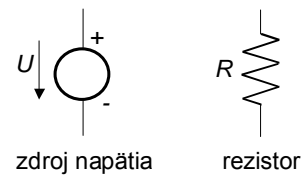


DVOJPÓLY

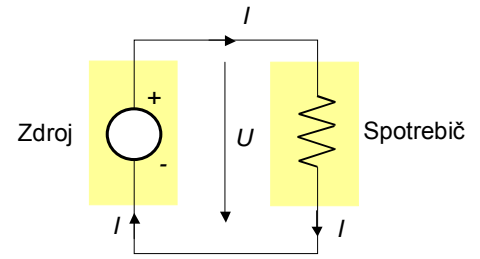
Základné prvky (elementy), pomocou ktorých *modelujeme* zložitejšie tzv. *rezistívne* sústavy sú dva, obr.1. Každý z nich je charakterizovaný jediným parametrom. Zdroj napätia je určený vnúteným napätím (U) pričom jeho prúd môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu (kladnú, nulovú zápornú). Rezistor je určitý odporom (R). Je to konštanta vyhovujúca vzťahu: $R = \frac{u(t)}{i(t)}$, pritom



obr. 1

samozrejme môže byť priebeh napätia a prúdu v čase nepremenlivý, konštantný: $u(t) = U$, $i(t) = I$.

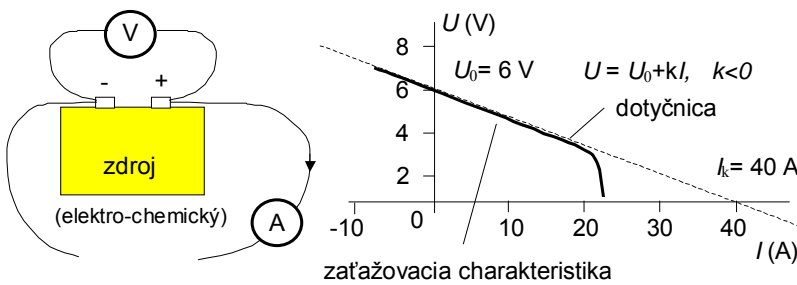
Kladné zmysly napätia a prúdu. V obvode na obr.2 je len jedno napätie (U) a jeden prúd (I). Na objektoch (Zdroj, Spotrebič) musí byť preto orientácia U a I navzájom opačná. Dohoda (konvencia) - zdroj: $\uparrow\downarrow$, spotrebič: $\downarrow\downarrow$. Poznámka: Aj „zdrojom“ aj „spotrebičom“ môže byť napríklad reálny zdroj ako je to na obr. 4. Reálny zdroj, (napríklad elektro-chemická batéria) je relatívne zložitá, nelineárna sústava. Jej správanie možno (zvonka) opísať na základe merania napätia na batérii v závislosti od prúdu, ktorý ňou preteká, - tzv.



obr. 2

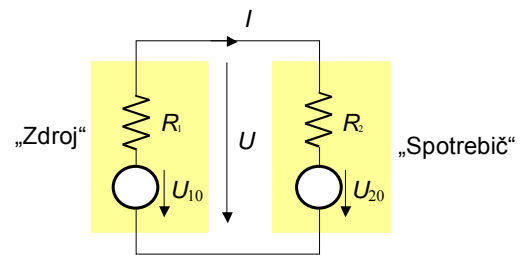
zaťažovacej charakteristiky, obr. 3. Pri odbere väčšieho prúdu ($I > 0$) ako istá kritická hodnota, napätie na batérii pri ďalšom zvyšovaní odoberaného prúdu prudko klesá - až do jej možného zničenia. Pri nulovom odbere prúdu je na batérii napätie U_0 (tzv. *napätie naprázdno*). Pri vnútení prúdu do batérie ($I < 0$) opačným smerom (proces jej nabíjania), napätie na batérii rastie nad hodnotu U_0 . Dotyčnica vedená bodom $U = U_0$, $I = 0$ vystihuje správanie sa batérie v istom okolí tohoto bodu. Jej rovnica: $U = U_0 - R_i I$ je vyhovujúcim matematickým modelom reálneho zdroja.

