruky. Právú ruku položíme na vodič tak, aby siločiar magnetického poľa vstupovali do dlane, vystreli palec musí byť vo zmysle pohybu vodiča a vystreté prsty ukazujú zmysel pretekajúceho prúdu vodičom od indukovaného napätia.



obr. 5.29

Polybové indukované napätie môžeme vysvetliť aj z nasledujúcej úvahy. V jednej z prechádzajúcich častí sme hovorili o silovom pôsobení magnetického poľa na prúdovodič, ktorý je v ňom umiestnený. Vektor sily sme vyjadrili vzťahom $\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$. Ak polybujeme vodičom v magnetickom poli, pohybujú sa aj voľné náboje, ktoré sa vo vodiči nachádzajú a pôsobi na ne rozdeľujúca sila, ktorá spôsobí to, že sa na jednom konci vodiča nahromadia náboje jednej polarítity, na druhom konci vodiča opačnej polarítity.

Určíme z vodiča dĺžku l , elementárnu časť dl , ktorá má voľný náboj $+dq$, obr. 5.28. Posunutie vodiča o vzdialenosť dx za čas dt , odpovedá prúdu $i = \frac{dq}{dt}$, takže rozdeľujúca sila pôsobiaca na náboj dq je



obr. 5.28

$$d\vec{F}_r = \frac{dq}{dt} (d\vec{x} \times \vec{B}) = dq(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.9.6)$$

pričom $\vec{v}$ je okamžitá rýchlosť vodiča. Dosadením za silu, pôsobiacu na náboj v elektrickom poli, dostaneme výraz

$$d\vec{q}\vec{E}_r = dq(\vec{v} \times \vec{B}), \text{ kde } \vec{E}_r \text{ je vektor intenzity elektrického poľa.}$$

Ďalšou úpravou, z rozdielu potenciálov v elektrickom poli, dostaneme napätie

$$u_e = \int_0^l \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = \int_0^l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Takže pre indukované elektromotorické napätie dostaneme výraz

$$u_e = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (5.9.7)$$

Potom polybové indukované napätie je

$$u_i = -u_e = -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l} \quad (5.9.8)$$

alebo

$$u_i \approx Bvl \sin \alpha \cos \beta \quad (5.9.9)$$

pričom uhol α je medzi vektorom rýchlosti a vektorom indukcie magnetického poľa, uhol β je medzi vektorom $(\vec{B} \times \vec{v})$ a vektorom elementu vodiča.

Ak $\alpha = 90^\circ$ a $\beta = 0^\circ$, čo sa v praxi takto najčastejšie volí, dostaneme maximálne indukované polybové napätie $u_{im} = Bvl$.

Zmysel polybového indukovaného napätia vyplýva zo vzťahu (5.9.8).

5.10 KOEFICIENT VLASTNEJ INDUKČNOSTI

V prostredí s konštantnou permeabilitou je intenzita a indukcia magnetického poľa vytvoreného závitom, ktorým preteká prúd, úmerná pretekajúcemu prúdu.

Ak sa nemenia geometrické rozmery závit, potom je aj magnetický tok úmerný prúdu. V prípade, že vektor magnetickej indukcie a vektor elementárnej plochy, ktorou magnetický tok prechádza sú kolmé, máme

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = LI \quad (5.10.1)$$

Konštantu úmernosti L nazývame *koefficient vlastnej indukčnosti (indukčnosť)*.

Uvažujeme cievku s N závitmi, ktorej $\Psi = N\Phi$ je celkový magnetický tok, potom koefficient vlastnej indukčnosti (indukčnosť) je

$$L = \frac{\Psi}{I} ; [H; Vs, A] \quad (5.10.2)$$

Jednotkou indukčnosti je 1 Henry [H]. Z Hopkinsonovho zákona platí pre magnetický tok

$$\begin{aligned} \Phi &= G_m U_m = \mu_0 \mu_r \frac{S}{l} NI^2, \text{ potom celkový magnetický tok je} \\ \Psi &= N\Phi = \mu_0 \mu_r \frac{S}{l} N^2 I \end{aligned} \quad (5.10.3)$$

Dosadením vzťahu (5.10.3) do (5.10.2) dostaneme výraz pre indukčnosť

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{S}{l} N^2 = G_m N^2 \quad (5.10.4)$$

Ako vidieť zo vzťahu (5.10.4), indukčnosť závisí od permeability prostredia, geometrických rozmerov cievky a od druhého mocniny počtu závitov.

