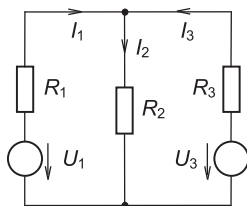


Kapitola 3

Všeobecné metódy riešenia rezistívnych sietí.

Siete, ktorými sme sa zaoberali v predošlej kapitole, obsahovali vždy len jeden zdroj. Pasívnu časť sieť, ktorá bola k takémuto zdroju pripojená, sme najprv zjednodušili na jeden rezistor. Vypočítali sme celkový prúd, ktorý takáto sieť odoberala zo zdroja. Následne sme použitím vzťahov pre prúdový a napätový delič, transfiguračné vzťahy a podobne vypočítali prúdy jednotlivými prvkami, resp. napätia na nich.



Obr. 3.1: Príklad elektrickej siete s viacerými zdrojmi.

Situácia sa ale zmení, ak elektrická sieť obsahuje viac aktívnych prvkov (zdrojov napätia a prúdu). Ako príklad môže poslúžiť sieť na obr. 3.1. Rezistory nie sú zapojené ani paralelne, ani sériovo. Vzhľadom ku ktorému zdroju by sme mali sieť nahradiť rezistorom? A ako, keď je tam ešte aj druhý zdroj? Je zrejmé, že zjednodušovanie siete tak, ako to bolo popísané v predošlej kapitole, tu nie je možné.

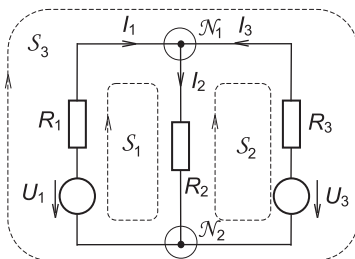
Ak potrebujeme v sieti nájsť napätia a prúdy, musíme pre ne zostaviť sústavu rovníc. Takejto sústave rovníc budeme hovoriť *matematický model siete*. Pri budovaní matematického modelu máme k dispozícii 1. a 2. Kirchhoffov zákon a pre rezistory ešte aj Ohmov zákon, resp. pre kapacitor a induktor diferenciálne vzťahy medzi napätím a prúdom. Skúsme teda uvedený obvod vyriešiť priamou aplikáciou týchto zákonov.

3.1 Priama aplikácia Kirchhoffových zákonov.

Metóda spočíva v písaní rovníc Kirchhoffových zákonov pre uzly a slučky siete. Budeme ju ilustrovať na príklade na obr. 3.1. Sú dané parametre prvkov $U_1 = 10\text{V}$, $U_3 = 20\text{V}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 10\Omega$. Úlohou je vypočítať prúdy všetkými prvkami, teda I_1, I_2 a I_3 .

Pre každý uzol napíšeme rovnicu 1. Kirchhoffovho zákona (obr. 3.2).

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1 : -I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ \mathcal{N}_2 : I_1 - I_2 + I_3 &= 0\end{aligned}$$



Obr. 3.2: Riešenie siete priamou aplikáciou Kirchhoffových zákonov.

Pre každú slučku napíšeme rovnicu 2. Kirchhoffovho zákona. Napätia na rezistoroch vyjadríme z prúdov pomocou Ohmovho zákona.

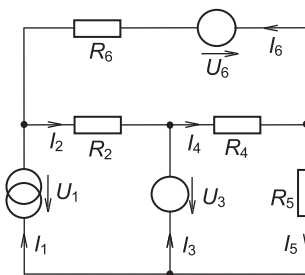
$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 : R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 - U_1 &= 0 \\ \mathcal{S}_2 : -R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 + U_3 &= 0 \\ \mathcal{S}_3 : -U_1 + R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 + U_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aplikácia Kirchhoffových zákonov viedla na sústavu 5 rovníc, v ktorých sú 3 neznáme prúdy. Na prvý pohľad je zrejmé, že rovnica (\mathcal{N}_2) je (-1) -násobkom rovnice (\mathcal{N}_1). Taktiež sa dá ukázať, že rovnica (\mathcal{S}_3) sa dá získať ako súčet rovníc (\mathcal{S}_1) a (\mathcal{S}_2). Lineárne nezávislý systém rovníc získame tak, že vynecháme jednu z rovníc 1. Kirchhoffovho zákona (napríklad \mathcal{N}_2) a jednu z rovníc 2. Kirchhoffovho zákona (napríklad \mathcal{S}_3). Zapišeme sústavu rovníc v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Riešením sú prúdy $I_1 = 0,25\text{A}$, $I_2 = 1,5\text{A}$ a $I_3 = 1,25\text{A}$.

Skúsme teraz použiť priamou aplikáciu Kirchhoffových zákonov na zložitejší obvod (obr. 3.3).



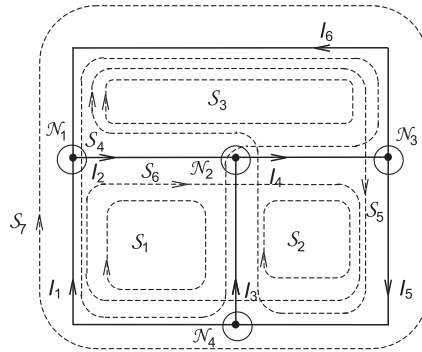
Obr. 3.3: Príklad zložitejšej siete.

Sú zadané parametre prvkov $I_1 = 1\text{A}$, $R_2 = 10\Omega$, $U_3 = 5\text{V}$, $R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 10\Omega$, $R_6 = 5\Omega$, $U_6 = 10\text{V}$.