Tento model ma oproti skutočnej batérii tú vlastnosť, že aj pri skrate ($U = 0$ V, $I = 40$ A) a dokonca aj pri „prepólovaní“ (t.j. pri $U < 0$, $I > 40$ A)

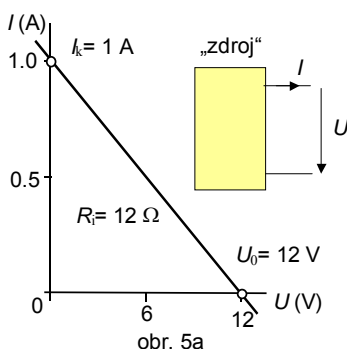


obr. 3

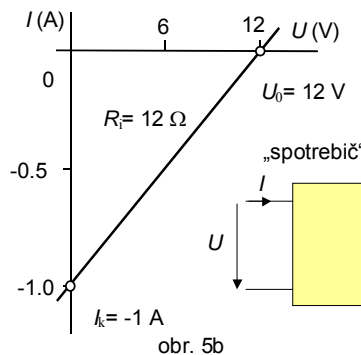
„normálne“ pracuje. Skratový prúd I_k (modelu), keď $U = 0$, sa nazýva *prúd nakrátko* ($I_k = 40$ A). Elektrický model reálneho „zdroja“ je tvorený sériovou kombináciou prvkov U , R - tzv. *aktívny dvojpól*. Ako je naznačené na obr. 4, zdrojom vľavo („Zdroj“), ktorý sa vybíja, môže sa nabíjať zdroj vpravo („Spotrebič“), musí však byť splnená podmienka $U_{10} > U_{20}$. Rovnica $U = U_0 - R_i I$, ktorá vystihuje správanie zdroja, po prepísaní tak, aby nezávisle premennou bolo napätie a nie prúd (otočenie charakteristiky o -90° oproti tej na obr.3 s jej následným preklopením okolo zvislej osi) nadobudne tvar:



obr. 4



obr. 5a



obr. 5b

$$I = I_k - \frac{U}{R_i} = I_k - U G_i.$$

Takáto charakteristika (priamka so zápornou smernicou na obr. 5a) odpovedá aktívnemu dvojpólu – ak naň nazeráme ako na *zdroj*. Napätie naprázdno (U_0) aj prúd nakrátko (I_k) sú kladné. Charakteristika toho istého dvojpólu – ak ho budeme považovať za *spotrebič*, obr. 5b, bude mať vzhľadom na opačný zmysel prúdu (zvoleného za

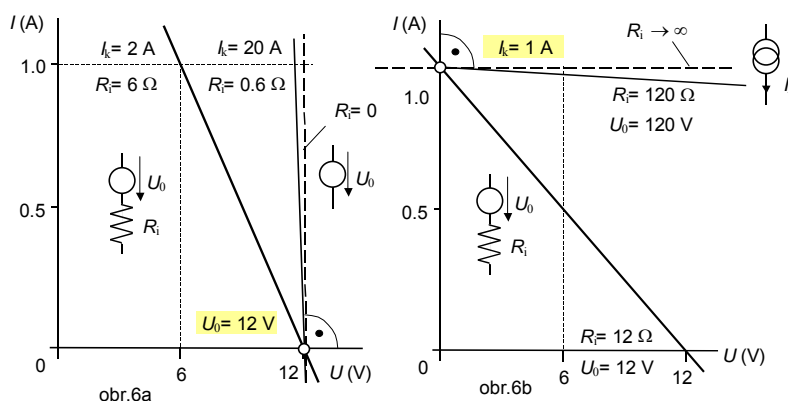
kladný) kladnú smernicu, kladné napätie naprázdno ($U_0 > 0$), ale záporný prúd nakrátko ($I_k < 0$). V prvom prípade je odpor R_i (ak modelujeme reálny zdroj, voláme ho vnútorný odpor zdroja) daný podielom $R_i = \frac{U_0}{I_k}$, v druhom $R_i = \frac{U_0}{-I_k}$, keďže prúd nakrátko, $I_k < 0$. Odpor R_i , resp. vodivosť G_i , určujú sklon (smernicu) priamky. Čím je odpor menší (čím väčšia je vodivosť), tým strmšia je príslušná priamka.

