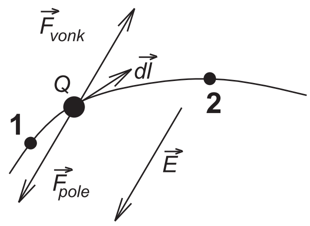
Kapitola 1

Základné pojmy v elektrických obvodoch.

1.1 Elektrické napätie a elektrický prúd.

Majme náboj Q, ktorý sa nachádza v elektrickom poli charakterizovanom vektorom jeho intenzity $\vec{E}$. Na takýto náboj pôsobí sila poľa $\vec{F}_{pole}$ daná výrazom

$$\vec{F}_{pole} = Q.\vec{E}. \tag{1.1}$$



Obr. 1.1: Náboj v elektrickom poli.

Na náboj pôsobíme vonkajšou silou $\vec{F}_{vonk}$ (obr. 1.1), táto sila pôsobí proti sile elektrického poľa $\vec{F}_{pole}$

$$\vec{F}_{vonk} = -\vec{F}_{pole} \tag{1.2}$$

Prácu $A_{12,vonk}$, ktorú vykoná vonkajšia sila pri tomto prenose vypočítame pomocou krivkového integrálu

$$A_{12,vonk} = \int_1^2 \vec{F}_{vonk}.d\vec{l} = \int_1^2 Q.\vec{E}.d\vec{l} \tag{1.3}$$

Elektrické pole pôsobí na náboj silou, náboj má v takomto poli potenciálnu energiu W. Nech W_1, resp. W_2 je potenciálna energia náboja Q v mieste **1**, resp. v mieste **2**. Práca, ktorú vykonajú vonkajšie sily pri prenose náboja z miesta **1** do miesta **2** je potom rovná rozdielu potenciálnych energií náboja v týchto miestach

$$A_{12,vonk} = W_2 - W_1. \tag{1.4}$$

Nech miesto **0** je bod, v ktorom bude mať náboj nulovú (vzťažnú) potenciálnu energiu. Nazveme toto miesto *referenčným (vzťažným)* miestom. Prenesme náboj z miesta **0** do miesta **1**. Vonkajšia sila, pôsobením ktorej premiestnime náboj, vykoná prácu W_1

$$W_1 = -\int_0^1 \vec{F}_{vonk}.d\vec{l} = -\int_0^1 Q.\vec{E}.d\vec{l} = -Q.\int_0^1 \vec{E}.d\vec{l} \tag{1.5}$$

Podobne práca W_2, ktorú vykoná vonkajšia sila pri prenose náboja Q z referenčného miesta **0** do miesta **2** bude

$$W_2 = -Q.\int_0^2 \vec{E}.d\vec{l}. \tag{1.6}$$

Zadefinujme prácu, ktorú vykonajú vonkajšie sily pri prenose jednotkového náboja z referenčného miesta do miesta **1** ako *elektrický potenciál* φ_1 v mieste **1**. Je zrejmé, že pre potenciál φ platí

$$\varphi_1 = \frac{W_1}{Q} = -\int_0^1 \vec{E}.d\vec{l}, \tag{1.7}$$

podobne môžeme zaviesť elektrický potenciál φ_2 v mieste **2**

$$\varphi_2 = \frac{W_2}{Q} = -\int_0^2 \vec{E}.d\vec{l}. \tag{1.8}$$

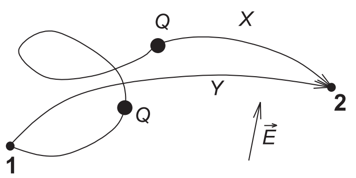
Označme prácu ktorú vykonajú sily poľa pri prenose náboja Q z miesta **1** do **2** ako $A_{12,pole}$. Získame ju pomocou krivkového integrálu

$$A_{12,pole} = \int_1^2 \vec{F}_{pole}.d\vec{l} = \int_1^2 Q.\vec{E}.d\vec{l}. \tag{1.9}$$

Pre prácu, ktorú vykonajú sily poľa pri prenose jednotkového náboja ($Q = 1$) z miesta **1** do miesta **2** symbolom u_{12}

$$u_{12} = \frac{A_{12,pole}}{Q} = \int_1^2 \vec{E}.d\vec{l}. \tag{1.10}$$

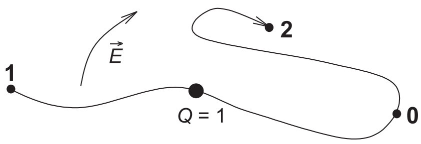
Veličinu u_{12} budeme nazývať *elektrické napätie* medzi miestami **1** a **2**.



Obr. 1.2: Prenos náboja po rôznych krivkách.

Vlastnosťou elektrického poľa je, že práca vykonaná pri prenose náboja medzi dvoma miestami nezávisí od dráhy, po ktorej bol náboj transportovaný. Ak premiestnime náboj z miesta **1** do miesta **2** po dráhe **X**, vykonáme prácu W_X, po dráhe **Y** vykonáme prácu W_Y (obr. 1.2). Môžeme teda napísať

$$W_X = W_Y. \tag{1.11}$$



Obr. 1.3: Prenos náboja cez referenčné miesto.

Premiestnime teraz jednotkový náboj z miesta **1** do miesta **2** tak, že pôjdeme cez referenčné miesto **0** (obr. 1.3). Práca, ktorú vykonajú sily poľa, je rovná elektrickému napätiu U_{12} medzi miestami **1** a **2**

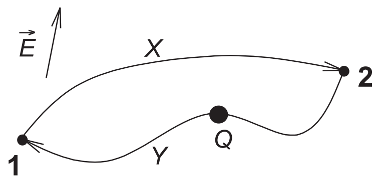
$$u_{12} = \int_1^2 \vec{E}.d\vec{l} = \int_1^0 \vec{E}.d\vec{l} + \int_0^2 \vec{E}.d\vec{l} \tag{1.12}$$

Zmeníme znamienko a navzájom zameníme hranice 1. integrálu a formálne zmeníme zápis znamienka pred 2. integrálom

$$u_{12} = -\int_0^1 \vec{E}.d\vec{l} - \left[-\int_0^2 \vec{E}.d\vec{l} \right]. \tag{1.13}$$

Porovnaním s (1.7) a (1.8) zistíme, že *napätie u_{12} je rovné rozdielu potenciálov v týchto bodoch*

$$u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{1.14}$$



Obr. 1.4: Prenos náboja po uzavretej krivke.

Premiestnime náboj Q z miesta **1** do miesta **2** po dráhe **X** a následne z miesta **1** do miesta **2** po inej dráhe **Y**. S nábojom teda vykonáme pohyb po uzavretej dráhe (obr. 1.4).