V obvode je 7 neznámych veličín – prúdy I_2 , I_3 , I_4 , I_5 a I_6 a napätie U_1 na prúdovom zdroji. Pre ich výpočet pomocou Kirchhoffových zákonov zostavíme sústavu rovníc. Najprv napíšeme rovnicu 1. Kirchhoffovho zákona pre všetky uzly (obr. 3.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 : -I_1 + I_2 - I_6 &= 0 \\ \mathcal{N}_2 : -I_2 - I_3 + I_4 &= 0 \\ \mathcal{N}_3 : -I_4 + I_5 + I_6 &= 0 \\ \mathcal{N}_4 : I_1 + I_3 - I_5 &= 0 \end{aligned}$$

Pre všetky slučky napíšeme rovnicu 2. Kirchhoffovho zákona



Obr. 3.4: Sieť s vyznačenými uzlami a slučkami.

$$\begin{aligned}
 S_1 &: -U_1 + R_2 \cdot I_2 + U_3 = 0 \\
 S_2 &: -U_3 + R_4 \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 = 0 \\
 S_3 &: -R_2 \cdot I_2 - R_6 \cdot I_6 + U_6 - R_4 \cdot I_4 = 0 \\
 S_4 &: -R_6 \cdot I_6 + U_6 - R_4 \cdot I_4 + U_3 - U_1 = 0 \\
 S_5 &: R_5 \cdot I_5 - U_3 - R_2 \cdot I_2 - R_6 \cdot I_6 + U_6 = 0 \\
 S_6 &: R_2 \cdot I_2 + R_4 \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 - U_1 = 0 \\
 S_7 &: -U_1 - R_6 \cdot I_6 + U_6 + R_5 \cdot I_5 = 0
 \end{aligned}$$

Pomocou Kirchoffových zákonov sme napísali spolu 11 rovníc. Keďže očakávame 7 neznámych, pravdepodobne 4 rovnice budú lineárne závislé! Ako zistiť, ktoré? V predošlom príklade to bolo na rovniciach vidno ľahko, lebo bol jednoduchý. V zložitejšom obvode sa však na intuitívny postup nedá spoľahnúť. A má vôbec daná úloha riešenie? Ako to zistiť?

Cítíme, že na tomto mieste by sme potrebovali systematický postup, pomocou ktorého

- hneď na začiatku zistíme, či má úloha vôbec riešenie
- sformulujeme systém lineárne nezávislých rovníc optimálny z hľadiska ich počtu. Ich riešenie nám pomôže získať hľadané veličiny.

Vopred prezradíme, že úloha na obr. 3.3 riešenie má. Pri hľadaní 7 neznámych pritom netreba riešiť sústavu väčšiu, ako je sústava dvoch rovníc o dvoch neznámych.

V teórii elektrických obvodov existuje viacero takýchto metód, my sa v ďalšom zameriame na dve z nich

- metóda slučkových prúdov
- metóda uzlových napätí.

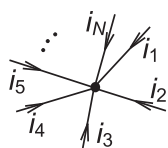
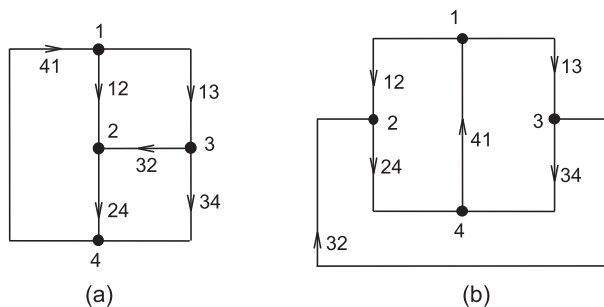
Skôr, než o nich začneme diskutovať, zavedieme niektoré nové pojmy.

3.2 Základné pojmy z topológie elektrických obvodov.

Uzol elektrického obvodu je miesto, z ktorého vychádza ľubovoľné množstvo úsekov. Ak je do uzla pripojených n úsekov, uzol je n -tého rádu (obr. 3.5).

Úsek elektrického obvodu je časť obvodu zapojená medzi dvojicu uzlov. Úsek pozostáva z ľubovoľného množstva sériovo zapojených dvojpolov.

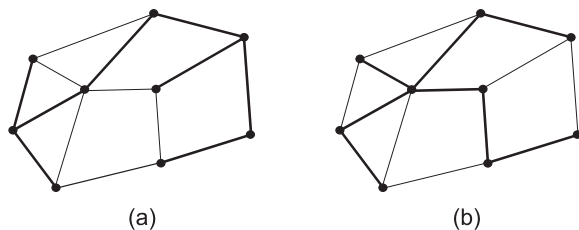
Graf elektrického obvodu je množina úsekov a uzlov elektrického obvodu. Vlastnosťou grafu je, že nezáleží na priestorovom rozmiestnení uzlov. Na obr. 3.6 je ten istý graf nakreslený dvoma rôznymi spôsobmi. Ak je

Obr. 3.5: Uzol n -tého rádu.

Obr. 3.6: Príklad orientovaného grafu.

v úsekoch grafu zvolený kladný smer prúdu, takýto graf je *orientovaný*. Úsek sa niekedy nazýva aj *hrana grafu*.

Počet uzlov grafu označíme u a počet úsekov grafu označíme x . Pre graf na obr. 3.6 platí $u = 4$ a $x = 6$. *Úplný strom* je najmenšia množina úsekov, ktorá navzájom prepája všetky uzly elektrického obvodu. Úplný strom nesmie tvoriť slučku.



Obr. 3.7: Rôzne voľby pravého stromu.