Vo vzťahu (5.10.4) sme písmenom S označili plochu, ktorou prechádza magnetický tok, l je dĺžka strednej siločiar. V prípade, že magnetický tok je vytvorený rovnou kruhovou cievkou, ktorej priemer je vzhľadom k dĺžke malý, môžeme považovať plochu S za prierez cievky a dĺžku strednej siločiar l za dĺžku cievky. Potom môžeme približne zo vzťahu (5.10.4) vypočítať indukčnosť cievky. Podrobnejšie výpočtom indukčnosti sa budeme zaoberať v inej časti predmetu Teoretická elektrotechnika.

Ak sa prúd, ktorý preteká cievkou mení v závislosti od času, mení sa aj magnetický tok ním vytvorený a podľa indukčného zákona, sa bude vo vodičoch indukovať napätie

$$u_L = u_1 = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (5.10.5)$$

Je to *jov vlastnej indukcie (samaindukcie)*. Napätie nazývame *samoindukovaným napätím*.

Elektromotorické indukované napätie je

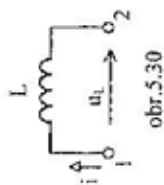
$$u_e = -L \frac{di}{dt} \quad (5.10.6)$$

Idealizovaný magnetický obvod, podľa predchádzajúcich úvah je na obr.5.29. Kladný zmysel prúdu volíme napr. od svorky 1 ku svorky 2, (napr. od začiatku vinutia ku koncu vinutia). Kladný zmysel napätia volíme v súlade so spotrebitel'ským systémom voči prúdu. V našom prípade od svorky 1 ku svorky 2. Zmysel indukovaného napätia je daný deriváciou prúdu. Zmysel indukovaného elektromotorického napätia je podľa Lencovho zákona. Na obr.5.29 sú zakreslené napätia a prúd pre $\frac{di}{dt} > 0$.

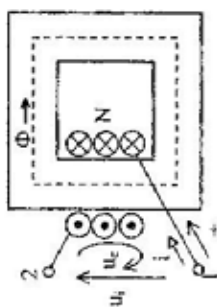
Indukčnosť považujeme za pasívny prvok v elektrickom obvode. O zmysle kreslenia šípok napätia a prúdu platí už povedané, obr.5.30.

Zo vzťahu (5.10.2) sa určuje tzv. *statická indukčnosť*, je to pomer celkového magnetického toku ku prúdu, ktorý tento magnetický tok vyvolal.

Dynamická indukčnosť je daná z rovnice (5.10.5)



obr.5.30

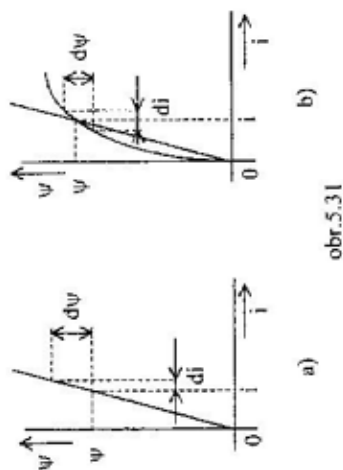


obr.5.29

$$L = \frac{d\psi}{di}$$

(5.10.7)

ako derivácia celkového magnetického toku podľa prúdu.



obr. 5.31

Zariadenia, ktorých odpor vlnitá je s ohľadom na reaktanciu induktívneho charakteru pri prúde meniacom sa s časom malý, nazývame *tlmivky*.

Závislosť celkového magnetického toku od prúdu sa nazýva *vnútorná charakteristika tlmivky* $\psi = f(i)$; často sa jej hovorí *Weber-ampérová charakteristika*. Pre magnetické obvody s konštantnou permeabilitou je táto závislosť na obr. 5.31a. Indukčnosť nezávisí od prúdu.

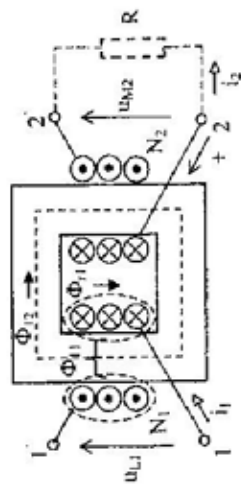
Tlmivky s feromagnetickým jadrom pri väčších sytenciách majú vnútornú charakteristiku nelineárnu, obr. 5.31b.