$A_{12,X}$ je práca, ktorá sa vykoná pri premiestnení náboja z miesta **1** do miesta **2** po dráhe **X**

$$A_{12,X} = \int_{1,X}^2 \vec{E}.d\vec{l}, \tag{1.15}$$

$A_{21,Y}$ je práca, ktorá sa vykoná pri premiestnení náboja z miesta **2** do miesta **1** po dráhe **Y**

$$A_{21,Y} = \int_{2,Y}^1 \vec{E}.d\vec{l}. \tag{1.16}$$

Pre celkovú prácu A platí

$$A = A_{12,X} + A_{21,Y}. \tag{1.17}$$

Po dosadení z (1.15) a (1.16) máme

$$A = \int_{1,X}^2 \vec{E}.d\vec{l} + \int_{2,Y}^1 \vec{E}.d\vec{l} = \oint \vec{E}.d\vec{l}. \tag{1.18}$$

Vieme ale, že integrál nezávisí od dráhy integrovania, zároveň zmeníme znamienko druhého integrálu a navzájom prehodíme jeho hranice

$$\int_{2,Y}^{1} \vec{E}.d\vec{l} = \int_{2,X}^{1} \vec{E}.d\vec{l} = -\int_{1,X}^{2} \vec{E}.d\vec{l}. \tag{1.19}$$

S uvážením tejto rovnosti môžeme prepísať rovnicu (1.18)

$$A = \int_{1,X}^{2} \vec{E}.d\vec{l} - \int_{1,X}^{2} \vec{E}.d\vec{l} = 0, \tag{1.20}$$

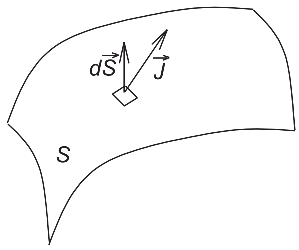
čo môžeme zapísať v symbolickom tvare

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = 0. \tag{1.21}$$

Celková práca, ktorá sa vykoná pre prienose náboja po uzavretej krivke je nulová.

Uvažujme ďalej vodivý priestor, ktorý je charaketrizovaný svojou mernou elektrickou vodivosťou κ. V tomto priestore je prítomné elektrické pole $\vec{E}$. Tok náboja v priestore vyvolaný prítomnosťou elektrického poľa popíšeme hustotou toku náboja $\vec{J}$, kde

$$\vec{J} = \kappa.\vec{E} \tag{1.22}$$



Obr. 1.5: Tok náboja cez plochu S.

Hustota toku náboja je vektorová veličina. Jej veľkosť udáva množstvo náboja, ktoré pretečie jednotkou plochy za jednotku času a jej smer udáva smer toku. Zvoľme v takomto priestore plochu S (obr. 1.5) a vypočítajme množstvo náboja dq, ktoré pretečie takouto plochou za jednotku času elektrický prúd i

$$i = \frac{dq}{dt}. \tag{1.23}$$

Ak je tok náboja v čase rovmerný, môžeme písať

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q}{t}. \tag{1.24}$$

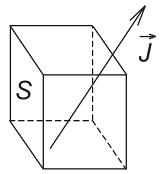
Náboj, ktorý pretečie plochou S za jednotku času (prúd), získame integráciou prúdovej hustoy po tejto ploche

$$i = \int_{S} \vec{J}.d\vec{S}. \tag{1.25}$$

Uvažujme teraz uzavretú plochu v priestore, ktorým preteká náboj. Takáto plocha ohraničuje časť priestoru (napríklad tvaru kvádra, obr. 1.6). Predpokladajme, že sa v takejto uzavretej oblasti náboj trvalo negeneruje, ani nehromadí. Celková bilancia toku náboja cez takúto uzavretú plochu potom musí byť nulová

$$\oint_{S} \vec{J}.d\vec{S} = 0 \tag{1.26}$$

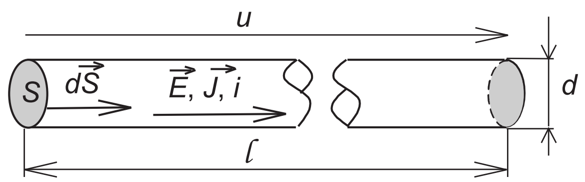
Výraz (1.26) je vlastne matematické vyjadrenie zákona zachovania náboja v priestore ohraničenom uzavretou plochou S.



Obr. 1.6: Tok náboja cez uzavretú plochu.

Príklad 1 Medzi koncami medeného vodiča valcového prierezu o priemere d = 1mm a dĺžke l = 1m je napätie U = 50mV. Merná elektrická vodivosť medi $\kappa = 57.10^7\mathrm{S.m^{-1}}$.

Vypočítajte:
a. Veľkosť intenzity elektrického poľa E vo vodiči.
b. Veľkosť prúdovej hustoty J vo vodiči.
c. Prúd vodičom i.
d. Odpor vodiča R.
e. Elektrický výkon p, ktorý sa spotrebuje vo vodiči.



Riešenie.

a. Vo vodiči bude homogénne elektrické pole, ktorého vektor intenzity $\vec{E}$ bude rovnobežný s osou vodiča. Pre jeho veľkosť platí

$$E = \frac{u}{l} = 50\mathrm{mV/m}$$

b. Vektor prúdovej hustoty $\vec{J}$ bude rovnobežný s vektorom intenzity poľa $\vec{E}$. Jeho veľkosť J bude

$$J = \kappa.E = 2,85.10^6\mathrm{A/m^2}$$

c. Prúd vodičom vypočítame zo vzťahu (1.25). V našom prípade sú vektory $\vec{J}$ a $d\vec{S}$ rovnobežné, teda $\vec{J}.d\vec{S} = J.dS$. Prúd preteká celým prierezom vodiča homogénne, teda J=konšt. na celej jeho ploche S. Pre prúd potom môžeme písať

$$i = \int_S J.dS = J.\int_S dS = J.S = J\cdot\frac{\pi.d^2}{4} = 2,238\mathrm{A}$$

d. Odpor vodiča R je daný pomerom napätia na vodiči u a prúdu i, ktorý ním preteká

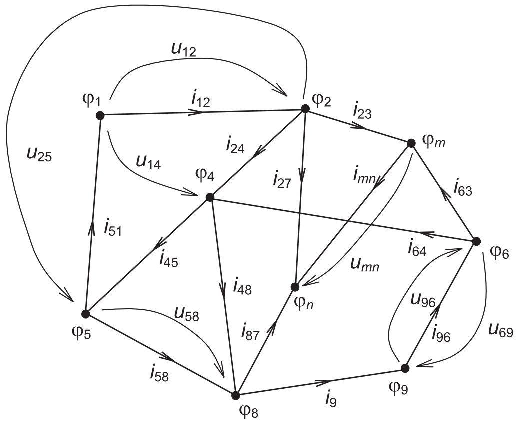
$$R = \frac{u}{i} = \frac{E.l}{J.S} = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{l}{S} = 22,3\mathrm{m\Omega}$$

1.2 Základné zákony platné v elektrických obvodoch.

V predošlých úvahách sme predpokladali, že v každom bode priestoru je prítomné elektrické pole $\vec{E}$ a elektrický potenciál φ sa mohol vo všeobecnosti meniť v závislosti od priestorovej súradnice spojite (obr.

1.2). Taktiež sme predpokladali, že v každom bode tohoto priestoru môže byť prítomný voľný elektrický náboj a jeho tok - elektrický prúd. Tok náboja sa popísal vektorom prúdovej hustoty $\vec{J}$ a táto mohla byť v každom bode nenulová, náboj mohol tiecť kontinuálne celým priestorom (obr. 1.5). Analýzou takýchto systémov sa zaoberá teória elektromagnetického poľa a jej základom sú Maxwellove rovnice. Ich riešením získame rozloženie elektrického a magnetického poľa v priestore.
V ďalšom budeme predpokladať dve obmedzenia:

- Elektrický potenciál sa nemení v priestore spojite, ale jeho diskrétne. Budeme uvažovať jeho hodnoty v diskrétnych bodoch – uzloch.
- Elektrický prúd medzi uzlami netečie celým preistorom, ale len po krivkách – úsekoch.