Na obr. 3.7 je ďalší príklad grafu. Hrubou čiarou sú vyznačené úseky, ktoré sú súčasťou úplného stromu. Vidíme, že voľba úplného stromu v elektrickom obvode nemusí byť jednoznačná. Uvedené sú dva príklady voľby úplného stromu, no ľahko zistíme, že existuje ešte množstvo ďalších možností.

Voľbou úplného stromu vzniknú dve množiny úsekov - úseky, ktoré patria do úplného stromu a úseky, ktoré nepatria do úplného stromu. Pre obidva typy sú zavedené pomenovania:

- Úsek, ktorý patrí do úplného stromu, nazveme *vetvou*.
- Úsek, ktorý nepatrí do úplného stromu, nazveme *tetivou*.

Všetky úplné stromy, ktoré v sieti nájdeme, obsahujú rovnaký počet vetiev a tento je daný počtom uzlov. Ak označíme v počet vetiev, potom platí

$$v = u - 1. \quad (3.2)$$

Počet tetív obvodu s potom bude

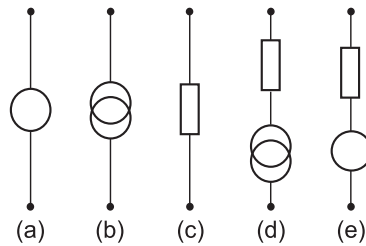
$$s = x - v = x - (u - 1). \quad (3.3)$$

Úsek, ktorý obsahuje iba jeden alebo viac napäťových zdrojov bez ďalšieho sériového prvku, nazveme *napäťový úsek*, alebo *u-hrana grafu*. Vlastnosťou takejto hrany je, že napätie na nej nezávisí od pretekajúceho prúdu.

Úsek, ktorý obsahuje iba prúdový zdroj, nazveme *prúdový úsek*, alebo *i-hrana grafu*. Jej vlastnosťou je, že pretekajúci prúd je nezávislý od napätia na nej.

Úsek, ktorý obsahuje rezistor, nazveme *r-hrana grafu*. Vzájomná závislosť napätia a prúdu *r*-hranou je jednoznačne daná rovnicou, v ktorej vystupujú parametre prvkov takejto hrany. Vo vzťahu medzi jej napätím a prúdom vystupuje Ohmov zákon.

Na obr. 3.8 sú uvedené príklady jednotlivých typov hrán. Úsek (a) je *u*-hrana. Úsek (b) je *i*-hrana, úsek (c) je *r*-hrana. Úsek (d) budeme tiež považovať za *i*-hranu, pretože prúd je daný prúdovým zdrojom. Úsek (e) budeme považovať za *r*-hranu. Obsahuje síce zdroj napätia, no v dôsledku napätia na rezistore bude celkové napätie hrany závisieť aj od pretekajúceho prúdu.



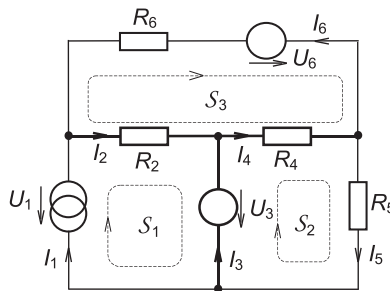
Obr. 3.8: Príklady jednotlivých typov hrán.

Pravý strom je úplný strom, ktorý navyše spĺňa nasledovné kritériá:

- Obsahuje *všetky* *u*-hrany grafu,
- neobsahuje *žiadnu* *i*-hranu grafu.

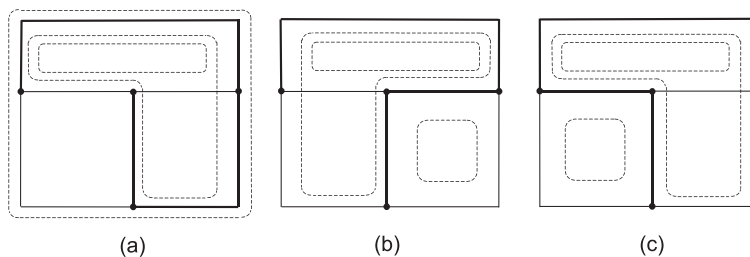
r-hrany môžu a nemusia patriť do pravého stromu. Pravý strom v obvode hľadáme tak, že do neho začleníme všetky *u*-hrany grafu a doplníme ho potrebným počtom *r*-hrán tak, aby navzájom prepájali všetky uzly.

Ak sa v sieti podarí nájsť pravý strom, matematický model obvodu (sústava rovníc) má jednoznačné riešenie.



Obr. 3.9: Sieť s pravým stromom a nezávislými slučkami.

Ilustrujme voľbu pravého stromu na obvode na obr. 3.3. Na obr. 3.9 je jeden možných pravých stromov (vetvy stromu sú vyznačené hrubou čiarou). Poznamenajme, že úsek so zdrojom U_6 síce obsahuje ideálny zdroj napätia, no v sérii s ním je zapojený rezistor R_6 , teda tento úsek je *r*-hranou. Znamená to, môže a nemusí byť súčasťou pravého stromu (vetvou). Úsek so zdrojom U_3 musí byť vetvou (*u*-hrana), úsek so zdrojom I_1 nesmie byť vetvou, musí byť tetivou pravého stromu (*i*-hrana). Na obr. 3.10 sú uvedené ďalšie možnosti voľby pravého stromu v tomto obvode.



Obr. 3.10: Ďalšie voľby pravého stromu a nezávislých slučiek.

