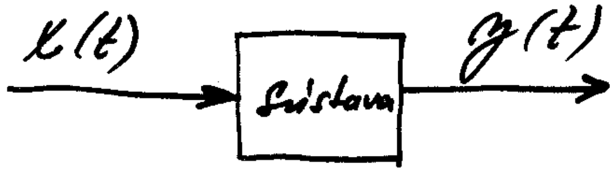
Spojité sústavy



Opis vlastností sústavy lineárnou diferenc. rovnicou

Lineárna diferenc. rovnica n-tého rádu s konštantnými koeficientami a s pravou stranou

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = a_m \frac{d^m x}{dt^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x$$

Riešenie

Najdenie fundamentálneho systému riešenia lin. diferenc. rovnice bez pravej strany

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = 0 \qquad (1)$$

Fundamentálne riešenie → určenie koreňov charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$$

postup → algebraizovanie [redacted] difer. rovnice (1) ak $y(t) \neq 0$ a $\frac{d^i}{dt^i} = p^i$ (operátor)

Korene: sú to charakteristické korene difer. rov. bez pravej strany (jeich práve n): sú komplex. združené, viacnásobné alebo reálne.

$p_1, p_2, \dots, p_n$

Fundamentálny systém riešenia rovnice (1)

$$y_1(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t}$$

k_i – konštanty (je možné ich určiť ak sú známe počiatočné podmienky stavu systému)

Riešenie diferenc. rovnice s pravou stranou

- pre špecifické tvary signálov $x(t)$ je možné nájsť tvar riešenia $y_2(t)$,

Všeobecné riešenie diferenc. rov. s pravou stranou

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t} + y_2(t)$$

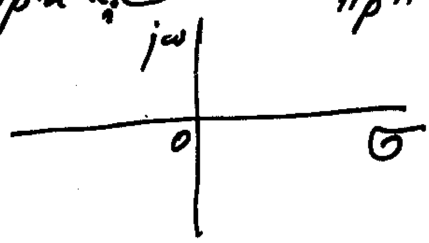
$y_1(t)$ – prirodzená odozva systému (vlastné kmity)
$y_2(t)$ – vnútorná odozva systému (vnútorné kmity)

$y_1(t)$ —— ak $x(t) = 0 \rightarrow y_1(t) \neq 0$

$y_2(t)$ —— ak $x(t) \neq 0$

$y_1(t)$

• súčet exponenciálnych kmitov typu $k_i e^{p_i t}$



$p_i = -\sigma_i$

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\pm \sigma_i t}$$

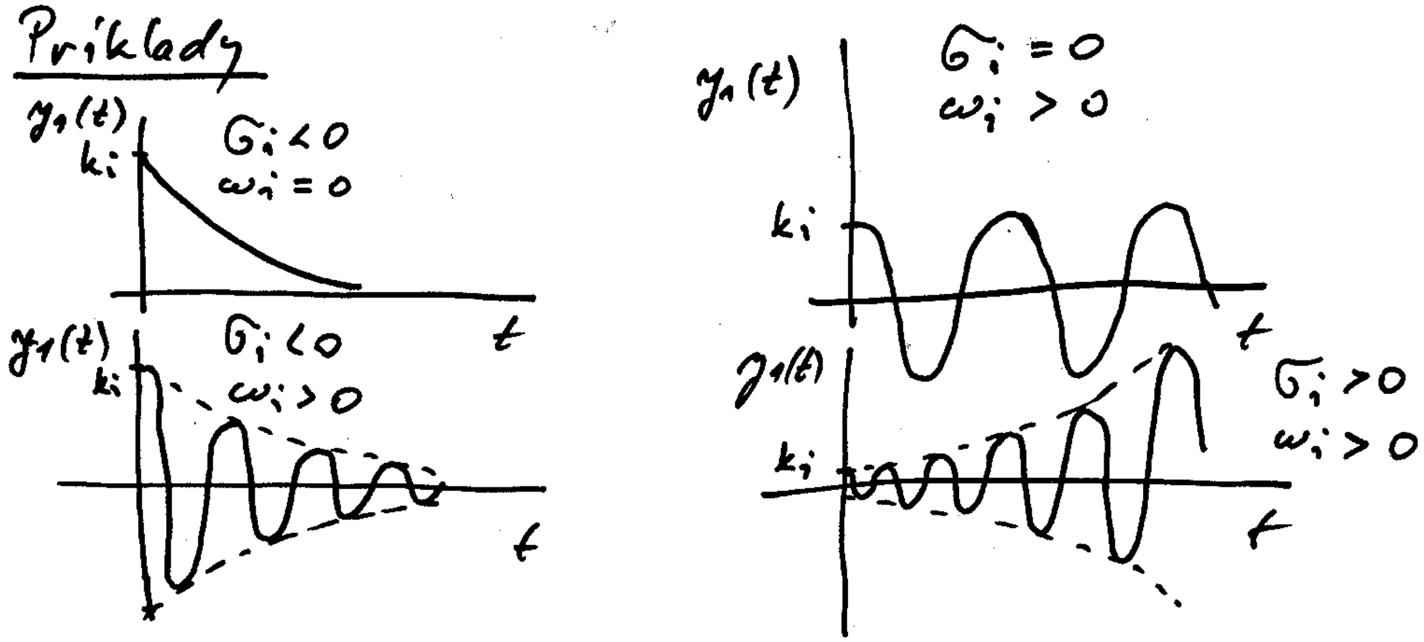
$p_i = \pm j\omega_i$

$$y_1(t) = \sum k_i e^{\pm j\omega_i t}$$

$p_i = \sigma_i + j\omega_i$

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t} = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\sigma_i t} \cdot e^{j\omega_i t} = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\sigma_i t} (\cos\omega_i t + j \sin\omega_i t)$$