Obr. 1.7: Príklad grafu elektrickej siete.

Množinu uzlov a úsekov budeme nazývať *grafom elektrického obvodu*, alebo grafom elektrickej siete. Ak hovoríme o úseku elektrickej siete v súvislosti s jej grafom, niekedy používame namiesto úseku názov *hrana grafu*. Príklad takéhoto grafu je na obr. 1.7. Sieť obsahuje 9 uzlov, v ktorých je definovaná hodnota potenciálu φ. Medzi uzlami je systém 13 úsekov – jediných možných dráh, ktorými môže tiecť elektrický prúd i. Medzi jednotlivými uzlami je možné zaviesť elektrické napätie, ktoré je rovné rozdielu potenciálov v týchto uzloch (1.14). Medzi m-tým a n-tým uzlom je teda napätie u_{mn}

$$u_{mn} = \varphi_m - \varphi_n \tag{1.27}$$

Takto môžeme zaviesť v sieti napätia medzi dvojicou ľubovoľných uzlov, napríklad

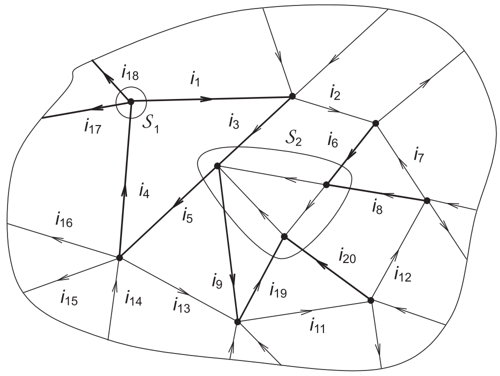
$$\begin{aligned} u_{14} &= \varphi_1 - \varphi_4 \\ u_{69} &= \varphi_6 - \varphi_9 \\ u_{96} &= \varphi_9 - \varphi_6 \end{aligned}$$

Uvažujme časť ľubovoľne rozľahlej siete, v ktorej vytvoríme oblasť ohraničenú plochami $\mathcal{S}_1$ ($\mathcal{S}_2$) (obr. 1.8). Pre takúto oblasť musí platiť zákon zachovania náboja vyjadrený výrazom (1.26). Tento výraz však predpokladá, že náboj môže tiecť ľubovoľným bodom, preto bol na výpočet celkového toku náboja použitý plošný integrál cez plochu S. V našom prípade si však ohraničená oblasť môže vymieňať náboj iba cez diskrétne krivky - úseky siete, preto integrovanie prejde na sumu

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{J}.d\vec{S} = \sum i_k = 0, \tag{1.28}$$

kde suma predstavuje algebraický súčet prúdov úsekmi, ktorými si uzavretá (ohraničená) oblasť môže s okolím vymieňať náboj.

Výraz (1.28) hovorí:



Obr. 1.8: Rezy v elektrickej sieti.

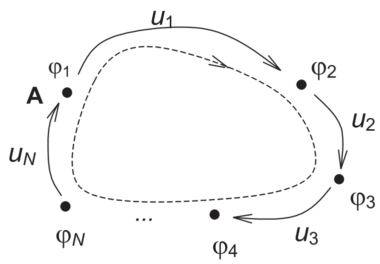
Algebraický súčet prúdov vtekajúcich do uzavretej oblasti siete je rovný nule.

Toto pravidlo sa nazýva *1. Kirchhoffov zákon.* Je to vlastne zákon zachovania náboja vyjadrený pojmami teórie elektrických obvodov. Množina úsekov, ktorými si uzavretá oblasť môže vymieňať náboj s okolím sa nazýva *rez* v elektrickej sieti. V našom prípade môžeme pre rezy písať rovnice:

$$\mathcal{S}_1 : i_1 - i_4 + i_{17} + i_{18} = 0$$

$$\mathcal{S}_2 : -i_3 + i_5 + i_9 - i_{20} - i_8 - i_6 = 0$$

Ak je vo vnútri ohraničenej oblasti len jeden uzol siete ($\mathcal{S}_1$), potom môžeme povedať, že algebraický súčet prúdov vtekajúcich do uzla je rovný nule. Toto je veľmi často používané vyjadrenie 1. Kirchhoffovho zákona. My však vidíme, že tento zákon je všeobecnejší platí pre ľubovoľnú (aj vnútorne zložitejšiu) ohraničenú oblasť siete ($\mathcal{S}_2$).



Obr. 1.9: Prenos náboja po uzavretej dráhe v elektrickej sieti.

Vyznačme v sieti uzavretú dráhu, ktorá je popísaná pomocou uzavretej krivky (obr. 1.9). Dráha vedie cez uzly s potenciálom φ_1 až φ_N. Vezmime náboj Q a vykonajme s ním pohyb z bodu **A** po uzavretej dráhe, teda vrátime sa zas do bodu **A**. Rovnica (1.21) hovorí, že celková práca vykonaná silami poľa pri takomto pohybe musí byť nulová. V našom prípade sa však potenciál nemení pozdĺž dráhy pohybu spojite, ale v diskrétnych krokoch medzi dvojicou po sebe idúcich uzlov. Pohyb začína presunom náboja Q z uzla s potenciálom φ_1 do bodu s potenciálom φ_2. Práca pri pohybe po tejto časti dráhy bude

$$A_{12} = \int_1^2 Q.\vec{E}.d\vec{l} = Q.\int_1^2 \vec{E}.d\vec{l} = Q.(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{1.29}$$

Vykonaná práca je úmerná rozdielu potenciálov φ_1 a φ_2. Zavedieme medzi dvojicou týchto uzlov napätie u_1

$$u_1 = \varphi_1 - \varphi_2, \tag{1.30}$$

potom môžeme pre prácu A_{12} písať

$$A_{12} = Q.u_1. \tag{1.31}$$

Zavedieme vo všeobecnosti medzi k-tym a $(k+1)$-tym uzlom napätie u_k

$$u_k = \varphi_k - \varphi_{k+1}; \quad k = 1, \ldots, N-1. \tag{1.32}$$

Napätie medzi uzlami N a 1 označíme u_N

$$u_N = \varphi_N - \varphi_1. \tag{1.33}$$

Práca A_{jk} vykonaná vo všeobecnosti pri prenose náboja medzi uzlami j a k bude

$$A_{j,k} = Q.(\varphi_j - \varphi_k) = Q.u_j. \tag{1.34}$$

Celková práca A je daná súčtom prác vykonaných pri pohybe medzi jednotlivými uzlami a musí byť nulová.

$$A = \sum_{k=1}^{N} A_{k,k+1} = \sum_{k=1}^{N} Q.u_k = Q.\sum_{k=1}^{N} u_k. \tag{1.35}$$

