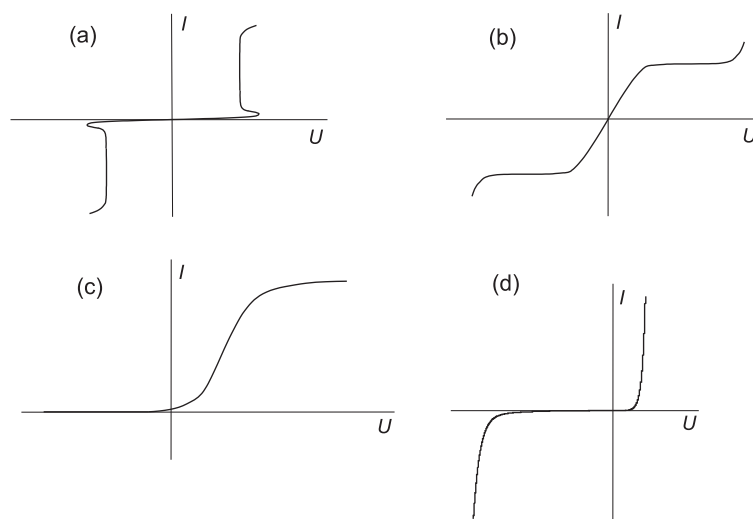


Kapitola 6

Nelineárne siete.

V predošlých kapitolách sme uvažovali, že v elektrickej sieti máme len dvojpóly s priamkovou voltampérovou charakteristikou - lineárne dvojpóly. Popis takýchto sietí rovnicami Kirchhoffových zákonov (ich matematický model) vedie na systém lineárnych algebraických rovníc. Vďaka linearite modelu v takýchto sieťach napríklad platia rôzne princípy – princíp superpozície, úmernosti, recipacity, môžeme využiť vety o náhradnom aktívnom dvojpóle. Nazvime takéto siete *lineárne siete*.



Obr. 6.1: Príklady voltampérových charakteristík nelineárnych dvojpólov.

Častokrát obvody poskladané z reálnych prvkov uvedenú podmienku nespĺňajú – nájdeme v nich prvky, ktoré majú nelineárny vzťah medzi napätím a prúdom. Takéto prvky nazývame *nelineárne prvky*. Príkladom nelineárneho dvojpólu je polovodičová dióda, nelineárneho trojpólu tranzistor. Dokonca aj obyčajná žiarovka s wolfrámovým vláknom sa vďaka teplotnej závislosti jeho odporu v konečnom dôsledku správa ako nelineárny dvojpól¹. Na obr. 6.1 sú príklady voltampérových charakteristík niektorých nelineárnych dvojpólov (a - tlejivka, b - variátor, c - vákuová dióda, d - polovodičová dióda). Elektrickú sieť, ktorá obsahuje jeden a viac nelineárnych prvkov, nazývame *nelineárna sieť*.

Predpokladajme, že voltampérovú charakteristiku nelineárneho dvojpólu vieme popísať funkciou

$$i = f(u), \tag{6.1}$$

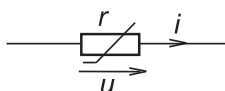
¹Prísne vzaté, ani elektrická vodivosť kovov nie je konštantná. Lineárny vzťah medzi intenzitou elektrického poľa a prúdovou hustotou je len lineárne priblíženie riešenia transportných rovníc náboja. Sú to však našťastie v absolútnej väčšine prípadov zanedbateľné nelinearity.

resp.

$$u = g(i). \quad (6.2)$$

V praxi bývajú voltampérové charakteristiky nelineárnych dvojpólov (funkcie f a g) často vyjadrené pomocou polynómov, mocninných, exponenciálnych funkcií, funkciami typu arkustangens a podobne.

Pre nelineárny dvojpól vo všeobecnosti používame v schémach elektrických obvodov symbol na obr. 6.2. Pasívny nelineárny dvojpól sa tiež zvykne nazývať *nelineárny rezistor*.



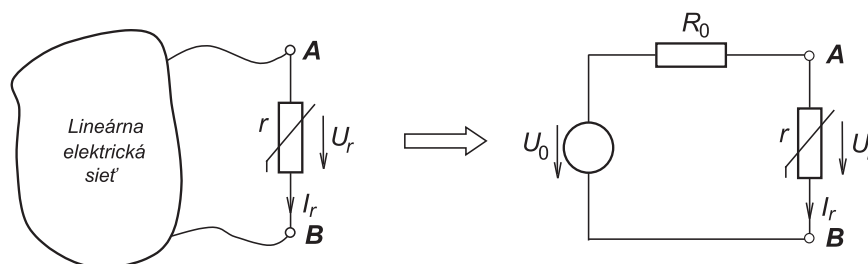
Obr. 6.2: Nelineárny dvojpól.

Hľadanie riešenia v obvodoch s nelineárnymi prvkami býva zložitejšie. Ak sa v rovniciach Kirchhoffových zákonov vyskytujú prúdy, resp. napätia dané rovnicami (6.1), (6.2), tieto rovnice sú nelineárne. Ak teda elektrická sieť obsahuje čo len jeden nelineárny prvok, jej matematický popis v princípe vedie na sústavu nelineárnych rovníc. V prípade rezistívnych sietí sú to nelineárne algebraické rovnice. Ak nelineárna sieť obsahuje akumulčné prvky (L a C), matematický model by dokonca predstavoval nelineárne diferenciálne rovnice. Riešenie takýchto sústav nie je jednoduché. Preto sa hľadajú cesty, ako ich obísť. Snahou previesť riešenie sústavy nelineárnych rovníc na jednu nelineárnu rovnicu (pomocou vety o náhradnom aktívnom dvojpóle), alebo na sústavu lineárnych algebraických rovníc (nelineárnu sieť *linearizujeme*).

V ďalšom budeme ilustrovať niektoré metódy riešenia elektrických sietí obsahujúcich *jeden* nelineárny rezistor.

6.1 Metódy riešenia nelineárnych obvodov.

Budeme hľadať riešenie v elektrickom obvode, ktorý obsahuje jeden nelineárny rezistor, ostatné prvky sú lineárne (obr. 6.3). Dajme si za úlohu nájsť napätie U_r a prúd I_r nelineárneho rezistora r pripojeného medzi uzly **A** a **B**. Bod na voltampérovej charakteristike nelineárneho prvku $P = (U_r, I_r)$ nazývame *pracovný bod*.



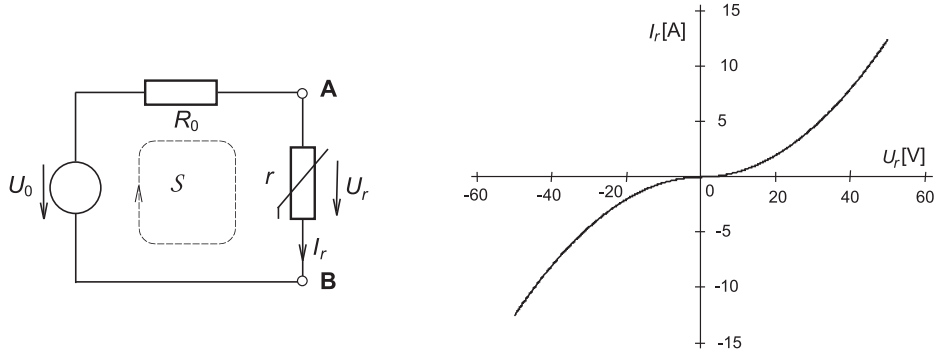
Obr. 6.3: Sieť s jedným nelineárnym prvkom a jej náhrada.