5.11 KOEFICIENT VZÁJOMNEJ INDUKČNOSTI

Majme magnetický obvod ako je znázornený na obr. 5.32. Cievkou s N_1 závitmi preteká prúd i_1 meniaci sa s časom. Vytvorí magnetický tok

$$\Phi_{11} = G_{m11} N_1 i_1, \text{ od neho sa vytvorí v cievke 1 samoindukované napätie}$$

$$u_{L1} = N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} = G_{m11} N_1^2 \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$



obr. 5.32

Časť toku Φ_{11} sa uzatvára okolo cievky 1, nazývame ho *rozptyľový magnetický tok* Φ_{e1} (často sa označuje Φ_{e1})

$$\Phi_{e1} = G_{m11} N_1 i_1$$

Podstatná časť toku Φ_{11} sa uzatvára magnetickým obvodom, menujeme ho *tok hlavný*

$$\Phi_{12} = G_{m12} N_1 i_1$$

a predpokladáme, že sa celý viaže so závitmi druhej cievky. Keď sa mení s časom, bude v druhej cievke so závitmi N_2 indukovať napätie

$$u_{M2} = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = G_{m12} N_1 N_2 \frac{di_1}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (5.11.1)$$

kde

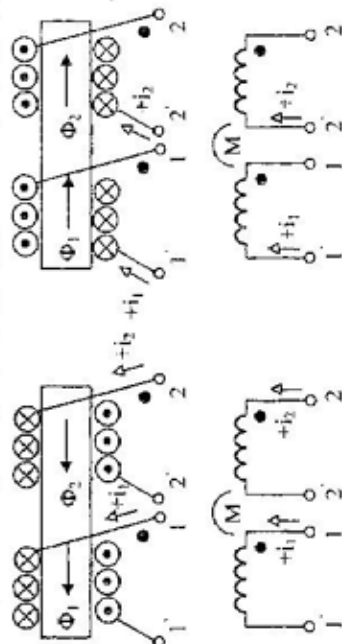
$$M_{21} = G_{m12} N_1 N_2 \quad (5.11.2)$$

je *koefficient vzájomnej indukčnosti (vzájomná indukčnosť)*. Tento jav nazývame *javom vzájomnej indukcie* a indukované napätie je *napätie vzájomnej indukcie*.

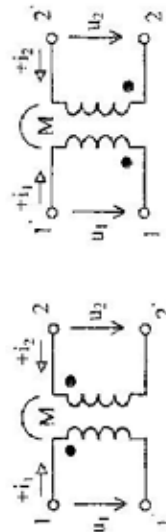
Zmysel indukovaného napätia určuje derivácia prúdu, ktorý napätie vyvolal, zmysel prúdu od indukovaného napätia je daný Lencovým zákonom. Po pripojení ohmnickej záťaže na druhú cievku, prúd od indukovaného napätia prechádza takým zmyslom, aby pôsobil proti príčine, ktorou bol

vyvolaný. Na obr.5.32 zakreslené zmysly u_{M2} a i_2 odpovedajú $\frac{di_1}{dt} > 0$.

Prí viacerých cievkach, ktoré budú mať magnetickú väzbu, musíme rozoznávať spôsob vinutia (pravotočivé, alebo ľavotočivé vinutie) a orientáciu (koniec a začiatok vinutia). Začiatky vinutí sa v schémach obyčajne označujú bodkou $\bullet$, alebo krížikom $\otimes$, a pod., prípadne sú rozlíšené písmennými znakmi (začiatky 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100).



obr.5.33



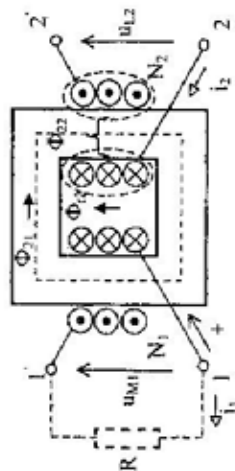
obr.5.34

Ak zvolíme v prvom vinutí kladný zmysel prúdu, v druhom vinutí je kladný zmysel prúdu viazaný tým, aby vyvolával súhlasný magnetický tok, obr.5.33. Kladný zmysel prúdu v prvej cievke je daný jeho rastom, t.j. jeho deriváciou podľa času je kladná.

Kladný zmysel indukovaného napätia v druhej cievke je viazaný vofbou kladného zmyslu napätia v prvej cievke, čo je podmienené kladným

zmyslom prúdu, ktorý napätie vyvoláva. Ak volíme napr. napätie za kladné od začiatku ku koncu vinutia v prvej cievke, v druhej cievke je tiež kladný zmysel napätia od začiatku ku koncu vinutia, obr.5.34. Zodpovedá to na kreslenému vinutiu na obr.5.32 a obr.5.35.