Môžeme teda napísať

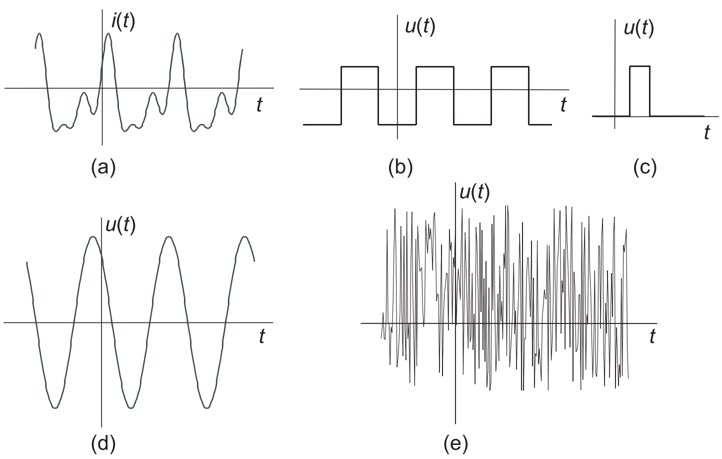
$$\sum_{k=1}^{N} u_k = 0. \tag{1.36}$$

Výraz (1.36) hovorí:

Algebraický súčet napätí pozdĺž uzavretej slučky je rovný nule.

Toto pravidlo sa nazýva *2. Kirchhoffov zákon.* Hovorí pomocou pojmov teórie elektrických obvodov, že celková práca pri prenose náboja v elektrickom poli po uzavretej dráhe je nulová. 2. Kirchoffov zákon vyjadruje pomocou pojmov teórie elektrických obvodov fakt, že pri prenesení náboja v elektrickom poli po uzavretej dráhe sa nevykoná žiadna práca.

1.3 Stacionárne a nestacionárne napätie (prúd).



Obr. 1.10: Príklady nestacionárnych napätí a prúdov: a, b - neharmonické periodické, c - ojedinelý impulz, d - harmonický, e - náhodný (šum).

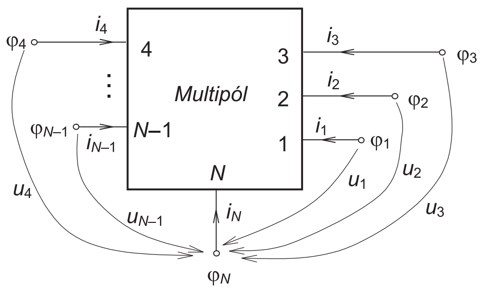
V ďalšom budeme pri používaní symbolov pre veličiny (napätia a prúdy) rozlišovať, či sú stacionárne alebo nestacionárne. Napätie budeme vo všeobecnosti označovať symbolom u, pre prúd je vyhradený symbol i. Nestacionárne napätie popisujeme funkciou jeho okamihovej hodnoty (časovej funkcie) $u(t)$, nestacionárny prúd funkciou $i(t)$, obr. 1.10. Vyjadrenie pomocou časových funkcií $u(t)$, resp. $i(t)$ nazývame aj vyjadrenie v *časovej oblasti*. Ak je napätie, resp. prúd v čase konštantný

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{konšt.} = U \\ i(t) &= \text{konšt.} = I, \end{aligned}$$

hovoríme, o *stacionárnom* (*jednosmernom*) napätí, resp. prúde. Pre jednosmerné veličiny môžeme použiť veľké písmená - U, resp. I.

1.4 Multipól.

Multipólom (N - pólom) nazveme objekt s N vývodmi, ktorými sa pripája ku zvyšku elektrickej siete (obr. 1.11).



Obr. 1.11: Multipól.

Vývodom priradíme elektrický potenciál $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ a prúd $(i_1, i_2, ..., i_N)$. Zvoľme jeden (N–tý) vývod multipólu za *referenčný* (vzťažný). Vyjadríme napätie na všetkých zvyšných $N-1$ vývodoch voči referenčnému

$$u_k = \varphi_k - \varphi_N; \quad k = 1, \ldots, N-1. \tag{1.37}$$

V praxi sa často volí potenciál referenčného vývodu za nulový, $\varphi_N = 0$. Potom platí

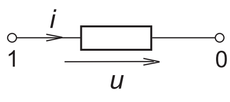
$$u_k = \varphi_k; \quad k = 1, \ldots, N-1. \tag{1.38}$$

Na úplný popis potenciálov všetkých vývodov takto stačí poznať len $N-1$ napätí.

Podobne je to aj s prúdmi. Na úplný popis prúdov všetkými vývodmi stačí poznať $N-1$ prúdov, pretože prúd N-tého vývodu ľahko vypočítame pomocou rovnice 1. Kirchhoffovho zákona

$$i_N = -\sum_{k=1}^{N-1} i_k \tag{1.39}$$

Množinu veličín $(u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}, i_1, i_2, \ldots, i_{N-1})$ nazývame *terminálne veličiny* multipólu (z anglického terminal - vývod, zakončenie).



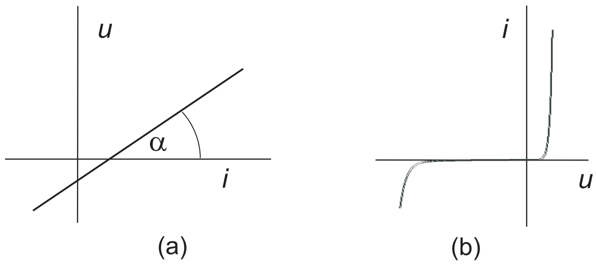
Obr. 1.12: Dvojpól.

Veľmi častým prípadom multipólu je dvojpól ($N = 2$), obr. 1.12. Dvojpól má dve terminálne veličiny - napätie u a prúd i.

1.5 Voltampérová charakteristika dvojpólu. Vnútorný odpor.

Správanie sa dvojpólu častokrát vyjadrujeme jeho *voltampérovou charakteristikou* (VA charakteristikou). Je to grafické vyjadrenie závislosti prúdu i od napätia u, resp. napätia od prúdu. Nezáleží na tom, či dáme na vodorovnú os napätie u, alebo prúd i. Zvolíme vždy tú možnosť, ktorá je v danej situácii výhodnejšia.

Ak je voltampérová charakteristika dvojpólu priamkou, hovoríme, že dvojpól je *lineárny*. Ak má dvojpól inú, ako priamkovú VA charakteristiku, nazývame ho *nelineárny*. Príklady VA charakteristík sú ilustrované na obr. 1.13. Každý lineárny dvojpól má voltamérovú charakteristiku danú lineárnou algebraickou funkciou (napríklad ideálny zdroj napätia, prúdu a rezistor), alebo lineárnou diferenciálnou funkciou (induktor, kapacitor).



Obr. 1.13: Voltampérová charakteristika lineárneho (a) a nelineárneho (b) dvojpólu.