Úloha 1 – Nakreslite VA-charakteristiku (priamku) *aktívneho dvojplu* s parametrami: napätie naprázdno $U_0 = 12\text{ V}$, prúd nakrátko $I_k = 2\text{ A}$ a stanovte hodnotu (vnútorného) odporu R_i ! (obr.6a - hrubšia, plná čiara)

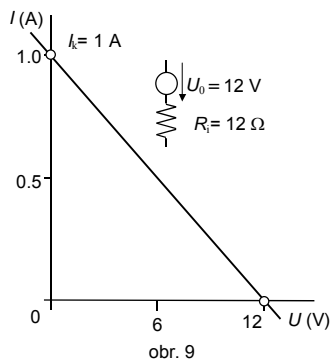
Úloha 2 – Ako sa zmení charakteristika ak sa odpor R zmenší 10-násobne? A ako, keď tento odpor klesne na nulu? (obr.6a, tenšia plná čiara a prerušovaná čiara)

Úloha 3 – Nakreslite VA-charakteristiku (priamku) *aktívneho dvojplu* s týmito parametrami: napätie naprázdno $U_0 = 12\text{ V}$, vnútorný odpor $R_i = 12\ \Omega$. Stanovte prúd nakrátko, $I_k = ?$ (obr.6b -hrubšia, plná čiara).

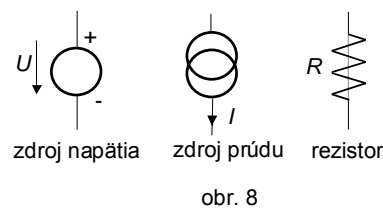
Úloha 4 – Ako sa zmení charakteristika ak sa súčasne 10-násobne



zväčší nielen napätie ($U_0 = 120\text{ V}$) ale aj odpor ($R_i = 120\ \Omega$)? A čo sa stane, keď aj napätie aj odpor budú rásť cez všetky medze (ale ich pomer sa pritom zachová)? (obr.6b – tenšia, plná čiara a prerušovaná čiara). V limitnom prípade (obr.6b – prerušovaná čiara) sme sa dostali ku koncepcii *prúdového zdroja* - elementu, ktorý je určený vnúteným prúdom (I) pričom napätie na ňom môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu (kladnú, nulovú zápornú). Takto máme tri elementy, obr.8. Dva aktívne (ideálne zdroje) a jeden pasívny (rezistor). Na opis ľubovoľného obvodu ktorý pomocou nich môžeme modelovať by (v princípe) stačil ktorýkoľvek (teda len jeden) zo zdrojov. Používanie oboch však niekedy prináša určité výhody.

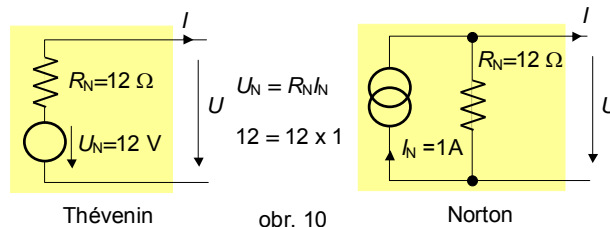


Úloha 5 – Nakreslite VA-charakteristiku (priamku) *aktívneho dvojplu* s parametrami: prúd nakrátko $I_k = 1\text{ A}$, vnútorný odpor $R_i = 12\ \Omega$. Stanovte napätie naprázdno, $U_0 = ?$ a nakreslite ekvivalentný obvod tvorený sériovým zapojením rezistora a zdroja napätia! (obr. 9). Nedal by sa modelovať ten istý dvojpl aj pomocou rezistora a zdroja prúdu? (Sú len dve možnosti zapojiť dva prvky - do série, alebo paralelne.)

