Signál je časovo premenná fyzikálna veličina, ktorá zobrazuje správu

Správa je informácia ktorú potrebujeme doručiť z miesta vzniku na miesto určenia

Správa obsahuje informácie nové pre užívateľa, ale aj nadbytočné t.j. redundantné

Správu potrebujeme premeniť na vhodný signál, ktorý nám umožní jeho prenos

Signál môže byť : -elektrický (napätie, prúd, výkon),
-optický,
-akustický
-EMG a pod.

Najpoužívanejšie médium je signál elektrický

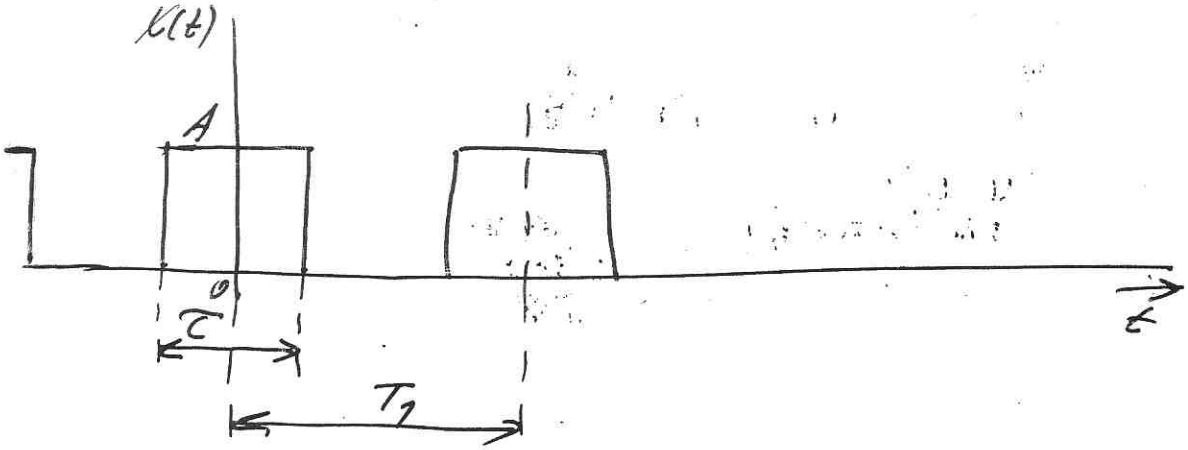
Signál, ktorý môžeme opísať analytickou funkciou času, nazývame **regulárny**, alebo **deterministický** , jeho informačný obsah je nulový. Regulárny signál je abstrakciou skutočných signálov

Reálne **signály**, ktoré majú istý informačný obsah sú **nedeterministické- náhodné- stochastické**

Teória signálov
Teória prenosu
Teória informácií

	Vektorový tvar	Trigonom. tvar	Složkový tvar
	$\lvert C_n\rvert$, $\arg C_n$	A_n, φ_n	a_n, b_n
$\lvert C_n\rvert$ $\arg C_n$	—	$A_0 = C_0$ $A_n = 2\lvert C_n\rvert$ $\varphi_n = \arg C_n$	$a_0 = C_0$ $a_n = 2\mathrm{Re}[C_n]$ $b_n = -2\,\mathrm{Im}[C_n]$
A_n φ_n	$C_0 = A_0$ $\lvert C_n\rvert = \frac{1}{2}A_n$ $\arg C_n = \varphi_n$	—	$a_0 = A_0$ $a_n = A_n\cos\varphi_n$ $b_n = -A_n\sin\varphi_n$
a_n b_n	$C_0 = a_0$ $C_n = \frac{1}{2}a_n - j\frac{1}{2}b_n =$ $= \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\cos\varphi_n = \frac{a_n}{2\lvert C_n\rvert}$ $\sin\varphi_n = \frac{-b_n}{2\lvert C_n\rvert}$	$A_0 = a_0$ $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\cos\varphi_n = \frac{a_n}{A_n}$ $\sin\varphi_n = \frac{-b_n}{A_n}$	—

Pr. harmon. signál:



$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \qquad n=0;\pm1;\pm2\dots$$

$$C_n = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x(t)\, e^{-jn\omega_1 t}\,dt = \frac{A}{T_1}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jn\omega_1 t}\,dt =$$

$$= \frac{A}{T_1}\cdot\frac{1}{\underbrace{-jn\omega_1}_{=(-x)}}\left[e^{-jn\omega_1 t}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{T_1}\cdot\frac{\frac{\tau}{2}}{-jn\omega_1\frac{\tau}{2}}\cdot(-2j)\cdot\sin n\omega_1\frac{\tau}{2} =$$

$$= \frac{A\tau}{T_1}\,\frac{\sin n\omega_1\frac{\tau}{2}}{n\omega_1\frac{\tau}{2}} = \frac{A\tau}{T_1}\cdot Si\left(n\pi\frac{\tau}{T_1}\right)$$

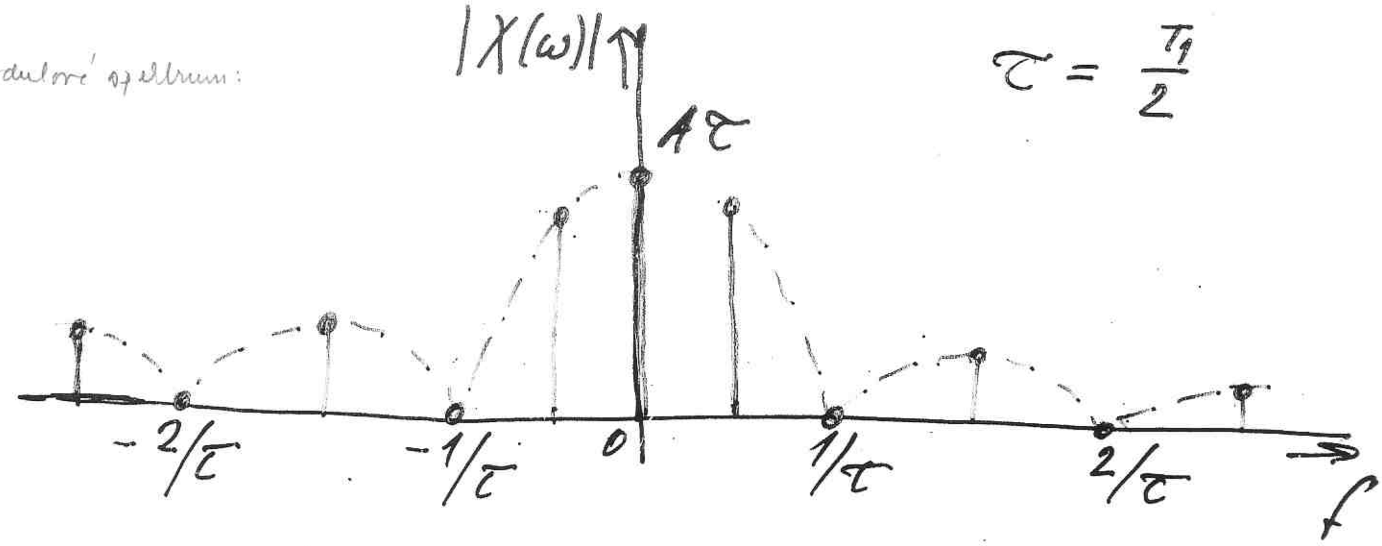
Pozn.:

$$e^{-jx}+e^{jx} = \cancel{\cos x} - j\sin x - \cancel{\cos x} - j\sin x = -2j\sin x$$

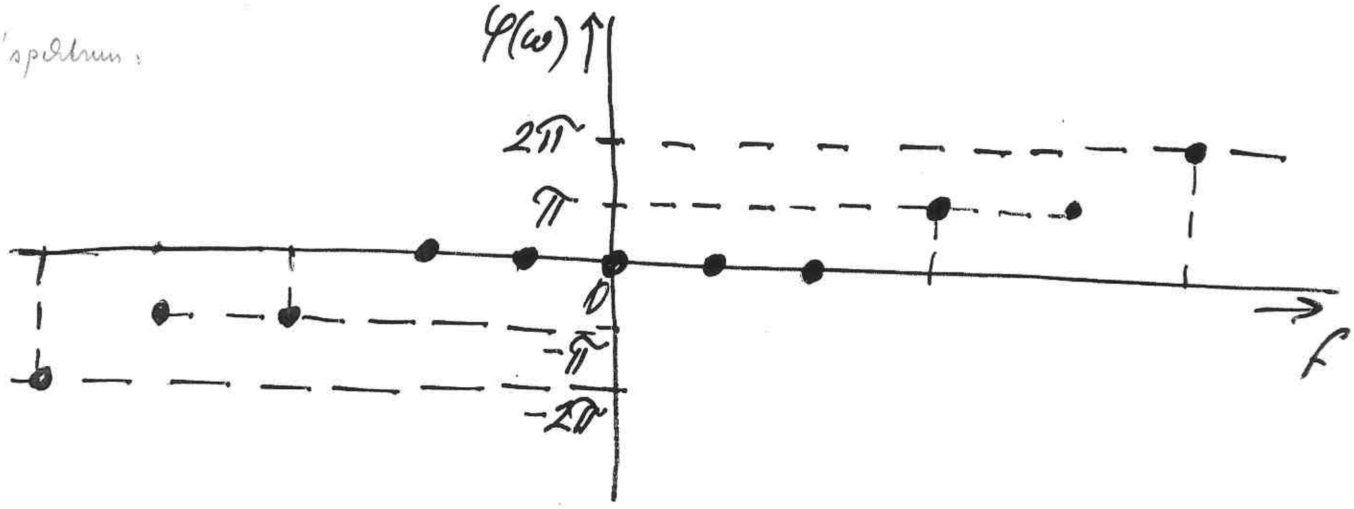
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$\tau = \frac{T_1}{2}$$

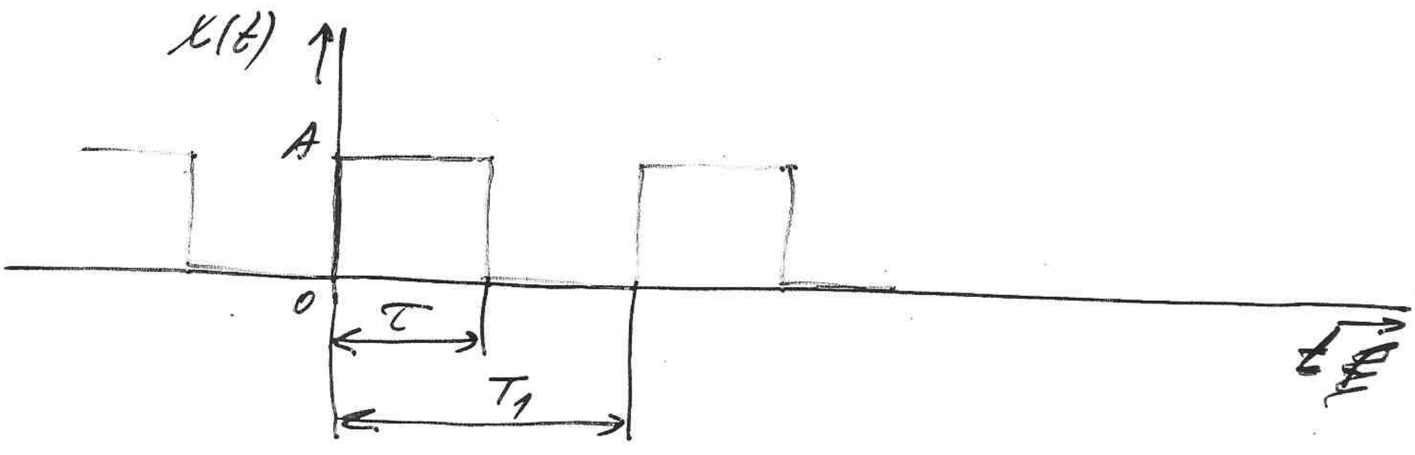
modulové spektrum:



fázové spektrum:



Pr. 2



[Postup jen Pr 2]

? ověřit postup !