Nelineárny rezistor zo siete vyjmem. Zvyšok siete (lineárny) môžeme nahradiť ekvivalentným dvojpólom, napríklad pomocou Théveninovej vety. Pracovný bod nelineárneho rezistora budeme hľadať v takomto zjednodušenom obvode. Obvod obsahuje jednu slučku, teda na jeho popis stačí jedna rovnica 2. Kirchhoffovho zákona. Rovnica bude nelineárna, lebo obsahuje napätie U_r na nelineárnom dvojpóle. Na hľadanie pracovného bodu využijeme tri metódy

- graficko-počtárska metóda,
- analytická metóda,

- iteračná metóda.

Všetky tieto metódy budeme ilustrovať na nasledujúcej úlohe:



Obr. 6.4: Nelineárny obvod.

Príklad 23 V obvode na obr. 6.4 nájdite pracovný bod $\mathbf{P} = (U_r, I_r)$ nelineárneho rezistora r . Sú dané parametre prvkov $U_0 = 40\text{V}$, $R_0 = 10\Omega$. Nelineárny rezistor má voltampérovú charakteristiku zadanú analytickou funkciou

$$I_r = \begin{cases} -5 \cdot 10^{-3} \cdot U_r^2 & U_r \geq 0 \\ 5 \cdot 10^{-3} \cdot U_r^2 & U_r < 0 \end{cases} \quad [\text{A}; \text{V}]. \quad (6.3)$$

Pre slučku S napíšeme rovnicu 2. Kirchhoffovho zákona

$$-U_0 + R_0 \cdot I_r + U_r = 0. \quad (6.4)$$

Toto je vlastne rovnica popisujúca zaťažovaciu charakteristiku reálneho napäťového zdroja. Napätie U_r a prúd I_r sú ale viazané aj predpisom voltampérovej charakteristiky nelineárneho rezistora (6.1), resp. (6.2). Pracovný bod $\mathbf{P} = (U_r, I_r)$ musí vyhovovať dvojici rovníc (6.4)–(6.1), resp. (6.4)–(6.2) a teda bude určený priesečníkom príslušnej krivky a priamky (6.4) v rovine. Úlohou je teda vyriešiť sústavu rovníc o dvoch neznámych U_r, I_r

$$\begin{aligned} U_r &= U_0 - R_0 \cdot I_r \\ I_r &= f(U_r), \end{aligned} \quad (6.5)$$

resp.

$$\begin{aligned} U_r &= U_0 - R_0 \cdot I_r \\ U_r &= g(I_r). \end{aligned} \quad (6.6)$$

V ďalšom sa budeme zaoberať tromi metódami riešenia takejto sústavy

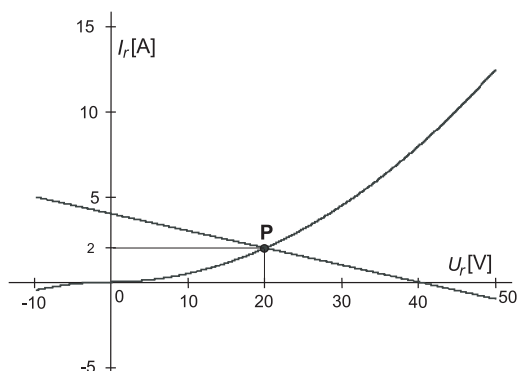
- graficko–počtárska metóda,
- analytická metóda,
- iteračná metóda.

6.1.1 Graficko–počtárska metóda.

Graficko–počtárska metóda riešenia znamená grafické riešenie sústavy rovníc (6.5), resp. (6.6). V rovine (U_r, I_r) hľadáme priesečník \mathbf{P} priamky danej rovnicou (6.4) a krivky (6.1), resp. (6.2).

Dosadíme číselné hodnoty do rovnice (6.4)

$$U_r = 40 - 10 \cdot I_r \quad [\text{A}; \text{V}],$$



Obr. 6.5: Graficko-počtárske riešenie.

voltampérová charakteristika nelineárneho rezistora r je daná výrazom (6.3). Obidve charakteristiky sú spoločne znázornené na obr. 6.5. Ich priesečník

$$\mathbf{P} = (U_r, I_r) = (20\text{V}, 2\text{A})$$

udáva hľadané riešenie.

Výhodou graficko-počtárskej metódy je jej rýchlosť. Riešenie získame rýchlo aj v prípade, že je voltampérová charakteristika nelineárneho prvku zadaná zložito vyjadrenou nelineárnou funkciou. Použitie tejto metódy je dokonca jedinou možnosťou v prípade, že máme k dispozícii len grafické vyjadrenie charakteristikou nelineárneho prvku (od výrobcu nelineárneho prvku máme k dispozícii len katalóg s graficky znázornenou charakteristikou).

Graficko-počtárska metóda je výhodná na rýchly odhad pracovného bodu. Jej nevýhoda je, že nám poskytne polohu pracovného bodu len s obmedzenou presnosťou.

6.1.2 Analytická metóda.

Analytickú metódu môžeme použiť, ak je známe analytické vyjadrenie voltampérovej charakteristiky nelineárneho prvku matematickou funkciou (6.1) resp. (6.2). V sústave rovníc (6.5), resp. (6.6) eliminujeme jednu neznámu tak, že dosadíme z jednej rovnice do druhej. Získame tak jednu nelineárnu rovnicu o jednej neznámej U_r , resp. I_r .

V našom ilustračnom príklade sme už pomocou graficko-počtárskej metódy zistili, že pracovný bod leží v prvom kvadrante, teda $U_r > 0, I_r > 0$. Riešime teda sústavu rovníc

$$\begin{aligned} U_r &= 40 - 10 \cdot I_r \\ I_r &= 5 \cdot 10^{-3} \cdot U_r^2, \quad U_r \geq 0 \end{aligned}$$

Dosadením za I_r z druhej rovnice do prvej získame kvadratickú rovnicu

$$U_r^2 + 20 \cdot U_r - 800 = 0, \quad U_r \geq 0.$$

Jej riešenie je $U_r = 20\text{V}$. Dosadením do druhej rovnice získame $I_r = 2\text{A}$.

Výhodou tejto metódy je, že získané riešenie má analytickú presnosť. Jej použitie však môže byť problematické, ak je charakteristika nelineárneho prvku popísaná pomocou "nepříjemnej" funkcie (napríklad polynómom vyššieho rádu ako druhého, rôzne mocninné a exponenciálne funkcie). Nie každá nelineárna rovnica sa dá vyriešiť analyticky a jednoducho.