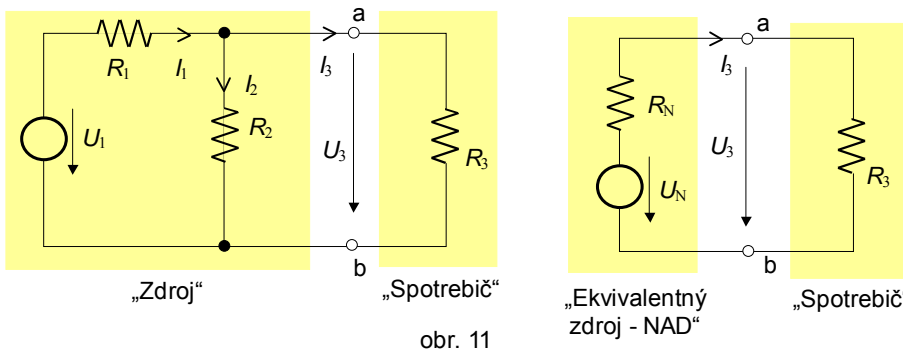


Úloha 6 – Presvedčte sa priamo výpočtom napätia naprázdno a prúdu nakrátko o ekvivalencii oboch zapojení podľa obr. 10!

Tu uvedené poznatky majú ďalekosiahly dôsledok: Aj veľmi zložitý obvod, ktorý obsahuje ľubovoľný počet zdrojov a rezistorov možno nahradiť jediným *aktívnym dvojplom* – podľa Théveina, alebo Nortona. Obe náhrady sú ekvivalentné. Všetky dvojpló (zložené, jednoduché) sú ekvivalentné ak majú rovnaké *napätie naprázdno* a rovnaký *prúd nakrátko*.



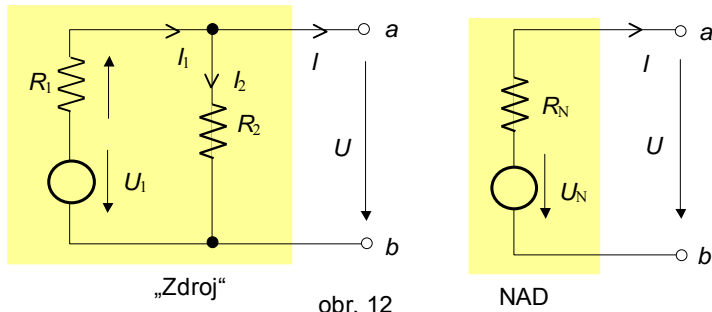
Namiesto obvod podľa obr. 11 vľavo, môžeme riešiť obvod podľa obr.11 vpravo – ak zaručíme, že aj napätie naprázdno aj prúd nakrátko pôvodného dvojpló („Zdroj“) a *náhradného aktívneho dvojpló* (NAD) na obr.11 vpravo označeného ako „Ekvivalentný zdroj“ budú rovnaké. Aby sme našli hodnoty U_N a R_N porovnáme len časti „Zdroj“ a „Ekvivalentný zdroj“. Takéto porovnanie musí viesť k rovnakej závislosti $U_3(I_3)$ resp. $I_3(U_3)$ v oboch prípadoch, teda či použijeme „Zdroj“ alebo NAD. Ak by bola hodnota R_3 veľmi veľká ($R_3 \rightarrow \infty$), oba obvody



obr. 11

by boli v mieste svoriek a, b „akoby“ rozpojené a $I_3 \rightarrow 0$. Tento stav nazývame stav naprázdno. Keby bola, naopak, hodnota R_3 veľmi malá ($R_3 \rightarrow 0$), oba obvody by boli prakticky medzi svorkami a, b „skratované“ a $U_3 \rightarrow 0$. Tento stav nazývame stav nakrátko. Nakoľko oba obvody obsahujú len lineárne