Jav vzájomnej indukcie nastane tiež, keď bude pretekať prúd druhou cievkou. V prvej cievke sa bude indukovať napätie od zmeny prúdu v druhej cievke, obr.5.35.



obr.5.35

Podobne môžeme napísať vzťahy pre magnetické toky vyvolané prúdom z druhej cievky ako v predchádzajúcom prípade. Zakreslené zmysly napätia a prúdu na obr.5.35 sú pre $\frac{di_2}{dt} > 0$.

$\Phi_{22} = G_{m22} N_2 i_2$. Samoindukované napätie v druhej cievke je

$$u_{L2} = N_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} = G_{m22} N_2^2 \frac{di_2}{dt}$$

Rozptylový tok je $\Phi_{r2} = G_{m22} N_2 i_2$

Hlavný tok je $\Phi_{21} = G_{m21} N_2 i_2$

Napätie vzájomnej indukcie je

$$u_{M1} = N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = G_{m21} N_1 N_2 \frac{di_2}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (5.11.3)$$

Pretože hlavný magnetický tok Φ_{21} sa uzatvára tým istým magnetickým obvodom ako Φ_{12} , magnetická vodivosť obvodu je v oboch prípadoch rovnaká, takže aj koeficient vzájomnej indukčnosti je v oboch prípadoch rovnaký

$$M_{21} = M_{12} = M \quad (5.11.4)$$

takže môžeme napísať pre indukované napätia

$$u_{M2} = M \frac{di_1}{dt} \quad (5.11.5)$$

$$u_{M1} = M \frac{di_2}{dt}$$

Zo vzťahu (5.11.5) dynamická vzájomná indukčnosť je podiel napätia vzájomnej indukcie v jednej cievke a derivácie prúdu podľa času v druhej cievke

$$M = \frac{u_{M2}}{\frac{di_1}{dt}} = \frac{u_{M1}}{\frac{di_2}{dt}} \quad (5.11.6)$$

Statická vzájomná indukčnosť je podiel spoločného celkového magnetického toku v jednej cievke a prúdu v druhej cievke

$$M = \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_2} = \frac{\Psi_{M1}}{i_2} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1} = \frac{\Psi_{M2}}{i_1} \quad (5.11.7)$$

5.12 KOEFICIENT VZÁJOMNEJ VÄZBY

Keď uvažujeme, že celý magnetický tok vyvolaný jednou cievkou sa viaže s druhou cievkou (rozptylové toky zanedbáme)

$$\Phi_{11} = \Phi_{12}$$

podiel celkových magnetických tokov je

$$\frac{\Psi_{11}}{\Psi_{M2}} = \frac{N_1 \Phi_{11}}{N_2 \Phi_{12}} = \frac{L_1 I_1}{M I_1} \quad \text{to značí, že}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{L_1}{M} \quad (5.12.1)$$

Podobne pre druhú cievku

$$\Phi_{22} = \Phi_{21} ; \quad \frac{\Psi_{22}}{\Psi_{M1}} = \frac{N_2 \Phi_{22}}{N_1 \Phi_{21}} = \frac{L_2 I_2}{M I_2}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{L_2}{M} \quad (5.12.2)$$

Porovnaním výrazov (5.12.1) a (5.12.2) dostaneme

$$\frac{M}{L_1} = \frac{L_2}{M} \quad \text{a odiaľ}$$

$$M^2 = L_1 L_2 \quad (5.12.3)$$

Ak uvažujeme rozptylové toky, potom

$$\Phi_{12} < \Phi_{11}, \quad \Phi_{21} < \Phi_{22}, \quad \text{potom aj} \\ M^2 < L_1 L_2 \quad (5.12.4)$$

Koeficientu, ktorá charakterizuje rozptyl, ako už bolo povedané, menujeme koeficient rozptylu a je

$$\sigma = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

Magnetickú väzbu udávame koeficientom väzby, ktorý je

$$k = \sqrt{1 - \sigma} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (5.12.5)$$

Hodnoty koeficienta väzby sú v medziach $0 \leq k < 1$.

5.13 ENERGIA MAGNETICKÉHO POĽA

Indukčnosť cievky závisí od druhej mocniny počtu závitov, od permeability a rozmerov cievky. Odpor vinutia závisí od merného odporu a geometrických rozmerov vodiča. Z uvedeného vidieť, že cievku môžeme nahraďiť indukčnosťou a ohmickým odporom, tak ako sme to mali v časti striedavých obvodov uvedenú, náhradná schéma je na obr.5.36.