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{jn\omega_1 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_1} A \int_0^{\tau} e^{-jn\omega_1 t} \, dt =$$

$$= \frac{A}{T_1} \cdot \frac{1}{-jn\omega_1} \left[e^{-jn\omega_1 t} \right]_0^{\tau} =$$

$$= \frac{A}{T_1} \cdot \frac{1}{-jn\omega_1} \left(e^{-jn\omega_1 \tau} - 1 \right) =$$

$$= \frac{A}{T_1} \cdot \frac{e^{-jn\omega_1 \frac{\tau}{2}}}{-jn\omega_1} \left(e^{-jn\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_1 \frac{\tau}{2}} \right) =$$

$$= \frac{A}{T_1} \cdot \frac{\frac{\tau}{2}}{-jn\omega_1 \frac{\tau}{2}} \cdot e^{-jn\omega_1 \frac{\tau}{2}} \cdot (-2j) \sin n\omega_1 \frac{\tau}{2} =$$

$$= \frac{A\tau}{T_1} \cdot e^{-jn\omega_1 \frac{\tau}{2}} \cdot \mathrm{Sa}\left(n\pi \frac{\tau}{T_1} \right)$$

jen fázové spektrum je posunuté
oproti tomu z Pr.1

Delenie signálov

a) Spojité:
- periodické
- neperiodické

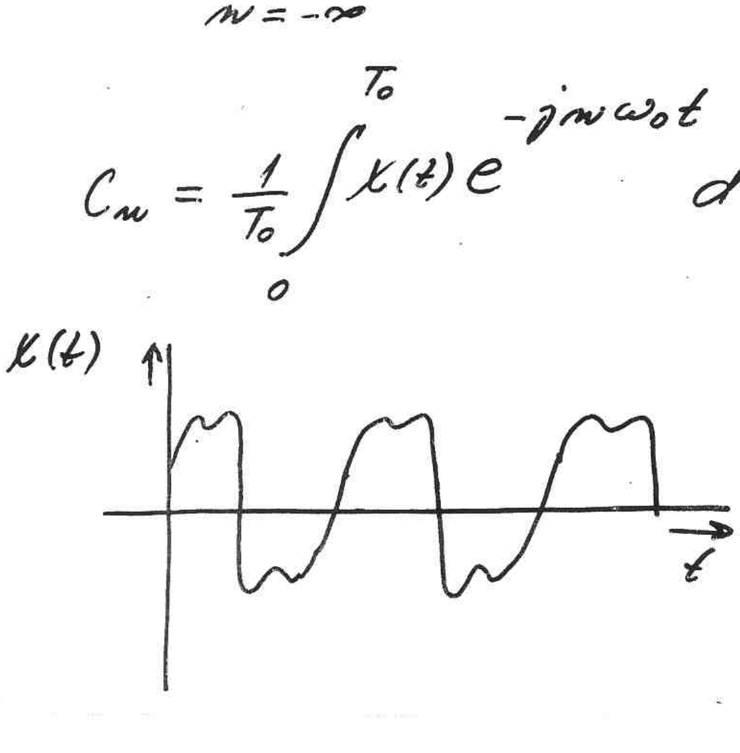
b) Diskrétne:
- periodické
- neperiodické

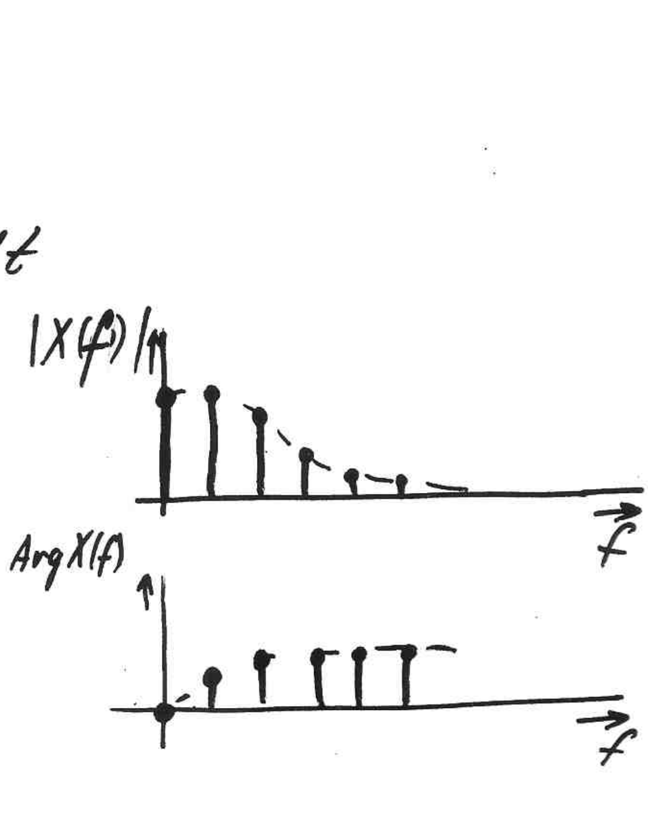
Spojité - periodické

Fourierov rad

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$





Spojité - neperiodické

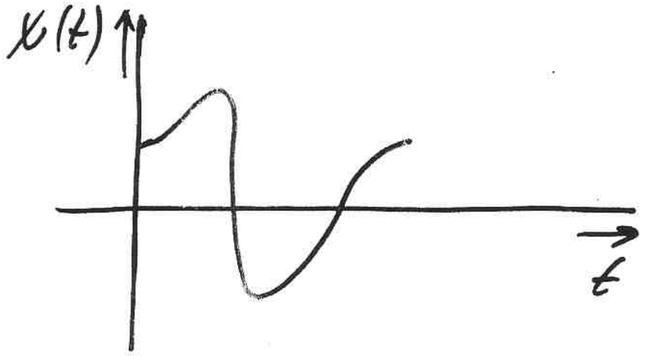
$$x(t) \xrightarrow{FT} X(\omega)$$

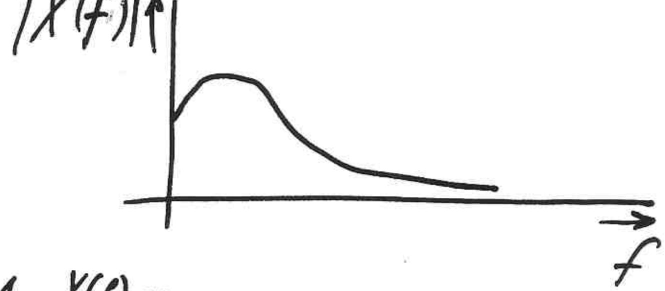
priama FT:

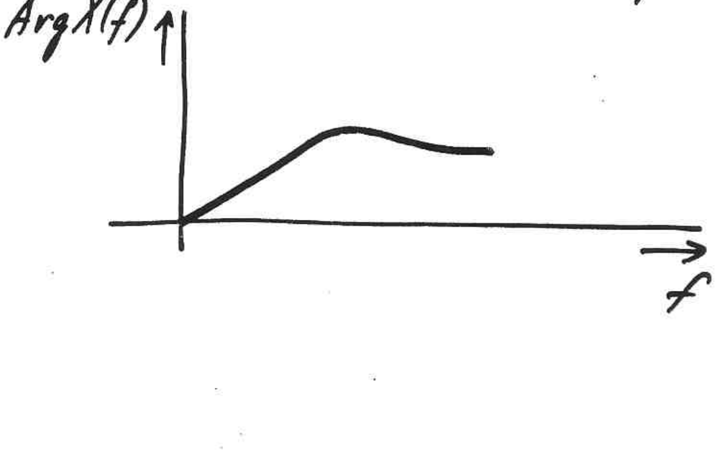
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\ ; \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$$

spätná FT:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\ ; \quad X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$







2. Periodické signály

Periodický signál je deterministický, t.j. regulárny signál, ktorého časový priebeh sa pravidelne opakuje s periódou T. Všeobecne ho môžeme opísať funkciou

$$s(t) = s(t \pm kT) \qquad (2.1)$$

kde k je reálne číslo.

O harmonickom signále predpokladáme, že existuje v čase $-\infty < t < \infty$. Reálne signály majú však vždy začiatok a koniec. Za harmonický signál budeme považovať taký signál pre ktorý vzťah (2.1) platí v dostatočne veľkom časovom intervale (pre dostatočne veľkú hodnotu k).

Najjednoduchším periodickým signálom je harmonický (sínusový, kosínusový) signál, ktorý môžeme vyjadriť v tvare

$$s(t) = S\cos(\omega t + \psi) \qquad (2.2)$$

kde S je počiatočná amplitúda signálu (pre $t = \psi = 0$),
$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ - uhlový ~~kmitočet~~, frekvencia
$-\psi$ uhol určujúci počiatočnú fázu (pre $t = 0$).

Vzťah (2.2) môžeme vyjadriť pomocou Eulerovho vzťahu v tvare

$$s(t) = R_e\, S e^{j(\omega t + \psi)} = R_e\, \dot{S} e^{j\omega t} \qquad (2.3)$$

kde $\dot{S} = S e^{j\psi}$ je tzv. komplexná amplitúda.

$\dot{S} = S.e^{j\omega\psi}$

Podľa vzťahu (2.3) môžeme harmonický signál zobraziť v komplexnej rovine ako vektor $\dot{S}$, ktorý sa otáča okolo počiatku uhlovou rýchlosťou ω v smere proti pohybu hodinových ručičiek, ako to vidieť na obr. 2a. Okamžitú hodnotu signálu $s(t)$ dostaneme ako priemet vektora $\dot{S}$ do reálnej osi.

Harmonický signál vo vzťahu (2.2) môžeme vyjadriť aj v tvare

$$s(t) = \frac{1}{2} S e^{j(\omega t+\psi)} + \frac{1}{2} S e^{-j(\omega t+\psi)} = 0{,}5\,\dot{S} e^{j\omega t} + 0{,}5\,\overset{*}{S} e^{-j\omega t} =$$

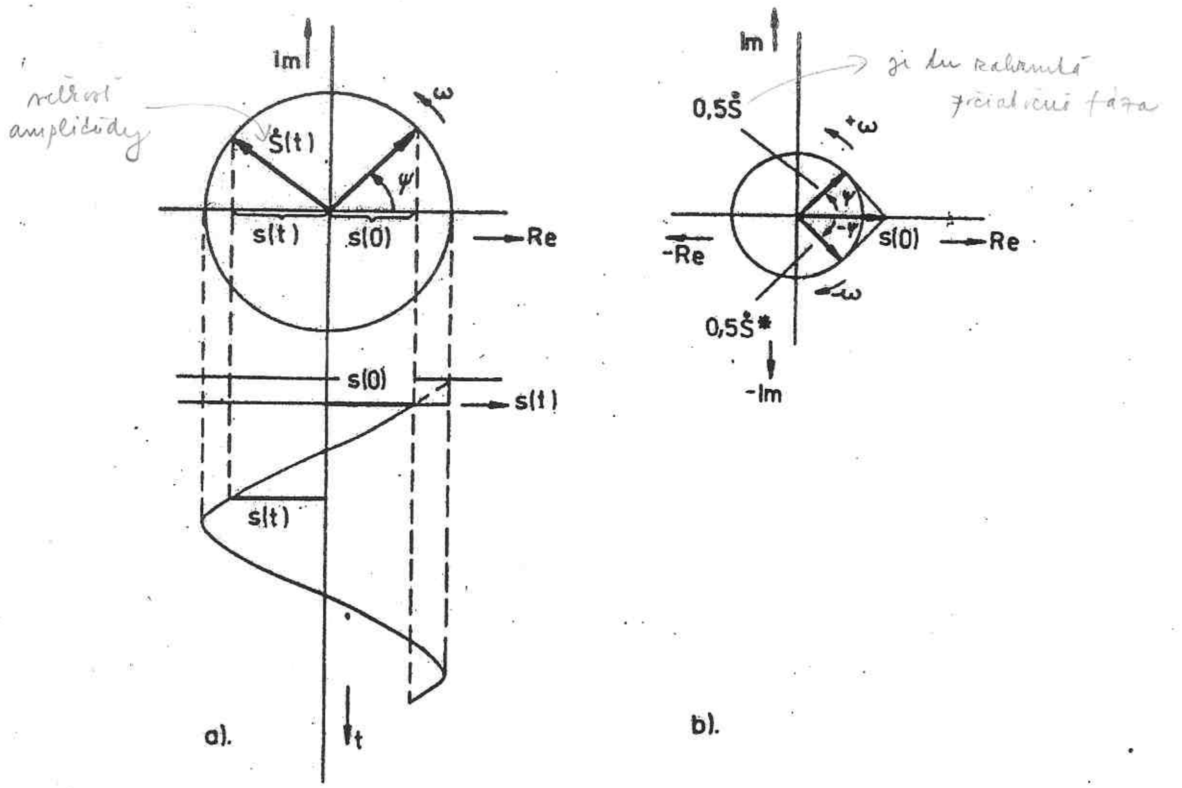
z rešt...

$$= \frac{1}{2} S\cos(\omega t+\psi) + j\frac{1}{2} S\sin(\omega t+\psi)$$

$$+ \frac{1}{2} S\cos(-\omega t-\psi) + j\frac{1}{2} S\sin(-\omega t-\psi) =$$

$$= S\cos(\omega t+\psi) \qquad (2.4)$$

Zo vzťahu (2.4) vyplýva ďalší spôsob zobrazenia harmonického signálu v komplexnej rovine, ako súčet dvoch vektorov veľkosti 0,5 S s počiatočnými fázami $+\psi$ a $-\psi$, rotujúcimi proti sebe uhlovými rýchlosťami, ako je to na obr. 2b.



Obr. 2
Zobrazenie harmonického signálu rotujúcimi vektormi v komplexnej rovine

2.1 FOURIEROVE RADY

Každú periodickú funkciu s(t), ktorá vyhovuje Dirichletovým podmienkam, môžeme rozložiť do Fourierovho radu.