Nech sú napätie a prúd lineárnym dvojpólom zavedené navzájom súhlasne (obr. 1.12). Na zvislú os lineárnej VA charakteristiky vynesieme napätie u a na vodorovnú os prúd i. V takomto prípade môžeme zaviesť veličinu nazývanú *vnútorný odpor* dvojpólu R_v ako smernicu jeho voltampérovej charakteristiky

$$R_v = \frac{du}{di} = \tan\alpha \tag{1.40}$$

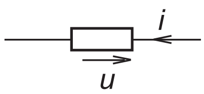
Vnútorný odpor lineárneho dvojpólu je rovnaký v každom bode voltampérovej charakteristiky (priamka má konštatnú smernicu). V prípade nelineárnej charakteristiky je zavedenie vnútorného odporu zložitejšie. Smernica voltampérovej charakteristiky je v každom bode iná, aj jeho vnútorný odpor sa teda bude meniť. Takto zavedený vnútorný odpor sa nazýva aj *diferenciálny* odpor dvojpólu (bližšie je popísaný v kapitole pojednávajúcej o obvodoch s nelineárnymi prvkami). Ak na vodorovnú os lineárnej charakteristiky vynesieme napätie a na zvislú os prúd, potom smernicu voltampérovej charakteristiky nazveme *vnútornou vodivosťou* dvojpólu G_v

$$G_v = \frac{di}{du}. \tag{1.41}$$

Ak je vnútorný odpor nenulový a konečný, medzi vnútorným odporom R_v a vnútornou vodivosťou G_v platí vzťah

$$G_v = \frac{1}{R_v}. \tag{1.42}$$

Ak sú napätie a prúd dvojpólu zavedené navzájom nesúhlasne (obr. 1.14), potom vnútorný odpor R_v, resp.



Obr. 1.14: Nesúhlasná orientácia napätia a prúdu dvojpólu.

vnútorná vodivosť G_v sú zavedené vzťahmi

$$R_v = -\frac{du}{di}, \tag{1.43}$$

resp.

$$G_v = -\frac{di}{du}. \tag{1.44}$$

1.6 Práca a výkon elektrického prúdu, Tellegenova veta.

Uvažujme dvojpól, na ktorom je napätie u (obr. 1.12). Vieme, že napätie u je mierou práce, ktorá sa vykoná pri prenesení jednotkového kladného náboja z uzla **1** do uzla **0**. Ak prenesieme medzi týmito uzlami kladný náboj dq, vykoná sa práca dA

$$dA = dq.u. \tag{1.45}$$

Elektrický prúd dvojpólom i je daný vzťahom (1.23), odkiaľ máme

$$dq = i.dt. \tag{1.46}$$

Dosadíme za náboj dq do vzťahu (1.45)

$$dA = u.i.dt. \tag{1.47}$$

Práca, ktorá sa pri prenose náboja vykoná za jednotku času je výkon elektrického prúdu p

$$p = \frac{dA}{dt} = u.i. \tag{1.48}$$

Ak je fyzikálny smer napätia a prúdu totožný s vyznačeným a zároveň $u > 0$ a $i > 0$, potom aj $p > 0$ a výkon do dvojpólu dodávame - dvojpól je *spotrebičom* energie. V prípade, že vyjde $p < 0$, takýto dvojpól výkon do okolitej siete dodáva, je *zdrojom* energie.

Ak sú napätie a prúd na dvojpóle zavedené navzájom nesúhlasne (obr. 1.14), potom pre výkon dvojpólu platí

$$p = -u.i. \tag{1.49}$$

Aj v tomto prípade znova platí vyššie uvedená interpretácia znamienka ($p > 0$ - spotrebič, $p < 0$ - zdroj energie).

Predpokladajme, že sieť obsahuje N dvojpólov. Ak dodržíme znamienká pri výpočte ich výkonov – vzťahy (1.48) a (1.49) – potom sa ľahko matematicky formuluje *Tellegenova veta.*

V elektrickej sieti je súčet výkonov všetkých dvojpólov rovný nule.

$$\sum_{k=1}^{N} p_k = 0 \tag{1.50}$$

Tellegenova veta vyjadruje zákon zachovania energie v obvode. V každom časovom okamihu platí, že energia dodaná do siete prvkami so záporným výkonom je spotrebovaná prvkami s kladným výkonom, teda v obvode je vyrovnaná energetická bilancia.

Poznámka:

Ak sú napätie a prúd dvojpólu stacionárne,

$$u(t) = \text{konšt.} = U$$
$$i(t) = \text{konšt.} = I$$

potom aj výkon dvojpólu bude stacionárna veličina. Pre takýto výkon môžeme použiť symbol P

$$P = U.I,$$

resp.

$$P = -U.I,$$

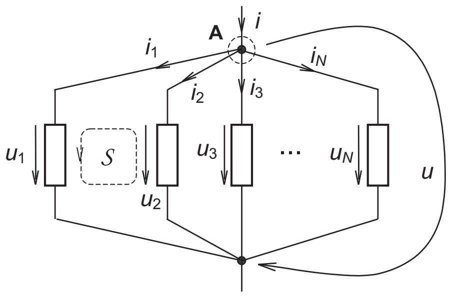
podľa vzájomnej orientácie napätia a prúdu.

1.7 Radenie dvojpólov.

Každá elektrická sieť môže obsahovať ľubovoľný počet rôzne navzájom prepojených multipólov. Keďže sa budeme v nasledujúcich kapitolách zaoberať predovšetkým sieťami zostavenými z dvojpólov, zamerajme sa na niektoré možnosti, ako ich navzájom usporiadať.

1.7.1 Paralelné spojenie dvojpólov.

Dvojpóly sú navzájom zapojené paralelne, ak majú navzájom spoločné obidva vývody (obr. 1.15).



Obr. 1.15: Dvojpóly zapojené paralelne.

Napíšme rovnicu 1. Kirchhoffovho zákona pre uzol **A**

$$-i + i_1 + i_2 + \cdots + i_N = 0,$$

resp.

$$i = \sum_{k=1}^{N} i_k. \tag{1.51}$$

Celkový prúd i sa delí na prúdy jednotlivými paralelne spojenými dvojpólmi.
Napíšme rovnicu 2. Kirchhoffovho zákona pre slučku $\mathcal{S}$

$$u_1 - u_2 = 0,$$

odtiaľ

$$u_1 = u_2.$$

Podobnú rovnicu by sme mohli napísať pre slučku tvorenú ľubovoľnou dvojicou paralelne zapojených dvojpólov, resp. napätím u. Nakoniec by sme dostali

$$u_1 = u_2 = \cdots = u_N = u. \tag{1.52}$$

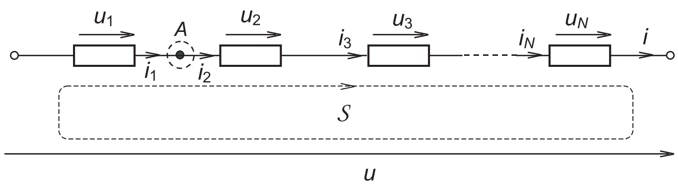
Ak sú dvojpóly spojené paralelne, je na nich rovnaké napätie.

1.7.2 Sériové spojenie dvojpólov.

Dvojpóly sú navzájom spojené do série, ak majú spoločný jeden uzol, z ktorého už nevychádza žiaden ďalší úsek schopný viesť prúd (obr. 1.16).

