

1 Základné pasívne elektronické prvky a elektronické obvody

Cieľ kapitoly: Vysvetliť na základe definície ideálnych pasívnych prvkov R,L,C, vlastnosti reálnych, technicky realizovateľných rezistorov, cievok a kondenzátorov v širšom frekvenčnom pásme. Definovať a vysvetliť vlastnosti paralelného rezonančného obvodu so stratami a ukázať jeho použitie vo funkcii jednoduchého pásmového filtra.

1.1 Pasívne ideálne prvky R, L, C

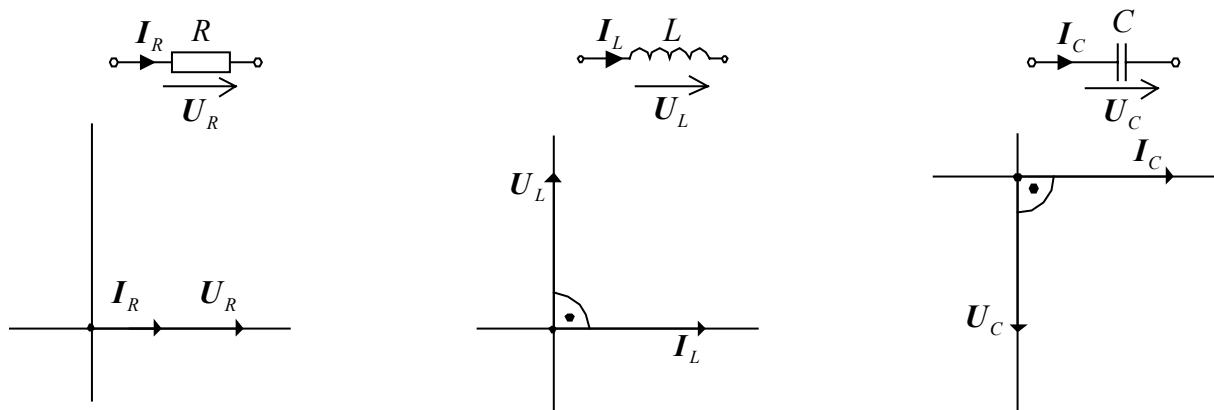
Ideálne prvky R,L,C sú užitočnou abstrakciou, ktorá nám slúži na zrozumiteľný a jasný popis reálnych prvkov R,L,C, ktorému hovoríme model alebo náhradná schéma. Často sa tiež používa pojem makromodel ako synonymum pojmu náhradná schéma napríklad pri tvorbe modelu operačného zosilňovača. Každý z ideálnych prvkov R,L,C je charakterizovaný jediným parametrom :

Rezistor $\longrightarrow R$, Cievka (induktor) $\longrightarrow L$, Kondenzátor $\longrightarrow C$

Matematický model prvkov typu R, L, C pre ľubovoľný priebeh $u(t)$, $i(t)$.

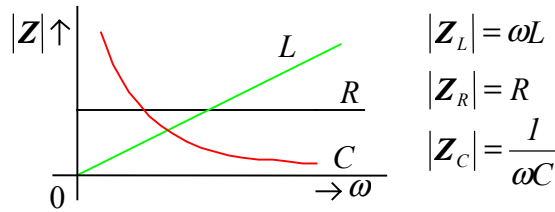
$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \qquad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \qquad i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

Orientácia okamžitých hodnôt napätia a prúdu na jednotlivých prvkoch R, L, C je zvolená podľa nasledujúceho obr.1.1. Pre harmonický priebeh napätia a prúdu v ustálenom stave s fázormi U , I môžeme použiť na znázornenie predchádzajúcich vzťahov ekvivalentné fázorové diagramy známe zo základov elektrotechniky striedavých prúdov.



Obr. 1.1 Fázorové diagramy ideálnych prvkov R, L, C pre harmonické napätie a prúd.

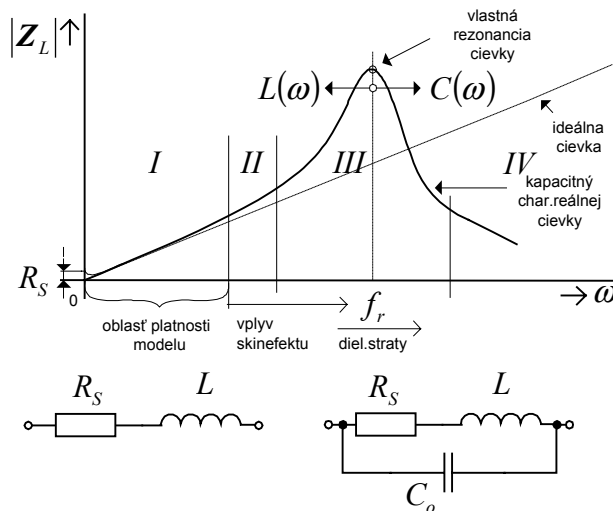
Frekvenčná charakteristika ideálnych prvkov je dana frekvenčnou charakteristikou modulu ich impedancie pri harmonickom budiacom napätí.