Dirichletove podmienky:

1. - interval, na ktorom je definovaná funkcia s(t), môžeme rozdeliť na konečný počet intervalov, na ktorých je funkcia s(t) spojitá, t.j. existuje integrál „plocha signálu"

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |s(t)|\, dt < \infty$$

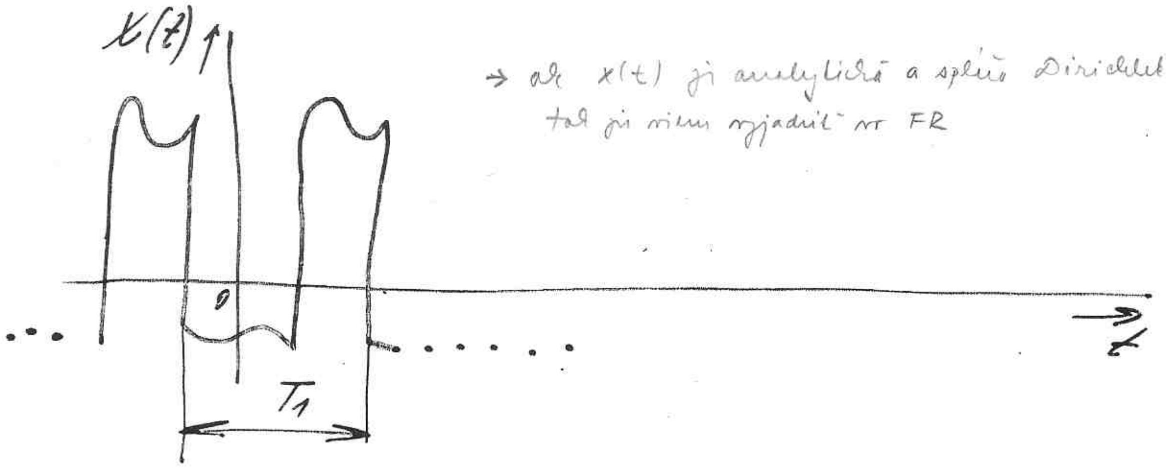
2. - v každom bode nespojitosti existuje hodnota limity funkcie sprava s(t + 0) a hodnota limity funkcie zľava s(t - 0), pričom v bode nespojitosti je hodnota funkcie daná vzťahom

$$\frac{s\,(t+0) + s\,(t-0)}{2}$$

aritmetický priemer

(1)

PERIODICKÉ SIGNALY



→ ak $x(t)$ je analytická a splňa Dirichletove podmienky, tak je vieme vyjadriť vo FR

Dirichletove podmienky

Fourierov rad (zložkový tvar)

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t \right)$$

je jednosmerná zložka : $$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t)\, dt$$

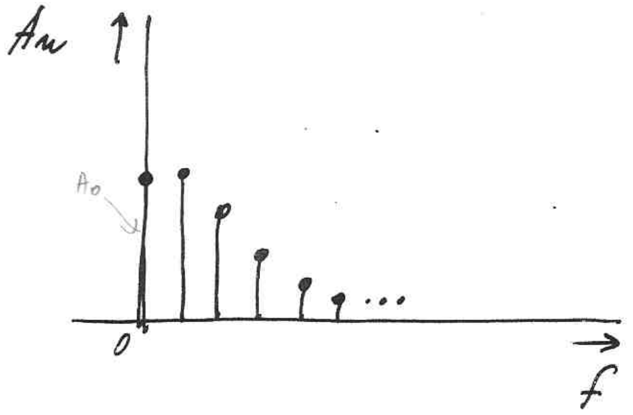
$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) \cos n\omega_1 t\, dt$$

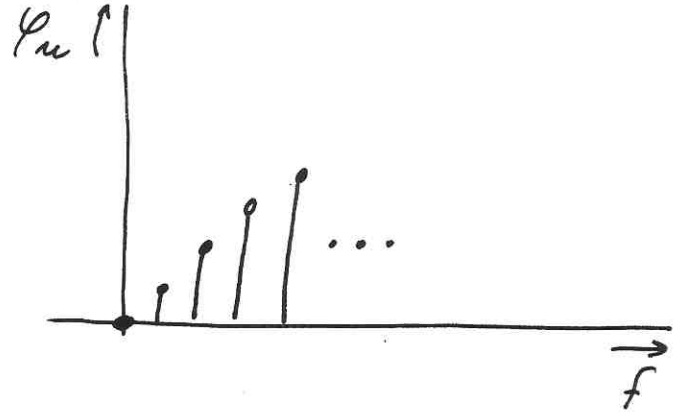
$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) \sin n\omega_1 t\, dt$$

Reálny tvar = trigonom. tvar

trigon.

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$





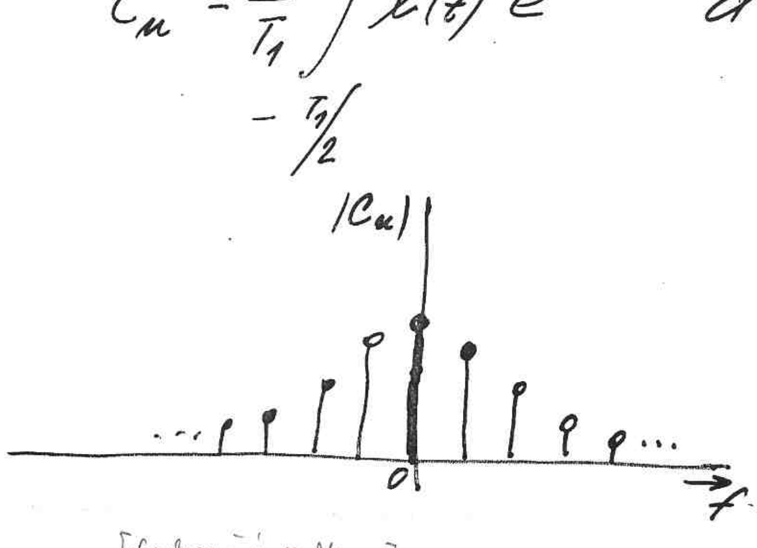
časová fcia x(t) sa dá vyjadriť aj v

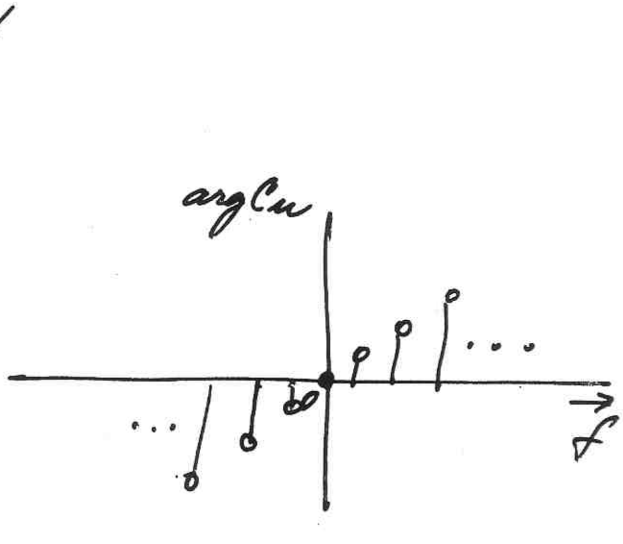
Exponenciálny tvar

vekt.

$$x(t) = \underset{\underset{C_0}{\|}}{A_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n e^{jn\omega_1 t} + \bar{C}_n e^{-jn\omega_1 t} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t)\, e^{-jn\omega_1 t}\, dt$$





[frekvenčné spektrum]

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (1)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \; ; \; \cos\varphi_n = \frac{a_n}{A_n} \; ; \; \sin\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

Eulerov vzťah

$$\cos(n\omega t + \varphi_n) = \frac{1}{2}\left[e^{j(n\omega t + \varphi_n)} + e^{-j(n\omega t - \varphi_n)}\right] \quad (2)$$

dosadením $(2) \rightarrow (1)$, rozšírením $n \in (-\infty, \infty)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega t}$$

kde $\dot{C}_n = C_n e^{-j\varphi_n} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}(\cos\varphi_n + j\sin\varphi_n)$

$$= A_n + jB_n =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+T/2} [x(t) \cos n\omega t + j\, x(t) \sin n\omega t]\, dt =$$

$$= \boxed{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt = C_n}$$

NÁZOV:

PREDMET:

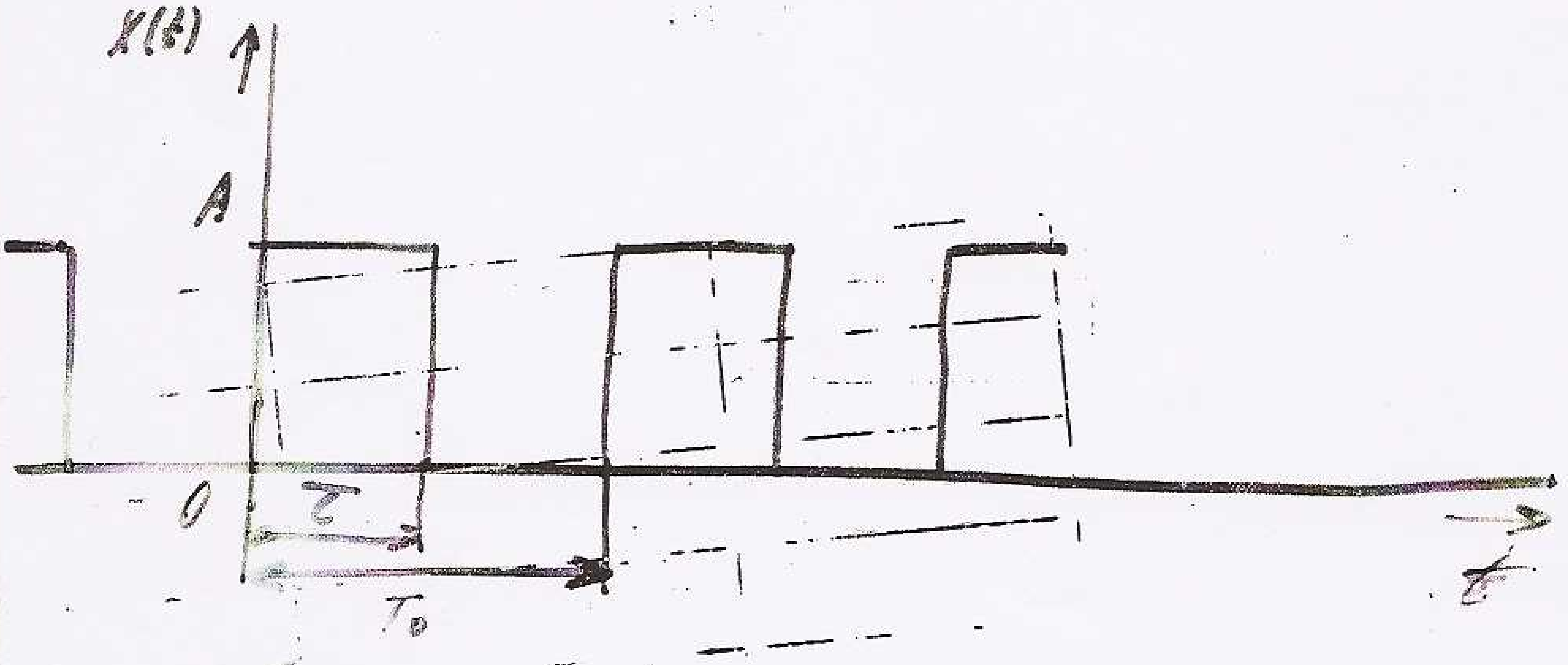
ROČNÍK:

ČÍSLO:

ČÍSLO ZLOŽKY

			1

Pr. 2



$\tau = T_0/2$

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{pre } t \in (0 + nT_0;\ \frac{T_0}{2} + n \cdot T_0 \\ 0 & \text{pre } t \notin \quad -\!\!\shortparallel\!\!- \end{cases}$$

pre $n = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A\,dt = \frac{A}{2}$$

T_0 = kruhitne číslo

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} A \cos n\omega_0 t\,dt = \frac{2A}{T_0 n \omega_0} \left[\sin n\omega_0 t \right]_0^{T_0/2} = 0$$

NÁZOV:

ČÍSLO:

PREDMET:

ROČNÍK: 7ola.

ČÍSLO ZLOŽKY 2

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} A \sin n\omega_0 t \, dt = \frac{-2A}{T_0 n\omega_0}\left[\cos n\pi - \cos 0\right] =$$

$$= \frac{A}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right) = \frac{A}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

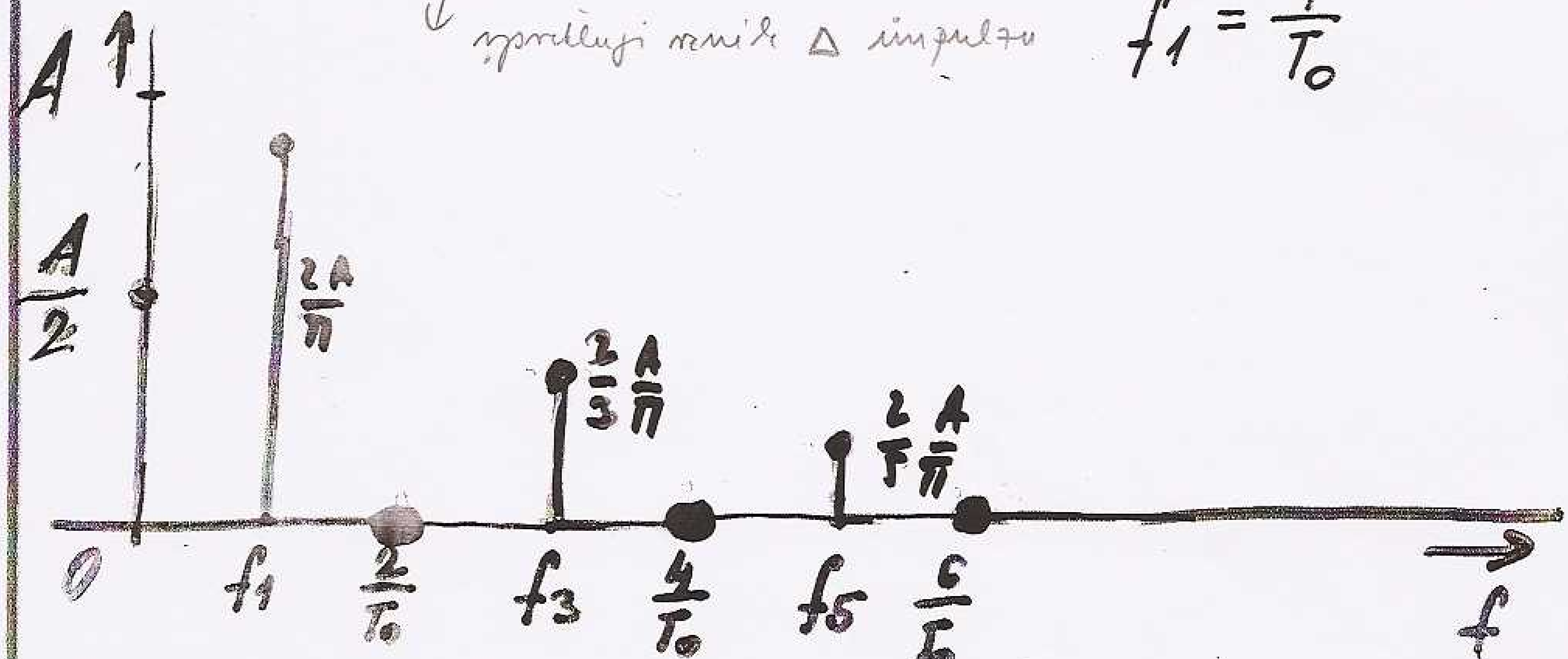
$$x(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] \sin n\omega_0 t =$$

jsm. zložka ↓ ; ↙ nepárne harmonické

$$= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi \cdot 1}\left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \dots\right)$$