Napíšme rovnicu 2. Kirchoffovho zákona pre slučku $\mathcal{S}$

$$-u + u_1 + u_2 + \cdots + u_N = 0,$$



Obr. 1.16: Dvojpóly zapojené sériovo.

odtiaľ

$$u = \sum_{k=1}^{N} u_k. \tag{1.53}$$

Celkové napätie u sa delí na napätia $u_1, u_2, \ldots, u_N$ na jednotlivých sériovo zapojených dvojpóloch. Napíšme rovnicu 1. Kirchhoffovho zákona pre uzol **A**

$$-i_1 + i_2 = 0,$$

resp.

$$i_1 = i_2.$$

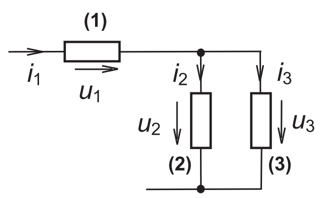
Keby sme podobnú rovnicu napísali pre uzol medzi ľubovoľnou dvojicou sériovo zapojených dvojpólov, nakoniec by sme dostali

$$i_1 = i_2 = \cdots = i_N = i. \tag{1.54}$$

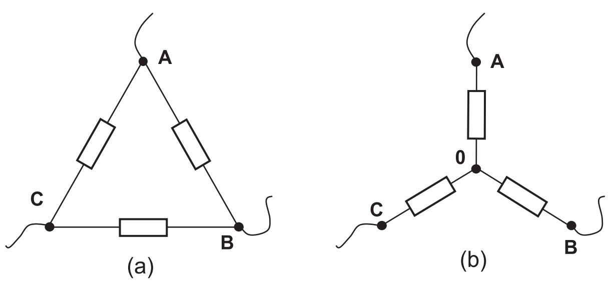
Ak sú dvojpóly zapojené do série, tečie nimi rovnaký prúd.

1.7.3 Sériovo - paralelné spojenie dvojpólov, hviezda, trojuholník.

Rôznou kombináciou sériových a paralelných spojení môžeme vytvárať zložitejšie štruktúry. Na obr. 1.17 je



Obr. 1.17: Dvojpóly zapojené sériovo–paralelne.



Obr. 1.18: Zapojenie do trojuholníka (a) a hviezdy (b).

príklad najjednoduchšieho sériovo-paralelného obvodu. Dvojpóly **2** a **3** sú zapojené paralelne. Dvojpóly **1** a **2** majú síce spoločný jeden uzol, z neho však vychádza aj úsek s prúdom i_3, teda v zmysle našej definície dvojpóly **1** a **2** nie sú zapojené do série.

Na obr. 1.18 je obvod, v ktorom žiadne dvojpóly nie sú navzájom zapojené ani do série, ani paralelne. Štruktúru na obr. 1.18a nazývame zapojením do trojuholníka (Δ), na obr. 1.18b zapojením do hviezdy (Y).

1.8 Ideálny dvojpól.

Vzťah medzi napätím a prúdom dvojpólu môže byť vyjadrený vo všeobecnosti funkciou f, resp. g

$$i = f_{p_1,p_2,\ldots,p_N}(u), \tag{1.55}$$

resp.

$$u = g_{q_1,q_2,\ldots,q_N}(i), \tag{1.56}$$

kde $p_1, p_2, \ldots, p_N$, resp. $q_1, q_2, \ldots, q_N$ sú parametre dvojpólu.

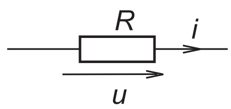
V ďalšom budeme pracovať s piatimi *ideálnymi dvojpólmi*:

- Rezistor
- Induktor
- Kapacitor
- Ideálny zdroj napätia
- Ideálny zdroj prúdu

Spoločnou vlastnosťou tejto triedy dvojpólov je, že vlastnosti každého z nich sú popísané jedným reálnym parametrom.

1.8.1 Rezistor

Rezistor (obr. 1.19) je prvok, ktorým v elektrickom obvode modelujeme nevratnú zmenu elektrickej energie na inú formu (napríklad teplo). Parametrom rezistora je jeho odpor R. Jednotkou elektrického odporu je



Obr. 1.19: Rezistor.

Ohm (Ω). Napätie na rezistore u a prúd, ktorý ním preteká i sú vzájomne viazané Ohmovým zákonom

$$u = R.i. \tag{1.57}$$

Ako parameter popisujúci rezistor sa tiež používa jeho vodivosť G, čo je prevrátená hodnota odporu

$$G = \frac{1}{R}. \tag{1.58}$$

Jednotkou elektrickej vodivosti je Siemens (S). Ohmov zákon teda môžeme prepísať do tvaru

$$i = G.u. \tag{1.59}$$

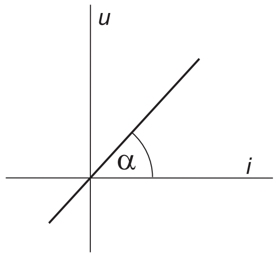
Voltampérovou charakteristikou rezistora je priamka prechádzajúca začiatkom súradnicovej sústavy (obr. 1.20). Pre smernicu takejto priamky platí

$$\tan(\alpha) = \frac{u}{i} = R. \tag{1.60}$$

Rezistor je dvojpól, teda jeho výkon je daný vzťahom (1.48). Po dosadení za napätie, resp. prúd z Ohmovho zákona (1.57) dostaneme pre výkon vzťahy

$$p = u.i = R.i^2 = \frac{1}{R} \cdot u^2. \tag{1.61}$$

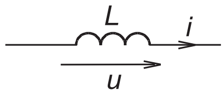
V rovnici (1.61) sa vyskytuje vždy len kvadrát napätia u, resp. prúdu i. Ak uvážime, že odpor rezistora je kladný, bude vždy platiť $p \geq 0$. Takýto rezistor sa v obvode nemôže správať ako zdroj energie.



Obr. 1.20: Voltampérová charakteristika lineárneho rezistora.

1.8.2 Induktor

Induktor (obr. 1.21) je prvok, ktorý je schopný akumulovať energiu vo forme magnetického poľa. Induktor je niekedy nazývaný aj *ideálna cievka*.



Obr. 1.21: Induktor.

Parametrom induktora je jeho indukčnosť L. Predpokladajme, že napätie a prúd induktora sú vo všeobecnosti nestacionárne a ich okamihové hodnoty sú vyjadrené časovými funkciami - $u(t)$ a $i(t)$. Tieto veličiny sú navzájom viazané vzťahom

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}, \tag{1.62}$$

kde L je indukčnosť induktora. Jej jednotkou je Henry (H).

Pri modelovaní reálneho elektrického systému použijeme induktor tam, kde v takomto systéme vzniká magnetické pole, ktoré má podstatné účinky na jeho správanie. Sú to rôzne vinuté cievky, ale môže to byť napríklad aj rovný úsek vodiča, najmä pri vysokých prúdoch a vo zariadeniach s vysokofrekvenčnými prúdmi.