prvky, závislosť $U_3(I_3)$ resp. $I_3(U_3)$ musí byť priamka, nemusí však prechádzať bodom $(0,0)$. Ak budeme poznať dva body je táto priamka jednoznačne určená. Porovnáme preto oba obvody v stavoch *naprázdno* ($I = 0, U \equiv U_0$) a *nakrátko* ($U = 0, I \equiv I_k$). Vo všeobecnosti nemusíme špecifikovať čo je k obvodom „Zdroj“ resp. NAD na svorkách a, b pripojené (napríklad R_3), predpokladáme len že je na nich rovnaké napätie U a že z nich „vyteká“ rovnaký prúd I , obr.12. Mohli by sme si napríklad predstaviť, že k obom je pripojený rovnaký zdroj napätia, U alebo rovnaký zdroj prúdu I . Taký postup je vhodný najmä ak obvod obsahuje tzv. závislé (riadené) zdroje - ako ukážeme v texte ďalej. V obvode na obr.12 vľavo, je na rezistore R_2 napätie U , preto ním preteká prúd $I_2 = U/R_2$. Na rezistore R_1 je napätie $U_1 - U$, preto ním preteká prúd $I_1 = (U_1 - U)/R_1$. Výsledný prúd $I = I_1 - I_2 = (U_1 - U)/R_1 - U/R_2 = U_1/R_1 - U(1/R_1 + 1/R_2)$.

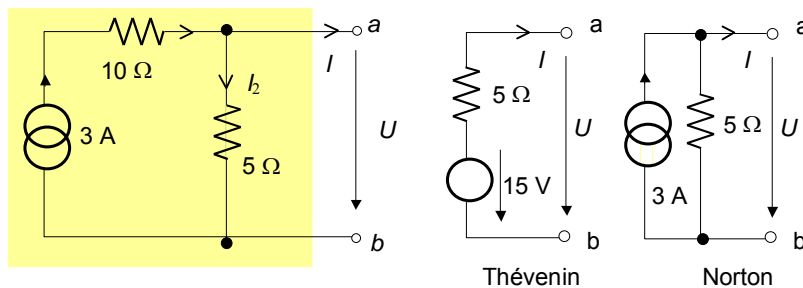


obr. 12

Porovnaním tejto závislosti $I(U)$ s rovnicou priamky: $I = I_k - U \cdot G_i$, ($G = 1/R$) ktorá charakterizuje aktívny dvojpól, dostaneme: (1) - tzv. prúd nakrátko: $I_k = U_1 G_1$ resp. $I_k = U_1/R_1$ - taký prúd by vytekal z dvojpólu vľavo pri skrate ($R_3 \rightarrow 0$, na obr.11), a (2) - náhradnú (ekvivalentnú) vodivosť $G_i = (1/R_1 + 1/R_2)$ resp. náhradný (ekvivalentný) odpor $R_i = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$. Z tej istej rovnice vyplýva, že v stave

naprázdno ($I \rightarrow 0$), (pri $R_3 \rightarrow \infty$, na obr.11), by bolo: $U_1/R_1 = U \cdot (1/R_1 + 1/R_2)$ a preto tzv. napätie naprázdno: $U_0 \equiv U$, je $U_0 = U_1 G_1 / (G_1 + G_2)$ alebo $U_0 = U_1 R_2 / (R_1 + R_2)$. Prúd, ktorý by vytekal v stave nakrátko z dvojpólu NAD je: U_N/R_N a napätie dvojpólu NAD v stave naprázdno je: U_N . Porovnanie týchto veličn vedie k rovnostiam: $U_N/R_N = U_1/R_1$ a $U_N = U_1 R_2 / (R_1 + R_2)$. Po menšej úprave: $R_N = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$.