Príklady



$y_1(t)$ – zložka prechodného javu

$y_2(t)$ – dominantná zložka (zložka ustáleného stav

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} \; ; \; h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p) \cdot X(p)\} \; ; \; y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega) \cdot X(j\omega)\}$$

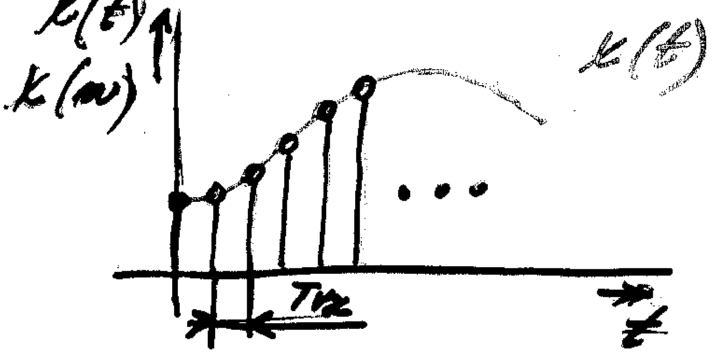
$$x(t) \xrightarrow{} \boxed{\underset{DF}{\mathcal{X}}} \xrightarrow{\hat{x}(t)} \boxed{VZ} \xrightarrow{x(n)} \boxed{KVANT.} \xrightarrow{\hat{x}(n)} \boxed{KÓD.} \xrightarrow{\dot{x}(n)} \boxed{\check{C}.P.} \xrightarrow{\dot{y}(n)} \boxed{DEK.} \xrightarrow{y(n)} \boxed{\underset{RF}{\mathcal{X}}} \xrightarrow{} y(t)$$

f_{vz}

$$x(t) \rightarrow \{x(nT_{vz})\} \doteq \{x(n)\}$$

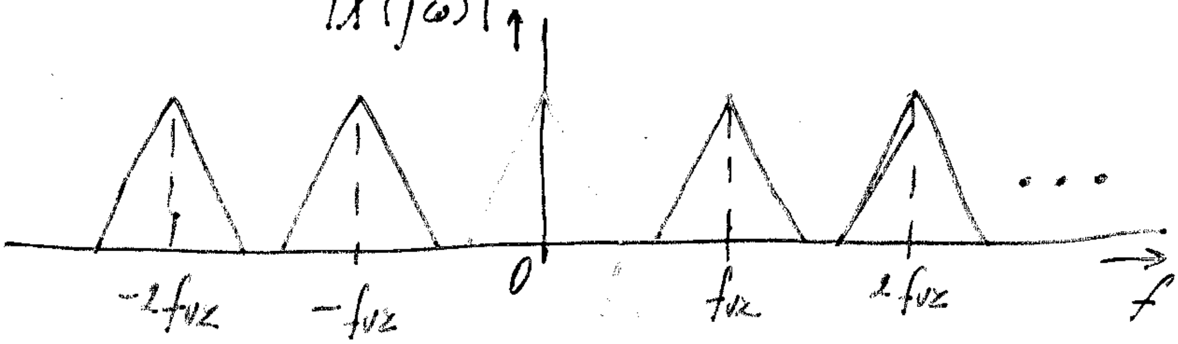
$$\{x(nT_{vz})\} = \{x(0), x(T_{vz}), x(2T_{vz}), x(3T_{vz}), \dots\} =$$

$$= \{x(0), x(1), x(2), x(3), \dots\} = \{x(n)\}$$



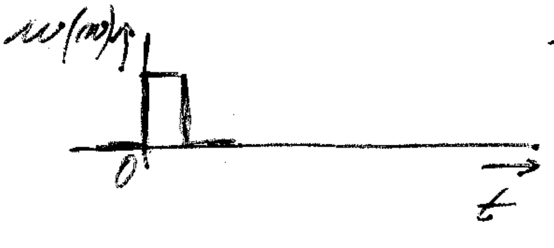
$x(t) \to X(j\omega)$

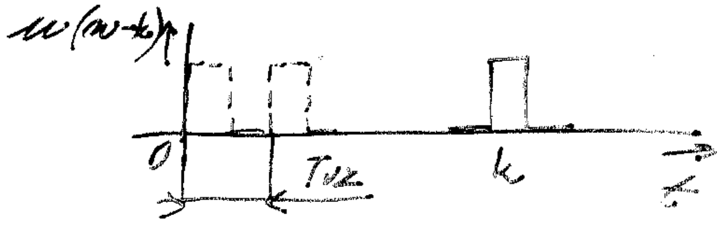
$f_{vz} \geq 2 f_m$



Jednotkový impulz

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pre } n = 0 \\ 0 & \text{pre } n \neq 0 \end{cases}$$





$$u(n-k) = \begin{cases} 1 & \text{pre } n = k \\ 0 & \text{pre } n \neq k \end{cases}$$

NÁZOV: **PREDMET:**

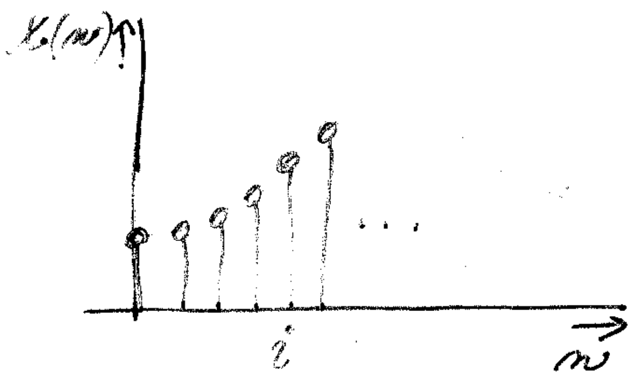
ROČNÍK:

ČÍSLO: **ČÍSLO ZLOŽKY** 159

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, u(n-k) =$$

$$= \underbrace{x(0)\,u(n)}_{0} + \underbrace{x(1)\,u(n-1)}_{0} + \underbrace{x(2)\,u(n-2)}_{0} + \dots +$$

$$\underbrace{+\, x(n)\, \underbrace{u(n-n)}_{1}}_{x(n)} + \dots$$



$$x(i) \cdot u(i-i) = x(i)$$

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_1 y^{(1)} + b_0 y = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} +$$
$$+ \dots + a_1 x^{(1)} + a_0 x$$

<u>Diferenčná rovnica</u>

$$\Delta s(n) = s(n) - s(n-1)$$

NÁZOV: **PREDMET:**

ROČNÍK:

ČÍSLO: **ČÍSLO ZLOŽKY** 160

$$\Delta^2 s(n) = \Delta\{\Delta s(n)\} = \Delta s(n) - \Delta s(n-1) =$$

$$= \{s(n) - s(n-1)\} - \{s(n-1) - s(n-2)\} =$$

$$= s(n) - 2s(n-1) + s(n-2)$$

$$\Delta^3 s(n) = \Delta\{\Delta^2 s(n)\} = \Delta^2 s(n) - \Delta^2 s(n-1) =$$

$$= \{s(n) - 2s(n-1) + s(n-2)\} - \{s(n-1) - 2s(n-2) + s(n-3)\} =$$

$$= s(n) - 3s(n-1) + 3s(n-2) - s(n-3)$$

$$\Delta^m s(n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{2m-k} \binom{m}{k} s(n-k)$$

$$\Delta^N y(n) + B_1 \Delta^{N-1} y(n) + \dots + B_{N-1} \Delta y(n) + B_N y(n) =$$

$$= A_0 \Delta^N x(n) + A_1 \Delta^{N-1} x(n) + \dots + A_{N-1} \Delta x(n) + A_N x(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k)$$

NÁZOV:

PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO:

ČÍSLO ZLOŽKY 162

NIO – (IIR) rekurzívna sústava
sústava s nekonečnou impulzovou
odpoveďou

ak $b_k = 0$ pre $k = 1, 2, 3, \dots, N$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{2} a_k x(n-k) =$$

$$= [a_0, a_1, a_2] \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ x(n-2) \end{bmatrix}$$

$x(n) = u(n)$

$$y(0) = h(0) = [a_0, a_1, a_2] \begin{bmatrix} u(0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a_0$$

$$y(1) = h(1) = [a_0, a_1, a_2] \begin{bmatrix} 0 \\ u(0) \\ 0 \end{bmatrix} = a_1$$

$$y(2) = h(2) = [a_0, a_1, a_2] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u(0) \end{bmatrix} = a_2$$

$\vdots$

$y(k) = h(k) = 0$ pre $k > 2$

NÁZOV:

ČÍSLO:

PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO ZLOŽKY 161

$$y(n) = [a_0, a_1, a_2] \cdot \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ x(n-2) \end{bmatrix} - [b_1, b_2] \begin{bmatrix} y(n-1) \\ y(n-2) \end{bmatrix}$$

$$x(n-1) = x(n-2) = 0$$

$$y(n-1) = y(n-2) = 0$$

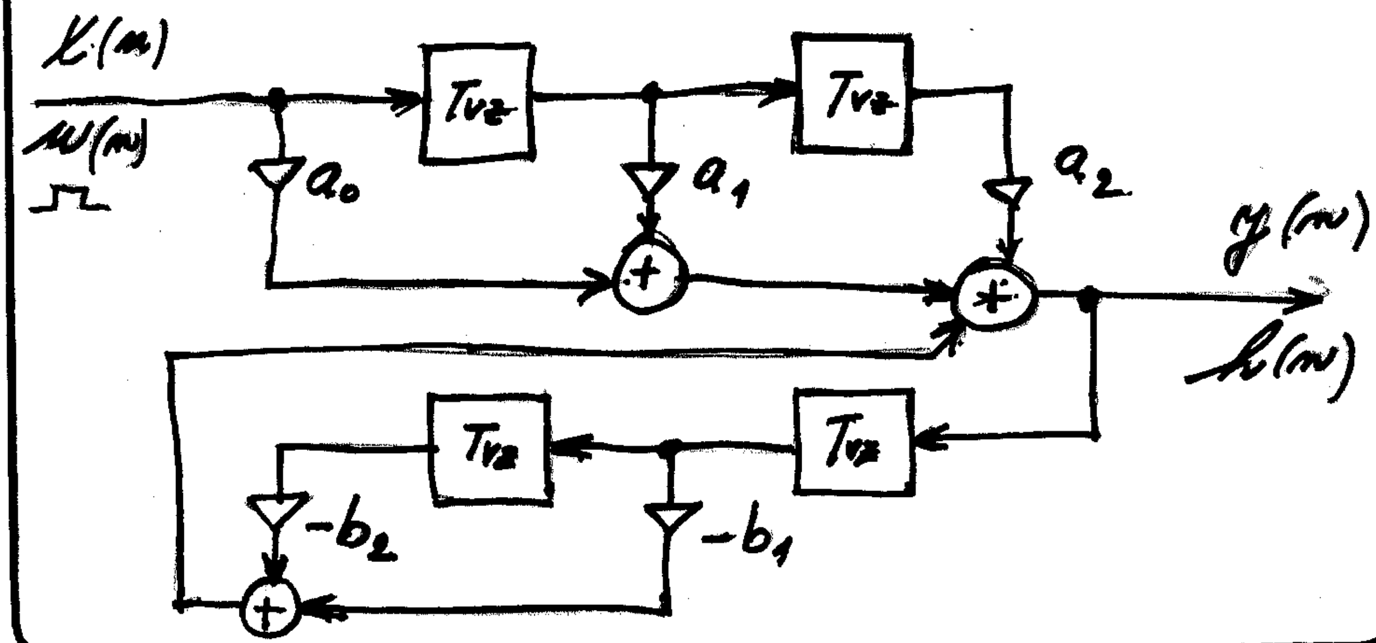
$$x(n) \doteq u(n) \rightarrow y(n) = h(n)$$

