Zbierka Príkladov z ADSS2

5. Prenosová funkcia LDKI systému, vplyv koreňov na frekvenčné charakteristiky, konvolúcia [1]

Zadanie

Využite základnú definíciu transformácie **Z** pre určenie obrazu geometrickej postupnosti

$$x(n) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad n = -1, -2, -3, \dots \\ a^n & \text{pre} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

kde **a** je reálne číslo.
Zistite aj oblasť konvergencie.

Riešenie

Zo všeobecnej rovnice

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

dostaneme:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a.z^{-1}\right)^n$$

a po rozpísaní:

$$X(z) = 1 + a.z^{-1} + a^2.z^{-2} + \dots + a^N.z^{-N} + \dots$$

N-tý čiastočný súčet vieme vyjadriť pomocou známeho vzťahu

$$X_N(z) = \frac{1 - \left(a.z^{-1}\right)^N}{1 - a.z^{-1}}$$

Zistíme oblasť konvergencie:

$$X(z) = \lim_{N \to \infty} X_N(z) = \lim_{N \to \infty} \frac{1 - \left(a.z^{-1}\right)^N}{1 - a.z^{-1}}$$

ak $|a.z^{-1}| < 1$, potom rovnica

$$X_N(z) = \frac{1 - \left(a.z^{-1}\right)^N}{1 - a.z^{-1}}$$

nadobudne tvar:

$$X(z) = \lim_{N \to \infty} X_N(z) = \frac{1}{1 - a.z^{-1}}$$

Tu vidíme, že limita existuje a je konečná, teda postupnosť konverguje ak:

$$\left|a.z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > a$$

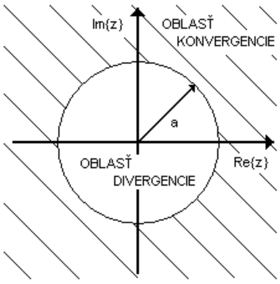
Ak $|a.z^{-1}| > 1$, potom

$$\lim_{N\to\infty} X_N(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1-\left(a.z^{-1}\right)^N}{1-a.z^{-1}} \to \infty$$

Z toho je zrejmé, že postupnosť v oblasti vymedzenej týmto vzťahom diverguje, ak:

$$\left|a.z^{-1}\right| > 1 \Rightarrow |z| < a$$

Zakreslenie oblasti konvergencie a divergencie obrazu postupnosti $x(n) = a^n$:



Späť