Úloha 7 – Stannovte NAD obvodu z obr.13! V stave naprázdno ($I = 0$), bude prúd zdroja (3 A) pretekať len cez rezistory ($10 \Omega, 5 \Omega$). Na rezistore 5Ω sa vytvorí napätie (úbytok) $U \equiv U_0 = 3 \times 5 = 15 \text{ V}$. V stave nakrátko (rezistor 5Ω je skratovaný) bude prúd $I \equiv I_k = 3 \text{ A}$ prúdom prúdového zdroja. Preto je náhradný odpor $R_N = U_0/I_k = 15/3 = 5 \Omega$. Závislosť $I(U)$ vo všeobecnosti (nemusí, ale môže to byť v aj stave



obr. 13

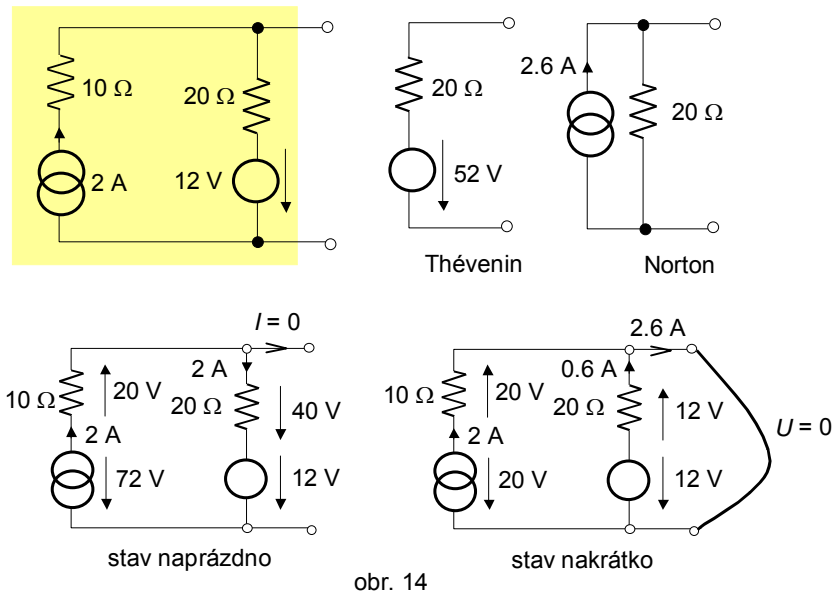
naprázdno alebo nakrátko) tiež ľahko odvodíme. Ak z obvodu vyteká prúd I a súčasne je na ňom napätie U , platí: $I_2 = U/5$ a prúd $I = 3 - I_2 = 3 - U/5$. Výsledok porovnáme s: $I = I_k - U/R_N$, a dostaneme: $I_k = 3 \text{ A}$ a $R_N = 5 \Omega$. Všimnite si, že ak v obvode vynecháte prúdový zdroj (t.j. ak bude odpojený) na

svorkách dvojpólu a, b meraním (alebo výpočtom) stanovíte práve $R \equiv R_N$. Vráťte sa k obr.12 a uvedomte si, že ak v obvode vynecháte napät'ový zdroj (t.j. ak bude nahradený skratom!), na svorkách (a, b) dvojpólu meraním alebo výpočtom stanovíte práve $R \equiv R_N = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$. Obe možné náhrady sú na obr.13, vpravo.

Úloha 8 – Stannovte NAD obvodu z obr.14! V stave naprázdno bude prúdový zdroj pretláčať prúd 2 A cez oba rezistory, na rezistore 20Ω bude preto napätie 40 V, čo spolu s 12 V zdrojom v sérii dáva napä-tie