$n = 0 \qquad h(0) = a_0$

$n = 1 \qquad h(1) = a_1 - b_1 a_0$

$n = 2 \qquad h(2) = a_2 - b_1(a_1 - b_1 a_0) - b_2 a_0$

$n = 3 \qquad h(3) = -b_1\{a_2 - b_1(a_1 - b_1 a_0) - b_2 a_0\} - b_2(a_1 - b_1 a_0)$



NÁZOV: PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO: ČÍSLO ZLOŽKY 163

$$\underset{u(n)}{x(n)} \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow \underset{h(n)}{y(n)}$$

$$\{h(n)\} = \{h(0), h(1), h(2), \dots\}$$

$$\{x(n)\} = \{x(0), x(1), x(2), \dots\}$$

$n \rightarrow$	0	1	2	3	4	...
$x(0)$	$x(0)h(0)$	$x(0)h(1)$	$x(0)h(2)$	$x(0)h(3)$	$x(0)h(4)$	
$x(1)$	0	$x(1)h(0)$	$x(1)h(1)$	$x(1)h(2)$	$x(1)h(3)$	
$x(2)$	0	0	$x(2)h(0)$	$x(2)h(1)$	$x(2)h(2)$	
$x(3)$	0	0	0	$x(3)h(0)$	$x(3)h(1)$	
$x(4)$	0	0	0	0	$x(4)h(0)$	
$\vdots$						
$y(n)$	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	

$$y(n) = \sum_{k=0}^{D} x(k)\, h(n-k)$$

$D = Max[D_x, D_h]$

D_x – dĺžka $\{x(n)\}$

D_h – dĺžka $\{h(n)\}$

D_y – dĺžka $\{y(n)\}$

$$D_y = D_x + D_h - 1$$

NÁZOV:

PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO:

ČÍSLO ZLOŽKY

Pre sústavy K/O $\Rightarrow$ $h(k) = a_k$

$k = 0, 1, 2, \dots, N$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{D} x(k)\, h(n-k)$$

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Pr.

$\{x(n)\} = \{x(0), x(1), x(2), x(3)\}$

$\{h(n)\} = \{h(0), h(1), h(2)\}$

<table>
<tr><th>n</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td></td>
<td>$x(3)$
$x(2)$
$x(1)$
$x(0)\ h(0)$
$h(1)$
$h(2)$</td>
<td>$x(3)$
$x(2)$
$x(1)\ h(0)$
$x(0)\ h(1)$
$h(2)$</td>
<td>$x(3)$
$x(2)\ h(0)$
$x(1)\ h(1)$
$x(0)\ h(2)$</td>
<td>$x(3)\ h(0)$
$x(2)\ h(1)$
$x(1)\ h(2)$
$x(0)$</td>
<td>$h(0)$
$x(3)\ h(1)$
$x(2)\ h(2)$
$x(1)$
$x(0)$</td>
<td>$h(0)$
$h(1)$
$x(3)\ h(2)$
$x(2)$
$x(1)$
$x(0)$</td></tr>
<tr><td>y(n)</td>
<td>$x(0)\,h(0)$</td>
<td>$x(1)\,h(0)+$
$+x(0)\,h(1)$</td>
<td>$x(2)\,h(0)+$
$+x(1)\,h(1)+$
$+x(0)\,h(2)$</td>
<td>$x(3)\,h(0)+$
$+x(2)\,h(1)+$
$+x(1)\,h(2)$</td>
<td>$x(3)\,h(1)+$
$+x(2)\,h(2)$</td>
<td>$x(3)\,h(2)$</td></tr>
</table>

NÁZOV: PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO: ČÍSLO ZLOŽKY

$$D_y = D_x + D_h - 1$$

n	0	1	2	3	4	...
$x(0)$	$a_0 x(0)$	$a_1 x(0)$	$a_2 x(0)$	$a_3 x(0)$	$a_4 x(0)$	...
$x(1)$	0	$a_0 x(1)$	$a_1 x(1)$	$a_2 x(1)$	$a_3 x(1)$	...
$x(2)$	0	0	$a_0 x(2)$	$a_1 x(2)$	$a_2 x(2)$	...
$x(3)$	0	0	0	$a_0 x(3)$	$a_1 x(3)$	...
$x(4)$	0	0	0	0	$a_0 x(4)$	...
⋮						
$y(n)$	Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_3	Σ_4	...