Nezávislá slučka je uzavretá slučka tvorená úsekmi obvodu, ktorá obsahuje práve jednu tetivu. Ostatné úseky slučky sú vetvy. Pre každú tetivu je možné nájsť práve jednu nezávislú slučku. Ukázali sme, že voľba pravého stromu v elektrickom obvode nemusí byť jednoznačná. Ak však zvolíme pravý strom, nezávislé slučky sú už dané jednoznačne.

3.3 Metóda slučkových prúdov.

Dôležitou vlastnosťou systému nezávislých slučiek v obvode je, že každá tetiva patrí vždy len do jednej nezávislej slučky. Ak napíšeme rovnice 2. Kirchhoffovho zákona pre všetky nezávislé slučky, napätie na jednej tetive sa môže vyskytovať vždy len v jednej z týchto rovníc. Takáto rovnica sa potom nedá vyjadriť ako lineárna kombinácia ostatných. Znamená to, že *rovnice 2. Kirchhoffovho zákona pre nezávislé slučky tvoria lineárne nezávislý systém*.

Metóda slučkových prúdov dáva postup, ako takéto rovnice zostaviť. Ako pomôcka slúžia fiktívne *slučkové prúdy*. Hľadanie neznámych veličín pomocou metódy slučkových prúdov sa dá rozdeliť do nasledovných krokov:

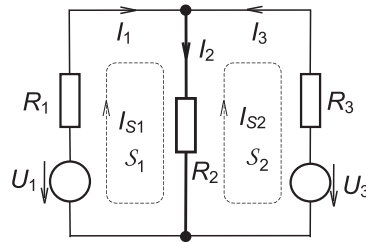
1. V sieti nájdeme pravý strom.
2. Pre každú tetivu vyznačíme nezávislú slučku.
3. Každéj nezávislej slučke priradíme slučkový prúd. Slučkový prúd je fiktívny prúd, ktorý cirkuluje pozdĺž uzavretej nezávislej slučky. Smery slučkových prúdov môžeme zvoliť ľubovoľne.
4. Prúdy úsekmi obvodu vyjadríme pomocou slučkových prúdov - napíšeme *incidenčné rovnice*.
5. Napíšeme rovnicu 2. Kirchhoffovho zákona pre každú nezávislú slučku. Napätia na rezistoroch vyjadríme pomocou prúdov, ktoré nimi tečú.
6. Z incidenčných vzťahov dosadíme za prúdy do rovníc 2. Kirchhoffovho zákona.
7. Vyriešime sústavu rovníc 2. Kirchhoffovho zákona s neznámymi slučkovými prúdmi a napätiami na ideálnych prúdových zdrojoch.
8. Pomocou incidenčných rovníc vypočítame prúdy úsekmi siete.

Ak v sieti poznáme slučkové prúdy, ľubovoľný ďalší prúd, resp. napätie už vieme vypočítať *bez nutnosti riešiť ďalšiu sústavu rovníc*. Ilustrujme použitie metódy slučkových prúdov na príkladoch.

Príklad 6 V obvode na obr. 3.1 vypočítajte pomocou metódy slučkových prúdov všetky prúdy.

Riešenie.

V sieti sa dá nájsť pravý strom, obvod má riešenie. Vyznačíme nezávislé slučky a priradíme im jednotlivé slučkové prúdy I_{S1} a I_{S2} (obr. a).



Obr. a.

- Napíšeme incidenčné vzťahy, teda vyjadríme prúdy jednotlivými úsekmi pomocou slučkových prúdov. Úsek s prúdom I_1 je súčasťou nezávislej slučky s prúdom I_{S1} . Prúdy I_1 a I_{S1} sú orientované súhlasne, teda môžeme napísať incidenčný vzťah

$$I_1 = I_{S1}.$$

Úsek s rezistorom R_2 je súčasťou prvej aj druhej nezávislej slučky. Prúd I_{S1} je vzhľadom k I_2 orientovaný nesúhlasne, prúd I_3 je orientovaný súhlasne. Pre prúd I_2 teda platí

$$I_2 = I_{S1} - I_{S2}.$$

Úsek s prúdom I_3 je súčasťou len druhej nezávislej slučky, I_3 a I_{S2} sú orientované navzájom nesúhlasne, teda môžeme písať

$$I_3 = -I_{S2}.$$

- V každej nezávislej slučke napíšeme rovnicu 2. Kirchhoffovho zákona. Napätia na rezistoroch prítomných v slučke vyjadríme priamo pomocou Ohmovho zákona

$$-U_1 + R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = 0$$

$$-R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 + U_3 = 0$$

- Za prúdy I_1 , I_2 a I_3 dosadíme z incidenčných vzťahov. Výsledkom je sústava 2 rovníc o 2 neznámych I_{S1} a I_{S2} .

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{S1} \\ I_{S2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ -U_3 \end{pmatrix}$$

Riešením získame $I_{S1} = 0,25\text{A}$ a $I_{S2} = -1,25\text{A}$.

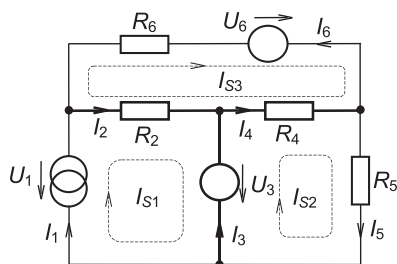
- Za slučkové prúdy dosadíme do incidenčných vzťahov, čím získame skutočné prúdy v obvode $I_1 = 0,25\text{A}$, $I_2 = 1,5\text{A}$ a $I_3 = 1,25\text{A}$.

Príklad 7 V obvode na obr. 3.3 vypočítajte pomocou metódy slučkových prúdov všetky neznáme prúdy a napätie U_1 na ideálnom zdroji prúdu.