Po pripojení obvodu na konštantné napätie U , pretečie obvodom prúd. Pre okamžité napätia napíšeme rovnicu podľa 2. K. z. Pokiaľ prúd nenadobudne ustálenú hodnotu

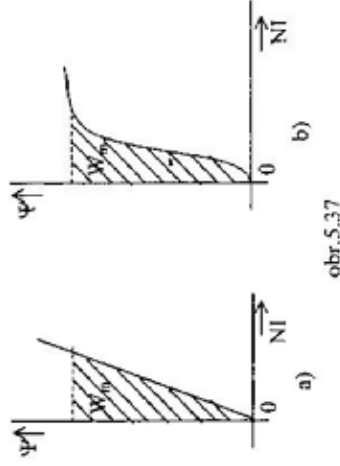
$$U = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (5.13.1)$$

Rovnicu (5.13.1) vynásobíme $i dt$ a urobíme integráciu, potom

$$\int_0^t U i dt = \int_0^t Ri^2 dt + \int_0^t L i di \quad (5.13.2)$$

Ľavá strana rovnice (5.13.2) predstavuje celkovú energiu dodanú do obvodu. Prvý člen rovnice na pravej strane odpovedá energii, ktorá sa premenila na teplo, druhý člen na pravej strane v rovnici odpovedá energii magnetického poľa. Po vykonaní integrácie

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \Psi I \quad (5.13.3)$$



Pre magnetický obvod s lineárizovanou magnetizačnou charakteristikou a za predpokladu, že zanedbáme rozptylové toky, môžeme napísať

$$W_m = \frac{1}{2} NI \Phi = \frac{1}{2} U_m \Phi = \frac{1}{2} H I S B = \frac{1}{2} H V B \quad (5.13.5)$$

kde $IS = V$ je objem magnetického obvodu.

V magnetizačnej charakteristike na obr.5.37a je magnetická energia úmerná vyšrafovanej ploche. Ak dosadíme do druhého člena na pravej strane rovnice (5.13.2) za indukčnosť z dynamickej definície, dostaneme

$$W_m = \int_0^\Psi i d\psi \quad (5.13.6)$$

teda pre neľínarú magnetizačnú charakteristiku, obr.5.37b, energia magnetického poľa je úmerná vyšrafovanej ploche.

5.14 PRIŤAŽLIVÁ SILA ELEKTROMAGNETU

Magnetický obvod na obr.5.38 je prerušený vzduchovou medzerou. Permeabilita vzduchu je oveľa menšia ako permeabilita feromagnetika, teda intenzita magnetického poľa vo feromagnetiku je zanedbateľná voči inten-

zité magnetického poľa vo vzduchovej medzere. Zo vzťahu pre energiu magnetického poľa

$$W_m \approx 0,5 H S l B$$

môžeme predpokladať, že celá energia je vo vzduchovej medzere. V magnetickom obvode sa vytvoril severný a južný pól a pôsobí na seba príťažlivou silou. Ak sa posunú póly o vzdialenosť dl , vykoná sa mechanická práca (energia)

$$dA_{mech} = F dl$$

Tým sa zmenší vzdialenosť medzi pólmi a energia magnetického poľa poklesne. Mechanickú prácu vytvára energia magnetického poľa.

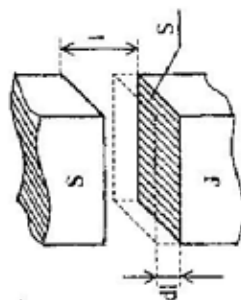
$F dl = 0,5 H S l B$; z toho mechanická sila je

$$F = \frac{dA_{mech}}{dl} = \frac{1}{2} H S B \quad (5.14.1)$$

Pretože sa energia magnetického poľa znižuje vzájomným približovaním pólov, často sa výraz (5.14.1) udáva so záporným znamienkom, čo len odzrkadľuje túto skutočnosť. Uvažujeme len veľkosť sily. Kvôli jednoduchosťi sme pri úvahe zanedbávali rozptylový magnetický tok a pre malé vzdialenosti, považujeme indukciu a intenzitu magnetického poľa za konštantné.

Dosadením do výrazu (5.14.1) za intenzitu magnetického poľa vo vzduchu, môžeme napísať výraz pre silu

$$F = \frac{B^2 S}{2.4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 4 \cdot 10^3 B^2 S \quad ; \quad [N; T; m^2] \quad (5.14.2)$$



obr. 5.38

POUŽITÁ LITERATÚRA

1. Mayer D. : Úvod do teórie elektrických obvodů, SNTL/ALFA, Praha 1978
2. Mikulec M. – Havlíček V. : Základy teórie elektrických obvodů, Vydavatelství ČVUT, Praha 1997
3. Šimko V. : Základy elektrotechniky, učebný text VŠT v Košiciach, ALFA Bratislava 1981

82