1 Dvoubrany

Příklad 1.
Dvoubran převrácené gama obsahuje odpor R ve vodorovné větvi a kondenzátor C ve svislé větvi. Určete jeho admitanční matici.
Řešení
Pro impedanční matici platí obecné vztahy

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{Z}_{11}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 \\ \hat{U}_2 &= \hat{Z}_{21}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{22}\hat{I}_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Příčnou větví zadaného dvoubranu, tj. kondenzátorem C, teče proud $\hat{I}_1 + \hat{I}_2$. Podle druhého Kirchhffova zákona můžeme pro zadaný dvoubran napsat rovnice

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= R\hat{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2) \\ \hat{U}_2 &= \frac{1}{j\omega C}(\hat{I}_1 + \hat{I}_2) \end{aligned} \tag{2}$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme výsledek

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\hat{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_2 \\ \hat{U}_2 &= \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Pro prvky impedanční matice tedy platí

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{11} &= R + \frac{1}{j\omega C} \quad & \hat{Z}_{12} &= \frac{1}{j\omega C} \\ \hat{Z}_{21} &= \frac{1}{j\omega C} \quad & \hat{Z}_{22} &= \frac{1}{j\omega C} \end{aligned} \tag{4}$$

Dvoubran je neautonomní, reciproký, musí tedy být $\hat{Z}_{21} = \hat{Z}_{12}$. Rovnice (4) to potvrzují.

Podle fyzikálního významu je prvek $\hat{Z}_{11}$ impedanční matice vstupní impedancí při výstupu naprázdno. Pokud výstupem neprotéká proud, chová se dvoubran z hlediska vstupu jako sériová kombinace odporu a kondenzátoru, vstupní impedance je tedy

$$\hat{Z}_{vst} = R + \frac{1}{j\omega C} \tag{5}$$

Z porovnání rovnic (4) a (5) plyne $\hat{Z}_{vst} = \hat{Z}_{11}$. To potvrzuje správnost výpočtu impedanční matice. Prvek $\hat{Z}_{22}$ impedanční matice výtupní impedancí při vstupu naprázdno. Pokud vstupem neprotéká proud, chová se dvoubran z hlediska výstupu jako kapacita ve svislé větvi, vystupní impedance je tedy

$$\hat{Z}_{vys} = \frac{1}{j\omega C} \tag{6}$$

Z porovnání rovnic (4) a (6) plyne $\hat{Z}_{vys} = \hat{Z}_{22}$. To opět potvrzuje správnost výpočtu impedanční matice.

Příklad 2.
Z impedanční matice odvoďte přímou kaskádní matici

Řešení
Impedanční matice je dána vztahem (1), které zde zopakujeme.

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{Z}_{11}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 \\ \hat{U}_2 &= \hat{Z}_{21}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{22}\hat{I}_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Pro přímou kaskádní matici se používají rovnice

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{A}_{11}\hat{U}_2 - \hat{A}_{12}\hat{I}_2 \\ \hat{I}_1 &= \hat{A}_{21}\hat{U}_1 - \hat{A}_{22}\hat{I}_2 \end{aligned} \tag{8}$$

Znaménko minus v kaskádních rovnicích (8) plyne z obráceného směru proudu na výstupu pro tento popis.
Máme-li odvodit kaskádní matici z impedanční matice, musíme v impeadnčních rovnicích (1) vyjádřit vstupní parametry $\hat{U}_1, \hat{I}_1$ pomocí výstupních $\hat{U}_2, \hat{I}_2$. Z druhé rovnce v (7) vypočteme proud $\hat{I}_1$

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{\hat{Z}_{21}}\hat{U}_2 - \frac{\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}}\hat{I}_2 \tag{9}$$

Tím jsme získali druhou z přímých kaskádních rovnice (8). Z rovnice (9) dosadíme do první z impedančních rovnic (7)

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 = \hat{Z}_{11}\left(\frac{1}{\hat{Z}_{21}}\hat{U}_2 - \frac{\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}}\hat{I}_2\right) + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 = \\ = \frac{\hat{Z}_{11}}{\hat{Z}_{21}}\hat{U}_2 - \frac{\hat{Z}_{11}\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}}\hat{I}_2 + \hat{Z}_{22}\hat{I}_2 = \frac{\hat{Z}_{11}}{\hat{Z}_{21}}\hat{U}_2 - \frac{|\hat{Z}|}{\hat{Z}_{21}}\hat{I}_2 \end{aligned} \tag{10}$$