Obr. 1.2 Závislosť modulu impedancie ideálnych prvkov od frekvencie

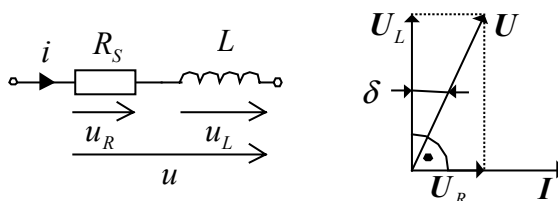
1.2 Obvodový model reálnej cievky pre širšie frekvenčné pásmo

Reálna cievka sa vyznačuje tým, že časť energie akumulovanej v jej magnetickom poli sa premení na teplo. Pri vyšších frekvenciách sa uplatňuje aj ďalší nežiadúci efekt – parazitná (nežiadúca) kapacita cievky a z nej vyplývajúce dielektrické straty a hlavne nežiadúca paralelná rezonancia cievky. Impedancia reálnej cievky v širokom frekvenčnom pásme je na nasledujúcom obrázku.



Obr. 1.3 Závislosť modulu impedancie reálnej cievky od frekvencie

Vo frekvenčnej oblasti I môžeme vlastnosti cievky vystihnúť dvomi parametrami : L – indukčnosť cievky (konštantná), R_S - sériový stratový odpor cievky, ktorý je v tejto frekvenčnej oblasti tiež konštantný. Straty spôsobené sériovým odporom R_S charakterizujeme v rádioelektronike najčastejšie činiteľom kvality cievky Q (skrátene kvalitou cievky). Kvalitu cievky Q môžeme jednoducho definovať pre harmonické prúdy z fázorového diagramu podľa nasledujúceho obrázku.



Obr. 1.4 Obvodový model cievky a jej fázorový diagram vo frekvenčnej oblasti I

Činiteľ strát cievky môžeme definovať podľa obr. 1.4 vzťahom:

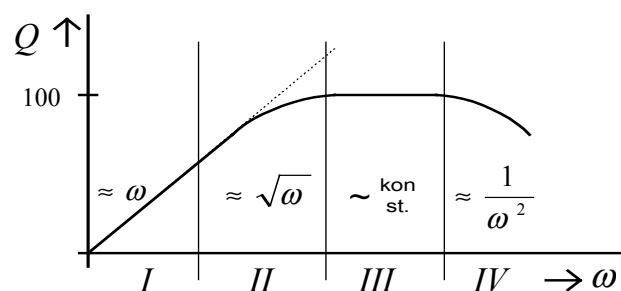
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{U_R}{U_L} = \frac{R_S}{\omega L}$$

Uhol δ sa nazýva stratový uhol cievky. V praxi je výhodnejšie používať prevrátenu hodnotu činiteľa strát - činiteľ kvality.

$$Q = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{\omega L}{R_S} = \text{konšt.} \cdot \omega$$

Kvalitu cievky možno vo frekvenčnom pásme do 300-500 MHz merať priamo prístrojom (Q meter), ktorý využíva meranú cievku ako súčasť meracieho sériového rezonančného obvodu realizovaného v Q-metri.

Pre vyššie frekvencie sa klasické Q metre s merným rezonančným obvodom ťažko realizujú a preto sa parametre cievok merajú najčastejšie pomocou tzv. analyzátorov obvodov (Network Analyzer), ktoré umožňujú merať prvky sériovej náhradnej schémy $R_S(\omega)$, $L_S(\omega)$. Ako príklad takého moderného analyzátoru môže poslúžiť napr. sixportový reflektometer pre frekvenčné pásmo 16 ÷ 2000 MHz (vyvinutý na KRE FEI STU). Meraním Q vo frekvenčných pásmach I, II a čiastočne aj III sa dá experimentálne zistiť a teoreticky zdôvodniť typická závislosť podľa nasledujúceho obrázku.