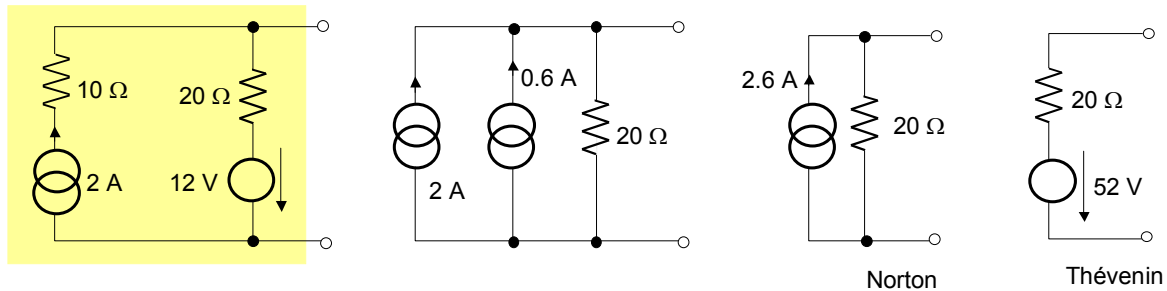
$U_0 = 40 + 12 = 52 \text{ V}$. V stave nakrátko bude „skratom“ pretekať nielen prúd prúdového zdroja ale aj prúd

($12 \text{ V}) / (20 \Omega) = 0.6 \text{ A}$, vyvolaný napäťovým zdrojom. Vysledný skratový prúd bude: $I_k = 2 + 12/20 = 2.6 \text{ A}$. Preto je náhradný rezistor $R_N = U_0/I_k = 52/2.6 = 20 \Omega$. Takýto „vypočet“ vyžaduje určité skúsenosti. Napríklad, ako je to možné, že prúd v úseku s 20Ω rezistorom (podiel $12/20$) sme počítali tak akoby prúdový zdroj v obvode ani nebol? (Hľadajte odpoveď na túto otázku, alebo zabudnite, že sme tak počítali – v inej situácii to môže byť nebezpečný postup ktorý vedie k nesprávnym výsledkom!). V každom prípade sa dá postupovať tak, že obvod: (1) v stave naprázdno a (2) v stave

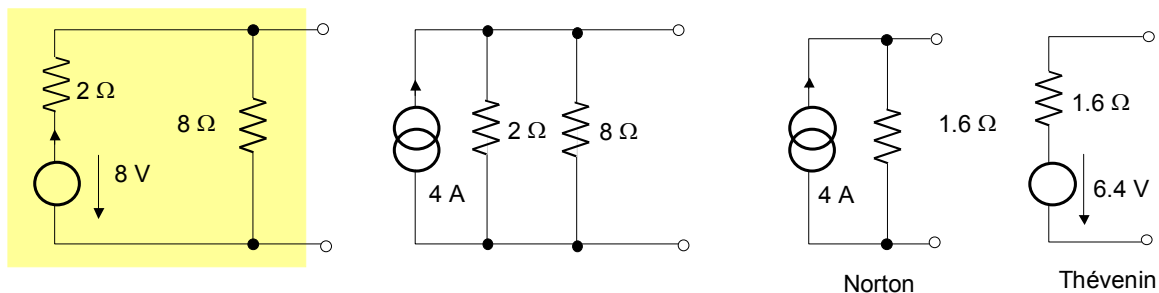


obr. 14

nakrátko „pochivo“ vyriešite po napísaní Kirchhoffových zákonov, alebo pomocou niektorej zo známych metód na riešenie obvodov. Nakoniec si opäť overíme, že po nahradení napäťového zdroja skratom a vynechaní prúdového zdroja môžeme vypočítať náhradný odpor R_N medzi svorkami dvojpólu. Je evidentné, že podľa obr.14 takto stanovíme $R_N = 20 \Omega$. V niektorých prípadoch môže byť výhodné, namiesto riešenia obvodu, postupovať tak, aby sa postupnou transformáciou (náhradou) dvojpólov *Thévenin-Norton*



obr. 15



obr. 16

dospelo ku konečnému riešeniu – teda jedinému dvojpólu. V prípade príkladu z obr.14 je tento spôsob znázornený na obr.15. V prípade podobného príkladu ako na obr.12, je postup riešenia na obr.16. A zase otázky! Kam sa podiel rezistor 10Ω z obr.15? Ako sa dokáže, že dvojpól: zdroj prúdu (2 A) a rezistor (10Ω) v sérii je ekvivalentný so samotným zdrojom prúdu (2 A)? (Nakreslite VA-charakteristiky oboch - ak budú rovnaké)

< koniec >