Tím získáme první přímých kaskádních rovnice (8). Symbolem $|\hat{Z}|$ je označen determinant impedanční matice beginequation

$$|\hat{Z}| = \hat{Z}_{11}\hat{Z}_{11} - \hat{Z}_{12}\hat{Z}_{21} \tag{11}$$

Obě rovnice (10) a (9) můžeme spojit

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \frac{\hat{Z}_{11}}{\hat{Z}_{21}}\hat{U}_2 - \frac{|\hat{Z}|}{\hat{Z}_{21}}\hat{I}_2 \\ \hat{I}_1 &= \frac{1}{\hat{Z}_{21}}\hat{U}_2 - \frac{\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}}\hat{I}_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Porovnáním (12) a (8) dostaneme převodní vztahy

$$\hat{A}_{11} = \frac{\hat{Z}_{11}}{\hat{Z}_{21}} \quad \hat{A}_{12} = \frac{|\hat{Z}|}{\hat{Z}_{21}}$$
$$\hat{A}_{21} = \frac{1}{\hat{Z}_{21}} \quad \hat{A}_{22} = \frac{\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}} \tag{13}$$

Příklad 3.
Dvoubran převrácené gama obsahuje odpor R ve vodorovné větvi a kondenzátor C ve svislé větvi. Určete jeho přímou kaskádní matici.

Řešení
Můžeme postupovat dvěma způsoby:

1. Prvky kaskádní matice určit ze schématu
2. Využít výsledků obou předchozích příkladů

Ze schématu určíme prvky přímé kaskádní matice na základě definice. Přitom vycházíme z přímých kaskádních rovnic (8)

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{A}_{11}\hat{U}_2 - \hat{A}_{12}\hat{I}_2 \\ \hat{I}_1 &= \hat{A}_{21}\hat{U}_2 - \hat{A}_{22}\hat{I}_2 \end{aligned} \tag{14}$$

Znaménko minus suvisí se zvoleným směrem výstupního proudu, proud $-\hat{I}_2$ teče z dvoubranu do zátěže.

Prvek $\hat{A}_{11}$ je poměr vstupního a výstupního napětí při výstupu naprázdno, tj. $\hat{I}_2 = 0$. Oběma prvky, kondenzátorem i odporem, tedy teče tentýž proud $\hat{I}_1$. Vstupní a výstupní napětí jsou pak po řadě.

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 &= \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_1 \end{aligned} \tag{15}$$

Pro jejich poměr pak platí

$$\hat{A}_{11} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = 1 + j\omega RC \tag{16}$$

Jednodušší postup je možná tento. Neteče-li na výstupu obvodu proud, jedná se o ideální dělič, pro poměr výstupního a vstupního napětí platí

$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \tag{17}$$

$\hat{Z}_1 = R$ a $\hat{Z}_2 = 1/j\omega C$ v předchozím vztahu jsou impedance prvků děliče napětí. Prvek $\hat{A}_{11}$ příme kaskádní matice je převrácenou hodnotou přenosu napětí naprázdno, tj.

$$\hat{A}_{11} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} = \frac{1}{\frac{1}{1+j\omega RC}} = 1 + j\omega RC \tag{18}$$

Podle (14) je prvek $\hat{A}_{12}$ poměr vstupního napětí a výstupního proudu při výstupu nakrátko, tj. $\hat{U}_2 = 0$. Zkratujeme-li výstup, vyřadíme kondenzátor a obvod se redukuje na odpor R napájený napětím $\hat{U}_1$. Obvodem teče proud $\hat{I}_1 = -\hat{I}_2$, poněvadž $-\hat{I}_2$ je výstupní proud tekoucí ven z dvoubranu. Znaménko minus je zde proto, poněvadž podle definice je $\hat{I}_2$ proud tekoucí do dvoubranu na jeho výstupu. Podle Ohmova zákona

$$\hat{U}_1 = -R\hat{I}_2 \tag{19}$$

Pro $\hat{A}_{12}$ z toho plyne

$$\hat{A}_{12} = -\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2} = R \tag{20}$$

Podle (14) je prvek $\hat{A}_{21}$ poměr vstupního proudu a výstupního napětí při výstupu naprazdno, tj. $\hat{I}_2 = 0$. Není-li nic připojeno na výstup, prochází vstupní proud $\hat{I}_1$ oběma prvky, tj. odporem R a kondenzátorem C. Na kondenzátoru přitom vytváří výstupní napětí $\hat{U}_2$. Platí tedy

$$\hat{U}_2 = \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_1 \tag{21}$$