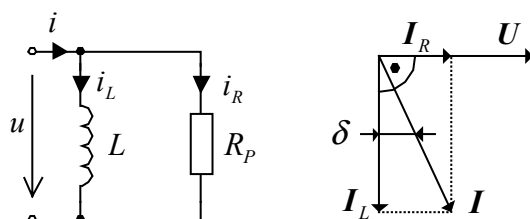
Obr. 1.5 Frekvenčná závislosť kvality cievky v širokom frekvenčnom pásme

- v oblasti, kde je $Q \approx \sqrt{\omega}$ zvyšuje hodnotu $R_S(\omega)$ elektromagnetický jav - skin efekt
- v oblasti $Q \sim \text{konšt.}$ sa okrem skin efektu uplatňujú ďalšie straty (dielektrické, magnetizačné).

Cievku je možné prakticky používať vo frekvenčnej oblasti, kde kvalita cievky s frekvenciou rastie alebo je konštantná. Oblasť s poklesom úmerným $1/\omega^2$ sa na praktické použitie neodporúča. V praxi sú cievky použiteľné v rezonančných obvodoch ak majú $Q > 10$. Typická hodnota kvality štandardných cievok sa pohybuje okolo 100. Cievky s kvalitou > 500 sa realizujú už veľmi ťažko (vyžadujú si veľké rozmery a drahé bezstratové materiály).

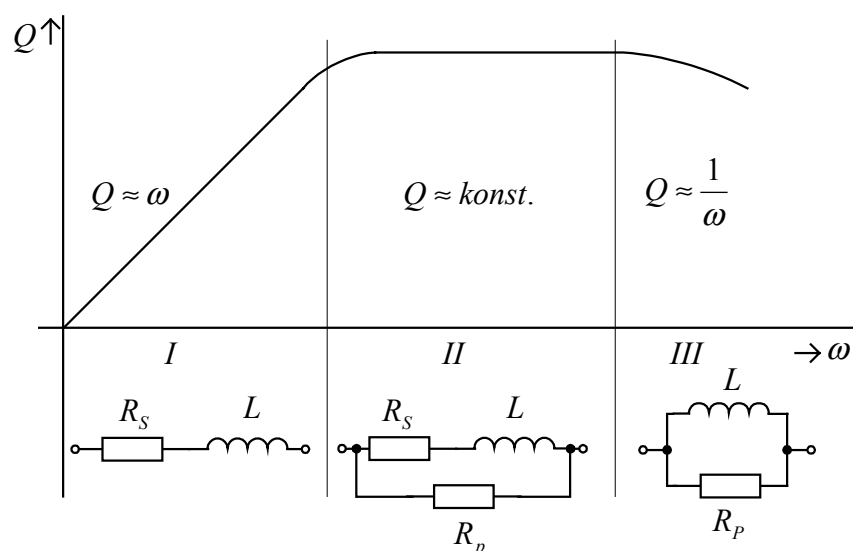
Straty v cievke môžeme modelovať aj paralelným stratovým odporom R_P , ktorý však nemá priamu fyzikálnu interpretáciu ako je to v prípade sériového stratového odporu R_S . Podľa obr. 1.6 môžeme, analogicky k sériovému stratovému odporu, definovať:

$$Q = \frac{R_p}{\omega L} = \frac{I}{\operatorname{tg} \delta}$$



Obr. 1.6 K vyjadreniu strát cievky paralelným stratovým odporom

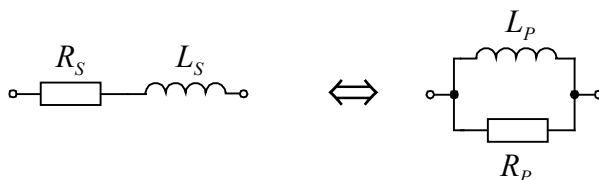
Poznámka: Paralelná náhrada strát cievky je obvykle výhodnejšia z hľadiska výpočtu, aj keď jej fyzikálna interpretácia je problematická. Cievky a kondenzátory sú totiž veľmi často radené paralelne, preto je výhodné definovať aj paralelný stratový odpor.



Obr. 1.7 Vyjadrenie strát cievky v rôznych frekvenčných pásmach

Prepočet sériového stratového odporu na paralelný.

Zložky sériového modelu cievky R_s , L_s môžeme na danej frekvencii prepočítať na ekvivalentný paralelný model. Takto vypočítané zložky paralelného modelu však už nie sú konštanty, ale sú funkciou frekvencie.