↓ spektrum [illegible] Δ impulzu

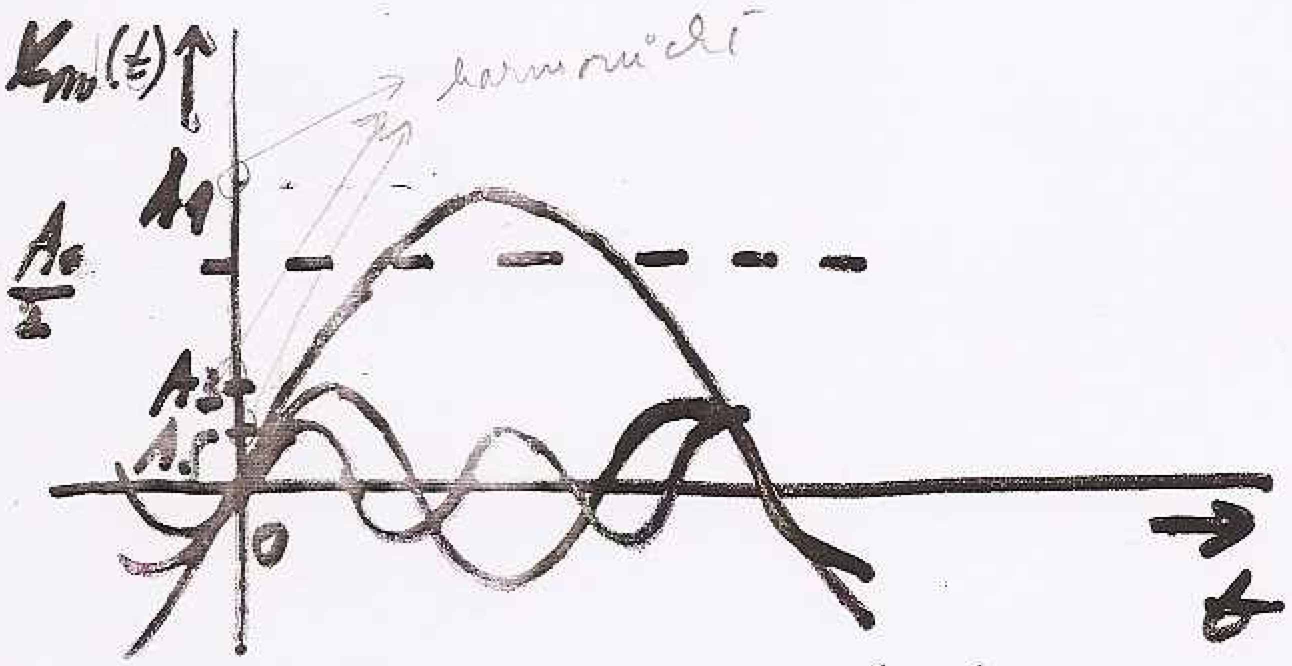
$$f_1 = \frac{1}{T_0}$$

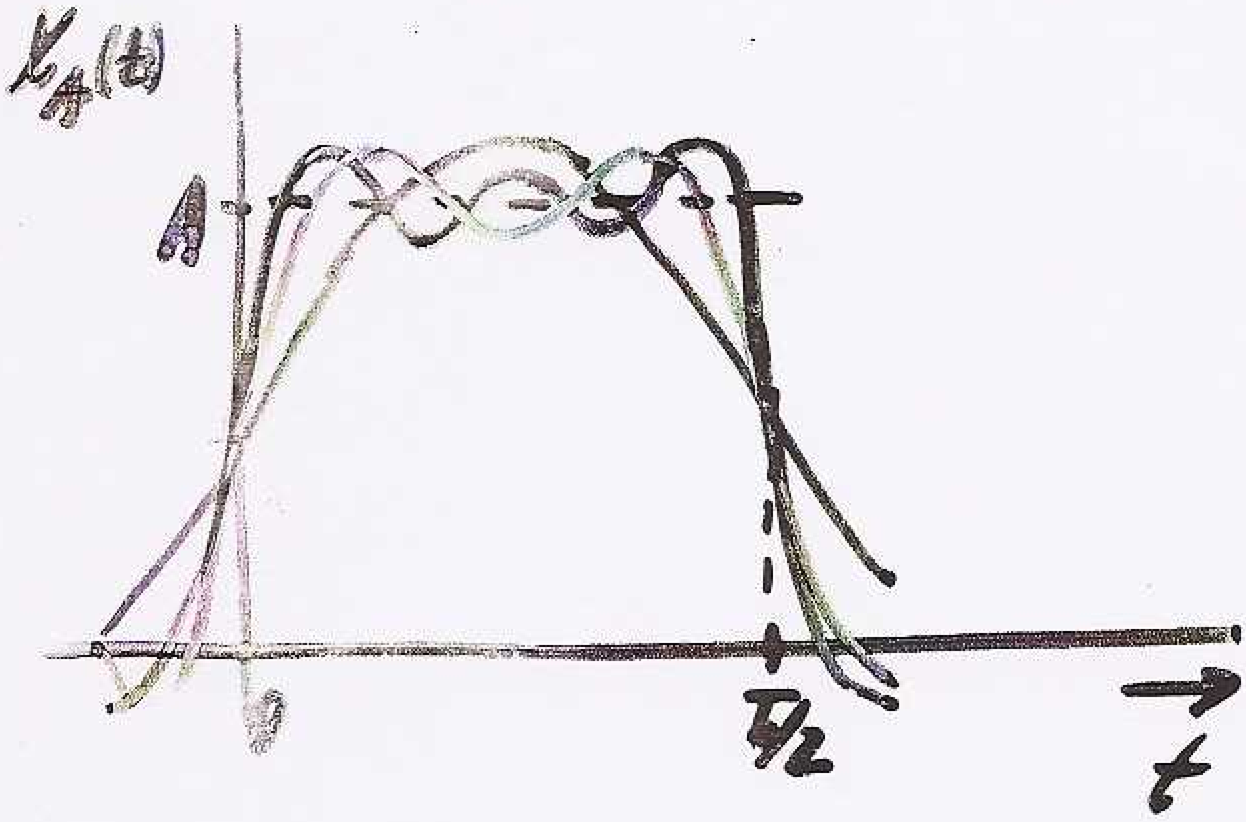


NÁZOV: PREDMET:

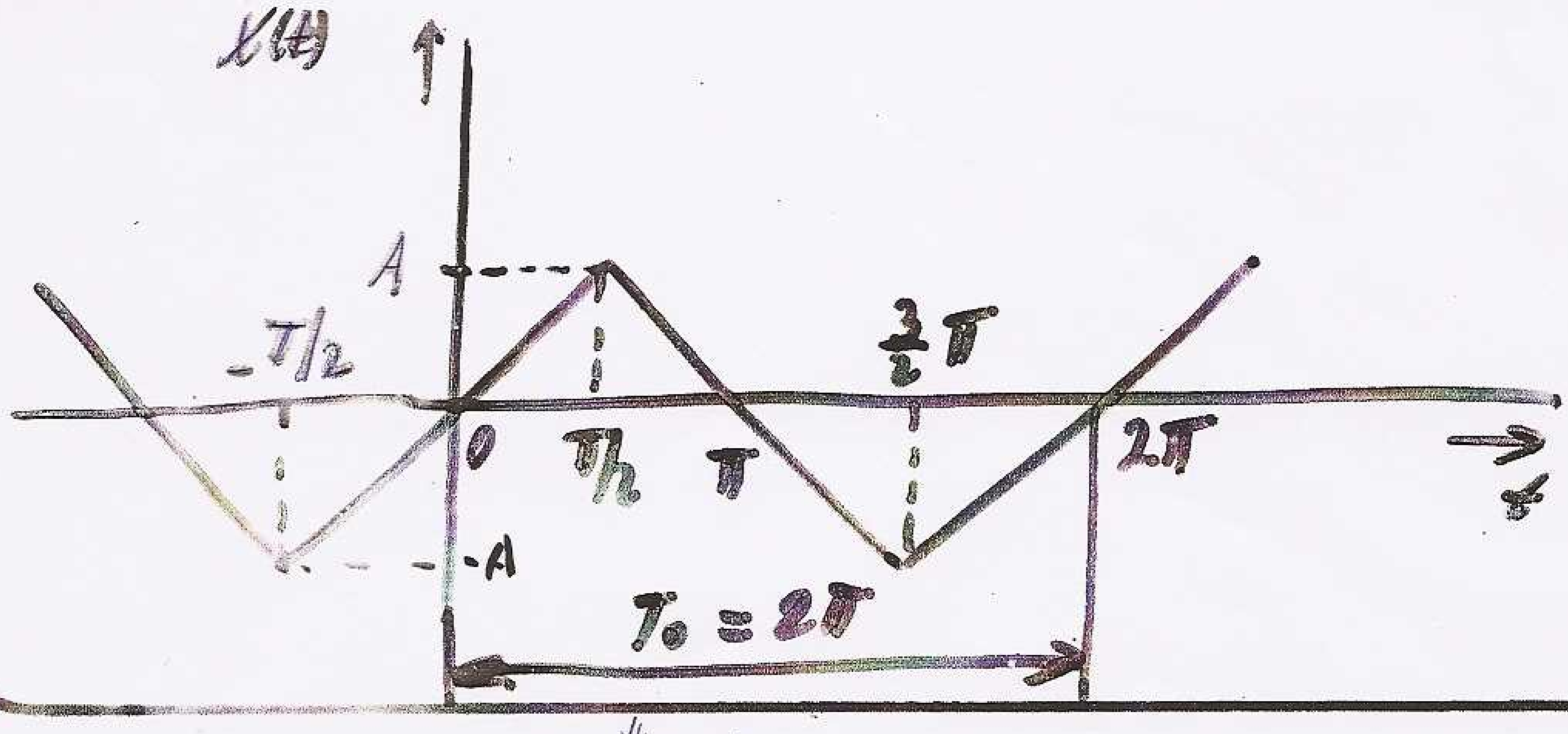
ROČNÍK:

ČÍSLO: ČÍSLO ZLOŽKY 3





Pr. 3



$\Downarrow \omega = 1$

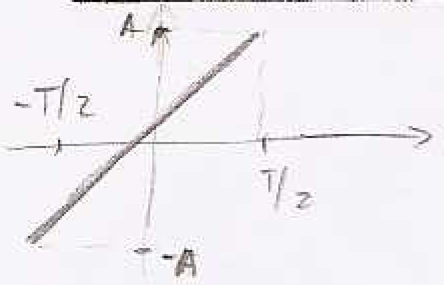
NÁZOV: PREDMET:

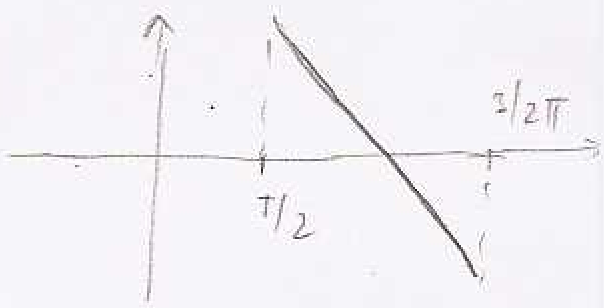
ROČNÍK:

ČÍSLO: ČÍSLO ZLOŽKY

4

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2A}{\pi} t \; ; & t \in \left(-\pi/2 \; ; \; \pi/2\right) \\ \frac{2A}{\pi}(\pi - t) \; ; & t \in \left(\pi/2 \; ; \; 3/2 \cdot \pi\right) \end{cases}$$





$$T_0 = 2\pi \rightarrow \omega_1 = 1$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \overset{1}{\omega_1} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \overset{1}{\omega_1} t$$

$$T \rightarrow \left(-\pi/2 \; ; \; \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{2\pi/2} x(t)\, dt = 0$$

$x(t)$ nepárna

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2A}{\pi} t \cos nt \, dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{2A}{\pi} (\pi - t) \cos nt \, dt \right\} = 0$$

NÁZOV: PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO: ČÍSLO ZLOŽKY 5

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2A}{\pi} t \sin nt\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{2A}{\pi}(\pi - t) \sin nt\, dt =$$

$$= \frac{8A}{n^2\pi^2} \sin n\frac{\pi}{2} \Rightarrow b_n = 0 \text{ pre } n \text{ párne}$$

$$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sin t - \frac{8A}{9\pi^2} \sin 3t + \frac{8A}{25\pi^2} \sin 5t - \dots$$

$\varphi_n = 0$; resp. π

Výkonové spektrum

$x(t) \Rightarrow u(t), \; i(t)$

$p = u \cdot i$

$p = Ri^2 = u^2/R$

$R = 1 \Rightarrow p = i^2 = u^2$

NÁZOV:

ČÍSLO:

PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO ZLOŽKY 6

$$\boxed{P_s = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} |x(t)|^2\, dt}$$

stredný výkon periodického signálu

$$P_s = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}\, dt$$

$$P_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{jn\omega_0 t}\, dt}_{\overline{C_n}}$$

$$P_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \overline{C_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

$$C_0 = A_0$$

$$|\overline{C_n}|^2 = |C_{-n}|^2 \qquad 2|C_n| = A_n$$

$$P_s = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n|^2 = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \cdot 2|C_n| \cdot \frac{1}{2} = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2 =$$

$$= A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n\,ef}^2 \qquad A_{n\,ef} = \frac{A_n}{\sqrt{2}}$$

NÁZOV:

PREDMET:

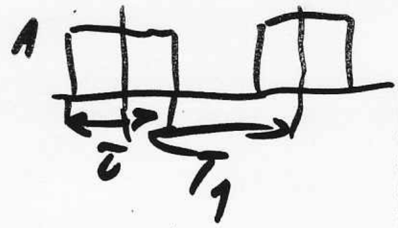
ROČNÍK:

ČÍSLO:

ČÍSLO ZLOŽKY

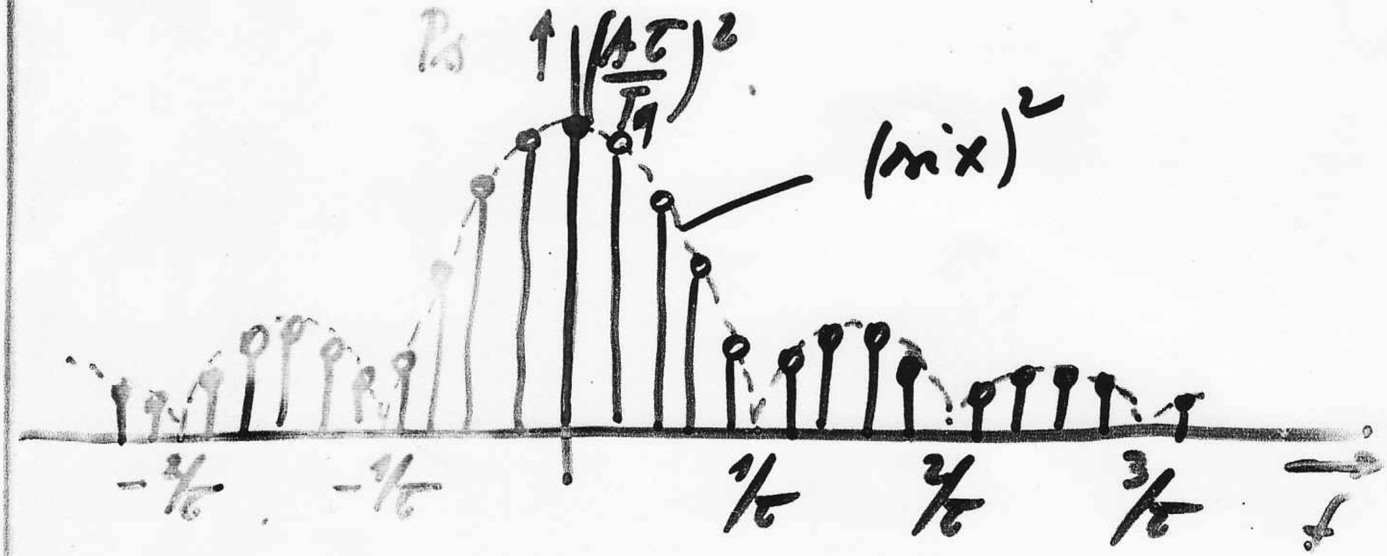
7

Pr. Pr. 1



$$P_s = \frac{1}{T_1}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

$$P_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \left(\frac{A\tau}{T_1}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[S_1 \frac{n\pi\tau}{T_1}\right]^2$$



Pr.

z Pr. 1 $\tau = T_1/2$

$A_n \geq 0{,}2\, A_1$

$$\frac{A_n}{A_1} = \frac{A}{n\pi}\cdot\frac{\pi}{A} = \frac{1}{n} = 0{,}2 \Rightarrow n = 5$$

NÁZOV:

PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO:

ČÍSLO ZLOŽKY

8

f_1, f_3, f_5 a jednosm. zl.

$$P_{sp} = \frac{A^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{2A}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2A}{3\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2A}{5\pi}\right)^2 \doteq 0{,}48A^2$$

$$A_0 = \frac{A\tau}{T_1} = \frac{A}{2}$$

$$A_n = 2\frac{A\tau}{T_1}\left|\operatorname{si}\frac{n\pi\tau}{T_1}\right| = 2\frac{A\,T_1}{2T_1}\frac{\sin n\pi\frac{T_1}{2T_1}}{n\pi\frac{T_1}{2T_1}} = \frac{2A}{n\pi}\underbrace{\left|\sin n\frac{\pi}{2}\right|}_{1}$$

$n = 1, 3, 5$

$$P_S = \frac{1}{T_1}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A^2\,dt = \frac{A^2}{T_1}\left[t\right]_{-T_1/4}^{T_1/4} = 0{,}5A^2$$

$$x_p(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{5} A_n \sin n\omega_1 t$$

$A_0 = 0{,}5A$

$x_1(t) = 0{,}64A \sin \omega_1 t$

$x_2(t) = 0$

$x_3(t) = 0{,}21A \sin 3\omega_1 t$

$x_4(t) = 0$

$x_5(t) = 0{,}13A \sin 5\omega_1 t$

NÁZOV:

ČÍSLO:

PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO ZLOŽKY 18

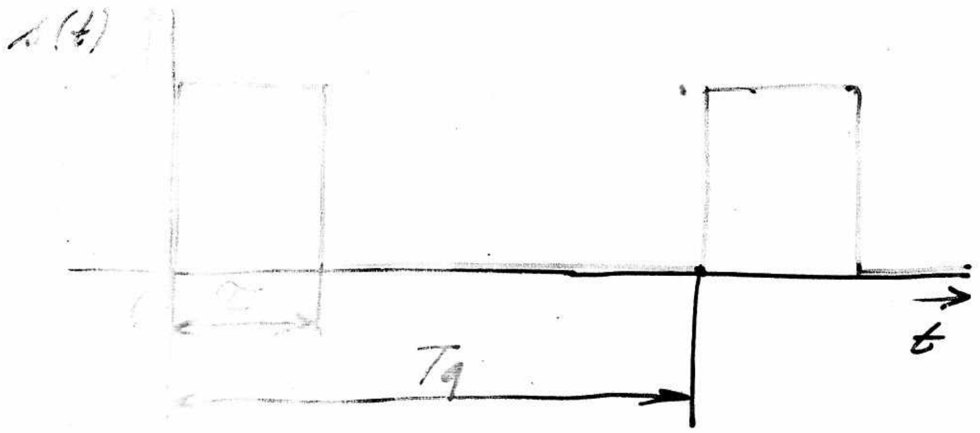
Neperiodické signály (jednorázové)

$s(t) = s(t + n T_1)$ neplatí

pre $t \in (-\infty; \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

je absolútne integrov. a vyhovuje Dir. pod.



$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$$

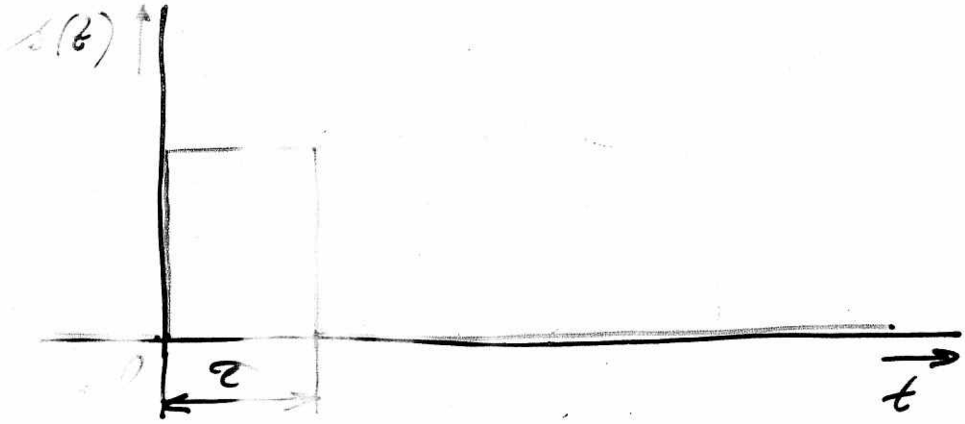
exponenciálny fun…

$$C_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

NÁZOV: PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO: ČÍSLO ZLOŽKY 19



$T_1 \to \infty \to \omega_1$ malé $\quad \omega_1 \to 0$

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_1 - n\omega_1 = \omega_1$$

$$n\omega_1 = \omega_n$$

$$C_n = C(\omega_n) = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} s(t) e^{-j\omega_n t}\, dt$$

$T_1 \to \infty \qquad \omega_n = \omega \; ; \; \Delta\omega = d\omega$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{d\omega}$$

$$\sum \to \int$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t}\, dt\right] d\omega$$

NÁZOV:

ČÍSLO:

PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO ZLOŽKY 193

a)

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

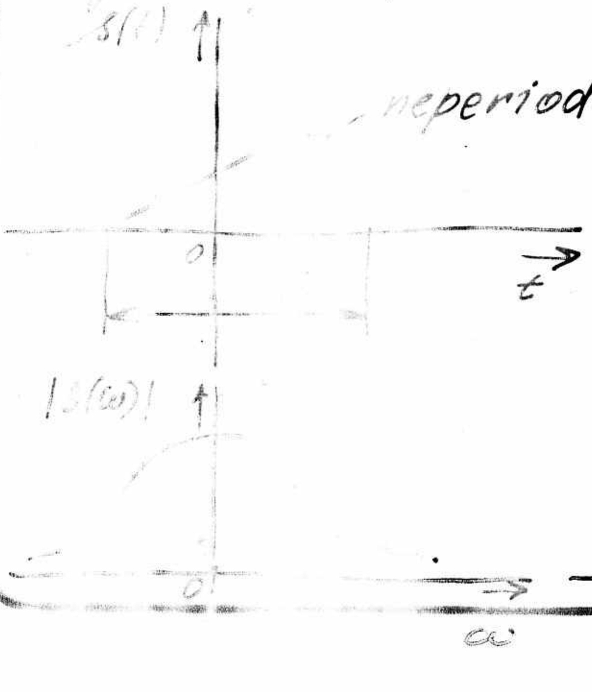
b)

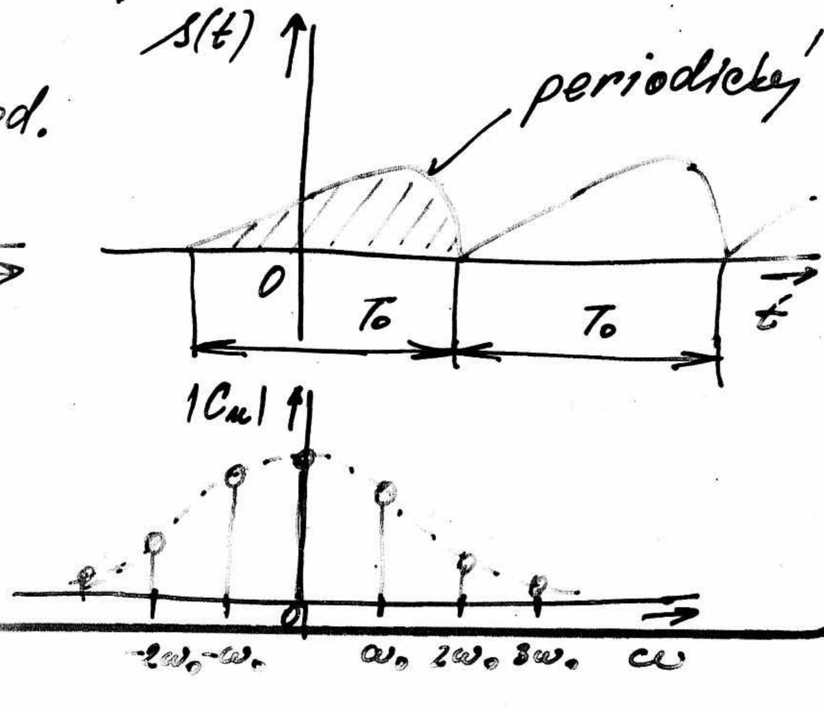
$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}$$

$$S(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |S(\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)}$$

$|S(\omega)|$ – spektrálna hustota amplitúd

$\arg S(\omega)$ – fázové spektrum





2.6 Continuous spectrum

The significance of this final result is that any single pulse or transient can be expressed as the sum of an infinite number of frequency components $F(\omega)$ where ω is any general value.

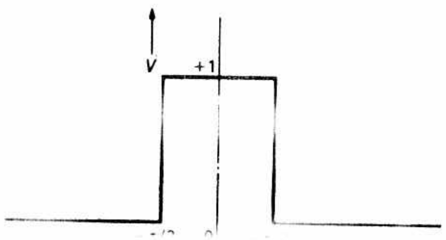
This leads to a *continuous* spectrum in contrast to the discrete spectrum of the periodic waveform. In physical terms, the frequency components are all crowded very close to one another because the spacing between them is $1/T$ which tends to zero as $T \to \infty$.

In general, $F(\omega)$ is complex and its amplitude and phase can be plotted to give the frequency spectrum of the time function $f(t)$. An example of this is shown in the next section for a single rectangular pulse centred at $t = 0$.

The quantity $|F(\omega)|$, when plotted, shows a variation of amplitude against ω and so the quantity $|F(\omega)|\,d\omega$ represents an elementary area of this graph, within a range $d\omega$, and is called the *spectral density*.