Riešenie.

- V obvode nájdeme pravý strom a v každej nezávislej slučke zavedieme slučkový prúd (obr. a).
- Napíšeme incidenčné vzťahy

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{S1} \\ I_2 &= I_{S1} - I_{S3} \\ I_3 &= -I_{S1} + I_{S3} \\ I_4 &= I_{S2} - I_{S3} \\ I_5 &= I_{S2} \\ I_6 &= -I_{S3} \end{aligned}$$



Obr. a.

- Pre každú nezávislú slučku napíšeme rovnicu 2. Kirchoffovho zákona

$$\begin{aligned} -U_1 + R_2 \cdot I_2 + U_3 &= 0 \\ -U_3 + R_4 \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 &= 0 \\ U_6 - R_4 \cdot I_4 - R_2 \cdot I_2 - R_6 \cdot I_6 &= 0 \end{aligned}$$

- Za prúdy dosadíme z incidenčných rovníc

$$\begin{aligned} R_1 \cdot I_{S1} - R_2 \cdot I_{S3} - U_1 &= -U_3 \\ (R_4 + R_5) \cdot I_{S2} - R_4 \cdot I_{S3} &= U_3 \\ -R_2 \cdot I_{S1} - R_4 \cdot I_{S2} + (R_2 + R_4 + R_6) \cdot I_{S3} &= -U_6 \end{aligned}$$

Získali sme 3 rovnice s neznámymi prúdmi I_{S1} , I_{S2} a I_{S3} a neznámym napätím U_1 na prúdovom zdroji. Máme viac neznámych, než rovníc. Za tento stav je "zodpovedný" práve prúdový zdroj I_1 . Pre takýto zdroj sa nedá napísať rovnica Ohmovho zákona. Napätie U_1 sme nevedeli vyjadriť pomocou prúdu I_1 , preto napätie U_1 ostalo v rovniciach ako neznáma. Potrebujeme teda ešte jednu rovnicu. Rovnica 2. Kirchoffovho zákona to už byť nemôže. Každá takáto rovnica pre ľubovoľnú ďalšiu slučku v obvode by už bola lineárne závislá s ostatnými. My už ale potrebnú rovnicu máme. Je to hneď prvý incidenčný vzťah $I_1 = I_{S1}$. Všimnime si, že slučkový prúd I_{S1} je priamo daný prúdom zdroja $I_1 = 1\text{A}$, ktorý je poznáme. K sústavě rovníc 2. Kirchoffovho zákona teda doplníme prvý incidenčný vzťah.

$$\begin{aligned} R_1 \cdot I_{S1} - R_2 \cdot I_{S3} - U_1 &= -U_3 \\ (R_4 + R_5) \cdot I_{S2} - R_4 \cdot I_{S3} &= U_3 \\ -R_2 \cdot I_{S1} - R_4 \cdot I_{S2} + (R_2 + R_4 + R_6) \cdot I_{S3} &= -U_6 \\ I_{S1} &= I_1 \end{aligned}$$

Takto máme sústavu 4 rovníc s neznámymi $I_{S1}, I_{S2}, I_{S3}, U_1$, ktorú môžeme riešiť. Všimnime si však, že nie je problém eliminovať zo sústavě pomocou poslednej rovnice neznámu I_{S1} - namiesto I_{S1} do ostatných rovníc dosadíme I_1

$$\begin{aligned} R_2 \cdot I_{S3} + U_1 &= U_3 + R_1 \cdot I_1 \\ (R_4 + R_5) \cdot I_{S2} - R_4 \cdot I_{S3} &= U_3 \\ -R_4 \cdot I_{S2} + (R_2 + R_4 + R_6) \cdot I_{S3} &= -U_6 + R_2 \cdot I_1 \end{aligned}$$

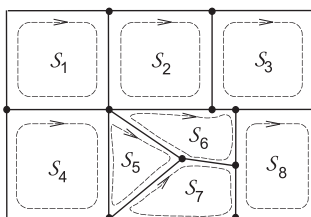
Neznáme napätie U_1 sa nachádza iba v prvej rovnici. Túto rovnicu dočasne "odložíme" zo sústavě a vyriešime dvojicu rovníc s neznámymi I_{S2} a I_{S3} ¹. Zapišeme sústavu v maticovej forme

$$\begin{pmatrix} R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_4 & R_2 + R_4 + R_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{S2} \\ I_{S3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_3 \\ -U_6 + R_2 \cdot I_1 \end{pmatrix}$$

Riešením získame slučkové prúdy $I_{S2} = 0,3125\text{A}$ a $I_{S3} = 0,125\text{A}$. Následne sa môžeme vrátiť k odloženej rovnici, dosadiť za (už známe) I_{S3} a vypočítať $U_1 = 13,75\text{V}$. Z incidenčných vzťahov vypočítame prúdy $I_2 = 0,875\text{A}$, $I_3 = -0,6875\text{A}$, $I_4 = 0,1875\text{A}$, $I_5 = 0,3125\text{A}$ a $I_6 = -0,125\text{A}$.

Poznámka: Pri rovinných sieťach je možné vynechať hľadanie nezávislých slučiek a slučkové prúdy viesť okami siete. Oko siete je najmenšia slučka zložená z úsekov siete, ktorej vnútorom neprechádza žiaden ďalší úsek. Oká siete tvoria výhodný systém, pretože jednotlivé úseky siete sú obsiahnuté v minimálnom počte slučiek, pre ktoré píšeme rovnicu 2. Kirchoffovho zákona (obr. 3.11).