Platí:

$$Z_s = R_s + j\omega L_s$$

$$Y_p = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p}$$

$$Y_s = \frac{I}{Z_s} = \frac{I}{R_s + j\omega L_s} \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s - j\omega L_s} = \frac{R_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} + \frac{j\omega L_s}{j[R_s^2 + (\omega L_s)^2]}$$

$$Y_s = \frac{I}{R_s} + \frac{j\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} = \frac{I}{R_s} + \frac{j\omega L_s}{\omega L_s [R_s^2 + (\omega L_s)^2]} = \frac{I}{R_s} + \frac{j}{\omega L_p}$$

$$R_p(\omega) = \frac{R_s^2 + (\omega L_s)^2}{R_s} \frac{R_s}{R_s} = R_s [1 + Q_s^2(\omega)] \quad \text{kde} \quad Q_s(\omega) = \frac{\omega L_s}{R_s}$$

$$j\omega L_p = j \frac{R_s^2 + (\omega L_s)^2}{\omega L_s} \frac{L_s}{L_s} \Rightarrow L_p(\omega) = L_s \left[1 + \frac{1}{Q_s^2(\omega)} \right]$$

Analogicky je možné urobiť prepočet paralelných zložiek na sériové :

$$R_s(\omega) = \frac{R_p}{1 + Q_p^2(\omega)} \quad L_s(\omega) = L_p \frac{1}{1 + \frac{1}{Q_p^2(\omega)}} \quad \text{kde} \quad Q_p(\omega) = \frac{R_p}{\omega L_p}$$

Reálna cievka má konštantný stratový odpor R_s , len vo frekvenčnej oblasti I. Pri vyšších frekvenciách sa $R_s(\omega)$ zvyšuje vplyvom skinefektu a neskôr tiež dielektrických či magnetizačných strát (cievky s jadrom).

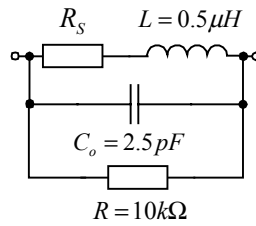
1.3 Vlastná kapacita a vlastná rezonancia cievky

Parazitnú rezonanciu reálnej cievky na frekvencii f_r vysvetľujeme vplyvom vlastnej kapacity cievky C_0 . Táto je tvorená súhrnným vplyvom dieľčích kapacít medzi jednotlivými závitmi cievky. Vlastná kapacita spolu s indukčnosťou cievky vytvorí paralelný rezonančný obvod, ktorý má na svojej rezonančnej frekvencii maximálnu impedanciu.

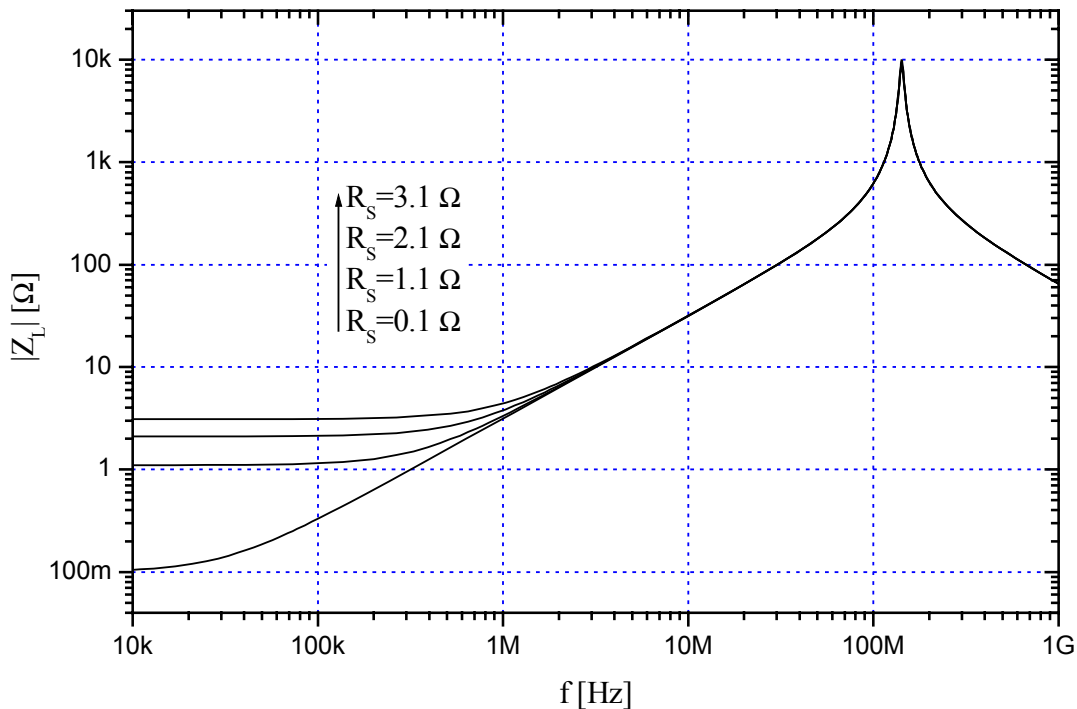
Zo známej hodnoty indukčnosti L a rez. frekvencie f_r môžeme ľahko vypočítať vlastnú kapacitu C_0 podľa Thomsonovho vzťahu.