2.7 Typical functions

(a) Rectangular pulse A



$f(t) = 1$ when $-\frac{\tau}{2} < t < +\frac{\tau}{2}$

$f(t) = 0$ at all other instances

Hence $$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

or $$F(\omega) = \tau \frac{\sin x}{x} \quad \text{where} \quad x = \frac{\omega\tau}{2}$$

with $$\frac{F(\omega)}{\tau} = \frac{\sin x}{x}$$

A plot of $F(\omega)/\tau$ is the familiar $(\sin x)/x$ curve and is shown in Fig. 2.21. It is a *continuous* curve and is symmetrical in x, i.e. its value is unchanged when x becomes negative.

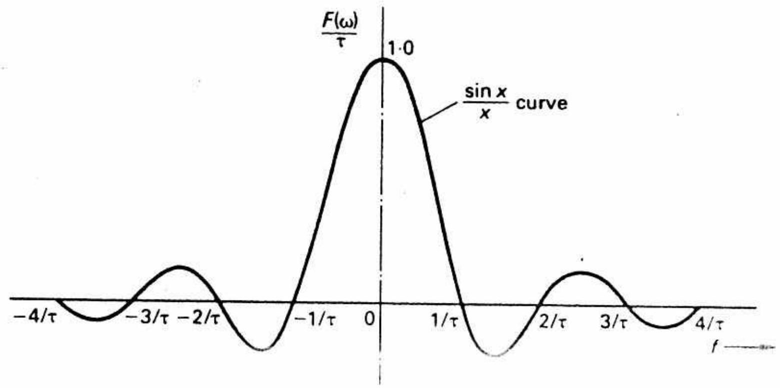


Fig. 2.21 Continuous spectrum

Alternatively, the amplitude and phase can be drawn separately ...

2. The zeros occur when $\frac{\sin x}{x} = 0$.

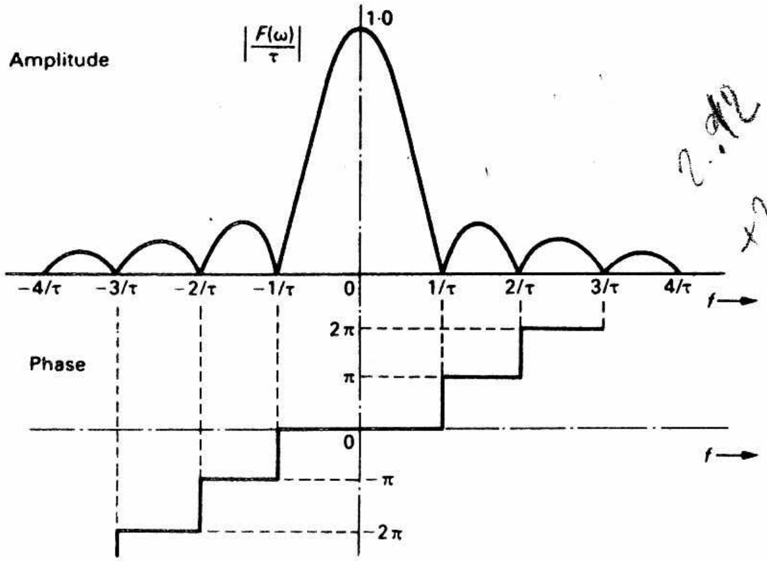


Fig. 2.22

2.22
×2.9

3. The phase shifts by π radians when the graph changes polarity from positive to **negative** or vice versa.

(b) Rectangular pulse B

Hence

$$F(\omega) = \frac{2e^{-j\omega(\tau/2)}}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega(\tau/2)} - e^{-j\omega(\tau/2)}}{2j}\right)$$

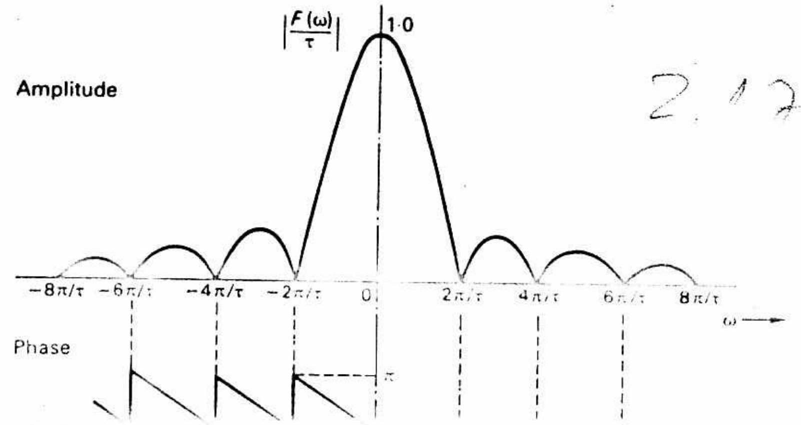
$$= \tau e^{-j\omega(\tau/2)} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

$$= \tau \frac{\sin x}{x} e^{-jx} \quad \text{where} \quad x = \frac{\omega\tau}{2}$$

or

$$\frac{F(\omega)}{\tau} = \frac{\sin x}{x} e^{-jx}$$

The amplitude and phase are plotted in Fig. 2.24.



2.17

* Pozn. kst. 2

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$b_n = -\frac{2A}{T_0 n \omega_0} \left[\cos n \omega_0 t\right]_0^{T_0/2} =$$

$$= -\frac{2A}{T_0 n \omega_0} \left[\cos n 2\pi f_0 \frac{T_0}{2} - \cos 0\right] =$$

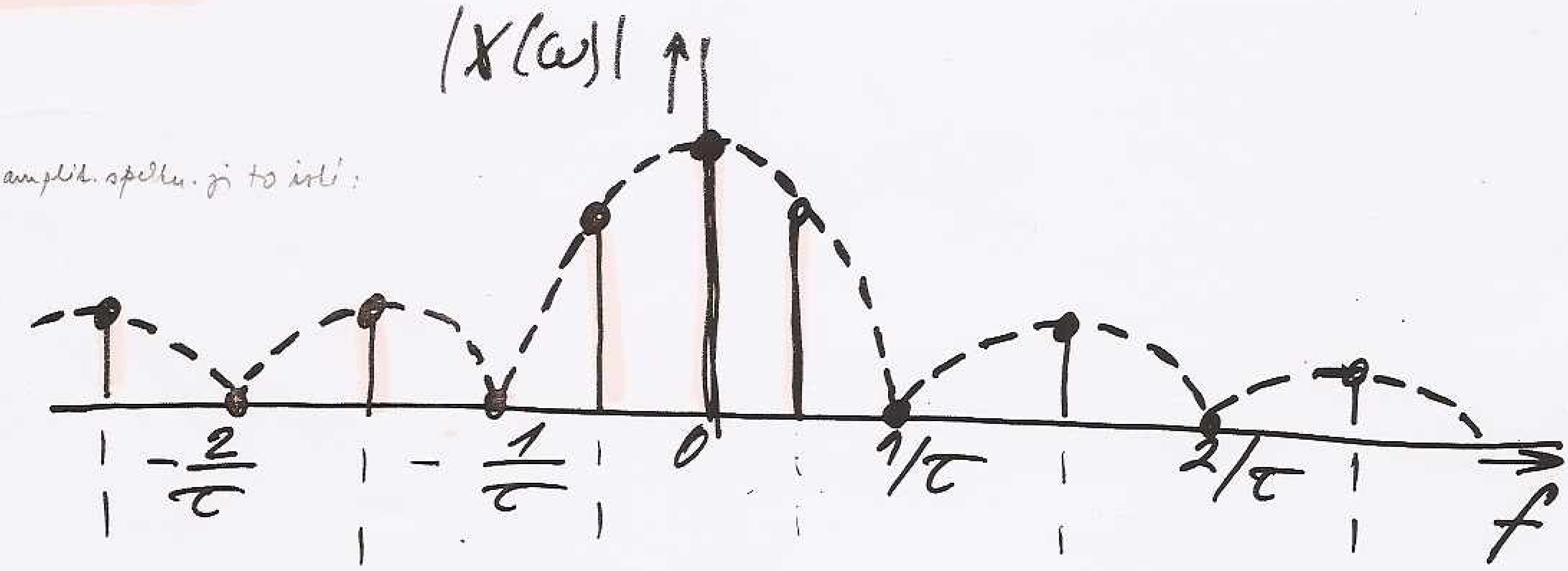
$$= -\frac{2A}{T_0 n \omega_0} \left[\cos \pi - 1\right] =$$

$$= -\frac{2A}{T_0 n \frac{2\pi}{T_0}} \left[\cos n\pi - 1\right] =$$

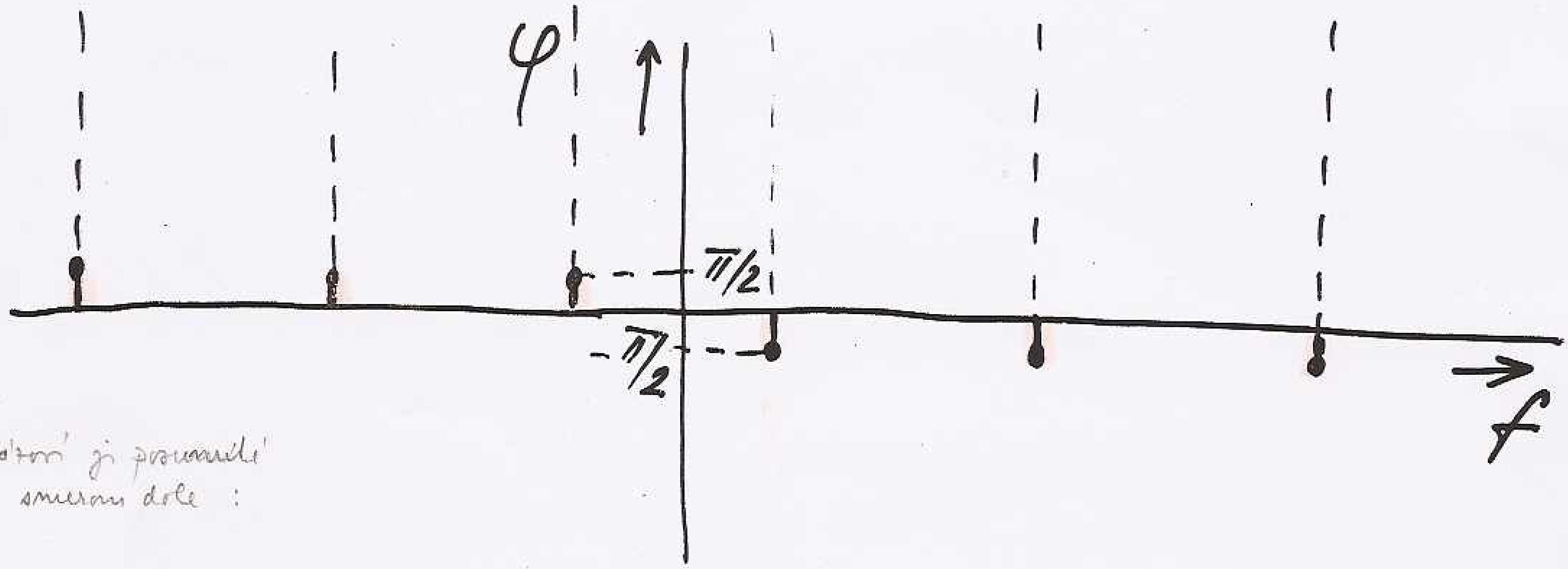
$$= \frac{A}{n\pi} \left[1 - (-1)^n\right]$$

[obr. ku Pr2]

amplit. spektr. je to isté:



fázoví je posunuté smerom dole :



str. 5

Závery príkladu

$A\tau = 1$ jednotkový pl.