Vypočítajme energiu akumulovanú induktorom, ktorým preteká prúd I. Okamihový výkon p spotrebovaný induktorom je daný vzťahom (1.48). Po dosadení za napätie u z rovnice (1.62) máme

$$p = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i \tag{1.63}$$

Po vynásobení rovnice výrazom dt a zintegrovaní dostaneme

$$\int_0^T p.dt = \int_0^I L.i.di \tag{1.64}$$

Ľavá strana rovnice predstavuje prácu, ktorú sme vykonali pri nabíjaní induktora a táto práca je rovná energii W_L akumulovanej v induktore

$$W_L = \frac{1}{2} L.I^2. \tag{1.65}$$

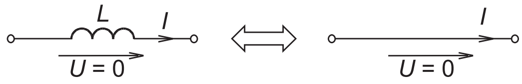
Zo vzťahu (1.65) vyplýva, že ak induktorom preteká stacionárny prúd I

$$i(t) = \text{konšt.} = I,$$

napätie na ňom bude nulové bez ohľadu na veľkosť prúdu I

$$u(t) = L \cdot \frac{dI}{dt} = 0. \tag{1.66}$$

Induktor, ktorým preteká stacionárny prúd I, je možné nahradiť skratom (obr. 1.22). Vnútorný odpor induktora je nulový.



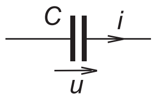
Obr. 1.22: Náhrada induktora v stacionárnom obvode.

1.8.3 Kapacitor

Kapacitor (obr. 1.23) je prvok, ktorý je schopný akumulovať energiu vo forme eletrického poľa. Parametrom kapacitora je jeho kapacita C. Jednotkou kapacity je Farad (F).

Predpokladajme, že napätie a prúd kapacitora sú vo všeobecnosti funkciami času - $u(t)$ a $i(t)$. Tieto veličiny sú navzájom viazané vzťahom

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \tag{1.67}$$



Obr. 1.23: Kapacitor.

Pri modelovaní reálneho elektrického obvodu použijeme kapacitor, ak je v ňom prítomné elektrické pole, ktoré má na správanie takéhoto systému nezanedbateľné účinky. Kapacitor sa niekedy nazýva aj *ideálny kondenzátor*.

Vypočítajme energiu viazanú kapacitorom. Predpokladajme, že kapacitor nabíjame prúdom i, na napätie U. Okamihový výkon p kapacitora je daný vzťahom (1.48). Po dosadení za prúd z (1.67) máme

$$p(t) = u(t).C \cdot \frac{du(t)}{dt} \tag{1.68}$$

Rovnicu vynásobíme výrazom dt a zintegrujeme

$$\int_0^T p.dt = \int_0^U u.C.du. \tag{1.69}$$

Výraz na ľavej strane predstavuje prácu vykonanú pri nabíjaní kapacitora, teda energiu W_C je v ňom akumulovanú

$$W_C = \frac{1}{2} C.U^2. \tag{1.70}$$

Zo vzťahu (1.67) vyplýva, že ak je na kapacitore stacionárne napätie

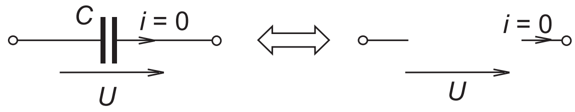
$$u(t) = \text{konšt.} = U,$$

pretekajúci prúd bude nulový

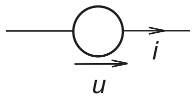
$$i(t) = C \cdot \frac{dU}{dt} = 0. \tag{1.71}$$

Kapacitore na ktorom je stacionárne napätie U je svojim správaním ekvivalentný rozpojenému úseku. Ak takýto kapacitor z obvodu vyberieme, v obvode nezmeníme žiadne prúdy, ani napätia (obr. 1.24). Vnútorná vodivosť kapacitora je nulová, resp. jeho vnútorný odpor je nekonečný.

Všimnime si, že v časovej oblasti vieme napísať algebraický vzťah medzi napätím a prúdom iba v prípade rezistora. Žiadna obdoba Ohmovho zákona v časovej oblasti pre induktor a kapacitor neexistuje!



Obr. 1.24: Náhrada kapacitora v stacionárnom obvode.

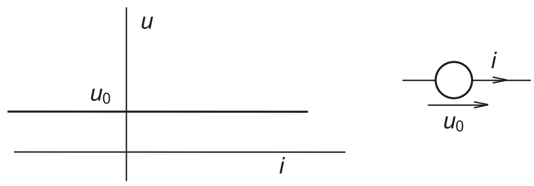


Obr. 1.25: Ideálny zdroj napätia.

1.8.4 Ideálny zdroj napätia

Vlastnosťou ideálneho zdroja napätia (obr. 1.25) je, že jeho napätie nezávisí od prúdu, ktorý ním preteká. Parametrom zdroja napätia je jeho svorkové napätie u.

Z vlastnosti takéhoto zdroja vyplýva, že ho môžeme zaťažiť ľubovoľným prúdom, pričom napätie na zdroji veľkosťou prúdu nebude ovplyvnené. Z praxe vieme, že ideálny zdroj napätia neexistuje. Typické pre reálny zdroj napätia je, že jeho svorkové napätie u závisí od prúdu i, ktorý ním preteká. Ak pripojíme na zdroj spotrebič, jeho svorkové napätie so zvyšujúcim sa prúdovým odberom zvyčajne klesá. Ak reálny zdroj preťažíme vysokým prúdom, napätie môže príliš poklesnúť, v niektorých prípadoch zdroj môžeme zničiť. Moderné elektronické zdroje zväčša majú nadprúdovú ochranu a pri preťažení výstupný prúd obmedzia, resp. sa úplne vypnú. Ak je reálny (technický) zdroj napätia schopný dodať vysoký prúd, teda pri jeho zaťažení napätie na jeho svorkách klesne len minimálne, hovoríme, že zdroj je tvrdý. Klasickým príkladom relatívne tvrdého zdroja jednosmerného napätia je olovený akumulátor. Podobnú vlastnosť mávajú aj zdroje s elektronickou stabilizáciou výstupného napätia. Na obr. 1.26 je voltampérová charakteristika ideálneho zdroja s napätím u_0.



Obr. 1.26: Voltampérová charakteristika ideálneho zdroja napätia.

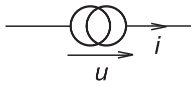
Napätie sa s prúdom nemení, charakteristiku tvorí priamka kolmá na napäťovú os. V zmysle definície (1.40) môžeme povedať, že vnútorný odpor ideálneho zdroja napätia je nulový

$$R_v = \frac{du}{di} = 0 \tag{1.72}$$

1.8.5 Ideálny zdroj prúdu

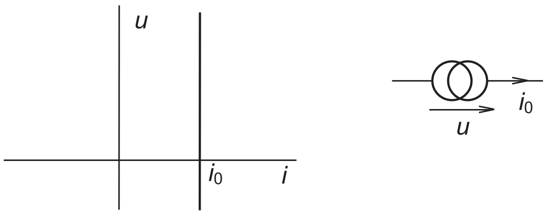
Vlastnosťou zdroja prúdu (obr. 1.27) je, že jeho prúd i nezávisí od napätia u, ktoré je na ňom. Parametrom ideálneho zdroja prúdu je jeho prúd i. Funkciu zdroja prúdu si môžeme predstaviť aj tak, že zdroj si vždy upraví svoje svorkové napätie u tak, aby do pripojenej záťaže dodal svoj predpísaný prúd i.