Pro $\hat{A}_{21}$ z toho plyne

$$\hat{A}_{21} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2} = j\omega C \tag{22}$$

Podle (14) je prvek $\hat{A}_{22}$ poměr vstupního a výstupního proudu při výstupu naprazdno, tj. $\hat{U}_2 = 0$. Při zkratovaném výstupu neteče kondenzátorem žádný proud, vstupní poud je až na znaménko roven výstupnímu, tj. $\hat{I}_1 = -\hat{I}_2$. Pak platí

$$\hat{A}_{22} = -\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} = 1 \tag{23}$$

Pro prvky kaskádní matice jsme přímým odvozením získali vztahy

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} = 1 + j\omega RC \quad \hat{A}_{12} = R \\ \hat{A}_{21} = j\omega C \quad \hat{A}_{22} = 1 \end{aligned} \tag{24}$$

Poněvadž je obvod reciproký musí být determinant kaskádní matice roven jedné. Z odvozených výrazů zjistíme, že tomu tak skutečně je.

$$|\hat{A}| = 1 + j\omega RC - Rj\omega C = 1 \tag{25}$$

Při druhém přístupu vyjdeme z impedanční matice (4), kterou zde zopakujeme

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{11} &= R + \frac{1}{j\omega C} \quad & \hat{Z}_{12} &= \frac{1}{j\omega C} \\ \hat{Z}_{21} &= \frac{1}{j\omega C} \quad & \hat{Z}_{22} &= \frac{1}{j\omega C} \end{aligned} \tag{26}$$

Dále použijeme převodních vztahů (13), které umožní přejít od impedanční matice ke kaskádní

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} &= \frac{\hat{Z}_{11}}{\hat{Z}_{21}} \quad & \hat{A}_{12} &= \frac{|\hat{Z}|}{\hat{Z}_{21}} \\ \hat{A}_{21} &= \frac{1}{\hat{Z}_{21}} \quad & \hat{A}_{22} &= \frac{\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}} \end{aligned} \tag{27}$$

Po dosazení z (26) do (27) postupně získáme

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} &= \frac{\hat{Z}_{11}}{\hat{Z}_{21}} = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = 1 + j\omega RC \\ \hat{A}_{12} = \frac{|\hat{Z}|}{\hat{Z}_{21}} &= \frac{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\frac{1}{j\omega C} - \frac{1}{j\omega C}\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = R \\ \hat{A}_{21} &= \frac{1}{\hat{Z}_{21}} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C \\ \hat{A}_{22} &= \frac{\hat{Z}_{22}}{\hat{Z}_{21}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = 1 \end{aligned} \tag{28}$$

Porovnáním posledních rovnic s (24) vidíme, že se shodují. Rovnice (24) tedy byly obvodovými úvahami odvozeny správně.

Příklad 4.

Dvoubran převrácené gama obsahuje odpor R ve vodorovné větvi a kondenzátor C ve svislé větvi. Určete jeho přenos při výstupu naprázdno.

Řešení

Přenos při naprázdno můžeme určit buď přímých výpočtem, jak jsme to naznačili v předchozím příkladu, nebo z pomocí prvku $\hat{A}_{11}$ přímé kaskádní matice (24). Při výpočtu podle druhého způsobu použijeme vztahu

$$\hat{A} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{\hat{A}_{11}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \tag{29}$$

Pro aplitudovou přenosová charakteristiku plyne z (29)

$$A = \frac{|\hat{U}_2|}{|\hat{U}_1|} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \tag{30}$$

Pokud ji vyjádříme v logaritmické stupnici, dostaneme

$$b = 20 \log_{10} \frac{U_2}{U_1} = -10 \log_{10}(1 + (\omega RC)^2) \tag{31}$$

Pro nízké frekvence platí

$$1 >> \omega RC \rightarrow \sqrt{1 + (\omega RC)^2} \doteq 1 \rightarrow A = 1 \rightarrow b = 0 \text{ dB} \tag{32}$$

Amplitudová charakteristika přibližně konstantní a rovna 1 či 0 dB. Na výstup se přenese téměř celé vstupní napětí.

Pro vysoké frekvence platí

$$1 << \omega RC \rightarrow \sqrt{1 + (\omega RC)^2} \doteq \omega RC \rightarrow A = \frac{1}{\omega RC} \tag{33}$$

Amplitudová charakteristika klesá. Na výstup se s rostoucí frekvencí přenáší stale nižší napětí.