$$C_0 = \frac{1}{\omega_r^2 L}$$

Ak teda poznáme parametre cievky L , R_s , R_p , C_0 môžeme jej model používať pri výpočtoch v širokom frekv. pásme. Model cievky v tvare paralelného rez. obvodu je pre „ručné“ výpočty už pomerne zložitý, hodí sa však pre použitie v simulačných programoch ako sú SPICE, MicroCap a podobne (pozri príklad na obr.1.8, obr.1.9). Ani tento model však nie je celkom presný, nakoľko stratové odpory R_s , R_p sú konštantné a nevystihujú presne vzájomné spolupôsobenie viacerých spomínaných typov strát.



Obr. 1.8 Príklad náhradnej schémy reálnej cievky s uvážením jej vlastnej kapacity.



Obr. 1.9 Frekvenčná závislosť modulu impedancie cievky podľa obr. 1.8 v širšom frekvenčnom pásme.

1.4 Obvodový model reálneho kondenzátora

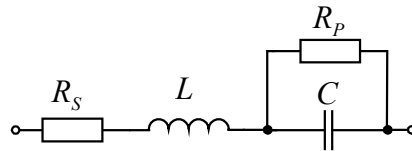
Kondenzátory používané v elektronických obvodoch môžu mať dielektrikum z rôznych látok počnúc vzduchom pre kvalitné kondenzátory do rezonančných obvodov a končiac rôznymi keramickými dielektrikami s vysokou permitivitou ϵ_r pre filtračné kondenzátory s veľkou kapacitou a malými rozmermi.

Možno povedať, že kvalita súčasných kondenzátorov určených pre ladené obvody je jeden až dva rády vyššia ako u cievok. Straty v ladených rez. obvodoch sú teda určené hlavne stratami cievok. Straty v kondenzátoroch môžeme obvykle zanedbať. Problémy sa vyskytujú však u kondenzátorov s veľkou kapacitou:

- a) permitivita dielektrika môže mať výraznú frekvenčnú závislosť smerom k vyšším kmitočtom

b) prívody ku kondenzátoru môžu svojou indukčnosťou spôsobiť nežiadúcu sériovú rezonanciu už pri relatívne nízkej frekvencii. Nad touto frekvenciou je kondenzátor nepoužiteľný.

Jedna z možných náhradných schém môže mať napríklad takýto tvar.

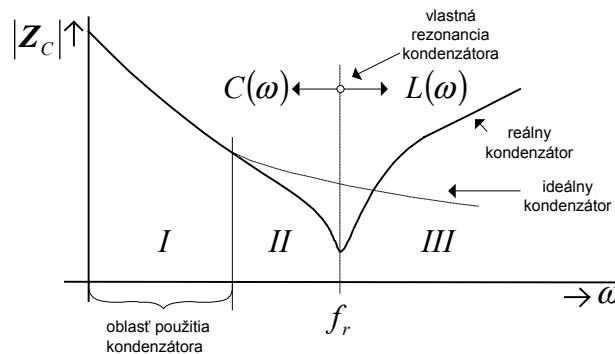


Obr. 1.10 Obvodová náhradná schéma reálneho kondenzátora

Stratové prvky R_s , R_p môžu byť pritom závislé od frekvencie podľa typu použitého dielektrika. Analogicky k cievke môžeme definovať kvalitu kondenzátora pri sériovom, resp. paralelnom vyjadrení strát.

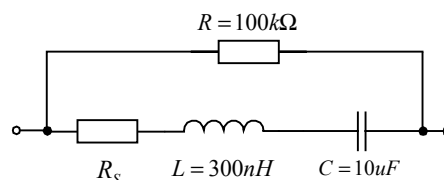
$$Q_p = \omega C R_p = \frac{1}{\text{tg} \delta_p} \quad \text{resp.} \quad Q_s = \frac{1}{\omega C R_s} = \frac{1}{\text{tg} \delta_s}$$

Prepočet paralelného stratového odporu na sériový a naopak sa robí pri zvolenej frekvencii podobne ako u cievok. Odvodenie je jednoduché a čitateľ si ho môže urobiť sám. Typická závislosť impedancie reálneho kondenzátora od frekvencie v širšom frekvenčnom pásme je na ďalšom obrázku.