6.1.3 Iteračná metóda.

V prípade, že analytické riešenie sústavy rovníc (6.1) resp. (6.2) nevieme, musíme siahnuť po numerickom riešení.

Numerické riešenie nelineárnych rovníc je samo o sebe rozsiahly matematický problém. Existuje množstvo rôznych metód, avšak ich detailnejší popis presahuje možnosti predmetu zaoberajúceho sa riešením elektrických obvodov. V ďalšom ukážme aspoň jednu – *iteračnú metódu*.

Predpokladajme, že obvod je matematicky popísaný pomocou sústavy rovníc (6.5). Dosadíme za I_r z druhej rovnice do prvej

$$U_r = U_0 - R_0 \cdot f(U_r). \quad (6.7)$$

Zvolíme nejakú hodnotu U_r – *šartovaciu hodnotu* a dosadíme ju do rovnice (6.7). Výsledkom bude nová hodnota U_r . Dosadením n -tej hodnoty získame novú, $(n + 1)$ -hodnotu napätia U_r . Formálne to môžeme vyjadriť zápisom

$$U_{r,n+1} = U_0 - R_0 \cdot f(U_{r,n}). \quad (6.8)$$

Rovnica (6.8) je *iteračný predpis*, pomocou ktorého získame postupnosť hodnôt

$$U_{r,0}, U_{r,1}, \dots, U_{r,n}, U_{r,n+1}, \dots \quad (6.9)$$

Podmienkou konvergencie k analyticky presnej hodnote napätia U_r je, aby voltampérová charakteristika nelineárneho prvku v pracovnom bode \mathbf{P} a v jeho okolí spĺňala podmienku

$$\frac{dU_r}{dI_r} > R_0. \quad (6.10)$$

Ak je úloha popísaná sústavou (6.6), vyjadríme najprv z prvej rovnice prúd I_r

$$I_r = \frac{U_0 - U_r}{R_0}. \quad (6.11)$$

Do tejto rovnice dosadíme za napätie U_r z druhej rovnice sústavy

$$I_r = \frac{U_0 - g(I_r)}{R_0}. \quad (6.12)$$

Zvolíme prúd I_r a dosadíme do (6.12), čím získame jeho novú hodnotu. Takýto postup môžeme vyjadriť iteračným predpisom

$$I_{r,n+1} = \frac{U_0 - g(I_{r,n})}{R_0}. \quad (6.13)$$

Jeho opakovaným použitím získame postupnosť hodnôt

$$I_{r,0}, I_{r,1}, \dots, I_{r,n}, I_{r,n+1}, \dots \quad (6.14)$$

Podmienkou konvergencie k analyticky presnej hodnote I_r je, aby voltampérová charakteristika nelineárneho prvku v pracovnom bode \mathbf{P} a jeho okolí spĺňala podmienku

$$\frac{dU_r}{dI_r} < R_0. \quad (6.15)$$

Pozorného čitateľa pravdepodobne napadli tri otázky:

- Ako zvoliť šartovaciu hodnotu?
- Ktorá postupnosť bude konvergentná? Ako to zistím?
- Kedy zastaví iteráciu?

Štartovaciu hodnotu je výhodné zvoliť čo najbližšie k očakávanému riešeniu. Na približný odhad polohy pracovného bodu \mathbf{P} môžeme napríklad použiť graficko-počtársku metódu.

O konvergentnosti postupnosti (6.9), resp. (6.14) hovoria podmienky (6.10), resp. (6.15). Na to potrebujeme poznať pracovný bod nelineárneho prvku. Ten ale nepoznáme, na jeho hľadanie predsa ideme použiť iteráciu! Obvykle volíme iteračný postup podľa toho, ako máme zadanú voltampérovú charakteristiku nelineárneho prvku. Ak je zadaná analytickým predpisom v tvare (6.1), skúsime iteračný predpis (6.8). V prípade divergencie postupnosti hodnôt U_r nájdeme analytický predpis inverznou funkciou

$$U_r = f^{-1}(I_r) = g(I_r) \quad (6.16)$$

a použijeme iteračný predpis (6.13).

Podobne v prípade analytického popisu voltamérovej charakteristiky nelineárneho prvku (6.2) použijeme najprv predpis (6.13). Ak postupnosť hodnôt I_r diverguje, nájdeme inverznú funkciu

$$I_r = g^{-1}(U_r) = f(U_r) \quad (6.17)$$

a použijeme iteračný predpis (6.8).

Ak iterácia diverguje a k analytickému popisu nájsť inverznú funkciu nevieme, pracovný bod \mathbf{P} sa iteráciou nájsť nedá. V takom prípade treba použiť inú numerickú metódu.

Ilustrujme iteračnú metódu na našom príklade. Elektrický obvod sme už v predošlom popísali dvojicou rovníc

$$\begin{aligned} U_r &= 40 - 10 \cdot I_r \\ I_r &= 5 \cdot 10^{-3} \cdot U_r^2, \quad U_r \geq 0 \end{aligned}$$

Dosadením za napätie U_r z druhej rovnice do prvej získame iteračný predpis

$$U_{r,n+1} = 40 - 5 \cdot 10^{-2} \cdot U_{r,n}^2.$$

Pri voľbe štartovacej hodnoty môžeme vychádzať z nasledovnej úvahy: Nelineárny rezistor r je pasívny prvok, ktorý pripájame na výstup technického zdroja napätia s napätím naprázdno U_0 . Znamená to, že pre napätie na rezistore r musí platiť

$$U_r \in (0, U_0).$$

Voliť štartovaciu hodnotu mimo tohoto intervalu zjavne nemá zmysel. Zvoľme teda "zlatú strednú cestu"

$$U_{r,0} = \frac{U_0}{2}.$$

Pomocou iteračného predpisu získame postupnosť hodnôt

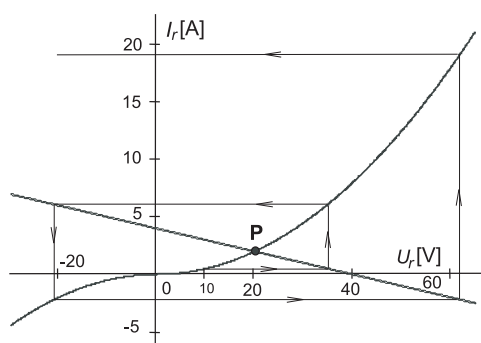
n	$U_{r,n}$ [V]
0	10,00
1	35,00
2	-21,25

Pri konvergentnej iterácii nasledujúca hodnota v rámci postupnosti musí padnúť medzi dve predošlé

$$\begin{aligned} U_{r,n+1} &\in \langle U_{r,n-1}; U_{r,n} \rangle \\ I_{r,n+1} &\in \langle I_{r,n-1}; I_{r,n} \rangle. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Vidno, že hodnota $U_{r,2}$ nepadla medzi predošlé dve, postupnosť diverguje. Okrem toho je mimo definičného oboru predpisu nelineárnej charakteristiky. Ďalšie hodnoty teda nemá zmysel počítať. Graficky je takýto iteračný postup znázornený na obr. 6.6. Musíme odvodiť rovnicu pre druhý iteračný postup. Teraz to bude jednoduché, pretože nelineárny prvok má voltampérovú charakteristiku popísanú kvadratickou funkciou, ku ktorej vieme ľahko nájsť inverzné zobrazenie

$$U_r = \sqrt{200 \cdot |I_r|}, \quad I_r \geq 0.$$



Obr. 6.6: Divergetná iterácia.