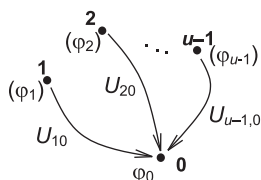
¹Ak uznáme za vhodné, môžeme riešiť aj sústavu 4 rovníc a nemusíme uvedeným spôsobom znižovať jej stupeň. Rozhodnutie väčšinou závisí od vybavenia, ktoré máme k dispozícii (software, kalkulačka, pero a papier).



Obr. 3.11: Vedenie slučkových prúdov okami siete.

3.4 Metóda uzlových napätí.

Ak má elektrická sieť u uzlov, potom rovnice 1. Kirchhoffovho zákona pre $(u-1)$ uzlov tvorí lineárne nezávislý systém. Metóda uzlových napätí predstavuje návod, ako takéto rovnice sformulovať. Ich riešením získame hľadané veličiny – neznáme napätia a prúdy. Ako pomôcka pri tom slúžia *uzlové napätia*, ktoré v obvode zavedieme. Ak v obvode poznáme uzlové napätia, ľubovoľné napätie, alebo prúd v obvode už vypočítame bez nutnosti riešiť ďalšiu sústavu rovníc.



Obr. 3.12: Voľby uzlových napätí v sieti.

Na obr. 3.12 sú zázornené uzly siete. Sieť má u -uzlov označených $0, 1, \dots, (u-1)$. Každému uzlu priradíme *uzlový potenciál* $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{u-1}$. Uzol označený 0 zvolíme za *referenčný (vzťažný)*. Uzlové napätie U_k ako rozdiel jeho potenciálu a potenciálu referenčného uzla φ_0

$$U_k = \varphi_k - \varphi_0, \quad k = 1, \dots, (u-1).$$

Uzlové napätie teda smeruje od daného uzla k referenčnému. Ak zvolíme potenciál referenčného uzla za nulový

$$\varphi_0 = 0,$$

uzlové napätia budú priamo rovné hodnotám potenciálov jednotlivých uzlov

$$U_k = \varphi_k, \quad k = 1, \dots, (u-1).$$

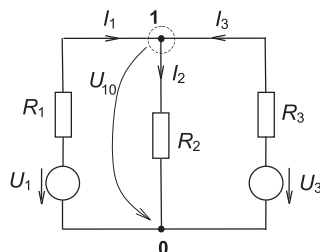
Postup pri použití metódy uzlových napätí môžeme sformulovať do nasledovných bodov:

- Voľbou pravého stromu overíme, či má sieť riešenie.
- V sieti zvolíme referenčný uzol. Ak sa v sieti vyskytujú napäťové úseky (u -hrany grafu), je vhodné, aby vychádzali z referenčného uzla.
- Každému uzlu okrem referenčného priradíme uzlové napätie.
- Pre všetky uzly okrem referenčného napíšeme rovnicu 1. Kirchhoffovho zákona.
- V r -hranách grafu vyjadríme prúdy pomocou Ohmovho zákona.
- Za prúdy r -hranami dosadíme do rovníc 1. Kirchhoffovho zákona.
- Vyriešime sústavu rovníc s neznámymi uzlovými napätiami a prúdmi u -hranami grafu.

Ilustrujme použitie metódy uzlových napätí predovšetkým na tých príkladoch, ktoré sme už vyriešili metódou slučkových prúdov.

Príklad 8 V obvode na obr. 3.1 vypočítajte pomocou metódy uzlových napätí všetky prúdy.

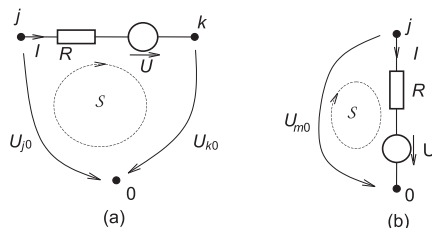
Riešenie.



- Voľbou pravého stromu sme overili, že úloha má riešenie. Graf siete neobsahuje u -hrany, teda za referenčný uzol môžeme zvoliť ľubovoľný (napríklad spodný). Referenčný uzol označíme číslom **0**, zvyšný uzol označíme číslom **1**. Zavedieme uzlové napätie U_{10} medzi uzlom **1** a referenčným uzlom.
- Pre uzol **1** napíšeme rovnicu 1. Kirchhoffovho zákona

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

- V r -hranách grafu vyjadríme prúdy pomocou Ohmovho zákona. Postup je vo všeobecnosti naznačený na obr. 3.13.



Obr. 3.13: K vyjadreniu prúdu r -hranami.

Vyjadríme prúd r -hranou, ktorá je zapojená medzi uzly i a j (obr. 3.13a). Napíšeme rovnicu 2. Kirchhoffovho zákona pre slučku S , ktorá obsahuje danú r -hranu a je uzavretá uzlovými napätiami uzlov, medzi ktorými je úsek zapojený (a)

$$R \cdot I + U + U_{k0} - U_{j0} = 0,$$

odtiaľ

$$I = \frac{-U + U_{j0} - U_{k0}}{R}.$$

Ak úsek vychádza z referenčného uzla (obr. 3.13b), slučka je uzavretá jedným uzlovým napätím

$$R \cdot I + U - U_{m0} = 0$$

odtiaľ

$$I = \frac{U_{m0} - U}{R}.$$

Začnime prúdom I_1 . Napíšeme rovnicu 2. Kirchhoffovho zákona pre slučku, ktorá obsahuje úsek s prúdom I_1 a je uzavretá uzlovým napätím U_{10} .