Pomalá konvolúcia

<u>Operácie</u>

$D_x \cdot D_h - 1$ – počet súčinov

$2 D_x \cdot D_h$ – celkový počet operácií

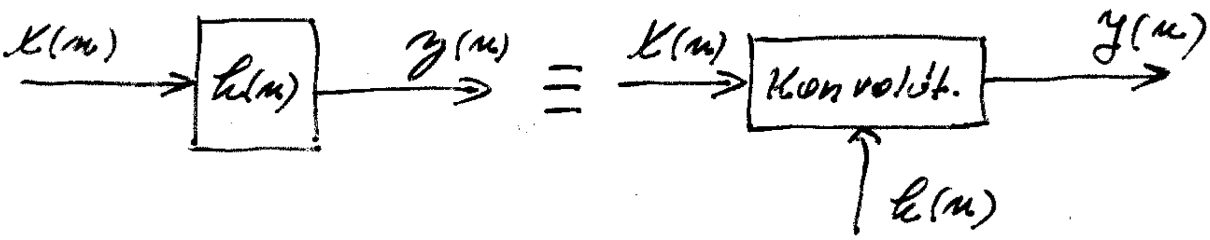
$D_x = D_h = N \Rightarrow 2N^2$ operácií

NÁZOV: PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO: ČÍSLO ZLOŽKY

N	Počet operácií
16	512
32	2 048
64	8 192
128	32 768
256	131 072
512	524 288
1024	2 097 152



a)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k)$$

b)

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

NÁZOV:

PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO:

ČÍSLO ZLOŽKY 5

Z - transformácia

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\,u(n-k) = x(0)\,u(n) + x(1)\,u(n-1) + x(2)\,u(n-2) + \cdots$$

$$u(n-k) \rightarrow z^{-k}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\,z^{-n} = x(0) + x(1)\,z^{-1} + x(2)\,z^{-2} + \cdots$$

$x(k) = 0$ pre $k < 0$

$x(n) \longleftrightarrow X(z)$ Z - transform.

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$ F - transform.

$x(t) \longleftrightarrow X(p)$ L - transform.

—— ∘ ——

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)\,z^{-n} = 1$$

NÁZOV: **PREDMET:**

ROČNÍK:

ČÍSLO: **ČÍSLO ZLOŽKY**

$$\mathcal{D}_x \doteq N$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots + x(N-1) z^{-(N-1)}$$

pre $u(n-k)$

$$\mathcal{Z}\{u(n-k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u(n-k) z^{-n} = z^{-k}$$

<u>Základné vlastnosti Z-transf.</u>

1. $A(z) = \mathcal{Z}\{a(n)\}$; $B(z) = \mathcal{Z}\{b(n)\}$

$$\mathcal{Z}\{a(n) + b(n)\} = A(z) + B(z)$$

2. Posunutie o L-krokov v časovej obl.

$$a(n-L) = \sum_{k=0}^{\infty} a(k) u(n-L-k)$$

$$\mathcal{Z}\{a(n-L)\} = z^{-L} A(z)$$

3.

$$a \cdot f(n) \longleftrightarrow a F(z)$$

NÁZOV:

PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO:

ČÍSLO ZLOŽKY

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k)$$

$$x(n) \Longleftrightarrow X(z)$$

$$y(n) \Longleftrightarrow Y(z)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, N$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \; ; \quad Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n}$$

$$\mathcal{Z}\{x(n-k)\} = z^{-k} X(z)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^{N} b_k Y(z) z^{-k} =$$

$$= X(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} - Y(z) \sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}$$

$$Y(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}\right) = X(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}}$$

NÁZOV: PREDMET:

ROČNÍK:

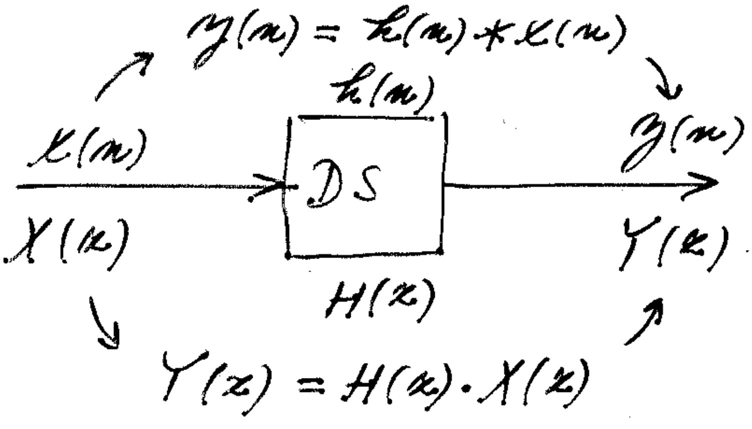
ČÍSLO: ČÍSLO ZLOŽKY

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}} =$$

$$= \frac{a_0 z^{N} + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N}{z^{N} + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N}$$

$$H(z) \longleftrightarrow h(n)$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$



$$H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} = h(0) + h(1) z^{-1} +$$

$$+ h(2) z^{-2} + \dots$$

NÁZOV: **PREDMET:**

ROČNÍK:

ČÍSLO: **ČÍSLO ZLOŽKY** 175 11

S.S.

$$H(p)\Big|_{p=j\omega} = A(\omega)\, e^{-j\varphi(\omega)}$$

D.S.