Z rovnice pre zaťažovaciu charakteristiku zdroja (6.4) vyjadríme I_r

$$I_r = \frac{40 - U_r}{10},$$

kam dosadíme za U_r z predošlej rovnice. Získame tak iteračný predpis

$$I_{r,n+1} = \frac{40 - \sqrt{200 \cdot |I_{r,n}|}}{10}, \quad I_{r,n} \geq 0,$$

ktorý by mal konvergovať. Maximálna hodnota prúdu I_r môže byť teoreticky rovná skratovému prúdu I_k

$$I_k = \frac{U_0}{R_0} = 4\text{A}.$$

Ako štartovaciu hodnotu zvolíme "rozumné číslo" napríklad $I_{r,0} = 1\text{A}$.

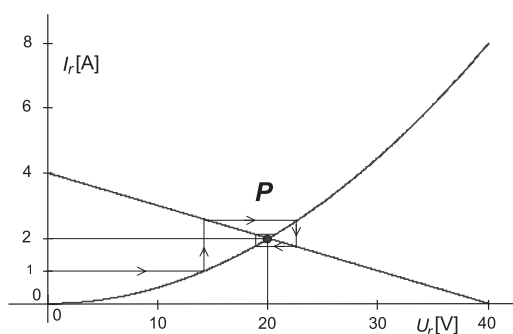
Musíme ešte definovať podmienku pre zastavenie iterácie. Obvykle ako kritérium volíme veľkosť rozdielu dvojice po sebe nasledujúcich hodnôt

$$\begin{aligned} |U_{r,n+1} - U_{r,n}| &\leq M, \text{ resp.} \\ |I_{r,n+1} - I_{r,n}| &\leq M. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Nech je riešenie platné na 5 desatinných miest. Výpočet zastavíme, ak budeme schopní spoľahlivo zaokrúhliť piate desatinné miesto. Vypočítané hodnoty sú v nasledujúcej tabuľke.

n	$I_{r,n}$ [A]
0	1,0
1	2,585786
2	1,725891
3	2,142103
4	1,930168
5	2,035226
...	
21	2,000001
22	2,000000

Iterácia konverguje k hodnote prúdu $I_r = 2,00000\text{A}$. Dosadením do rovnice popisu voltampérovej charakteristiky $U_r = f^{-1}(I_r)$ získame napätie $U_r = 20\text{V}$. Graficky je iterácia znázornená na obr. 6.7.



Obr. 6.7: Konvergentná iterácia.

6.2 Statický a diferenciálny odpor dvojpólu.

Statický odpor R_s dvojpólu je definovaný ako pomer napätia U_r a prúdu I_r v pracovnom bode \mathbf{P}

$$R_s = \left(\frac{U_r}{I_r} \right)_{\mathbf{P}}. \quad (6.20)$$

Podobne môžeme zaviesť aj pojem *statická vodivosť* G_s ako pomer prúdu I_r a napätia U_r v pracovnom bode \mathbf{P}

$$G_s = \left(\frac{I_r}{U_r} \right)_{\mathbf{P}}. \quad (6.21)$$

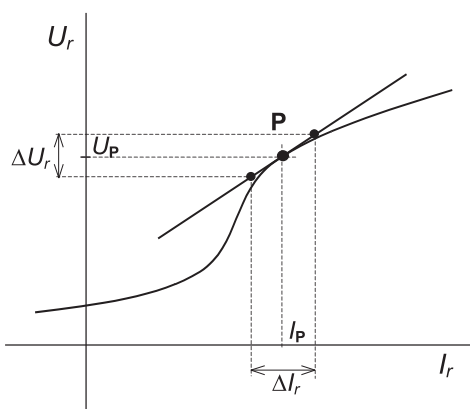
Ak $R_s \neq 0$, resp. $G_s \neq 0$, medzi statickým odporom a statickou vodivosťou môžeme napísať vzťah

$$R_s = G_s^{-1}. \quad (6.22)$$

Diferenciálny odpor r_d dvojpólu v pracovnom bode \mathbf{P} je definovaný ako smernica jeho voltampérovej charakteristiky (6.2) v tomto bode

$$r_d = \left(\lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta U_r}{\Delta I_r} \right)_{\mathbf{P}} = \left(\frac{dU_r}{dI_r} \right)_{\mathbf{P}}. \quad (6.23)$$

Je to derivácia napätia U_r podľa prúdu I_r v tomto bode.



Obr. 6.8: K definícii diferenciálneho odporu a vodivosti.

Diferenciálna vodivosť g_d dvojpólu v pracovnom bode \mathbf{P} je definovaná ako smernica jeho voltampérovej charakteristiky (6.1) v tomto bode (obr. 6.8)

$$g_d = \left(\frac{dI_r}{dU_r} \right)_{\mathbf{P}}. \quad (6.24)$$

Je to derivácia prúdu I_r podľa napätia U_r v tomto bode.

Ak $r_d \neq 0$, resp. $g_d \neq 0$, medzi diferenciálnym odporom r_d a diferenciálnou vodivosťou g_d môžeme napísať vzťah

$$r_d = g_d^{-1}. \quad (6.25)$$

Poznámka:

Vyšetríme statický a diferenciálny odpor *lineárneho* rezistora s odporom R . Vzťah medzi napätím U a prúdom I *lineárneho* rezistora je daný vzťahom

$$U = R.I,$$

pričom platí

$$R = \text{konšt.}$$

Lahko zistíme, že pre jeho statický odpor R_s platí

$$R_s = \frac{U}{I} = R = \text{konšt.}$$

a pre jeho dynamický odpor r_d platí

$$r_d = \frac{d(R.I)}{dI} = R = \text{konšt.}$$

V prípade nelineárnych rezistorov statický aj diferenciálny odpor nie sú konštantné, ale závisia od napätia, resp. prúdu

$$\begin{aligned} R_s &= R_s(u); & r_d &= r_d(u) \\ R_s &= R_s(i); & r_d &= r_d(i) \end{aligned}$$

6.3 Linearizácia siete.

Linearizáciou siete myslíme náhradu nelineárnych prvkov lineárnymi tak, aby napätia a prúdy v linearizovanej sieti po úprave ostali v porovnaní s pôvodnou (nelineárnou) sieťou nezmenené, resp. aby sa líšili len zanedbateľne. Za určitých podmienok môžeme teda linearizovanú sieť považovať za ekvivalentnú pôvodnej.