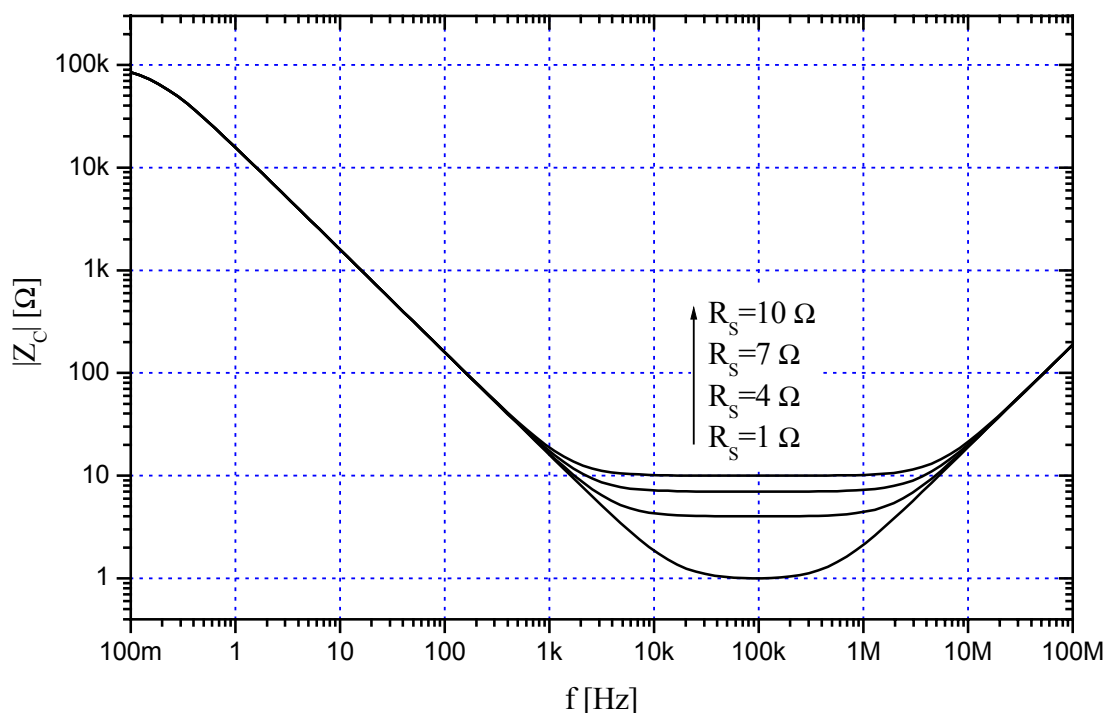


Obr. 1.11 Závislosť impedancie kondenzátora v širokom frekvenčnom pásme

Ako príklad uvedieme závislosť impedancie kondenzátora od frekvencie, ktorého náhradný obvod je uvedený na obrázku 1.12 (uvedený model je prakticky totožný s náhradným obvodom na obr.1.10). Impedancia bola vypočítaná pomocou simulačného programu MC3, a je uvedená na obr.1.13.

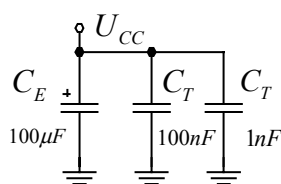


Obr. 1.12 Príklad náhradnej schémy reálneho kondenzátora s kapacitou $10 \mu F$



Obr. 1.13 Frekvenčná závislosť impedancie reálneho kondenzátora s kapacitou $10\mu F$ pre viac hodnôt sériového stratového odporu vo frekvenčnom pásme 0,1Hz až 100MHz.

Výrobca kondenzátorov obvykle predpisuje do akej maximálnej frekvencie je kondenzátor použiteľný ako filtračný. Dokonca môže pre danú frekvenciu a kapacitu predpísať maximálnu dĺžku prívodov kondenzátora. Ak je potrebné zabezpečiť filtráciu v širokom frekvenčnom pásme je možné kombinovať niekoľko kondenzátorov paralelne, pričom sú obvykle rôznej kapacity a s rôznymi dielektrikami – napr.