$$R_1 \cdot I_1 + U_{10} - U_1 = 0,$$

odtiaľ

$$I_1 = \frac{U_1 - U_{10}}{R_1}.$$

Podobne postupujeme pre prúdy I_2 a I_3

$$R_2 \cdot I_2 - U_{10} = 0,$$

odtiaľ

$$I_2 = \frac{U_{10}}{R_2},$$

$$R_3 \cdot I_3 + U_{10} - U_3 = 0,$$

odtiaľ

$$I_3 = \frac{U_3 - U_{10}}{R_3}.$$

- Za prúdy dosadíme do rovnice 1. Kirchhoffovho zákona, čím získame rovnicu s jednou neznámou - uzlovým napätím U_{10}

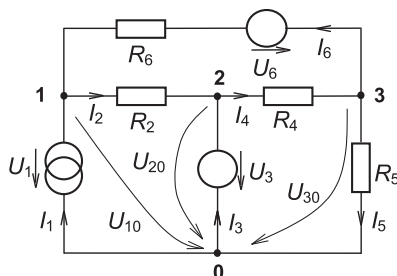
$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \cdot U_{10} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_3}{R_3}.$$

Jej riešením dostaneme $U_{10} = 7,5\text{V}$. Z rovníc Ohmovho zákona pre r -hrany vypočítame prúdy jednotlivými úsekmi

$$I_1 = 1,5\text{A}; \quad I_2 = 0,25\text{A}; \quad I_3 = 1,25\text{A}.$$

Príklad 9 V obvode na obr. 3.3 vypočítajte pomocou metódy uzlových napätí všetky neznáme prúdy a napätie U_1 na ideálnom zdroji prúdu.

Riešenie.



- Voľbou pravého stromu overíme, že sieť má riešenie.
- Graf siete obsahuje u -hranu (úsek so zdrojom napätia U_3). Za referenčný uzol teda musíme zvoliť spodný, alebo prostredný uzol. Nech to je napríklad spodný uzol. Označíme ho číslom **0** a ostatné uzly ako **1**, **2** a **3**. Každému uzlu okrem referenčného priradíme uzlové napätie.
- Pre všetky uzly okrem referenčného napíšeme rovnicu 1. Kirchhoffovho zákona.

$$\begin{aligned} \mathbf{1} : & -I_1 + I_2 - I_6 = 0 \\ \mathbf{2} : & -I_2 - I_3 + I_4 = 0 \\ \mathbf{3} : & -I_4 + I_5 + I_6 = 0 \end{aligned}$$
- Pomocou Ohmovho zákona vyjadríme prúdy r -hranami

$$I_2 = \frac{U_{10} - U_{20}}{R_2}$$

$$I_4 = \frac{U_{20} - U_{30}}{R_4}$$

$$I_5 = \frac{U_{30}}{R_5}$$

$$I_6 = \frac{U_{30} - U_{10} + U_6}{R_6}$$

- Za prúdy dosadíme do rovníc 1. Kirchhoffovho zákona

$$\mathbf{1}: \quad -\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6}\right) \cdot U_{10} - \frac{1}{R_2} \cdot U_{20} - \frac{1}{R_6} \cdot U_{30} = I_1 + \frac{U_6}{R_6}$$

$$\mathbf{2}: \quad -\frac{1}{R_2} \cdot U_{10} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) \cdot U_{20} - \frac{1}{R_4} \cdot U_{30} - I_3 = 0$$

$$\mathbf{3}: \quad -\frac{1}{R_6} \cdot U_{20} - \frac{1}{R_4} \cdot U_{20} + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right) \cdot U_{30} = -\frac{U_6}{R_6}$$

- Problém je, že v sústave 3 rovníc máme 4 neznáme veličiny – uzlové napätia U_{10} , U_{20} a U_{30} a prúd I_3 zdrojom napätia U_3 . Zdroj U_3 nemá žiaden sériový rezistor a teda sme nevedeli vyjadriť prúd I_3 pomocou Ohmovho zákona. My sme ale pri voľbe referenčného uzla boli obozretní. Jeden z uzlov, medzi ktoré je zapojený zdroj U_3 zme zvolili za referenčný a teda tento zdroj priamo určuje jedno uzlové napätie. Môžeme teda sústavu doplniť o ďalšiu (štvrtú) rovnicu

$$U_{20} = U_3.$$

Ak by sme sa chceli vyhnúť priamemu riešeniu takejto rozľahlej sústavy, nie je problém znížiť jej stupeň. Pomocou poslednej rovnice ľahko eliminujeme jednu neznámu dosadením $U_{20} = U_3$. Navyše neznámy prúd I_3 sa vyskytuje len v rovnici pre jeden uzol – uzol **2**. Je to znova vďaka výhodnej voľbe referenčného uzla. Prúd I_3 sa môže vyskytovať len v rovniciach 1. Kirchhoffovho zákona pre uzly **0** a **2**. Pre referenčný uzol však takúto rovnicu nepíšeme. Rovnicu pre uzol **2** môžeme teda dočasne odložiť nabok a v konečnom dôsledku vyriešime len sústavu rovníc pre uzly **1** a **3** s neznámymi U_{20} a U_{30}

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 + \frac{U_3}{R_2} + \frac{U_6}{R_6} \\ \frac{U_3}{R_4} - \frac{U_6}{R_6} \end{pmatrix}$$

Riešením získame neznáme uzlové napätia $U_{10} = 13,75\text{V}$ a $U_{30} = 3,125\text{V}$. Uzlové napätie U_{20} už poznáme, $U_{20} = U_3 = 5\text{V}$.