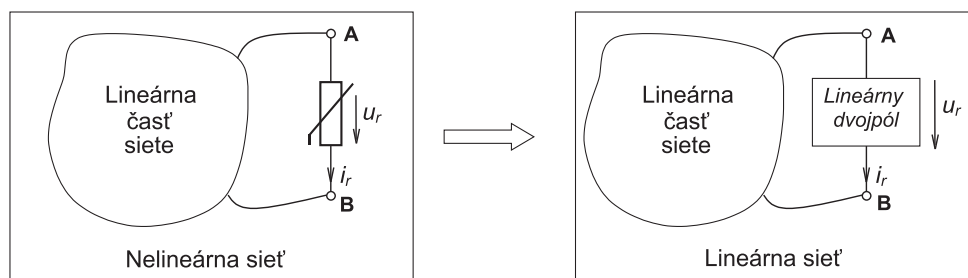
Prečo sa v praxi využíva linearizácia siete? Linearizovaná sieť obsahuje len lineárne prvky a jej matematický popis vedie na lineárne rovnice. Ich riešenie sa hľadá jednoduchšie. Navyše v lineárnych sieťach môžeme s výhodou využívať rôzne princípy, ktoré v lineárnych neplatia (superpozície, reciprocity, ...).

Linearizácia siete dosť závisí od toho, či je v stacionárnom ustálenom stave, teda či sú napätia a prúdy nelineárnymi prvkami stacionárne (konštantné). Ak áno, linearizácia je jednoduchšia. V prípade nestacionárnych napätí a prúdov (signálov) treba byť pri linearizácii siete opatrný. Vyšetrimo tieto prípady osobitne.

Pre jednoduchosť budeme linearizáciu ilustrovať na prípade nelineárnej siete s jedným nelineárnym dvojpólom (obr. 6.9).

6.3.1 Linearizácia siete v stacionárnom stave.

Nelineárny dvojpól nahradím lineárnym tak, aby po linearizácii ostal zachovaný pracovný bod nelineárneho dvojpólu $\mathbf{P} = (U_r; I_r)$. V takom prípade sa v sieti rovnice Kirchhoffových zákonov nezmenia, teda všetky napätia a prúdy ostajú zachované. Nelineárny dvojpól musíme nahradiť lineárnym dvojpólom ktorého voltampérová charakteristika je priamka prechádzajúca bodom \mathbf{P} . Takýchto priamok, teda aj možných lineárnych náhrad je nekonečne veľa. Zamerajme sa na tri najjednoduchšie náhrady, s ktorými sa v praxi najčastejšie stretujeme (obr. 6.10).



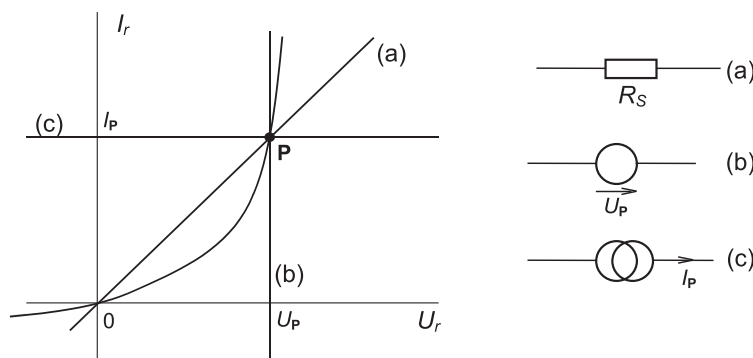
Obr. 6.9: Linearizácia siete.

Náhrada lineárnym rezistorom.

Nelineárny dvojpól nahradíme lineárnym rezistorom, ktorého voltampérová charakteristika prechádza pracovným bodom \mathbf{P} (obr. 6.10a), teda

$$R = \left(\frac{u_r}{i_r} \right)_{\mathbf{P}} = (R_s)_{\mathbf{P}}. \quad (6.26)$$

Odpor náhradného rezistora je rovný statickému odporu nelineárneho prvku v danom pracovnom bode \mathbf{P} .



Obr. 6.10: Lineárne náhrady nelineárneho dvojpólu.

Náhrada ideálnym zdrojom.

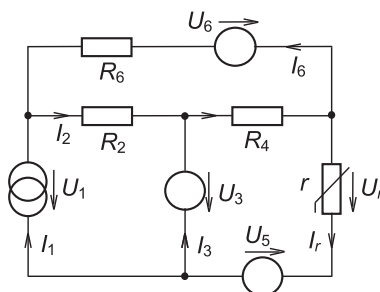
Nelineárny prvok môžeme nahradiť lineárnym dvojpólom, ktorého voltampérová charakteristika je kolmá na napäťovú os (obr. 6.10b) alebo prúdovú os (obr. 6.10c). Tomu zodpovedá náhrada ideálnym zdrojom napätia s napätím $U_{\mathbf{P}}$, resp. ideálnym zdrojom prúdu s prúdom $I_{\mathbf{P}}$. Pri takejto linearizácii vlastne využívame princíp kompenzácie.

Existuje samozrejme aj náhrada dvojpólom s voltampérovou charakteristikou – priamkou, ktorá ne-prechádza začiatkom sústavy a nie je kolmá na žiadnu z osí. Takáto lineárna náhrada je trochu zložitejšia. Musí obsahovať najmenej jeden autonómny zdroj a najmenej jeden rezistor. V obvodoch so stacionárnymi napätiami a prúdmi sa používa len zriedkavo. Postup určenia jej parametrov bude popísaný v nasledujúcom odstavci.

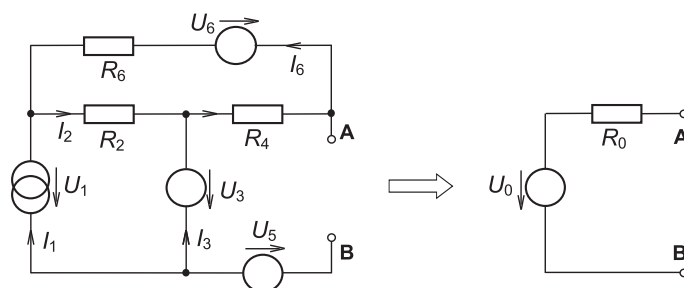
Príklad 24 V obvode na obrázku sú dané parametre prvkov $I_1 = 1\text{A}$, $R_2 = 10\Omega$, $U_3 = 5\text{V}$, $R_4 = 10\Omega$, $U_5 = -10\text{V}$, $U_6 = 10\text{V}$. Voltampérová charakteristika nelineárneho rezistora r je analyticky vyjadrená funkciou

$$I_r = \begin{cases} 3 \cdot 10^{-2} U_r^2 & U_r \geq 0 \\ -3 \cdot 10^{-2} U_r^2 & U_r < 0 \end{cases} \quad [\text{A}; \text{V}].$$

Nájdite pracovný bod nelineárneho rezistora (U_r, I_r), vypočítajte všetky neznáme prúdy v obvode a napätie U_1 na prúdovom zdroji.