Je ťažké nájsť klasické zariadenie, ktoré sa svojim správaním podobá ideálnemu zdroju prúdu. Ideálny zdroj prúdu sa často používa na modelovanie vlastností polovodičových prvkov (srdcom modelu bipolárneho tranzistora je prúdom riadený ideálny zdroj prúdu v kolektore). Zdroj, ktorý sa svojimi vlastnosťami blíži k ideálnemu zdroju prúdu, sa dá postaviť pomocou nelineárnych prvkov alebo rôznych elektronických zapojení. V praxi sa napríklad zdroj prúdu používa v nabíjačkách niektorých typov akumulátorov, ktoré majú



Obr. 1.27: Ideálny zdroj prúdu.

predpísanú konštantnú hodnotu nabíjacieho prúdu počas celého nabíjacieho cyklu, keď sa počas neho mení svorkové napätie akumulátora. Charakter prúdového zdroja majú rôzne elektromechanické meniče založené na priezoelektrickom jave.



Obr. 1.28: Voltampérová charaketristika ideálneho zdroja prúdu.

Na obr. 1.28 je voltampérová charakteristika ideálneho zdroja prúdu. Prúd nezávisí od napätia, teda ju tvorí priamka kolmá na prúdovú os. Pre vnútornú vodivosť zdroja prúdu G_v preto platí

$$G_v = \frac{di}{du} = 0. \tag{1.73}$$

Vnútorná vodivosť zdroja prúdu je nulová. Pre vnútorný odpor R_v potom platí

$$R_v = \lim_{G_v \to 0} \frac{1}{G_v} = \infty \tag{1.74}$$

Hovoríme, že vnútorný odpor zdroja prúdu je nekonečne veľký.

Obidva vyššie uvedené zdroje sú *autonómne*. Znamená to, že ich parameter - výstupná veličina (napätie zdroja napätia, resp. prúd zdroja prúdu) je nezávislá od akýchkoľvek (aj iných, ako vlastných) prúdov, resp. napätí v elektrickej sieti. Okrem autonómnych zdrojov poznáme aj *riadené*, o ktorých budeme hovoriť neskôr.

Podľa schopnosti dodávať energiu do siete delíme prvky na aktívne a pasívne.

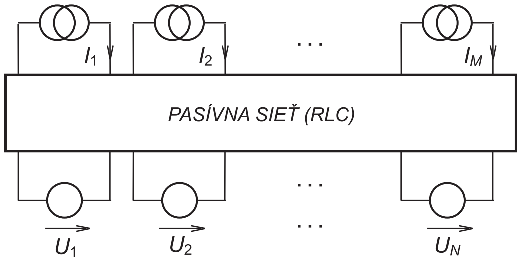
Aktívne prvky sú také, ktoré sú schopne trvalo dodávať energiu. Aktívnymi ideálnymi dvojpólmi sú ideálny zdroj napätia a ideálny zdroj prúdu.

Pasívne prvky sú také, ktoré nie sú schopné trvalo dodávať energiu. Pasívnymi dvojpólmi sú rezistor, induktor a kapacitor.

Rezistor je *disipatívny* prvok. Energia, ktorú dodáme do rezistora sa nevratne spotrebuje, premení na inú jej formu.

Induktor a kapacitor sú *akumulačné* prvky. Induktor je schopný akumulovať energiu vo forme energie magnetického poľa, kapacitor vo forme energie elektrického poľa. Túto akumulovanú energiu sú schopné vrátiť späť do obvodu.

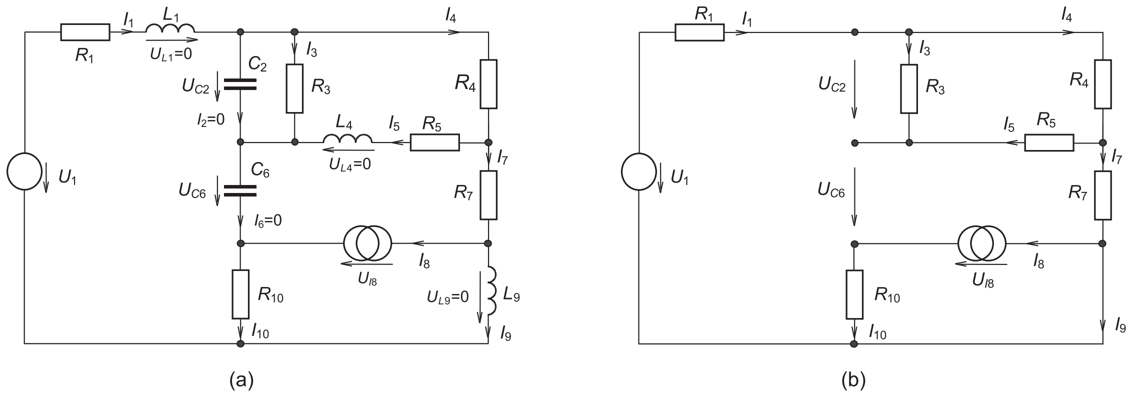
Niekto môže namietať, že predsa aj nabitý kapacitor alebo induktor sú aktívne, pretože v sebe akumulujú energiu, ktorú sú schopné dodať do okolitej elektrickej siete. Energiu sú síce schopné dodať, no len konečné množstvo, kým sa nevybijú. Nie sú schopné dodávať energiu trvalo, nekonečne dlhý čas. Sú preto podľa našej klasifikácie pasívnymi prvkami.



Obr. 1.29: Elektrická sieť v stacionárnom ustálenom stave.

1.9 Elektrické obvody v stacionárnom ustálenom stave.

Každú sieť môžeme rozdeliť na pasívnu a aktívnu časť (obr. 1.29). Aktívna časť siete je zložená z M stacionárnych zdrojov prúdu a N stacionárnych zdrojov napätia. Zvyšné prvky (RLC) sú sústredené do pasívnej časti siete. Predpokladajme, že zdroje sú v obvode s nemennou štruktúrou zapojené nekonečne dlhú dobu. Prípadné prechodné javy, ktoré vznikli pri pripojení zdrojov (napíklad nabíjanie kapacitorov a induktorov) už odzneli. Hovoríme, že sieť je v *ustálenom stave.* Ak sú výstupné napätia, resp. prúdy všetkých zdrojov stacionárne, potom aj všetky napätia a prúdy v takomto obvode budú stacionárne. Takáto sieť je v *stacionárnom ustálenom stave.*



Obr. 1.30: Príklad siete v stacionárnom ustálenom stave.

Na obr. 1.30a je ilustrovaný príklad takejto siete. Aktívna časť obsahuje jeden stacionárny zdroj napätia (U_1) a jeden stacionárny zdroj prúdu (I_8). Zvyšok siete je pasívny a je zložený z rezistorov, kapacitorov a induktorov. Z predošlej kapitoly vieme, že v takomto prípade môžeme všetky induktory nahradiť skratmi (aj tak je na nich nulové napätie) a všetky kapacitory môžeme vypustiť (aj tak nimi tečie nulový prúd). Takto upravené zapojenie je na obr. 1.30b. Úpravami sme v sieti nezmenili žiadne napätia, ani prúdy. Pomery sú tu dané len prítomnými zdrojmi a rezistormi. Sieť, ktorá obsahuje z pasívnych prvkov len rezistory, nazývame *rezistívna sieť.* Pre jednoduchosť budeme v ďalšom ilustrovať niektoré princípy a metódy riešenia práve na takomto type obvodov.