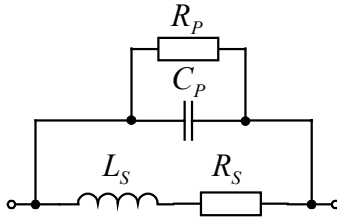


Obr. 1.14 Praktická realizácia blokovacieho kondenzátora pre široké frekvenčné pásmo

1.5 Paralelný rezonančný obvod so stratami

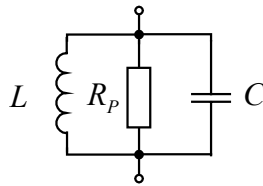
Je veľmi často používaným dvojpólom vo filtroch, selektívnych zosilňovačoch a prispôbovacích obvodoch. Pri jeho analýze záleží od voľby modelu cievky a kondenzátora (z hľadiska zachytenia vplyvu strát).

Ak zvolíme „nehodný“ model sú analytické vzťahy neprehľadné a ťažko sa s nimi pracuje. Napr. model paralelného RO podľa obr. 1.9 je nehodný pre výpočty aj keď celkom dobre vystihuje straty v cievke pre oblasť frekvencie, kde $Q_L \sim \text{konšt.} \cdot \omega$.



Obr. 1.15 Paralelný rezonančný obvod so stratami v cievke aj kondenzátore

Častejšie pracujeme s modelom RO, kde sú straty cievky a kondenzátora zahrnuté do jediného rezistora R_P . (obr. 1.16)



Obr. 1.16 Paralelný rezonančný obvod s paralelným stratovým odporom vhodný pre analytické výpočty

$$Y = \frac{1}{R_P} + j\omega C - \frac{j}{\omega L} = \frac{1}{R_P} + j \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L} \quad (1)$$

Pri frekvencii $\omega_r^2 LC = 1$ (rezonančná frekvencia) je admitancia rezonančného obvodu

$Y|_{\omega=\omega_r} = \frac{1}{R_P}$ reálna a minimálna. Vzťah (1) môžeme pomocou Thomsonovho

vzťahu $\omega_r^2 LC = 1$ prepísať do tvaru:

$$Y = \frac{1}{R_P} + j \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega L \omega_r} = \frac{1}{R_P} \left(1 + j \frac{R_P}{\omega_r L} \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega \omega_r} \right)$$

$$Y = \frac{1}{R_P} \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right) \right) = \frac{1}{R_P} (1 + jQx) \quad (2)$$

substitúcia $\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} = x$ vyjadruje pomerné rozladenie rez. obvodu a jej zavedenie zjednoduší matematické vyjadrenie admitancie, resp. impedancie rez. obvodu.

Pri rezonancii, kedy platí rovnosť $\omega = \omega_r$, je pomerné rozladenie $x = 0$:

napr. pre $\omega = \frac{1}{2}\omega_r$ platí: $x = \frac{\frac{1}{2}\omega_r}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\frac{1}{2}\omega_r}$, číselne $x = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

pre $\omega = 2\omega_r$ $x = \frac{2\omega_r}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{2\omega_r}$, číselne $x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Pre malé rozladenie $\Delta\omega = \omega - \omega_r$, pričom $|\Delta\omega| \leq 0,1\omega_r$ (úzkopásmové filtre) môžeme pomerné rozladenie vypočítať zo zjednodušeného vzťahu, v ktorom platí

$$x = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega\omega_r} = \frac{(\omega + \omega_r)(\omega - \omega_r)}{\omega\omega_r} = \frac{(\omega_r + \Delta\omega + \omega_r)\Delta\omega}{(\omega_r + \Delta\omega)\omega_r} = \frac{(2\omega_r + \Delta\omega)\Delta\omega}{(\omega_r + \Delta\omega)\omega_r} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_r} \cdot \frac{1 + \Delta\omega/2\omega_r}{1 + \Delta\omega/\omega_r} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_r}$$

Pre malé odchylky od rezonančnej frekvencie teda platí pre pomerné rozladenie aritmetická symetria pre frekvenčnú závislosť admitancie rez. obvodu (rezonančnej krivky). Chyba pre $\Delta\omega \leq 0,1\omega_r$ nepresiahne 5% [Zinke I str. 13]

Poznámka:

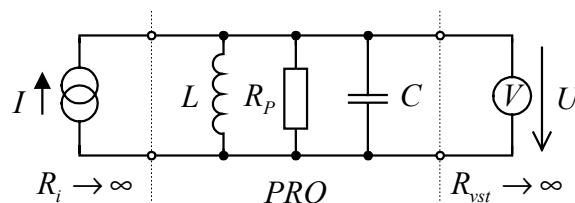
Body x_1, x_2 , pri ktorých má rez. krivka rovnakú hodnotu musia spĺňať rovnosť :

$$\sqrt{1 + (Qx_1)^2} = \sqrt{1 + (Qx_2)^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2|, \quad \text{teda:} \quad \frac{f_1}{f_r} - \frac{f}{f_1} = \frac{f_2}{f_r} - \frac{f}{f_2} \Rightarrow \quad \text{po úprave}$$

$$f_r = \sqrt{f_1 \cdot f_2} \quad - \text{geometrický stred frekvencií.}$$

1.6 Frekvenčný pásmový filter s paralelným rezonančným obvodom

Základné zapojenie PRO ako pásmového filtra zapojeného medzi zdroj signálu s veľkým vnútorným odporom (zdroj konštantného prúdu) a záťaž je nasledujúcom obrázku. Záťaž tu pre jednoduchosť predstavuje voltmeter striedavého napätia s vysokým vstupným odporom $R_{vst} \rightarrow \infty$.



Obr. 1.17 Paralelný rez. obvod ako jednoduchý frekvenčný filter typu pásmový priepust

Pre výstupné napätie filtra podľa obrázku platí za uvedených predpokladov podľa Ohmovho zákona jednoduchý vzťah. Využijeme pritom odvodené vyjadrenie pre impedanciu PRO pomocou pomerného rozladenia x .

$$U = \mathbf{Z} \mathbf{I} = \frac{R_p}{1 + jQx} \mathbf{I} \Rightarrow \frac{U}{\mathbf{I}} = \frac{R_p}{1 + jQx} = \mathbf{T}(x), \quad \text{kde } \mathbf{T}(x) \text{ je komplexná prenosová}$$

funkcia filtra. V tomto prípade má rozmer ako impedancia, hovoríme preto o prenosovej impedancii - transimpedancii (treba si však jasne uvedomiť, že to v skutočnosti nie je impedancia).

V praxi veľmi často pracujeme s relatívnymi (normovanými) frekvenčnými charakteristikami. Pre $x=0$ (rezonancia) platí $U_r = R_p I$, čo je max. hodnota, ktorú použijeme ako normu.

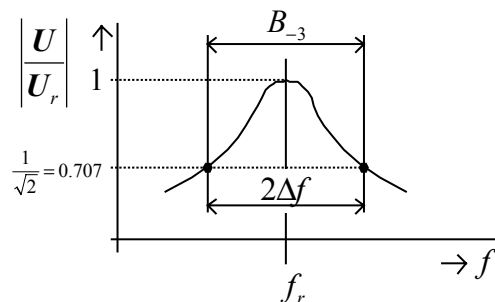
$$\left| \frac{U}{U_r} \right| = \left| \frac{\frac{R_p}{1+jQx}}{\frac{R_p}{I}} \right| = \frac{I}{|1+jQx|} = \frac{I}{\sqrt{1+(Qx)^2}} \quad \text{normovaný prenos pásmového priepustu}$$

s rez. obvodom. Pre rozladenie, pri ktorom je $Qx = 1$, má normovaný prenos hodnotu $\frac{I}{\sqrt{1+1}} = \frac{I}{\sqrt{2}} = 0,707$. Táto hodnota je pre rezonančné obvody charakteristická a často

sa vyjadruje v dB, číselne je to hodnota $20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$.

Pre rez. obvody s väčšou kvalitou ($Q > 10$) môžeme podmienku $Qx=1$ vyjadriť približne $Qx = Q \cdot \frac{2\Delta\omega}{\omega_r} = 1 \Rightarrow Q = \frac{\omega_r}{2\Delta\omega} = \frac{f_r}{2\Delta f}$. Tento vzťah sa používa na praktický výpočet

kvality PRO (SRO) z merania charakteristických bodov jeho rezonančnej krivky - rez. frekvencie f_r , šírky pásma pre pokles o 3 dB, $B_{-3\text{dB}} = 2\Delta f$.



Obr.1.18 K meraniu kvality rezonančného obvodu.

Problém na vlastné riešenie:

Ako postupovať, ak použitý prúdový zdroj nie je ideálny, teda má konečný vnútorný odpor R_i a voltmeter má tiež konečný vstupný odpor R_{vst} ?

Odporúčany postup:

1. Určíme výsledný paralelný stratový odpor rez. obvodu $R_{pV} = R_p // R_i // R_{vst} < R_p$
2. Určíme novú kvalitu zaťaženého obvodu $Q_L < Q$ a môžeme použiť predchádzajúci spôsob výpočtu.