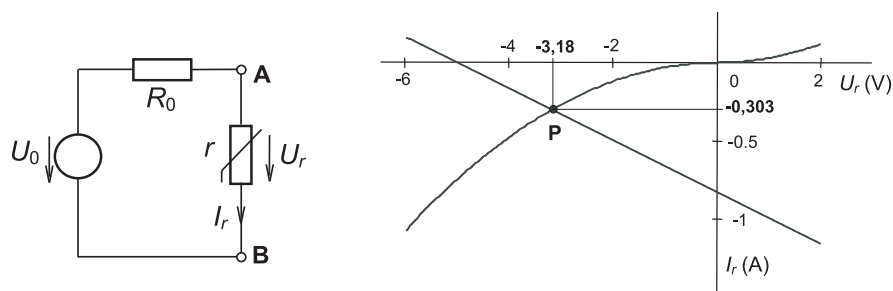


Riešenie.



Obr. a.

Nelineárny prvok vyjme z siete a jej zvyšok podľa Théveninovej vety nahradíme sériovým dvojpólom (obr. a). Výpočtom by sme určili parametre náhradného aktívneho dvojpólu $U_0 = -5\text{V}$, $R_0 = 6\Omega$. Pracovný bod nelineárneho rezistora leží v 3. kvadrante voltampérovej charakteristiky, $U_r < 0$ (obr. b).



Obr. b.

Zaťažovacia charakteristika náhradného aktívneho dvojpólu je popísaná predpisom

$$U_r = -5 - 6I_r.$$

Keďže $U_r < 0$, voltampérová charakteristika nelineárneho rezistora je daná rovnicou

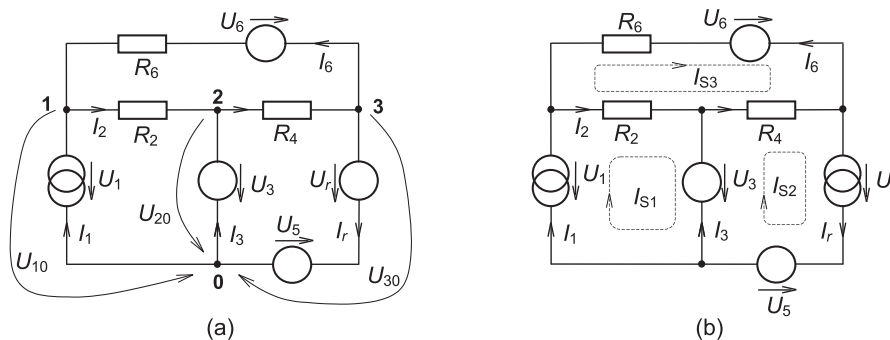
$$I_r = -3.10^{-2}U_r^2.$$

Analytické riešenie vedie na kvadratickú rovnicu

$$0,18U_r^2 - U_r - 5 = 0, \quad U_r \leq 0$$

odtiaľ $U_r = -3,1799\text{V}$. Dosadením do rovnice charakteristiky nelineárneho rezistora získame prúd $I_r = -0,30335\text{A}$.

Pri linearizácii siete využijeme niektorú z vyššie spomenutých lineárnych náhrad. Predpokladáme, že pri hľadaní neznámych prúdov použijeme niektorú všeobecnú metódu (slučkových prúdov, uzlových napätí). Z hľadiska počtu neznámych veličín je výhodné, aby bolo v sieti čo najviac úsekov obsahujúcich iba ideálny zdroj napätia, resp. prúdu. Na obr. c sú uvedené dve možnosti – náhrada ideálnym zdrojom napätia U_r (výhodné pre metódu uzlových napätí), resp. ideálnym zdrojom prúdu I_r (výhodné pre metódu slučkových prúdov). Uvedenými náhradami vlastne zvýrazníme fakt, že v obvode už jedno napätie (prúd) poznáme a teda metódy vedú na menší počet rovníc.



Obr. c.

Pre neznáme uzlové napätie U_{10} by sme napísali rovnicu

$$U_{10} \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right) = \frac{U_3}{R_2} + \frac{U_r - U_5 + U_6}{R_6} + I_1,$$

odtiaľ $U_{10} = 16,213\text{V}$.

Ak by sme sa rozhodli pre metódu slučkových prúdov, pre neznámy slučkový prúd by sme napísali rovnicu

$$I_{S3} (R_2 + R_4 + R_6) = -U_6 + I_1 R_1 + I_r R_4,$$

odtiaľ $I_{S3} = -0,161\text{A}$.

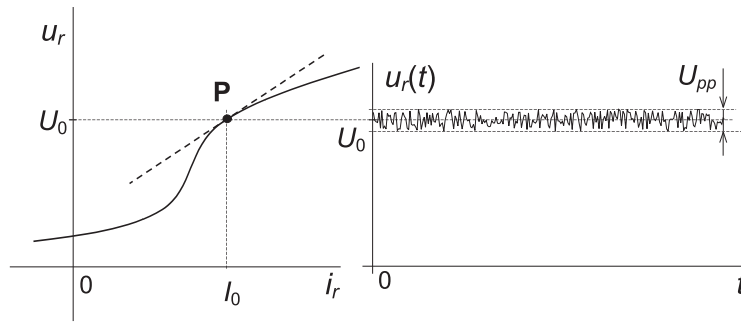
Zo známych uzlových napätí (slučkových prúdov) získame hľadané riešenie $U_1 = 16,213\text{V}$, $I_2 = 1,121\text{A}$, $I_3 = 1,303\text{A}$, $I_4 = -0,182\text{A}$, $I_6 = 0,121\text{A}$.

6.3.2 Linearizácia siete s nestacionárnymi signálmi.

Z hľadiska tvaru časového priebehu napätia, resp. prúdu nelineárnym prvkom musíme rozlíšiť dva prípady.

V prvom prípade predpokladajme, že napätie, resp. prúd nelineárneho prvku má veľký rozkmit. Pracovný bod takéhoto prvku sa v čase pohybuje po jeho voltamérovej charakteristike vo veľkom rozsahu. Tvar signálov bude preto výrazne ovplyvnený nelinearitou prvku a táto sa nedá zanedbať. Sú to rôzne zapojenia, ktorých funkcia je práve založená na nelinearite prvkov (diód, tranzistorov, ...). Môžu to byť usmerňovače, tvarovače impulzov, zmiešavače, násobiče frekvencie, atď. Pri analýze takýchto sietí musíme rešpektovať ich nelinearitu. Linearizácia teda nie je možná hneď z dvoch dôvodov:

- Poloha pracovného bodu nelineárneho prvku nie je stacionárna. Pre akú jeho polohu by sme počítali lineárnu náhradu? Nie je možné určiť parametre lineárnej náhrady.
- Ak by sme predsa nejakým spôsobom nelineárne prvky nahradili lineárnymi, takto upravený model siete by nemohol vystihnúť podstatné vlastnosti siete. Tie sú totiž práve založené na nelinearite prvkov.



Obr. 6.11: Signál s malou striedavou zložkou.