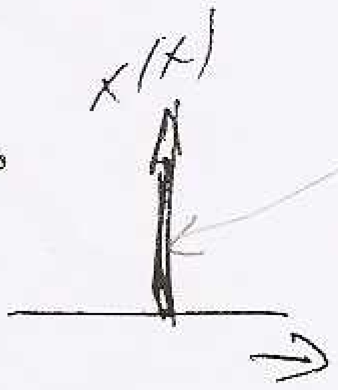
1) $\tau \to 0$

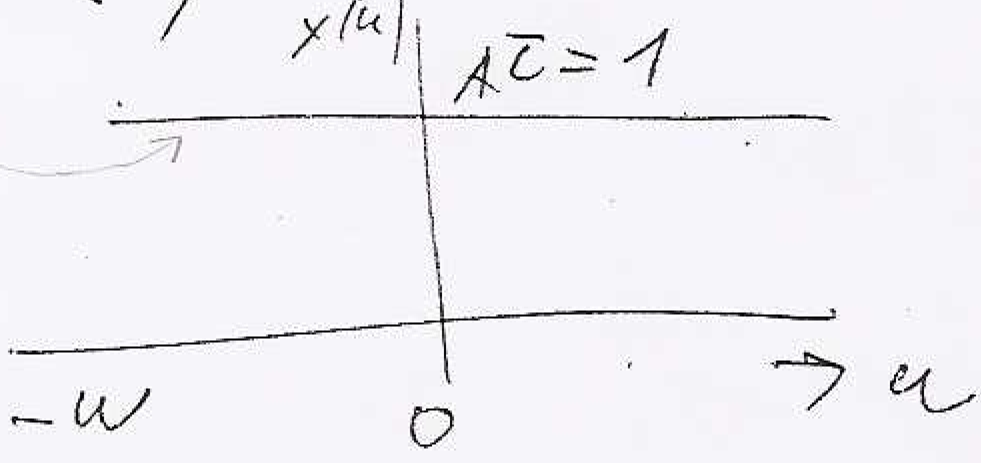
Rovnomerné spektrum

časová

spektrálne funkcie

$\frac{1}{\tau} \to \infty$

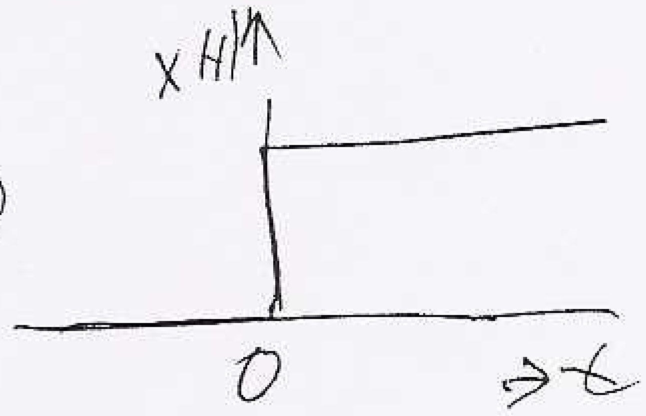


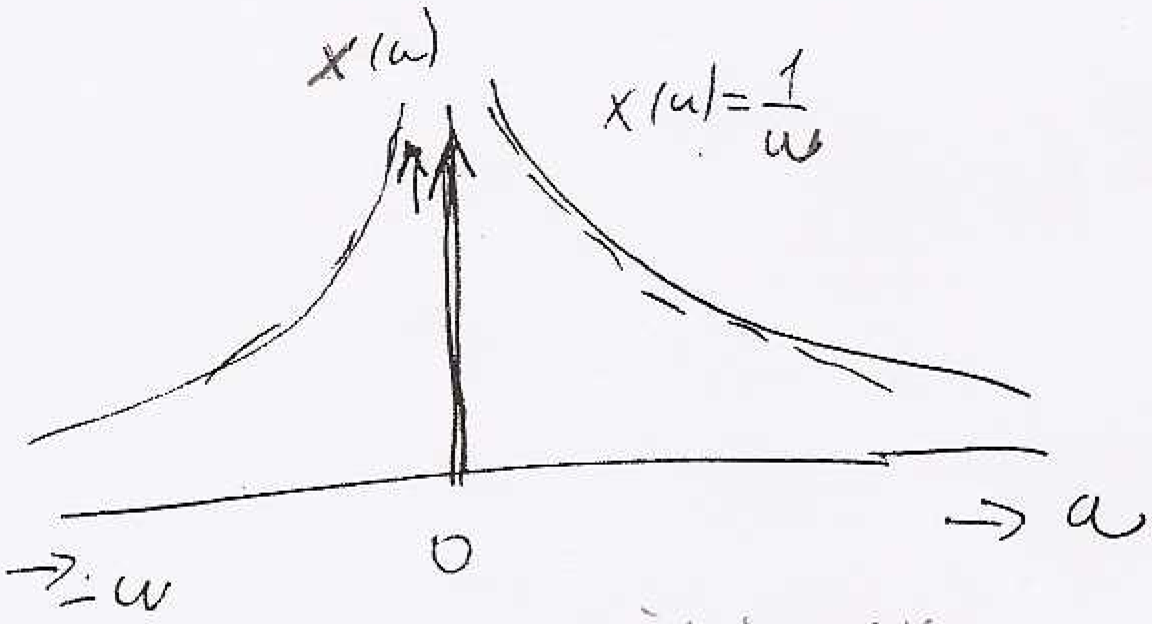


Diracova distribúcia

2) $\tau \to \infty$

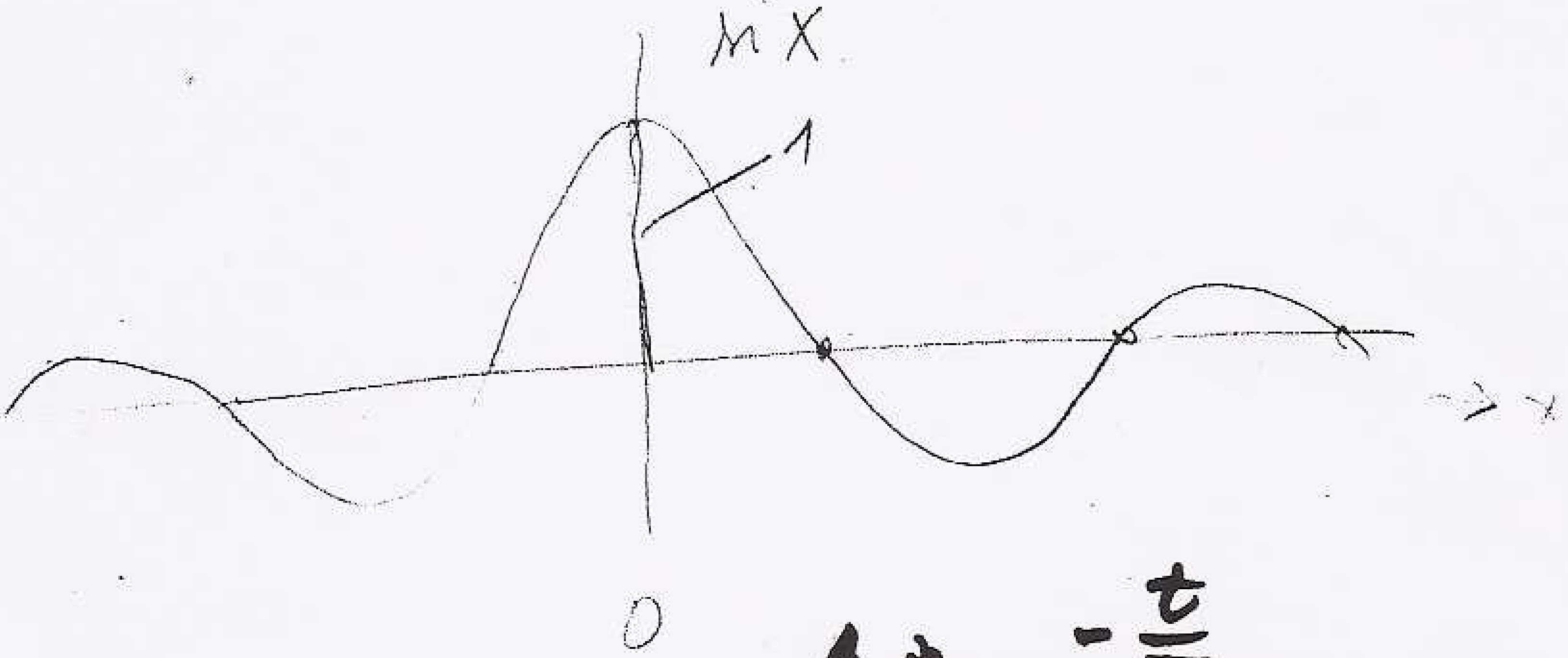
$\frac{1}{\tau} \to 0$

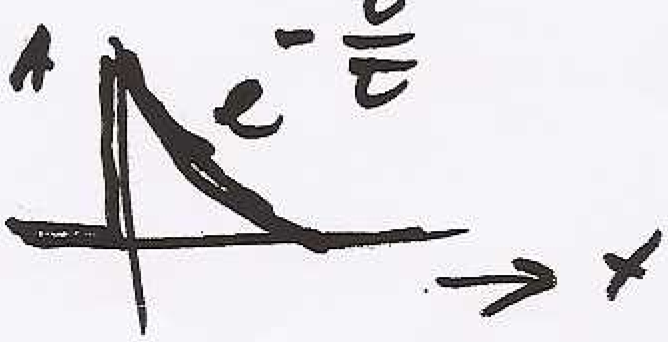




↓ nekonečne veľká jedn. zložka

jednotkový skok

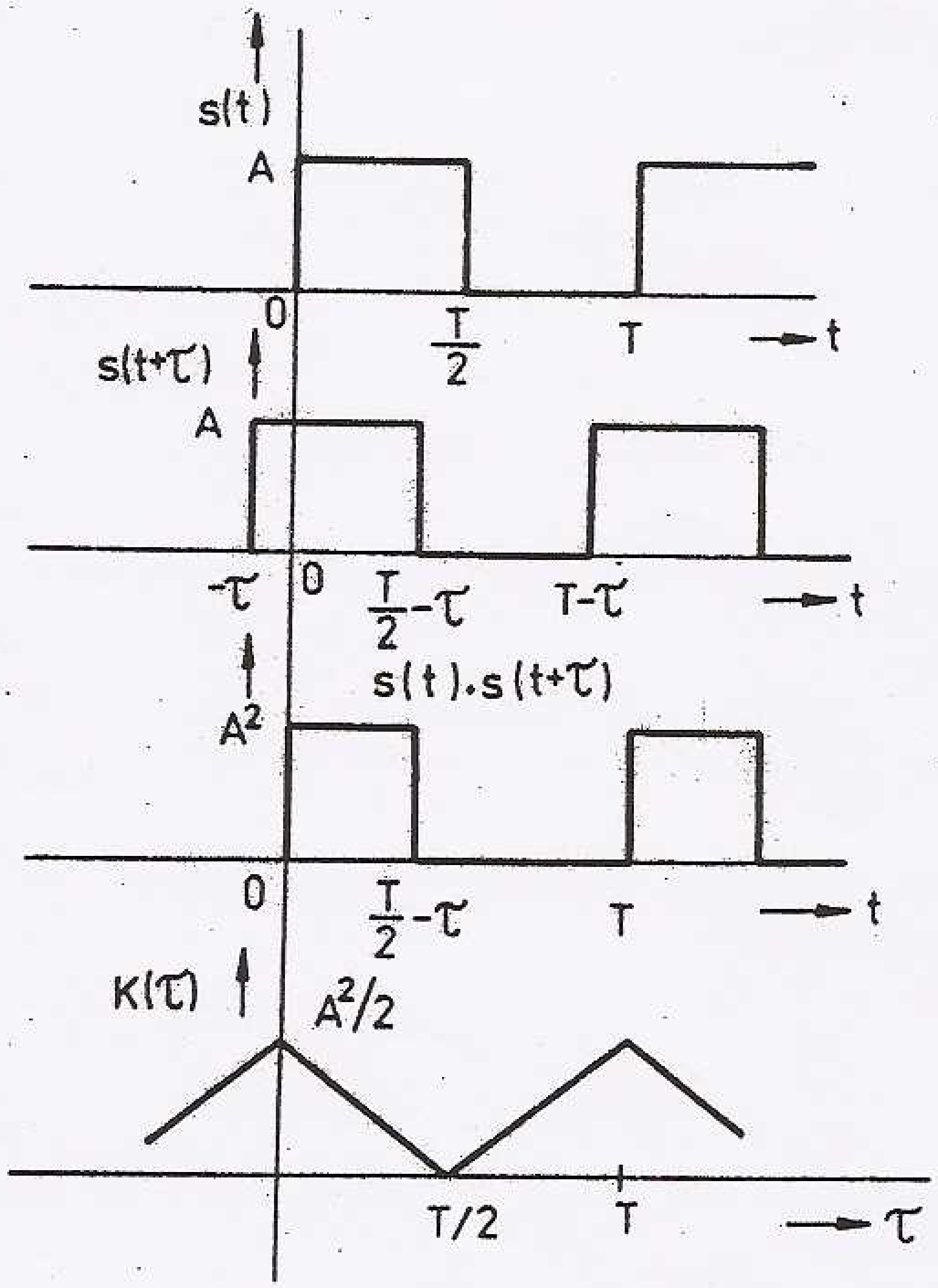




Riešenie: Zvoľme $0 < \tau < T/2$. Zo vzťahu (2.25) vypočítame autokorelačnú funkciu

$$K(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} s(t)\, s(t+\tau)dt = \frac{A^2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}-\tau} dt = \frac{A^2}{2}\left(1 - \frac{2\tau}{T}\right)$$

Korelačnú funkciu pre ostatné hodnoty určíme z vlastností jej periodickosti. Postup výpočtu hodnôt korelačnej funkcie vidieť na obr. 5



Obr. 5
Tvorba autokorelačnej funkcie periodického signálu

3. Jednorazové impulzy

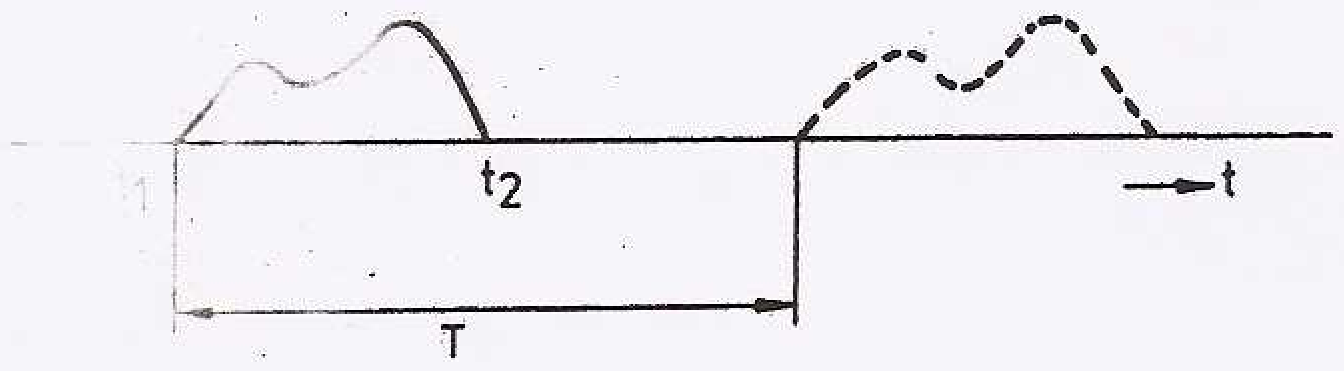
V predchádzajúcej kapitole sme venovali pozornosť periodickým signálom a ich kmitočtovému spektru. Skutočné reálne signály, ktoré sú nositeľom informácie, sú zväčša neperiodické, spravidla jednorazové. Spektrálne vlastnosti jednorazových impulzov môžeme analyzovať pomocou Fourierovej transformácie, ktorej základné vety a aplikačné pravidlá sú uvedené v tejto kapitole.