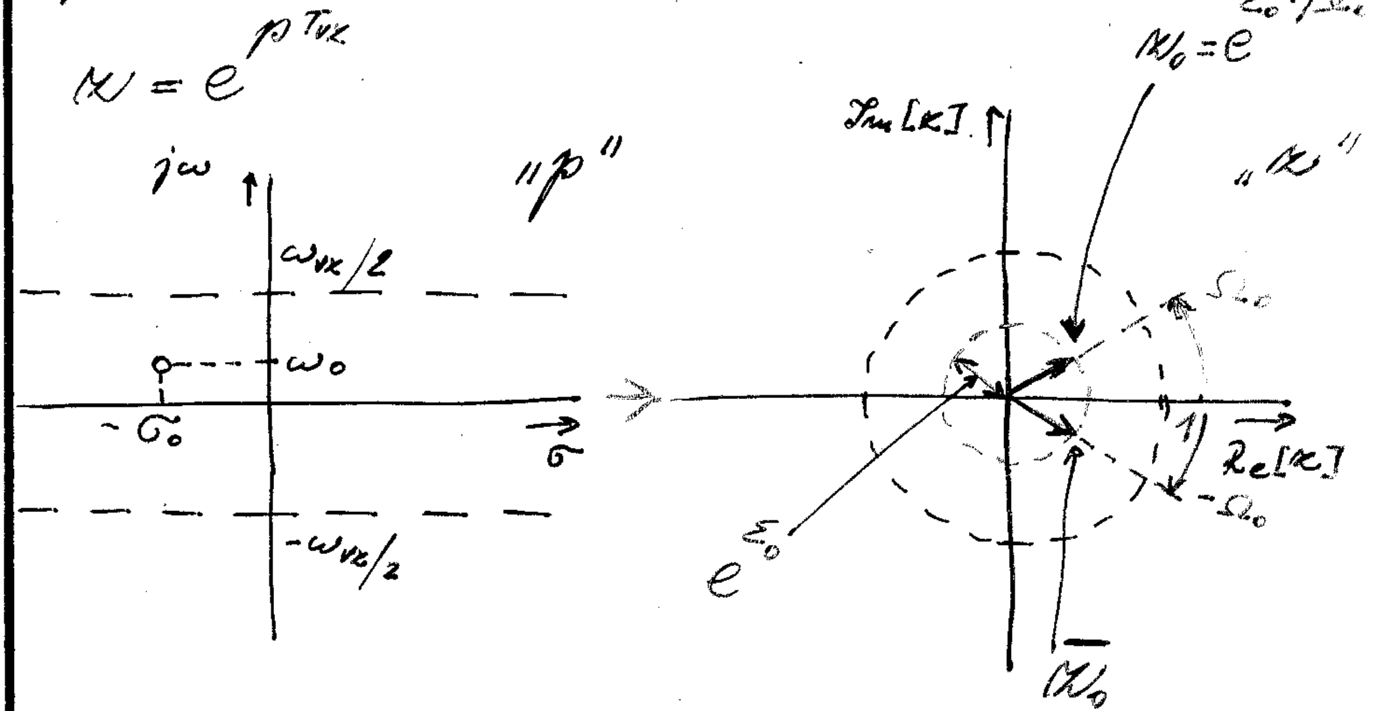
$$H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(e^{j\Omega})}{D(e^{j\Omega})} = A(\Omega)\, e^{-j\varphi(\Omega)}$$

$$p\,T_{vz} = \frac{p}{f_{vz}} = \frac{\sigma + j\omega}{f_{vz}} = \frac{\sigma}{f_{vz}} + j\frac{\omega}{f_{vz}} = \Sigma + j\Omega$$

—— ∘ ——

$$p_0 = \sigma_0 + j\omega_0 \rightarrow z = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)T_{vz}} = e^{\frac{\sigma_0}{f_{vz}} + j2\pi\frac{f_0}{f_{vz}}} = e^{\Sigma_0 + j\Omega_0}$$

$$z = e^{p\,T_{vz}}$$



NÁZOV: PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO: ČÍSLO ZLOŽKY

9

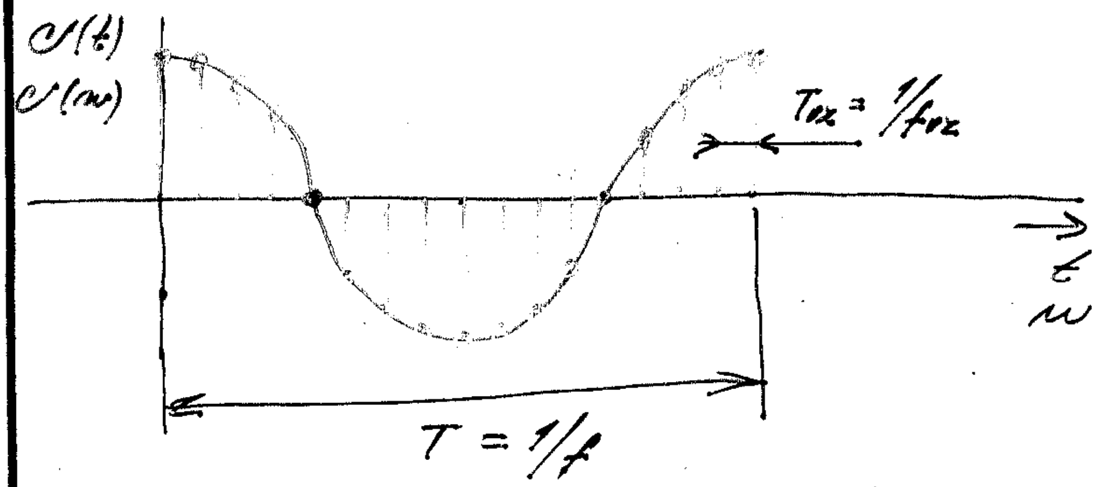
$$z = e^{j\omega T_{vz}}$$

$$T_{vz} = 1/f_{vz}$$

$$z = e^{j2\pi \frac{f}{f_{vz}}} = e^{j2\pi\phi} = e^{j\Omega}$$

ϕ – pomerový kmitočet

$$c(t) = \cos(2\pi f t)$$



$$c(n) = \cos(2\pi f n T_{vz}) = \cos\left(2\pi \frac{f}{f_{vz}} n\right) = \cos(n\Omega)$$

$$2\pi f n T_{vz} = 2\pi \frac{f}{f_{vz}} n = 2\pi\phi n$$

NÁZOV:

PREDMET:

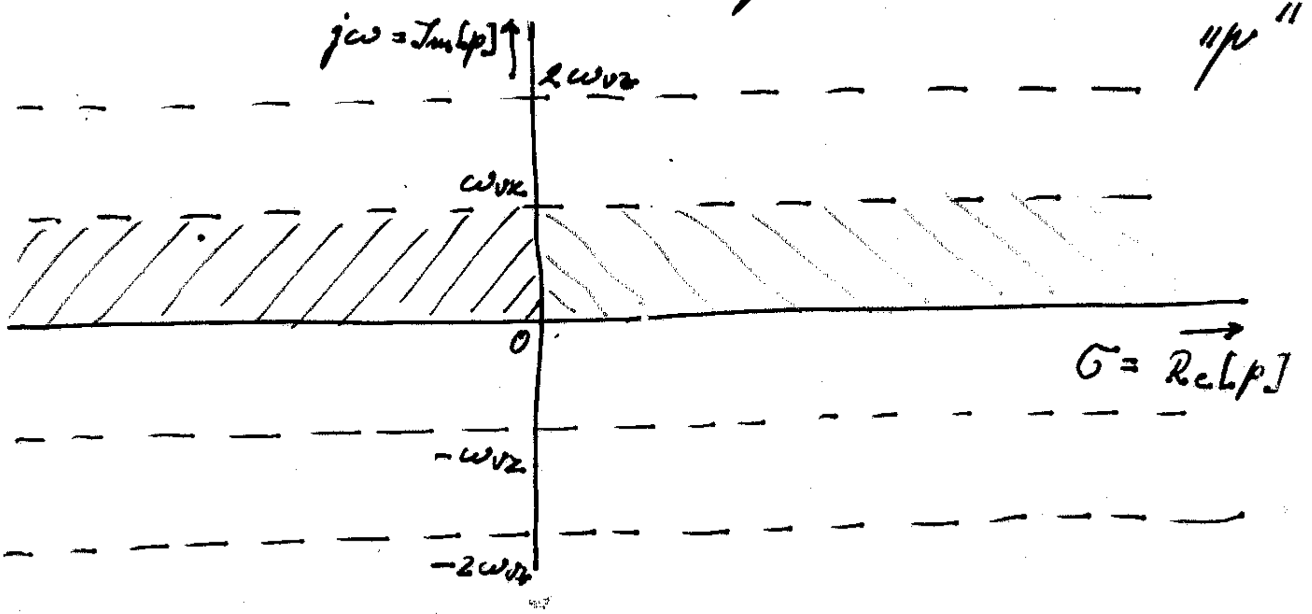
ROČNÍK:

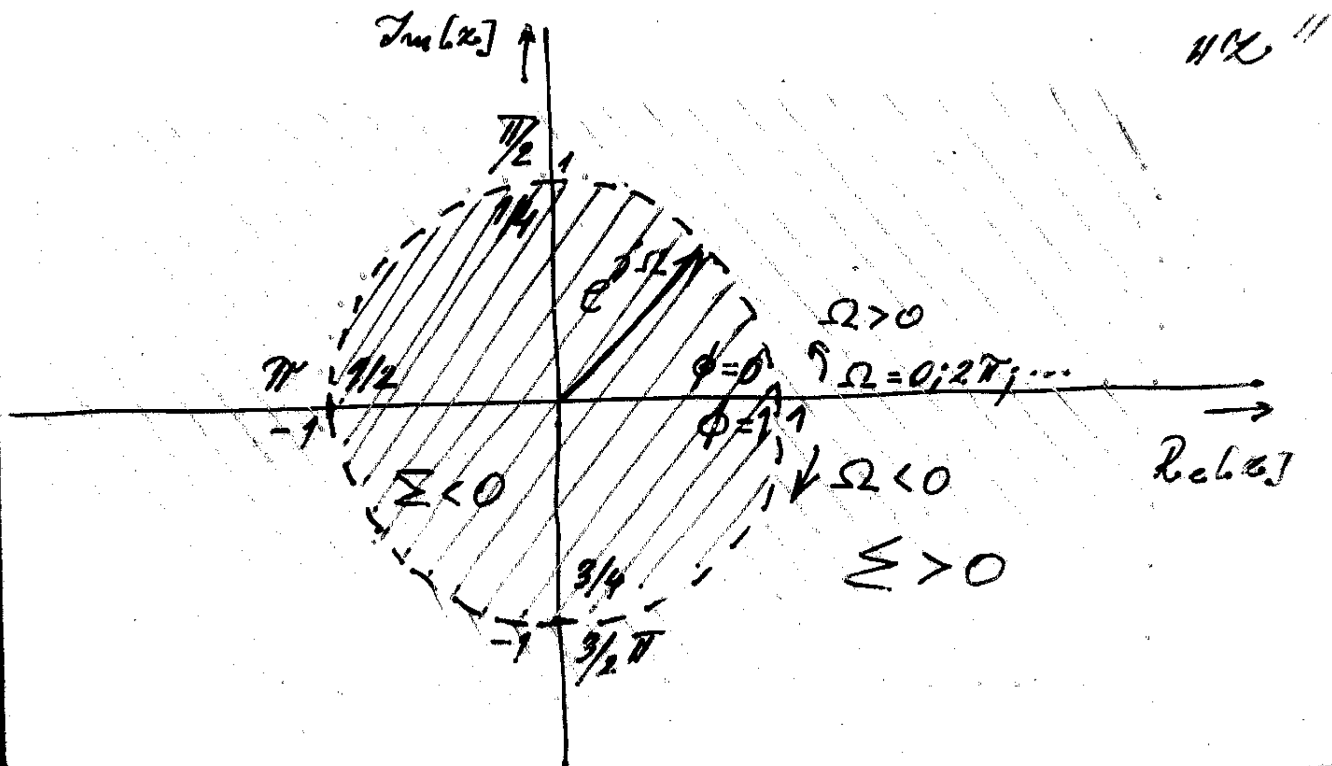
ČÍSLO:

ČÍSLO ZLOŽKY

$$z \longrightarrow e^{j2\pi f T_{vz}} = e^{j\Omega}$$

$$z^{-1} \longrightarrow e^{-pt} \quad \text{v „p" rovine}$$





NÁZOV:

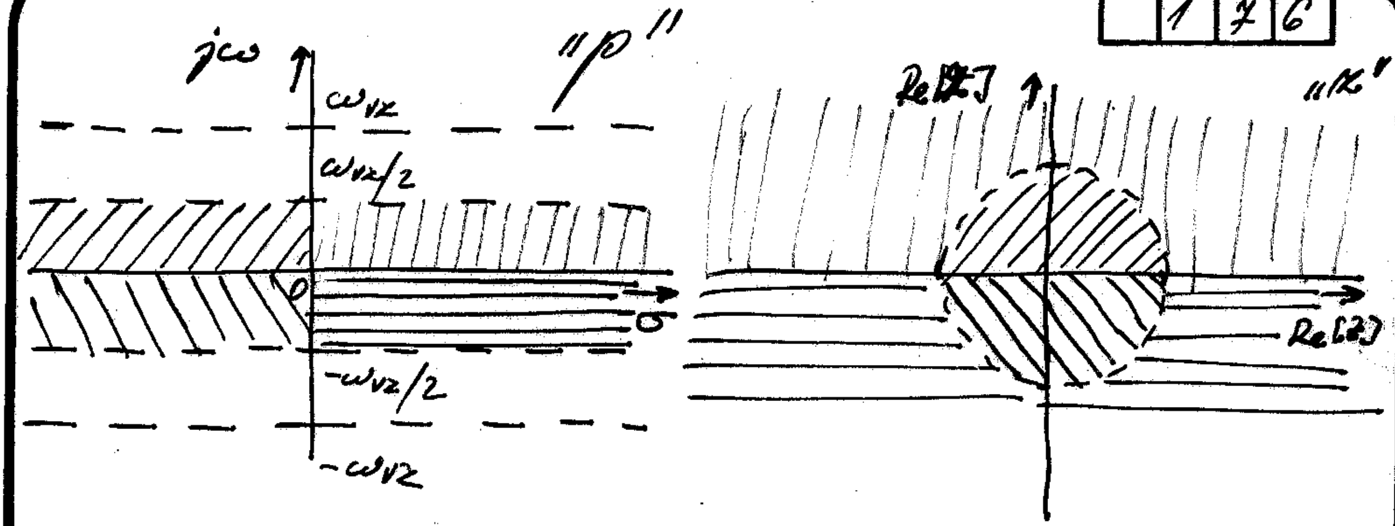
PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO:

ČÍSLO ZLOŽKY

176



$$\phi = \frac{f}{f_{vz}} \; ; \; \Omega = 2\pi\phi$$

$$\langle 0; f_{vz} \rangle \rightarrow \langle 0; 1 \rangle \rightarrow \langle 0; 2\pi \rangle$$

f $\qquad \phi \qquad \Omega$

NÁZOV:

ČÍSLO:

PREDMET:

ROČNÍK:

ČÍSLO ZLOŽKY | | 1 | 7 | 7 |

Stabilita DS

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$$

$$\mathcal{Z}\{h(n)\} = H(z) = \underbrace{a_0 + R z^{-1} - b_1 R z^{-2} + b_1^2 R z^{-3} - b_1^3 R z^{-4}}_{} + \dots$$

$$|b_1| < 1$$

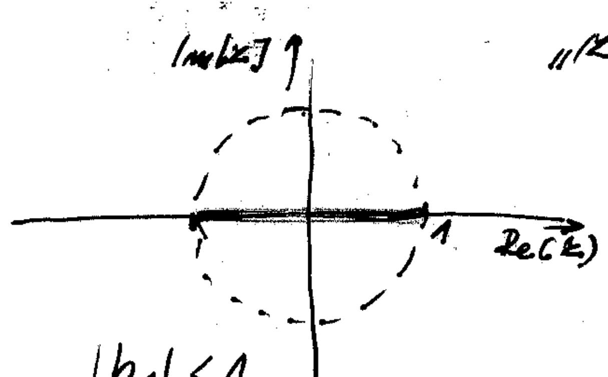
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} b_k z^{-k}} = K \frac{\prod_{k=1}^{N} (1 - z_{0k} z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - z_{xk} z^{-1})}$$

$$p - p_\nu \rightarrow z - z_\nu = z(1 - z_\nu z^{-1})$$

$$1 + b_1 z_\nu^{-1} = 0$$

$$z_\nu^{-1} = -1/b_1$$

$$z_\nu = -b_1$$



$$|b_1| < 1$$