V druhom prípade predpokladajme, že napätie, resp. prúd nelineárneho prvku obsahuje *jednosmernú zložku*, na ktorú je superponovaná malá *striedavá zložka*. Ako príklad uvažujme nelineárny dvojpól, na ktorom je nestacionárne napätie $u_r(t)$ (obr. 6.11), pričom platí

$$u_r(t) = U_0 + u_s(t), \quad (6.27)$$

kde U_0 je jeho jednosmerná zložka a $u_s(t)$ striedavá zložka. Bod $\mathbf{P} = (U_0; I_0)$ nazývame *jednosmerný pracovný bod*. Zavedieme *medzivrcholovú hodnotu* napätia U_{pp} ako maximálny rozkmit jeho striedavej zložky²

$$U_{pp} = \max(u_s(t)) - \min(u_s(t)) \quad (6.28)$$

a v ďalších úvahách budeme predpokladať, že je v porovnaní s veľkosťou jednosmernej zložky malý

$$U_{pp} \ll |U_0|. \quad (6.29)$$

Podobne aj prúd takýmto nelineárnym dvojpólom môžeme vyjadriť v tvare superpozície jeho jednosmernej zložky $I_{\mathbf{P}}$ a malej striedavej zložky $i_s(t)$

$$i_r(t) = I_0 + i_s(t). \quad (6.30)$$

Rovnako aj v prípade medzivrcholovej hodnoty prúdu I_{pp}

$$I_{pp} = \max(i_s(t)) - \min(i_s(t)) \quad (6.31)$$

budeme predpokladať, že je omnoho menšia, než jeho jednosmerná zložka I_0

$$I_{pp} \ll |I_0|. \quad (6.32)$$

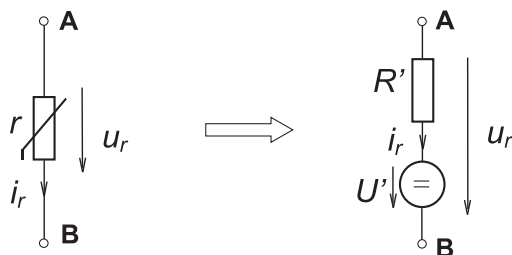
Uvažujme voltampérovú charakteristiku nelineárneho prvku vyjadrenú ako napätie v závislosti od prúdu funkciou (6.2). Pracovný bod nelineárneho prvku v takomto režime budenia síce nebude stacionárny, ale bude sa pohybovať len v tesnom okolí polohy $(U_0; I_0)$. Rozviníme funkciu (6.2) do Taylorovho radu v tesnom okolí jednosmerného pracovného bodu

$$\begin{aligned} u_r = U_0 + \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{du_r}{di_r} \right)_{\mathbf{P}} (i_r - I_0) + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{d^2u_r}{di_r^2} \right)_{\mathbf{P}} (i_r - I_0)^2 + \\ + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{d^3u_r}{di_r^3} \right)_{\mathbf{P}} (i_r - I_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{d^nu_r}{di_r^n} \right)_{\mathbf{P}} (i_r - I_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (6.33)$$

Keďže sa pohybuje len v tesnom okolí pracovného bodu – $u_r \approx U_0$, resp. $i_r \approx I_0$, člen $(i_r - I_0)$ bude veľmi malý. Neurobíme teda veľkú chybu, ak zanedbáme všetky členy radu od kvadratického vyššie včítane

$$(i_r - I_0)^n \approx 0, \quad n \geq 2. \quad (6.34)$$

²Index "pp" sa pri označení medzivrcholovej hodnoty v literatúre bežne používa. Pochádza z anglického výrazu *peak-peak*.



Obr. 6.12: Lineárna náhrada nelineárneho dvojpólu.

Nekonečný rad (6.33) takto prejde na lineárnu aproximáciu

$$u_r \approx U_0 + \left(\frac{du_r}{di_r} \right)_{\mathbf{P}} (i_r - I_0). \quad (6.35)$$

Derivácia napätia podľa prúdu je ale diferenciálny odpor dvojpólu v pracovnom bode (6.23)

$$u_r \approx U_0 + (r_d)_{\mathbf{P}} (i_r - I_0). \quad (6.36)$$

Rovnica (6.36) je analytický predpis priamky – dotýčnice k voltampérovej charakteristike nelineárneho prvku v pracovnom bode \mathbf{P} (obr. 6.11). Znamená to, že sme nelineárny prvok nahradili lineárnym, ktorého voltampérová charakteristika tvorí dotýčnicu k nelineárnej charakteristike v jednosmernom pracovnom bode. Takáto náhrada bude presná v jednosmernom pracovnom bode. V jeho tesnom okolí bude už náhrada nepresná, no chyba lineárnej aproximácie dotýčnicou je malá.

Ostáva ešte navrhnuť štruktúru takejto lineárnej náhrady. Možností je nekonečné množstvo, zvolíme sériovú kombináciu zdroja napätia a rezistora (obr. 6.12). Vypočítajme parametre prvkov U' a R' . Voltampérová charakteristika lineárnej náhrady je daná rovnicou

$$u_r = U' + R' \cdot i_r. \quad (6.37)$$

Jej smernica

$$\frac{du_r}{di_r} = \frac{d}{di_r} (U' + r_d \cdot i_r) = R' \quad (6.38)$$

musí byť v bode \mathbf{P} zhodná so smernicou nelineárnej charakteristiky, teda

$$R' = (r_d)_{\mathbf{P}}. \quad (6.39)$$

Priamka musí prechádzať bodom \mathbf{P}

$$U_0 = U' + r_d \cdot I_0, \quad (6.40)$$

odtiaľ

$$U' = U_0 - r_d \cdot I_0. \quad (6.41)$$

Príklad 25 V obvode na obr. 6.13 je dané $R_0 = 10\Omega$. Voltampérová charakteristika rezistora r je analyticky vyjadrená funkciou

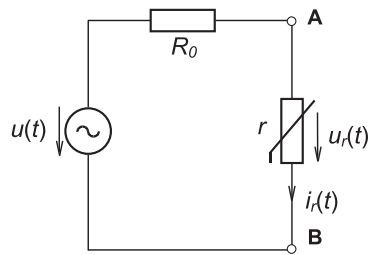
$$i_r = \begin{cases} 5 \cdot 10^{-3} u_r^2 & u_r \geq 0 \\ -5 \cdot 10^{-3} u_r^2 & u_r < 0 \end{cases} \quad [\text{A}; \text{V}].$$

Časový priebeh napätia zdroja u je daný funkciou

$$u(t) = U_z + U_{m1} \cdot \sin(\omega t),$$

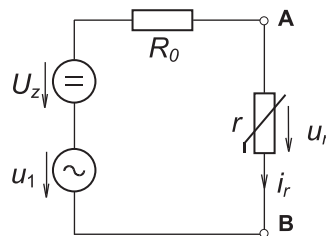
kde $U_z = 40\text{V}$, $U_{m1} = 1,2\text{V}$.

Obvod linearizujte a vypočítajte približný časový priebeh napätia $u_r(t)$ na nelineárnom rezistore r .



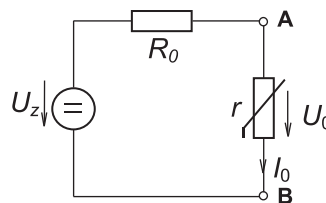
Obr. 6.13: K príkladu 25.