3.1 FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA

Uvažujme signál $s(t)$, ktorý má nenulovú hodnotu len v časovom intervale $t_1 \le t \le t_2$ (obr. 6). Nech funkcia $s(t)$ je absolútne integrovateľná, t.j.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\,dt < \infty \tag{3.1}$$

a vyhovuje ostatným Dirichletovým podmienkam. Otázka je: akým spôsobom môžeme vyjadriť spektrum jednorazového impulzu?



Obr. 6
Jednorazový impulz

Uvažujme, že jednorazový impulz z obr. 6 pochádza z periodickej funkcie s periódou T (na obr. 6 vyznačené čiarkovane), ktorú môžeme vyjadriť Fourierovým radom v komplexnom tvare podľa vzťahu (2.11)

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jn\omega t} \tag{3.2}$$

kde

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt \tag{3.3}$$

...o vytvoreného periodického signálu budeme zväčšovať, uhlo-
... bude zmenšovať ($\omega = 2\pi/T$), t.j. spektrálne čiary sa budú
... vať a zhusťovať, až v limitnom prípade, keď $T \to \infty$,
... lne čiary vzájomne splynú. Hovoríme, že diskrétne spektrum
...m spojité.

...proces vo vzťahoch (3.2) a (3.3). Diskrétne kmitočty $n\omega$
... funkciu ω ($n\omega \to \omega$) a sumácia v rovnici (3.2) prejde na
... integrovania. Medze integrovania v rovnici (3.3) treba na-
...ranicami trvania impulzu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Ak pri periodickom
... a

... signále možno písať

... (3.3) do (3.2) a s uvažovaním vykonaných úvah môžeme časo-
...razového impulzu vyjadriť v tvare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2d\omega}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\, e^{j\omega t} \qquad (3.4)$$

...vedieme označenie

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad (3.5)$$

...) nadobudne tvar

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (3.6)$$

...ov (3.5) a (3.6) dostaneme integrálnu Fourierovu trans-

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (3.7)$$

$$\int s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad (3.8)$$

Ak komplexné amplitúdy Fourierovho radu C_{n1}, C_{n2} signálov $s_1(t)$ a $s_2(t)$ vyjadríme podľa vzťahu (2.12) a časovú funkciu $s_2(t)$ vyjadríme Fourierovým radom v komplexnom tvare podľa vzťahu (2.11), potom korelačnú funkciu zo vzťahu (2.23) môžeme upraviť takto:

$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)\,\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n2}\, e^{jn\omega(t+\tau)}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[C_n\, e^{jn\omega\tau}\,\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)\, e^{jn\omega t}\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n1}^{*}\, C_{n2}\, e^{jn\omega\tau} \qquad (2.24)$$

kde C_{n1}^{*} je konjugovaná veličina z C_{n1}.

Zo vzťahu (2.23) a (2.24) vyplýva:

- korelačná funkcia dvoch periodických signálov s tou istou periódou T je opäť periodická funkcia s periódou T,
- korelačná funkcia je párna.

<u>Autokorelačná funkcia</u> je korelačná funkcia toho istého signálu, t.j. $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$ a vyjadruje mieru vzájomnej závislosti medzi hodnotami periodického signálu v tvare

$$K(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,.\,s(t+\tau)dt \qquad (2.25)$$

Vlastnosti autokorelačnej funkcie sú zhodné s vlastnosťami vzájomnej korelačnej funkcie. Použitím vzťahu (2.24) môžeme autokorelačnú funkciu vyjadriť v tvare

$$K(\tau) = \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2\, e^{jn\omega\tau} \qquad (2.26)$$

Autokorelačná funkcia dosahuje maximum v bode $\tau = 0$, kedy

$$K(0) = \frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \qquad (2.27)$$

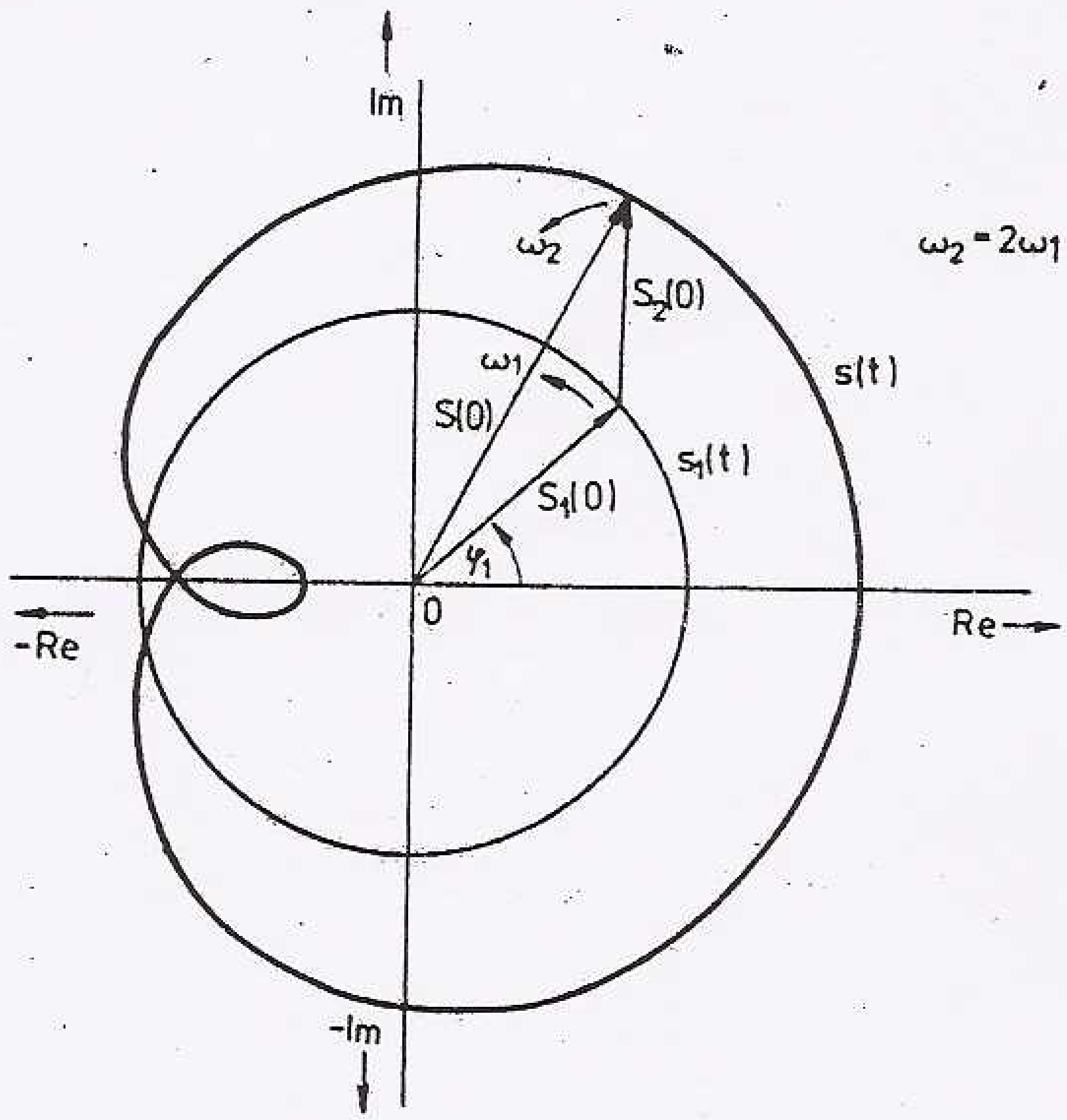
čo predstavuje stredný výkon signálu.

Príklad: Určíme priebeh autokorelačnej funkcie pravouhlého periodického signálu z obr. 5a.

tov pôvodných signálov daný vzťahom $\omega_2 = 2\omega_1$. Výsledný signál je periodický, avšak už nie je harmonický. V danom prípade má výsledný signál periódu T_1. Všeobecne môžeme pomer kmitočtov oboch signálov vyjadriť vzťahom

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_1}{m_2} \tag{2.22}$$

Ak pomer zo vzťahu (2.22) je číslo racionálne, výsledný súčtový signál je periodický. Ak pomer zo vzťahu (2.22) je číslo iracionálne, bude perióda výsledného signálu rásť nad všetky medze. Takýto signál nie je teda periodický, i keď jeho spektrum je čiarové diskrétne a nazývame ho kváziperiodickým signálom.



Obr. 4
Trajektória koncových bodov súčtu vektorov dvoch harmonických signálov s uhlovými kmitočtami ω_1, ω_2

2.2 KORELAČNÁ FUNKCIA PERIODICKÝCH SIGNÁLOV

Uvažujeme periodické signály $s_1(t)$ a $s_2(t)$ s tou istou periódou T. Vzájomná (krížová) korelačná funkcia týchto signálov vyjadruje vzájomné závislosti medzi hodnotami obidvoch periodických funkcií a je určená vzťahom

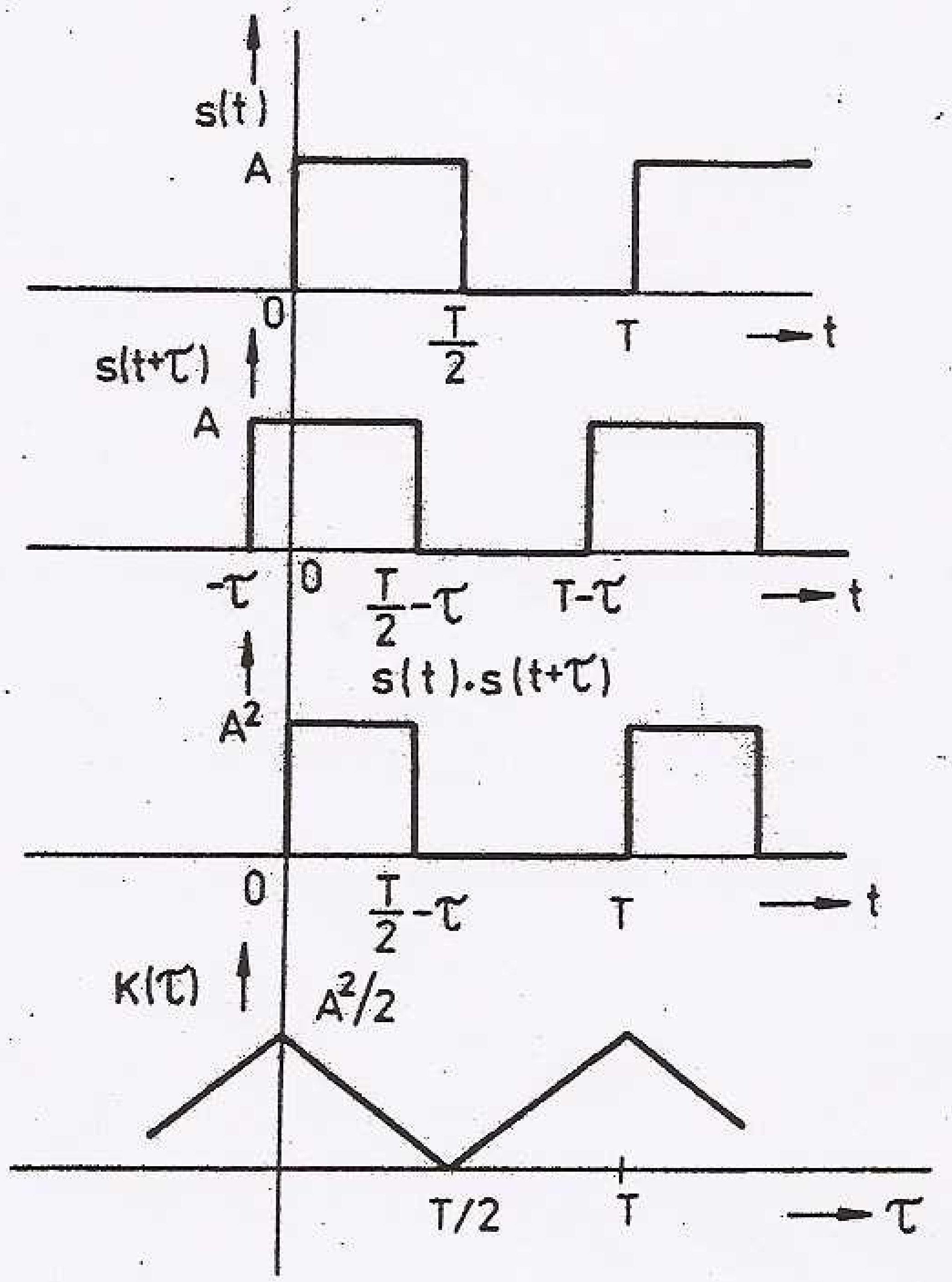
$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)\, s_2(t+\tau)\,dt \tag{2.23}$$

kde $\tau \in (-\infty, \infty)$ vyjadruje časové posunutie signálu $s_2(t)$ voči $s_1(t)$.

Riešenie: Zvoľme $0 < \tau < T/2$. Zo vzťahu (2.25) vypočítame autokorelačnú funkciu

$$K(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} s(t)\, s(t+\tau)dt = \frac{A^2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}-\tau} dt = \frac{A^2}{2}\left(1 - \frac{2\tau}{T}\right)$$

Korelačnú funkciu pre ostatné hodnoty určíme z vlastnosti jej periodickosti. Postup výpočtu hodnôt korelačnej funkcie vidieť na obr. 5



Obr. 5
Tvorba autokorelačnej funkcie periodického signálu