- Z rovníc Ohmovho zákona získame prúdy rezistormi

$$I_2 = 0,875\text{A}; \quad I_4 = 0,1875\text{A}; \quad I_5 = 0,3125\text{A}; \quad I_6 = -0,125\text{A}$$

Napätie U_1 na prúdovom zdroji I_1 je dané priamo uzlovým napätím

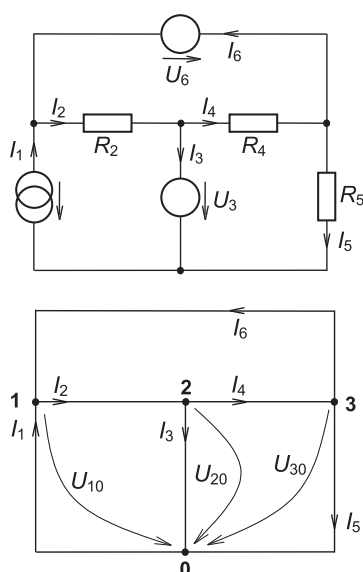
$$U_1 = U_{20} = 5\text{V}.$$

Prúd I_3 vypočítame z rovnice 2. Kirchhoffovho zákona pre uzol **1**

$$I_3 = -I_2 + I_4 = -0,6875\text{A}.$$

Najväčšia sústava, potrebná na vyriešenie príkladu, bola 2.stupňa.

Príklad 10 V obvode na obr. 3.4 vypočítajte pomocou metódy uzlových napätí všetky neznáme prúdy a napätie U_1 na ideálnom zdroji prúdu. $I_1 = 1\text{A}$, $R_2 = 10\Omega$, $U_3 = 10\text{V}$, $R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 20\Omega$, $U_6 = 10\text{V}$.



Obr. a.

Riešenie.

V sieti sa vyskytujú dve u -hrany, ktoré však nemajú spoločný uzol. Nech by sme zvolili za referenčný uzol ktorýkoľvek, vždy ostane v obvode jedna z týchto hrán mimo neho². Nech je teda referenčným uzlom spodný uzol (obr. a). Pre ostatné uzly napíšeme rovnice 1. Kirchhoffovho zákona.

$$1: -I_1 + I_2 - I_6 = 0$$

$$2: -I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

$$3: -I_4 + I_5 + I_6 = 0$$

Pomocou Ohmovho zákona vyjadríme prúdy r -hranami siete

$$I_2 = \frac{U_{10} - U_{20}}{R_2}; \quad I_4 = \frac{U_{20} - U_{30}}{R_4}; \quad I_5 = \frac{U_{30}}{R_5}.$$

Za tieto prúdy dosadíme do rovníc 1. Kirchhoffovho zákona. Sústavu doplníme o ďalšie dve rovnice ("pod čiarou") – napäťový zdroj U_3 určuje priamo uzlové napätie U_{20}

$$U_3 = U_{20},$$

zdroj U_6 určuje rozdiel uzlových napätí U_{10} a U_{30}

$$U_6 = U_{10} - U_{30}$$

$$\begin{array}{rccccccc}
 \frac{1}{R_2} \cdot U_{10} & & -\frac{1}{R_2} \cdot U_{20} & & & & -I_6 = I_1 \\
 -\frac{1}{R_2} \cdot U_{10} & +(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}) \cdot U_{20} & & -\frac{1}{R_4} \cdot U_{30} & +I_3 & & = 0 \\
 & & -\frac{1}{R_4} \cdot U_{20} & +(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}) \cdot U_{30} & & +I_6 & = 0 \\
 \hline
 & & U_{20} & & & & = U_3 \\
 U_{10} & & & & -U_{30} & & = U_6
 \end{array}$$

Postup síce viedol na sústavu 5 rovníc, no niektoré neznáme by sa dali ľahko eliminovať. Riešením by sme získali $U_{10} = 18\text{V}$, $U_{20} = 10\text{V}$, $U_{30} = 8\text{V}$, $I_3 = 0,6\text{A}$ a $I_6 = -0,2\text{A}$. Dosadením do rovníc Ohmovho

²Pozorný čitateľ určite na tomto mieste namieta, že vhodnejšie by bolo postupovať pomocou metódy slučkových prúdov. Napriek tomu ilustrujeme, ako v takomto prípade použiť metódu uzlových napätí.

zákona pre r -hrany by sme získali prúdy $I_2 = 0,8\text{A}$, $I_4 = 0,2\text{A}$ a $I_5 = 0,4\text{A}$. Napätie na prúdovom zdroji je priamo rovné uzlovému napätiu $U_1 = U_{10} = 18\text{V}$.

Záver. V praxi je väčšinou metóda uzlových napätí výhodnejšia, než metóda slučkových prúdov. Je na to niekoľko dôvodov:

- Väčšina obvodov, ktoré sa v praxi vyskytujú, má menší počet nezávislých uzlov, než nezávislých slučiek. Metóda uzlových napätí vedie na menší počet neznámych a teda aj menší počet rovníc, než metóda slučkových prúdov.
- V reálnom elektrickom systéme skutočne zväčša existuje uzol s referenčným potenciálom (slangovo prezývaný kostra, zem, nula, ...). Nie je problém pripojiť voltmeter jedným vývodom k tomuto uzlu a jeho druhým ("živým") vývodom merať priamo napätia v jednotlivých bodoch – uzlové napätia a konfrontovať ich s vypočítanými hodnotami. Uzlové napätia teda majú priamu fyzikálnu interpretáciu, sú merateľné. To o slučkových prúdoch povedať nemôžeme.