Riešenie. Jednosmerná zložka U_z napätia zdroja vytvára pre nelineárny dvojpól jednosmerné predpätie a nastavuje jeho jednosmerný pracovný bod $\mathbf{P} = (U_0, I_0)$. Na nej je superponovaná malá striedavá zložka $u_1(t) = U_{m1} \cdot \sin(\omega t)$, pričom platí $U_{pp} = U_{m1} \ll U_0$. Znamená to, že napätie u_r , resp. prúd i_r osciluje na voltampérovej charakteristike v tesnom okolí bodu \mathbf{P} . Keď pri určení napätia $u_r(t)$ použijeme namiesto skutočnej voltampérovej charakteristiky dotýčnicu v pracovnom bode \mathbf{P} , dopustíme sa len malej chyby. Zdroj napätia $u(t)$ budeme reprezentovať sériovou kombináciou dvoch fiktívnych zdrojov U_0 a $u_1(t)$ (obr. a).



Obr. a.

Na hľadanie parametrov U' a R' potrebujeme poznať jednosmerný pracovný bod nelineárneho prvku. Pri jeho hľadaní vynulujeme zdroj reprezentujúci striedavú zložku (obr. b). V takomto obvode už vieme nájsť $\mathbf{P} = (20\text{V}, 2\text{A})$. V tomto prípade je výhodné analytické riešenie.

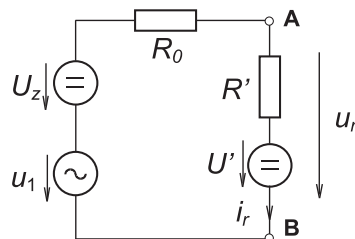


Obr. b.

V danom pracovnom bode vypočítame diferenciálny odpor nelineárneho prvku $r_d = 5\Omega$, čo je zároveň hľadaný odpor rezistora R'

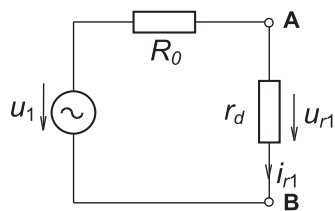
$$R' = r_d = 5\Omega.$$

Zo vzťahu (6.41) získame $U' = 10\text{V}$. Obvod s lineárnou náhradou je na obr. c.



Obr. c.

Takáto sieť je lineárna a teda v nej platí princíp superpozície. Striedavá zložka napätia na nelineárnom prvku $u_{r_1}(t)$ je odozvou na pôsobenie zdroja $u_1(t)$. Pri jej hľadaní vynulujeme stacionárne zdroje (obr. d).



Obr. d.

Pre napätie $u_{r_1}(t)$ platí

$$u_{r_1}(t) = \frac{r_d}{R_0 + r_d} \cdot u_1(t) = 80 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(\omega t).$$

Napätie na nelineárnom prvku nájdeme ako superpozíciu jednosmernej zložky U_0 a striedavej zložky $u_{r_1}(t)$

$$u_r(t) = U_0 + u_{r_1}(t) = 20 + 80 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(\omega t) [\text{V}].$$

Pripomeňme, že získané vyjadrenie časového priebehu je len približné. Výsledkom lineárneho priblíženia je, že striedavá zložka napätia $u_{r_1}(t)$ má harmonický priebeh. To v skutočnosti neplatí. Tvar funkcie $u_{r_1}(t)$ sa od harmonického priebehu odlišuje, je skreslený. Nakoľko je ale jej rozkmit (80mV) v porovnaní s jednosmerným predpätím (20V) veľmi malý, miera skreslenia je zanedbateľná.

Príklad 26 Uvažujme nelineárny prvok z predošlej úlohy napájaný priamo zo zdroja napätia

$$u(t) = 20 + 10 \cdot \sin(\omega t).$$

Graficky ilustrujme časový priebeh prúdu $i_r(t)$ vyjadrený priamo pomocou voltampérovej charakteristiky prvku a pomocou lineárnej náhrady.

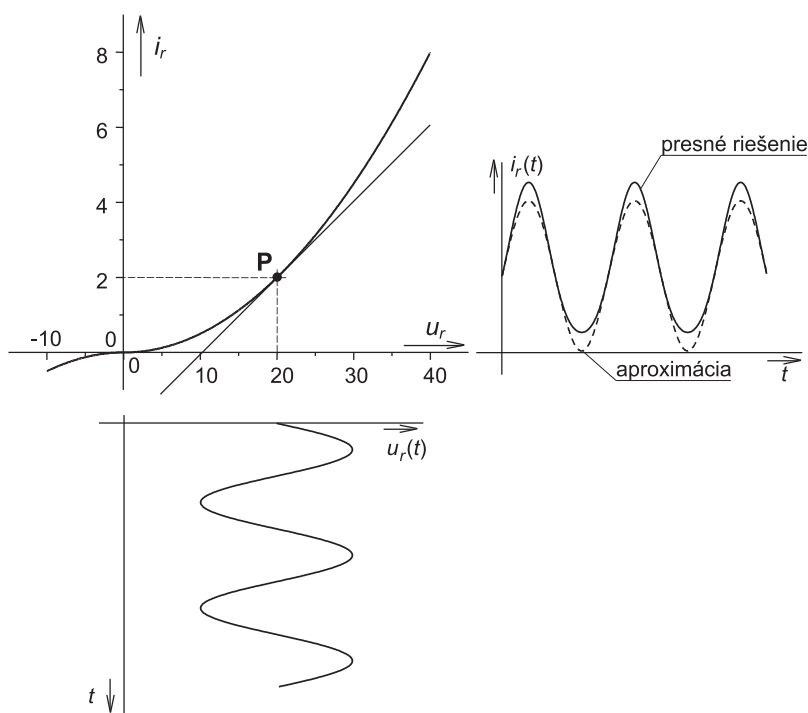
Riešenie. Situácia je znázornená na obr. 6.14. Problém je, že pri veľkom rozkmitte nestacionárnej zložky napätia sa na voltampérovej charakteristike dostávame do aj oblastí príliš vzdialených od bodu **P**. Tam sa skutočná voltampérová charakteristika výrazne líši od lineárnej aproximácie. Ak je rozkmit nestacionárnej zložky napätia porovnateľný so zložkou jednosmernou, je dokonca ťažké hovoriť o pojme jednosmerný pracovný bod. Na obr. 6.14 vidno, že časový priebeh prúdu počítaný podľa skutočnej charakteristiky sa výrazne líši od priebehu získaného v linearizovanom obvode. Ľahko sa dá odvodiť, že presné vyjadrenie časového priebehu prúdu je

$$i_r(t) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot [20 + 10 \cdot \sin(\omega t)]^2,$$

zatiaľ čo pre prúd vyjadrený pomocou lineárnej aproximácie platí funkcia

$$i_r(t) = 2 + 2 \cdot \sin(\omega t).$$

V tomto prípade linearizácia siete vedie na výraznú chybu riešenia, teda nie je možná. Sieť treba analyzovať ako nelineárnu.



Obr. 6.14: Chyba aproximácie pri veľkom rozkmitte signálu.